arXiv:2602.22757v1 [math.CO] 26 Feb 2026

稀疏图通常能由其谱唯一确定吗?

Nils Van de Berg◇ Alexander Van Werde*

摘要。我们研究稀疏图是否通常能由其邻接谱确定到同构。我们的首个结果表明，当平均度足够小时，Erdős–Rényi 图的巨型分量存在余谱图。证明依赖于某个特定悬挂树的存在，并结合 Schwenk 的一种交换树的方法来构造同谱图。

悬挂树似乎可能是唯一的实质性障碍，也就是说，如果通过考察 2-核将这些悬挂树剪除，那么巨型分量就有望以高概率由谱确定。本文的大部分内容都致力于提供支持这一观点的理论和数值证据。关于这一方向，我们的主要定理证明，局部切换方法无法使 2-核产生余谱图。我们还讨论固定层级下的 R-余谱性和有理余谱性。

MSC2020 学科分类：05C50,05C80, 15B52, 60B20
关键词：余谱图，巨型分量，切换方法，广义余谱，2-核

1. 引言

谱图论中的一个基本问题是，邻接矩阵的特征值能否在同构意义下唯一确定给定的图。对于某些特殊类别，例如环或完全图的不交并，这一结论已得到证明；参见例如 [22]。反过来，也存在谱相同但不同构的图实例，称为同谱图。

人们或许会想知道这类实例是普遍现象还是特殊情况。Schwenk 于 1973 年的一项重要结果证明，几乎所有树都存在一个同谱图 [20],，由此表明余谱现象在树中很常见。这自然也引出了一个问题：对于一般图，情况可能如何？事实证明，这是一个颇具挑战性的问题。很长一段时间里，答案的预期方向甚至都不明确。例如，Godsil 在其 1993 年的著作中写道：“几乎所有图是否都由其特征多项式唯一确定，这仍是一个悬而未决的问题。我们甚至不清楚应该试图证明这一点，还是予以否定。”[12, 第73]页。

关于答案方向的证据来自 Haemers 和 Spence 对含有$n \leq 11$ 个顶点的图进行的穷尽搜索 [16] 。他们的搜索表明，很大一部分余谱图源于一种特定的局部构造，这种构造称为 *Godsil–McKay* 切换 [14]。可以证明，这种特定构造产生的图所占比例渐近趋于零，因此人们相信 Schwenk 结果的反面可能成立。*Haemers* 猜想 断言，几乎所有图都由其谱唯一确定 [15, 22]。尽管证明仍遥不可及，但 Wang 和 Wang 最近通过蒙特卡罗抽样发现了更多证据：他们估计，如果同时给出补图的谱，那么 50 个顶点的图中至少有 99% 可由其谱唯一确定 [26]。

◇ 荷兰埃因霍温理工大学
* 德国明斯特大学电子邮箱地址：n.p.v.d.berg@tue.nl, a.van.werde@uni-muenster.de。

用概率语言来说，Haemers 猜想意味着，在$G(n,\ p)$ 模型中，边概率为 $p = 1/2$ 的 Erdős–Rényi 图以趋近于一的概率由其谱唯一确定 $n \to \infty$。这样的图相当稠密，因为其平均度与 n呈线性关系。因此，Haemers 猜想可以解释为：稠密图通常由其谱唯一确定。本文旨在确定稀疏情形下通常会出现什么情况；为此，我们考察在 $p = \lambda/n$ 且 $1 < \lambda \ll n$的条件下的巨型分量。

我们在定理 1.1 中发现，当平均度 λ 足够小时，巨型分量是余谱的。这也意味着，当 λ较小时，完整图也是余谱的，因为只要非连通图的任一连通分量是余谱的，该图就也是余谱的。巨型分量余谱性的证明依赖于特定的悬挂树，它们构成谱刻画的障碍。本文随后大部分内容将探讨不含悬挂树的稀疏图通常具有怎样的性质；为此，我们考察巨型分量的 2-核。我们的主要结果是定理 1.7，它表明所有可能的局部切换方法在 2-核上都以失败告终。具体而言，这排除了有界规模的 Godsil– McKay 切换，但这一结论的普适性远不止于该特定方法。我们将在第 1.3 节讨论支持这一猜想的其他理论证据：2-核应当由其谱刻画。（数值证据见第 4 节。）本文其余部分的结构概述见第 1.4 节。

1.1. 巨型分量是余谱的。 回顾一下，两个非同构图若具有相同的邻接谱，则称为余谱 的。若两个余谱图的补图也是余谱的，则称它们为 R-余谱 的。这一推广可追溯至 Johnson 与 Newman 在 1980 年的工作 [17]，其中建立了多种等价表述。除其本身的独立意义外，该概念对本文的意义在于，它将使数值研究成为可能。

定理 1.1. 考虑一个 $G(n,p)$ 随机图，其参数为 $p = \lambda/n$，且当 $n \to \infty$ 时，$\lambda = \lambda_n > 1$ 始终与 1 保持正距离。此外，考虑任意序列 $h(n)$，满足 $h(n) \to \infty$。则，

(1) 最大连通分量 C_{giant} 以趋于 *1* 的概率存在一个同谱图，如果

$$\lambda \le \ln(n)/8 + \ln(\ln(n)) - h(n). \tag{1.1}$$

(2) 最大连通分量 C_{giant} 以趋于 *1* 的概率存在一个 R-余谱同谱图，如果

$$\lambda \le \ln(n)/10 + \ln(\ln(n)) - h(n). \tag{1.2}$$

证明见第 2 节。其思路如图 1 所示，具体如下。Schwenk [20] 指出，存在具有 9 个节点的根树 T_1，T_2 使得对于任意图G，将 T_1 在一个顶点处与 G 连接所得的图，与改为将 T_2 在该顶点处连接所得的图余谱。因此，任何带有 T_1 悬挂副本的图都有一个同谱图。定理 1.1 的证明主要是确定在什么范围的 λ 中，巨型分量里会存在 T_1 的悬挂副本；式 (1.1) 中的界正是由此得出的。条件 (1.2) 的推导类似，所用的是具有 11 个节点、能够产生 R-余谱性的树，这一结果归功于 Godsil 和 McKay [13]。

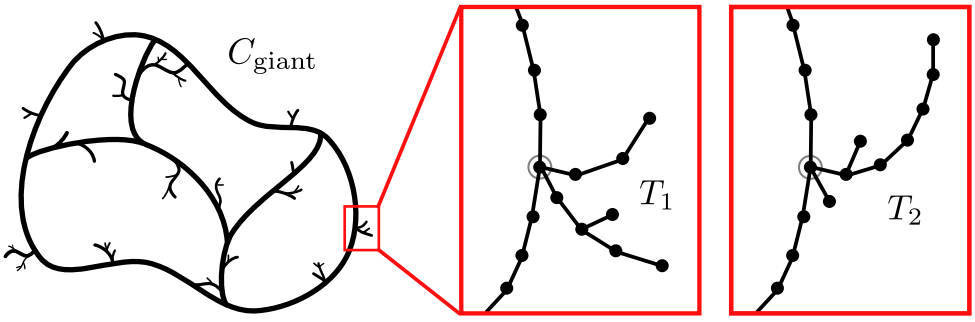

图 1. 巨型分量可分解为由圈组成的骨架，且某些节点上附有悬挂树。（此类精确结果见 [8]。）要证明它是余谱的，只需在这些悬挂树中找到一棵特定的有根树 T_1。随后，用另一棵不同的有根树 T_2替换 T_1，即可得到一个非同构余谱图。

交换悬挂树也可用于推导余谱图数量的下界。以下结果展示了这一原理：当平均度固定时，存在指数多个余谱图：

命题 1.2。对于每个固定的 $\lambda > 1$，都存在 $c > 0$，使得 C_{giant} 以趋近于一的概率拥有至少 $\exp(cn)$个非同构的R-余谱同谱图。

此处以及后续所有结果中，均默认使用与定理 1.1 相同的记号。也就是说，C_{giant} 指的是一个 $G(n,p)$ 图中满足 $p = \lambda/n$ 的最大连通分量。

证明命题 1.2 时需要谨慎处理的主要问题是，图的自同构可能导致对悬挂树进行不同的交换，却得到同构图。不过，这终究无关紧要，因为可以利用 Verbitsky 和 Zhukovskii 的一项结果来控制具有非平凡轨道的顶点数 [23]。详情见第 2 节。

1.2. **悬挂树是唯一的障碍吗？** 定理 1.1 和命题 1.2 表明，稀疏图通常具有余谱性，是因为它们包含悬挂树。我们想提出，在这种情形下，这可能是余谱性的唯一原因。一种精确的表述方式是考虑 2-核，记作 $\text{Core}_2(C_{\text{giant}})$，它是通过移除所有悬挂树得到的图。更一般地，$k$-核 对于 $k \geq 2$ 而言，是通过反复移除所有度为 $< k$ 的顶点后剩下的子图。

猜想 1.3。对于任意在 $n \to \infty$ 时仍与一保持正距离的 $1 < \lambda \leq n/2$，巨型分量的2-核以趋近于一的概率由其谱确定。

一种密切相关的理念认为，局部结构应当是谱性质的典型障碍；这一理念在离散随机矩阵的秩研究中发挥了关键作用 [3, 4, 5, 21]。Feber、Glasgow、Kwan、Sah 和 Sawhney 的工作与此尤其相关 [10, 11], ：他们研究了平均度为常数时 Erdős–Rényi 图的 k-核。2-核在该理论中是一个边界情形，因为此时秩的局部依赖仍以非零概率出现，而 k-核在 $k \geq 3$ 时则确保所有局部依赖都被消除。相应地，研究 [10] 表明，对于$k \geq 3$，k-核的邻接矩阵是非奇异的；而 [11] 则表明，2-核以严格介于 0 和 1 之间的概率是奇异的。

鉴于 2-核仍然允许导致奇异性的局部障碍，且其发生概率不趋于零，人们或许会想，余谱性是否也存在类似问题。除了交换待处理的树之外，确实还有其他方法可以生成余谱图，这些方法依赖于对一小部分节点之间的连接进行切换。正如引言中所提到的，人们认为 Godsil–McKay 切换 [14] 是 Haemers 猜想的稠密情形下大量余谱图的成因。此外，也已知 Abiad–Haemers 切换 [1]或 *Wang–Qiu–Hu* 切换 [25] 等其他例子。Abiad、Van de Berg 和 Simoens [2]最近分析了使用此类方法可以生成的余谱图数量。基于他们的统一框架，我们考虑如下局部切换概念：

定义 1.4. 固定一个整数 $m \geq 1$ 和一个有 $n \geq m$ 个顶点的图 G。若存在对图 G 和H的顶点进行排序的方法，使得它们的邻接矩阵满足 $A_H = (Q \oplus I_{n-m})^T A_G (Q \oplus I_{n-m})$，其中 Q 是一个非置换的正交矩阵 $m \times m$，则称图 H 是通过一次 大小为 $\leq m$ 的切换得到的。这里，I_{n-m} 是单位矩阵。

例 1.5 (Godsil–McKay 切换 [14])。假设 $m = 2k$ 是偶数。设 G有一组顶点 $X = \{x_1、\ldots\ldots、x_m\}$，使得导出子图 $G[X]$ 是正则的，并且每个 $v \notin X$ 在 X中要么有 0、k个邻点，要么有 $2k$个邻点。那么，通过对每个在 X中恰有 k 个邻点的 $v \notin X$ 交换其与 X 的邻接关系，使其仅与 X中的其他 k 个顶点相邻，即可得到一个与 G余谱的图。相应的正交矩阵为

$$Q = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} J_k - kI_k & J_k \\ J_k & J_k - kI_k \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

其中 J_k $k \times k$ 全 1 矩阵。需要指出的是，有时切换所构造出的图可能与 G同构。

例 1.6 （交换悬挂图）。考虑余谱图 H_1, H_2，它们有 $m+1$ 个顶点，并且存在 $x_1 \in H_1$ 和 $x_2 \in H_2$，使得 $H_1 \setminus \{x_1\}$ 与 $H_2 \setminus \{x_2\}$ 也互为余谱图。那么，对于任意图 G，在某个顶点处添加一个 x_1-根的 H_1 有根副本，所得图 $G \cdot H_1$ 与改为在该顶点处添加 H_2 所得的图 $G \cdot H_2$ 互为余谱图；例如参见 [12, 第 59 页和第 65] 页。事实上，Farrugia [9, 定理 10] 的一个结果给出了一个 $m \times m$ 正交矩阵 Q，满足

$$Q^T A_1 Q = A_2 \quad \text{and } Q^T v_1 = v_2, \tag{1.4}$$

其中，A_i 是 $H_i \setminus \{x_i\}$ 的邻接矩阵，$v_i \in \{0, 1\}^{H_i \setminus \{x_i\}}$ 是 x_i 在 H_i 中的邻点指示向量。由此可知，$G \cdot H_1$ 与 $G \cdot H_2$ 的余谱性可以通过对 $G \cdot H_1$ 应用大小为 $\le m$ 的切换方法来实现。特别地，这使得我们能够将第 1.1 节中对 [13, 20] 中特定悬挂树的交换解释为一种切换方法。

注意，两个对称矩阵具有相同的谱，当且仅当它们可以通过一个正交矩阵相互变换。由此可知，两个图是余谱的，当且仅当存在一种将它们联系起来的切换，但切换的大小可能任意大。然而，大小为 m 的切换只会修改 G 中大小为 m 的子图，以及连接该子图与其补图的边。因此，切换的大小提供了一种量化方式，用于判断余谱性是由于局部原因产生的，还是需要大规模图结构中的全局协同。下面的定理 1.7表明，这种局部障碍不会在 2-核中产生余谱性，从而为猜想 1.3提供了证据。

定理 1.7. 假设当 $n \to \infty$时，$\lambda > 1$ 始终与 *1* 保持正距离。固定某个整数$m \ge 1$，并假设 $\lambda = o(n^{1/(2m+2)})$。那么，随着概率趋于 *1*，每个通过大小至多为 m 的切换从巨型分量的2-核得到的图 H都与之同构。也就是说，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Core}_2(C_{\text{giant}}) \text{ admits a switching of size } \le m \text{，可得到一个非同构图}) = 0.$$

定理 1.7 的证明见第 3 节。我们利用这样一个事实：在最小度为 2 的连通图中，只有存在一些小圈时才能进行切换。2-核中这样的小圈并不多，但仍可能存在少数几个。因此，切换仍有可能适用。我们证明，只要圈彼此之间没有靠得太近，切换所得的图就与原图同构；见图 2。这里的假设 $\lambda = o(n^{1/(2m+2)})$用于排除两个圈相交的情况。

为证明当切换不作用于连通圈上时，切换会得到同构图，我们利用了切换方法也会在某些子图上产生余谱对这一事实。我们利用圈由其谱决定这一性质，以及人们对其子图余谱性的认识，来证明这些导出余谱子图必然同构。主要困难在于证明这些导出子图之间的同构也能扩展为整个 2-核之间的同构；见引理 3.10 的证明。

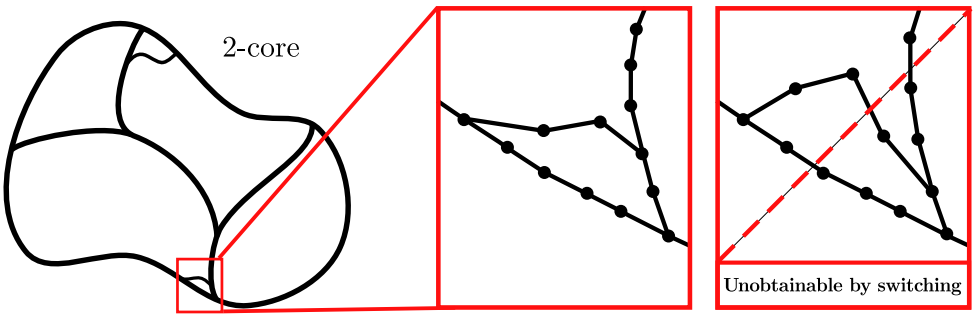

图 2. 巨型分量的 2-核以非零概率包含若干小圈。切换方法有可能作用于这样的一个环，但我们在定理 1.1 的证明中表明，不可能以这种方式得到非同构图。

这种新的证明策略对于稀疏连通图（最小度为 2）以外的其他图类也具有潜力。具体而言，该策略的优势在于，我们只需理解能够作为小子图出现的特殊图类的余谱性，这正如我们在第3.2.1节中所做的那样。随后，可以利用这种理解，为切换方法构造全局同构。一个潜在的瓶颈是，即使对于特殊的图类，理解其余谱性也可能并非易事。完全图、完全二部图以及谱半径至多为 2 的图，是一些相关性质相对较为明确的图类，参见例如 [22, 第 5] 节和 [6]。

1.3. **进一步的理论证据和开放问题**。 鉴于 Haemers 猜想是猜想 1.3 的一个特例，目前看来要证明猜想 1.3 难以实现。不过，研究其他松弛或许能让我们对稀疏情形有更多认识。

例如，能否证明，对 2-核进行任何仅改变有限条边的修改，都不会产生一个与原图不同构的余谱图？定理 1.7 并不能推出这一点。（例如，因为切换必须将修改后的子图替换为一个与之余谱的图。）从概念上说，两者的差异大致在于，切换只允许那些必然保持余谱性的修改，也就是说，余谱性的原因必须是局部的；而任意修改边也可能因全局巧合而产生余谱图。

经典余谱性的另一种松弛方式，是要求正交矩阵的元素为有理数。若存在一个元素为有理数的正交矩阵 Q，使得 $A_H = Q^T A_G Q$，则两个图 G、H 称为通过有理矩阵余谱。满足 $\ell Q \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ 的最小整数 $\ell \geq 1$ 称为 Q 的层级。这一有理数概念与第 1.1 节中的 R-余谱性有关。事实上，已知对于可控图，R-余谱性等价于存在一个有理正交矩阵 Q，使得 $A_G = Q^T A_G Q$ 且 $Qe = e$，其中 $e = (1, \ldots\ldots, 1)^T$ 是全1向量；这一结果归功于 Wang和Xu [27, 引理 24]，。此外，O'Rourke和Touri [19, 定理 14]证明，对于 $G(n,\ p)$ 模型中的稠密 Erdős–Rényi 图，当 $p = 1/2$ 时，它们是可控图。

Wang 和 Zhao [28] 最近证明，在边概率固定为 $p \in (0,1)$ 的稠密情形中，固定层级 ℓ 上的余谱性以高概率不会出现。事实上，检视 [28] 中的证明可知，这些结果也可推广到具有对数平均度的更稀疏情形：

定理 1.8 (Wang 和 Zhao [28]). 对每一个固定的 $\ell \geq 2$，存在常数 $C > 0$，使得对满足 $p = \lambda/n$ 且若 $C\ln(n) \leq \lambda \leq n/2$ 的 *Erdős–Rényi* 随机图，下列结论成立：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(G(n,p) \text{ is cospectral through a rational matrix at level } \ell\big) = 0. \tag{1.5}$$

证明。 在 [28, 式28] 中已证明，对所有充分大的 n，一个 $G(n,p)$ 图具有层级为 ℓ' 且带有 $\ell' \mid \ell$ 的同谱图的概率至多为 $\epsilon_n^2/(1-\epsilon_n)$，其中 $\epsilon_n \leq n^{c_1} \hat{}\, p^{c_2 n}$，某些依赖于 ℓ 的常数 $c_1, c_2 > 0$，并且 $\hat{}\, p := \max\{p, 1-p\}$。利用 $\hat{}\, p = 1 - \lambda/n$，只要在下界 $C\ln(n) \leq \lambda$ 中将常数 C 取得充分大，即可保证 $\epsilon_n \to 0$。 □

条件 $\ell \geq 2$ 对于排除如下平凡情形是必要的：若 $\ell = 1$，则 Q 是一个置换矩阵。因此，定理 1.8 表明，若平均度充分大，则不可能存在分母较小的非平凡有理余谱性，从而为猜想 1.3 提供了证据。事实上，若平均度呈对数形式且常数较大，则巨型分量及其 2-核都与完整图重合。这补充了定理 1.7 所考虑的 λ 充分小的情形。

进一步回顾，定理 1.1 表明，若平均度呈对数形式且常数显式给定，则巨型分量具有余谱性。结合定理 1.8，这表明对数平均度是稀疏性的一个临界尺度，在此尺度上，图从几乎总是余谱过渡到几乎从不余谱。人们不禁要问，一旦平均度分别超过 (1.1) 或 (1.2) 中的值，巨型分量的余谱性或 R-余谱性是否会出现尖锐的相变。若能找到证据以澄清其中出现的常数是否应当是尖锐的，这将是有趣的未来工作。

1.4. **概要**。 定理 1.1 和命题 1.2 的证明见第 2 节。定理 1.7 的证明见第 3 节。最后，我们将在第 4 节考察一个带有 R-余谱性的猜想 1.3 变体的数值证据，该考察采用 Wang 和 Wang 的算法

，并加入了一些额外的优化，以便处理更大的图。 [26]

2. 巨型分量是余谱的——定理 1.1 和命题 1.2 的证明

回顾例 1.6，对于有根图 H, K，我们用 $H\cdot K$ 表示将这些图合并并识别其根后得到的图。对于某个有根树 T，形如 $G \cong H\cdot T$ 的图称为含有一个 T 的悬挂副本。（另请回顾图 1。）本节的主要内容是确定 λ 的取值范围，使得巨型分量中存在一个包含 t 个顶点的树 T 的悬挂副本。随后，利用 [13, 20] 中的树即可得到所需的余谱性结果。

我们使用二阶矩计算。将 T 的顶点标记为 $\{1,\dots,t\}$，使得顶点 t 表示根。此外，给定顶点 $v_1,\dots,v_t \in \{1,\dots,n\}$，令 $\mathrm{T}(v_1,\dots,v_t)$ 表示这样一个事件：原图可以分解为 $G(n,p) = H\cdot T$，其中 T 的顶点 $1,\dots,t$ 分别映射到 $v_1,\dots,v_t$。我们统计巨型连通分量中 T 的悬挂副本数量：

$$N := \sum_{v_1\in\{1,\dots,n\}} \sum_{v_2\neq v_1} \cdots \sum_{v_t\notin\{v_1,\dots,v_{t-1}\}} \mathbb{I}\big\{\mathcal{T}(v_1,\dots,v_t) \text{ and } v_t \in C_{\text{giant}}\big\}. \tag{2.1}$$

我们分别在下面的引理 2.1 和引理 2.4 中确定 $\mathbb{E}[N]$ 和 $\mathbb{E}[N^2]$。

引理 2.1。 固定一棵有根树 T，其有 $t \geq 2$ 个顶点。假设 $\lambda > 1$ 与 1 始终保持一定距离，且当 $n \to \infty$时， $p = \lambda/n$ 趋于零。那么，令 $c_\lambda := \mathbb{E}[\#C_{\text{giant}}/n]$，并令 N如(2.1)中所示，

$$\mathbb{E}[N] = \big(1-o(1)\big)n^t c_\lambda p^{t-1}(1-p)^{(t-1)n}. \tag{2.2}$$

特别地， $\mathbb{E}[N] \to \infty$ 当且仅当存在一个序列 $h(n)$，满足 $h(n) \to \infty$，使得

$$1 < \lambda \leq \ln(n)/(t-1) + \ln(\ln(n)) - h(n). \tag{2.3}$$

证明。 事件 $\mathrm{T}(v_1,\dots,v_t)$ 表示： $v_i \sim v_j$当且仅当 $\{i,j\} \in T$，并且不存在从满足 $i \leq t-1$ 的 v_i 到外部顶点 $v \notin \{v_1,\dots,v_t\}$ 的边。这里，树 T 恰有 $t-1$ 条边和 $\binom{t}{2}-$ 个非边（ $t-1$）。此外，从满足 $i \leq t-1$ 的 v_i 到 $\{v_1,\dots,v_t\}$ 的补图，恰有 $(n-t)(t-1)$ 条潜在边。因此，利用 $G(n,p)$ 模型中的边相互独立这一点，

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{T}(v_1,\dots,v_t)\big) = p^{t-1}(1-p)^{(t-1)(n-t)+\binom{t}{2}-(t-1)} = \big(1-o(1)\big)p^{t-1}(1-p)^{(t-1)n}, \tag{2.4}$$

其中第二步用到了 $1-p = 1-o(1)$。在以 $\mathrm{T}(v_1,\dots,v_t)$ 为条件时，由 $\{1,\dots,n\}\setminus\{v_1,\dots,v_{t-1}\}$ 诱导的图仍是参数为 p 的 Erdős–Rényi 图。因此，由于 $\lambda > 1$始终与 1 保持正距离，以高概率，后一图再次具有唯一巨分量，其中包含 $(1-o(1))c_\lambda n$ 个节点，且 $c_\lambda = \mathbb{E}[\#C_{\text{giant}}/n]$ 始终与零保持正距离。特别地， v_t 属于该连通分量的概率为

$$\mathbb{P}\big(v_t \in C_{\text{giant}} \mid \mathcal{T}(v_1,\dots,v_t)\big) = (1-o(1))c_\lambda. \tag{2.5}$$

利用 (2.1) 中有 $n(n-1)\cdots(n-t+1) = (1-o(1))n^t$ 个求和项，即可得到 (2.2)。

(2.3) 是保证 $\mathbb{E}[N] \to \infty$ 的充要条件，这一点现在可由直接计算得出。注意，对 $\lambda \leq n$ [18, p.266]，有 $(1-\lambda^2/n)\exp(-\lambda) \leq (1-\lambda/n)^n \leq \exp(-\lambda)$。上界表明，若 $\lambda = \omega(\ln(n))$，则 (2.3) 的右端趋于零。进一步可得，若 $\lambda = o(\sqrt{n})$，则 $(1-\lambda/n)^{(t-1)n} = (1-o(1))\exp(-\lambda(t-1))$。因此，利用 that$n^t p^{t-1} = n\lambda^{t-1}$表明，若 $\lambda = o(\ln(n))$，则 (2.2) 以速率 $n^{1-o(1)}$趋于无穷；并且若 $\lambda = \Theta(\ln(n))$，且 $\lambda = \ln(n)/(t-1) + \ln(\ln(n)) - h(n)$，则其阶为 $\exp((t-1)h(n))$。□

注 2.2. 如果将 (2.3) 中的 $h(n)$ 替换为常数，那么引理 2.1 表明 $\mathbb{E}[N]$ 是常数量级，而通过更复杂的证明可以表明 N 具有泊松统计。特别地，此时 N 以非零概率为零。因此，推论 2.5 中对 λ 的界是确保 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(N>0) = 1$所必需的。二阶矩计算的其余部分将表明，这个条件也足以满足要求。

引理2.3. 设有一棵具有 $t \geq 2$ 个顶点的有根树 T。考虑一个至少有 $2t$个顶点的连通图 G。那么，在 G中，任意一对具有公共顶点的 T的悬挂副本都必须具有相同的根。

证明。 设给定如下顶点集：$\{v_1,\dots,v_t\}\cap\{w_1,\dots,w_t\}\neq\emptyset$，使得$\{v_1,\dots,v_t\}$和$\{w_1,\dots,w_t\}$都在 G 中构成 T的悬挂副本，其根分别为 v_t和 w_t。我们要证明的是，必有 $v_t=w_t$。反设 $v_t\neq w_t$。

G连通且至少有 $2t>t$个顶点，这意味着$\{v_1,\dots,v_t\}\cap\{w_1,\dots,w_t\}$至少有一条边通向其补图。假设存在这样一条通向$\{v_1,\dots,v_t\}$的补图的边，另一种情形的论证完全相同。于是，由于悬挂树的定义表明 v_t是$\{v_1,\dots,v_t\}$中唯一可能连接到外部顶点的顶点，我们有 $v_t\in\{w_1,\dots,w_t\}$，并且由于 $v_t\neq w_t$，甚至有 $v_t\in\{w_1,\dots,w_{t-1}\}$。现在考虑邻域：

$$N_0:=\{v_t\},\qquad N_{i+1}:=N_i\cup\big\{v\in\{v_1,\dots,v_t\}:\exists v'\in N_i,\ v\sim v'\big\}. \tag{2.6}$$

于是，利用 w_t是$\{w_1,\dots,w_t\}$中唯一具有外部邻居的顶点，可得

$$N_i\subseteq\{w_1,\dots,w_{t-1}\}\implies N_{i+1}\subseteq\{w_1,\dots,w_t\}. \tag{2.7}$$

注意 $N_0=\{v_t\}\subseteq\{w_1,\dots,w_{t-1}\}$，但不可能对所有 i都有 $N_i\subseteq\{w_1,\dots,w_{t-1}\}$，因为 T的连通性意味着当 i充分大时， $N_i=\{v_1,\dots,v_t\}$的基数为 t。因此，(2.7)意味着存在满足 $w_t\in N_i$的 i。

由定义 (2.6) 可得 $N_i\subseteq\{v_1,\dots,v_t\}$。这意味着 $w_t\in\{v_1,\dots,v_t\}$，进而由于 $v_t\neq w_t$，有 $w_t\in\{v_1,\dots,v_{t-1}\}$。现在，再利用 $v_t\in\{w_1,\dots,w_{t-1}\}$，可知从 $\{v_1,\dots,v_t\}\cup\{w_1,\dots,w_t\}$ 到其补图不存在边。这与 G是一个至少含有 $2t$个顶点的连通图这一假设矛盾，因为 $\#\{v_1,\dots,v_t\}\cup\{w_1,\dots,w_t\}=2t-\#\{v_1,\dots,v_t\}\cap\{w_1,\dots,w_t\}<2t$。我们得出 $v_t=w_t$。□

引理 2.4。 固定一棵 T含有 $t\geq 2$ 个顶点的有根树。假设 $\lambda>1$与 1 的距离始终有正下界，并且存在一个序列 $h(n)$，满足 $h(n)\to\infty$，使得 (2.3) 成立。那么，

$$\mathbb{E}[N^2]=(1-o(1))\mathbb{E}[N]^2. \tag{2.8}$$

证明。 类似于 (2.4)–(2.5)，可得对于每一对满足 $\{v_1,\dots,v_t\}\cap\{w_1,\dots,w_t\}=\emptyset$且 $c_\lambda=\mathbb{E}[\#C_{\text{giant}}/n]$的顶点集，

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}(v_1,\dots,v_t),\mathcal{T}(w_1,\dots,w_t),v_t\in C_{\text{giant}},w_t\in C_{\text{giant}})=\big(1-o(1)\big)\big(c_\lambda p^{t-1}(1-p)^{(t-1)n}\big)^2. \tag{2.9}$$

将 N 的定义 (2.1) 代入 $\mathbb{E}[N^2]$ 后得到的二重和包含 $(1-o(1))n^{2t}$ 项，这些项由满足 $\{v_1,\dots,v_t\}\cap\{w_1,\dots,w_t\}=\emptyset$ 的顶点集所索引。因此，这些项产生阶为 $(1-o(1))(n^tc_\lambda p^{t-1}(1-p)^{(t-1)n})^2=(1-o(1))\mathbb{E}[N]^2$ 的贡献。于是，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[N^2\big]&=\big(1-o(1)\big)\mathbb{E}\big[N\big]^2\\&\quad+\sum_{\{v_1,\dots,v_t\}\cap\{w_1,\dots,w_t\}\neq\emptyset}\mathbb{P}\big(\mathcal{T}(v_1,\dots,v_t),\mathcal{T}(w_1,\dots,w_t),v_t\in C_{\text{giant}},w_t\in C_{\text{giant}}\big).\end{aligned} \tag{2.10}$$

剩下需要对右侧 (2.10) 中的和进行估计。

引理2.3保证了 (2.10) 中所有含有 $v_t\neq w_t$ 的项均为零。此外，对于每个 $i\leq t-1$，有 $O(n^{2t-i-1})$ 项满足 $v_t=w_t$，且 $\#\{v_1,\dots,v_{t-1}\}\cap\{w_1,\dots w_{t-1}\}=i$。只有当 $\{v_1,\dots,v_t\}\cup\{w_1,\dots,w_t\}$ 在 $2t-i-1$ 个顶点上诱导出一棵以 $v_t=w_t$ 为根的树，且除 $v_t=w_t$ 外的所有顶点都没有外部连接时，$\mathrm{T}(v_1,\dots,v_t)$ 和 $\mathrm{T}(w_1,\dots,w_t)$ 才可能同时出现。因此，类似于 (2.4)–(2.5)，(2.10) 中每个这样的项的大小为 $O(p^{2t-i-2}(1-p)^{(2t-i-2)n})$。由 $n^{2t-i-1}p^{2t-i-2}=n\lambda^{2t-i-2}$ 以及 $(1-p)^{(2t-i-2)n}=O(\exp(-\lambda(2t-i-2)))$ 可知，

$$\mathbb{E}\big[N^2\big]=\big(1+o(1)\big)\mathbb{E}\big[N\big]^2+O\Big(\sum_{i\leq t-1}n\lambda^{2t-i-2}\exp\big(-\lambda(2t-i-2)\big)\Big). \tag{2.11}$$

由 (2.2) 以及 (2.5) 之后的讨论，我们有 $\mathbb{E}[N]=(1-o(1))nc_\lambda\lambda^{t-1}\exp(-\lambda(t-1))$。这里，根据 λ 偏离 1 的假设，$c_\lambda>0$ 始终与零保持正距离。因此， $n\lambda^{2t-i-2}\exp(-\lambda(2t-i-2))/\mathbb{E}[N]^2=O(n^{-1}\lambda^{-i}\exp(i\lambda))$。

如果 $\lambda=o(\ln(n))$，那么显然 $n^{-1}\lambda^{-i}\exp(i\lambda)\to 0$，因此我们可以得出结论，(2.11) 中求和的所有项都是 $o(1)\mathbb{E}[N]^2$ 级的。现在假设 $\lambda=\Theta(\ln(n))$。通过修改

序列 h，我们可以进一步假设 (2.3) 中等号成立。于是，

$$\frac{n\lambda^{2t-i-2}\exp\bigl(-\lambda(2t-i-2)\bigr)}{\mathbb{E}[N]^2} = O\!\left(\frac{\exp(i\lambda)}{n\lambda^{i}}\right) = O\!\left(\exp\!\left(\frac{i-(t-1)}{t-1}\ln(n) - ih(n)\right)\right). \tag{2.12}$$

注意，对 $i \le t-1$ 有 $\exp[(i-(t-1))\ln(n)/(t-1)] = O(1)$，并回顾 $h(n) \to \infty$，从而得出 (2.11)中求和的所有项均为 $o(1)\mathbb{E}[N]^2$阶。这证明了(2.8)。□

推论 2.5. 固定一棵有 $t \ge 2$ 个顶点的有根树 T。假设 $\lambda > 1$ 与1 保持有界分离，且存在序列 $h(n)$，满足 $h(n) \to \infty$，使得 (2.3) 成立。则 $G(n,p)$ 中的巨型分量以趋于 *1* 的概率具有 T 的悬挂副本：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigl(\exists H : C_{\text{giant}} \cong H \cdot T\bigr) = 1. \tag{2.13}$$

证明. 引理2.1和2.4表明 $\mathbb{E}[N] \to \infty$与 $\mathbb{E}[N^2] = (1+o(1))\mathbb{E}[N]^2$。因此，切比雪夫不等式进而表明 $N \to \infty$ 依概率成立。特别地，我们随后以趋于1的概率有 $N > 0$，从而得到(2.13)。□

定理 *1.1* 的证明。 Schwenk [20] 给出了有根树 T_1, T_2 它们有 9 个顶点，并且对于任意有根图 H，图 $G_1 = H \cdot T_1$ 和 $G_2 = H \cdot T_2$ 均为余谱；另见 [12, p.65]。此外，Godsil 和 McKay [13, Section 9] 找到了有根树 $T_1'1$, $T_1'2$，它们有 11 个顶点，并且$H \cdot T_1'$和 $H \cdot T_1'2$ 是 R-余谱。因此，所需结论可由推论 2.5 立即得到。□

回顾一下，命题 1.2 假设 $\lambda > 1$ 固定不变，并断言此时巨型分量有指数多个余谱图。这同样可以通过交换悬挂树得到：

命题 *1.2* 的证明。 令T_1, T_2为 Godsil 和 McKay[13]构造的、产生 R-余谱性的树。记 V_{T_1} 为 2-核中附着有 T_1 的悬挂副本的顶点集合。接下来我们声称存在 $c_1 > 0$，使得 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(\#\mathrm{V}_{T_1} \ge c_1 n) = 1$. 这一结论可通过类似于定理 1.1 的二阶矩计算得出，也可直接由 Ding、Lubetzky 和 Peres [8, Theorem 1]的一个结果推出；该结果证明，对于固定的 $\lambda > 1$，巨型分量与一个在 2-核的顶点上独立附着 Galton–Watson 树的模型相 contiguously。

对于任意 $S \subseteq \mathrm{V}_{T_1}$，令 G_S 表示由 C_{giant} 得到的图：将所有以 S 中顶点为根的 T_1 副本替换为一个 T_2 副本。则 G_S 与 C_{giant} 是 R-余谱的。此外，若 V_{aut} 表示 2-核中在自同构作用下具有非平凡轨道的顶点集合，则图 $\{G_S : S \subseteq \mathrm{V}_{T_1} \setminus \mathrm{V}_{\text{aut}}\}$ 两两非同构。因此，

$$\#\{G : G \text{ is } \mathbb{R}\text{-cospectral to } C_{\text{giant}}\} \ge \#\{G_S : S \subseteq \mathcal{V}_{T_1} \setminus \mathcal{V}_{\text{aut}}\} = 2^{\#\mathcal{V}_{T_1} - \#\mathcal{V}_{\text{aut}}}. \tag{2.14}$$

Verbitsky 和 Zhukovskii 的结果 [23, （定理 1.2] ）表明，$\#\mathrm{V}_{\text{aut}}$ 在概率意义下有界，即 $\lim_{C\to\infty} \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \mathrm{P}(\#\mathrm{V}_{\text{aut}} > C) = 0$。因此，对任意 $\varepsilon > 0$，都有 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\#\mathrm{V}_{T_1} - \#\mathrm{V}_{\text{aut}} \ge (c_1-\varepsilon)n) = 1$。结合 (2.14) 即得结论。□

3. 2-核中的切换方法至少需要两个圈——定理 1.7 的证明

回顾定义 1.4，大小为 $\le m$ 的切换方法涉及将邻接矩阵与某个 $m \times m$ 正交矩阵 Q 进行共轭，其中 $Q \oplus I_{n-m}$。这里允许 Q 具有整数行，这也是不等式成立的原因，因为我们有可能用更小的矩阵实现相同的操作。更准确地说，由于正交性， Q 的任何整数行都只有一个元素为 ± 1，其余元素均为零。

如果 Q 的所有行都是整数行，那么它就是一个带号置换矩阵，且可以令所有符号为正。在这种情况下，切换得到的图与原图˜同构。因此，设 Q 有非整数行，并记 Q 中没有整数行的最大主子矩阵为 Q ˜。接下来，我们将此操作称为 Q- 切换。对应于该子矩阵的 G 顶点称为切换集。因此，在例 1.5 的 Godsil–McKay 切换中，切换集为 X。

˜从这里开始，我们将重点关注非整数子矩阵 Q。因此，接下来我们省略波浪号。我们的主要技术结果是定理 3.1：

定理 3.1. 设 G 为一个最小度为 ≥ 2 的连通图，并考虑一个没有整数项的正交矩阵 $Q \in \mathrm{R}^{k\times k}$。假设 G 通过 Q-切换得到一个不同构的同谱图。那么，G 有一个顶点数至多为 $2k+1$ 的连通子图，且边数严格多于顶点数。

注意，边数多于顶点数的连通图至少包含两个环。因此，我们也可以将定理 3.1 理解为：G 必须包含一个至少有两个环的“小型”连通子图。

在定理 3.1 的证明中，所需的子图是在切换集 X 的邻域图中找到的；参见定义 3.2。我们将在第 3.2 节证明，如果邻域图是不交的圈并，那么切换方法将产生一个同构图。定理 3.1 的证明利用这一点，确保非同构切换要求邻域图中至少有一个度为 ≥ 3 的顶点。该顶点被用作构造定理 3.1 陈述中所述连通子图的起点；参见第 3.3 节。

由定理 3.1 可知，定理 1.7 的证明很容易得出，因为当 λ 较小时，边数多于顶点数的小子图不太可能出现。详情请参见第 3.3 节。

3.1. **切换方法在子图上诱导余谱性。** 回想一下，切换方法只会修改一个小子图以及与该子图相连的边。下面通过定义 3.2 对此作出精确定义，并在图 3 中加以示意。

定义 3.2。 设 $G=(V,E)$ 是一个图，且 X 是顶点的一个子集。G 关于 X 的邻域图 是图 G_X，其顶点集为 $X\cup N(X)$，其中 $N(X) := \cup_{x\in X}\{v\in V\colon v\sim x\}$，边集为 $\{e\in E\colon e\cap X\geq 1\}$。

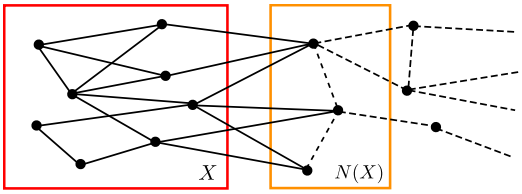

图 3。 X 的邻域图包含至少有一个端点位于 X 中的边。

在后续论证中，当我们考虑通过切换操作从 G 得到的图 H 时，我们总是也为 H 配备与定义 1.4 中所述切换方法相关联的顶点排序。我们将该顶点视为相同。特别地，给定顶点集 $S\subseteq V$，其上的诱导子图记为 $G[S]$ 和 $H[S]$，分别针对 G 和 H 定义。

如果一个图可进行 a Q-切换，那么每个包含该切换集的邻域图的子图也可进行 a Q-切换：

引理 3.3. 考虑图 $G=(V,E)$ 和 H，其中 H 由 G 通过以 X 为切换集的 Q-切换得到。若 $Y\subseteq V\setminus X$ 且 F 是 $G[X\cup Y]$ 的一组边，并且 $F\cap E(G_X)=\emptyset$，则可对 $G[X\cup Y]-F$ 进行 Q-切换，得到余谱图 $H[X\cup Y]-F$。

证明。 对顶点重新排序后，Q-切换可表示为一个分块对角矩阵，其对角块为 Q、$-I$ 和 I。考虑与此顶点排序相对应的邻接矩阵的分块矩阵分解：

$$A(G) =: \begin{pmatrix} B & U & W \\ U^T & C_{11} & C_{12} \\ W^T & C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

那么，对 G 应用的 Q-切换可表示为共轭，

$$\begin{pmatrix} Q & O & O \\ O & -I & O \\ O & O & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B & U & W \\ U^T & C_{11} & C_{12} \\ W^T & C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O & O \\ O & -I & O \\ O & O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^TBQ & -Q^TU & Q^TW \\ -U^TQ & C_{11} & -C_{12} \\ W^TQ & -C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = A(H). \tag{3.2}$$

$G[X \cup Y]$的邻接矩阵由（3.1）删去所有与 $X \cup Y$中顶点无关的行和列后得到。因此，例如，在（3.1）的第一块行中，我们完整保留第一块 B，因为它对应于切换集 X；对于 U和 W，则只保留与 Y相关联的列。此外，删去 F中的边只会使 C-子矩阵中的某些元素由1变为0。因此，

$$A\Big(G[X \cup Y] - F\Big) = \begin{pmatrix} B & \tilde{U}_Y & \tilde{W}_Y \\ \tilde{U}_Y^T & \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{1,2} \\ \tilde{W}_Y^T & \tilde{C}_{2,1} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

其中 $\tilde{U}_Y$和 $\tilde{W}_Y$是由 U和 W删除相应列得到的矩阵，而$\tilde{C}_{i,j}$则由$C_{i,j}$通过删除行和列并可能将某些元素置零得到。

现在考虑由 $\mathrm{diag}(Q, -I, I)$ 仅保留与 $X \cup Y$相关联的行和列所得到的正交矩阵。该矩阵具有形式 $\mathrm{diag}(Q, -I_a, I_b)$，其中 $a + b = \#Y$。于是由 (3.2) 可知，$H[X \cup Y] - F$的邻接矩阵恰好是用 $\mathrm{diag}(Q, -I_a, I_b)$ 对 (3.3) 作共轭变换所得到的矩阵。因此，$G[X \cup Y] - F$与 $H[X \cup Y] - F$确实通过一次 Q-切换相关联。□

3.2. **不交的圈并导致同构**。 定理 3.1 的证明中的困难情形将出现在 G_X 为不交的圈并时。这一挑战不可忽视，因为多个彼此相距甚远的小圈可以以非零概率出现在 2-核中。我们在此的目标是证明：在这种情形下，切换总是得到一个同构图，我们将在引理 3.10 中完成这一证明。

3.2.1. 生成最大度为 *2* 的图的余谱性。我们将分析 G_X的子图；当 G_X为不交的圈并时，这些子图是最大度至多为 2 的图。下面的定理 3.5 表明，其中的所有余谱图都可以由一小组余谱对按如下意义生成：

定义 3.4。设 $\mathbf{F} = \{(F_i, F_i') : i \in I\}$ 是一组余谱对。若存在 I的一个多重子集 J，使得 $G \oplus_{j\in J} F_j \cong H \oplus_{j\in J} F_j$，则称两个图 G和 H之间的余谱性由 F 生成。这里，$\oplus$表示不交并。

由 Cvetković、Simić 和 Stanić [7]研究了生成作为环的并的子图的所有余谱图这一具体问题。然而，其中陈述的结果只识别出了“极小非 DS 图”。原则上，这并不排除存在一对余谱图的可能性：二者都是路径和环的并，但未被 [7, 定理 3.1] 的列表收录，因为两个图都不是极小非 DS 图。不过，根据 [6] 关于生成所有谱半径至多为 2 的图的较早结果，无需极小性即可直接得到这一结论：

定理 3.5 (Cvetković 和 Gutman [6])。 设 Γ 和 Γ' 是一对最大度不超过 2 的余谱图。那么，余谱性由 $\{(C_{2n} + 2P_1,\ C_4 + 2P_{n-1}) :\ n \geq 3\} \cup \{(C_4 + 2P_{n-1},\ C_{2n} + 2P_1) :\ n \geq 3\}$ 生成

证明。谱半径不超过最大度，因此我们考虑的图的谱半径至多为 2。 [6] 中的方程 (2a)-(2i)给出了一组图对 F，它们生成了谱半径至多为 2 的图之间的所有余谱关系。因此，存在某个 $(F_j, F'_j)_{j\in J} \in \mathbf{F}$，使得 $\Gamma \oplus_{j\in J} F_j \cong \Gamma' \oplus_{j\in J} F'_j$。每个既不是环也不是路径的连通分量只出现在 (2a)-(2i) 中的一个方程里。因此，由于 Γ, Γ' 的最大度不超过 2，对于任意一对 (F_j, F'_j)，只要 $j \in J$包含这样的连通分量，就必定存在一个 $k \in J$，使得 $(F_k, F'_k) = (F'_j, F_j)$。我们可以从 J中移除 j, k，仍然得到一个有效的同构。只有 [6], 中的方程 (2c) 涉及 $F_j := C_{2n} + 2P_1$ 和 $F'_j := C_4 + 2P_{n-1}$，而不涉及任何最大度为 ≥ 3的连通分量。由此可知，这一对必须生成所有最大度不超过 2 的余谱图对。□

因此，最大度为 2 的同谱图至少相差三个连通分量：

引理 3.6. 设 Γ, Γ' 是非同构余谱图，且二者的最大度都不超过 2。那么，存在 $n, k \geq 2$，满足 $n \neq k$，使得 Γ 至少多一个 C_{2n} 和两个连通分量 P_{k-1}，而 Γ' 和 Γ' 至少多一个 C_{2k} 和两个 $2P_{n-1}$ 连通分量。

证明。设 $\Gamma = \dot{\bigcup}_{i=1}^{s} a_i C_i + \dot{\bigcup}_{j=1}^{s} b_j P_j$，且 $\Gamma' = \dot{\bigcup}_{i=1}^{s} a'_i C_i + \dot{\bigcup}_{j=1}^{s} b'_j P_j$，其中 s 足够大。我们声称，由此可得

$$2a_{2i} + b_{i-1} = 2a'_{2i} + b'_{i-1} \text{ for all } 1 \leq i \leq s+1. \tag{3.4}$$

事实上，当 $\Gamma = C_{2n} + 2P_1$ 和 $\Gamma' = C_4 + 2P_{n-1}$ 时，(3.4) 成立；一般情形则可通过考虑并得到定理 3.5。回顾定义 3.4。

图 Γ 和 Γ' 具有相同的谱，且圈分支数量相同，但不同构。定理 3.5 表明，它们在奇圈方面不能有差异；而由 (3.4) 可知，它们也不能仅在路径方面有差异，因此存在一个 $n \geq 2$，使得 $a_{2n} > a'_{2n}$，以及一个 $k \neq n$，使得 $a_{2k} < a'_{2k}$。由 $i = n$ 的 (3.4)，k 可知，存在 n，k，使得引理成立。□

引理 3.7. 设 G 和 H 是最大度为 2 的余谱图。假设存在顶点 $x \in G$ 和 $y \in H$，使得子图 $G \setminus x$ 和 $H \setminus y$ 是同构的路径不交并。那么，G 和 H 同构。

证明. 图 G 和 H 可以由路径并添加一个度至多为 2 的顶点得到，因此它们至多有一个环。假设 G 和 H 不同构。那么，引理 3.6 表明存在 $n, k \geq 2$，满足 $n \neq k$ 且

$$G = C_{2n} + F \qquad \text{and} \qquad H = C_{2k} + F', \tag{3.5}$$

对于路径并 F 和 F'，有如下性质：F 的连通分量比 F'至少多两个 P_{k-1}。然而，利用假设可知，式 (3.5) 中的删点图是同构的路径并，这意味着 $P_{2n-1} + F \cong P_{2k-1} + F$，。因此，$F$和 F' 至多相差一个连通分量，矛盾。□

注 3.8。引理 3.7 也可以用所谓的上图来重新表述。因此，它与 [9, 定理 16], 相似，但条件由可控性改为最大度为 2。

3.2.2. 如果 G_X 是环的并，则不存在非同构切换。

引理 3.9。设 X 是图 G中一次 Q-切换的切换集。假设邻域图 G_X 是环的并，且 $G_X[X]$ 是路径并。那么，记切换后得到的图为 H，对于每个 $Y \subseteq N(X)$，$G_X[X \cup Y]$ 都与 $H_X[X \cup Y]$ 同构。

证明。环的并由其谱确定（例如，由 [6]确定）。因此，由于引理 3.3 蕴含 H_X 与 G_X余谱，可知 H_X 也是环的并，且最大度为 2。此外，根据引理 3.3，$G_X[X \cup Y]$ 和 $H_X[X \cup Y]$ 对于所有 $Y \subseteq N(X)$ 均为余谱。我们对 $\#Y$ 进行归纳，证明 $G_X[X \cup Y]$ 与 $H_X[X \cup Y]$ 实际上同构。

路径并不含圈分支，因此根据引理 3.6，在最大度不超过 2 的图中，它由其谱唯一确定。因此，$G_X[X]$ 和 $H_X[X]$ 同构。

现在考虑 $k \geq 1$，并假设对于所有满足 $\#Y < k$ 的 $Y \subseteq N(X)$，都有 $G_X[X \cup Y] \cong H_X[X \cup Y]$。取一个满足 $\#Y = k$ 的 $Y \subseteq N(X)$。令 $y \in Y$ 为任意一个元素。那么，根据归纳假设，$G_X[X \cup Y \setminus \{y\}] \cong H_X[X \cup Y \setminus \{y\}]$。令 Z 和 Z' 分别为 $G_X[X \cup Y \setminus \{y\}]$ 和 $H_X[X \cup Y \setminus \{y\}]$ 中不属于圈分支的顶点集。那么，$G_X[Z]$ 和 $H_X[Z']$ 是通过删除相同的圈分支得到的，因此是同构的路径并。此外，$G_X[Z \cup y]$ 和 $H_X[Z' \cup y]$ 余谱，因为它们是通过从余谱图 $G_X[X \cup Y]$ 和 $H_X[X \cup Y]$ 中删除一组同构的圈分支得到的。由引理 3.7 可得 $G_X[Z \cup y] \cong H_X[Z' \cup y]$。由于 y 与 $G_X[X \cup Y \setminus \{y\}]$ 或 $H_X[X \cup Y \setminus \{y\}]$, 中的任何圈分支都不相邻，现在将圈分支加回即可得到 $G_X[X \cup Y] \cong H_X[X \cup Y]$。归纳证明至此完成。□

引理 3.10。 设 X 是连通图 G 中 Q-切换的切换集。若 G_X 是不交的圈并，则 Q-切换会生成一个与 G 同构的图。

证明。 设 H 是通过对 X 进行 Q-切换得到的 G 的同谱图。若 $G_X[X]$ 含有一个环，那么根据 G_X 是环的并这一假设，该环就是 G_X 的一个连通分量，记作 C。然而， C 也因此是 G 的一个连通分量，因为邻域图 G_X 包含了所有通向 X 中顶点的边。图 G 是连通的，因此 $C = G$。于是 G 与 H 同构，因为环由谱决定。

现在假设 $G_X[X]$ 是路径并。那么，对于每个 $Y \subseteq N(X)$，图 $G_X[X \cup Y]$ 都是路径与环的并，而引理 3.10 推出 $G_X[X \cup Y] \cong H_X[X \cup Y]$。特别地， $G_X[X] \cong H_X[X]$。令 $P(X)$ 表示 $G_X[X]$ 的连通分量集合，该集合也正是 $H_X[X]$ 的连通分量集合。我们声称，只需构造置换 ϕ： $P(X) \to P(X)$，使其满足以下性质

(1) 每条路径 $A \in P(X)$ 都被映射为一条相同长度的路径，

(2) 若 $y \in N(X)$ 在 G 中有 i条边连到 A，则对 $0 \le i \le 2$， y在 H 中有 i条边连到 $\phi(A)$。

具体而言，我们断言这样的 ϕ 诱导了 G与 H之间的一个同构。

第一条性质表明，对每条路径$A \in P(X)$， A 与 $\phi(A)$ 之间存在同构。由于 G_X与 H_X是圈的并，从 A向外引出的边仅来自该路径的端点。因此，对任意路径 A，其在G中的邻点集具有形式 $\{y, z\}$，可能还带有 $y = z$。第二条性质表明， A 与$\phi(A)$ 之间的同构[1] 中至少有一个，记为 ψ_A，将 y与 z在 $A \subseteq G$中的邻点映到它们在 $\phi(A) \subseteq H$中的邻点。于是，映射 ψ： $V(G) \to V(H)$，它在路径 $A \in P(X)$ 上按 ψ_A 作用，并固定所有其他顶点，确实是 G 与 H 之间的一个同构。事实上，它在 $V \setminus X$上的作用为恒等，置换 ϕ保证它在 X上以同构的方式作用，而 ψ_A的选取则保证 X与 $V \setminus X$之间的任意边也被映为边。

接下来我们构造置换 ϕ。令 $A \in P(X)$ 为一条长度为 a 的路径。在 G_X 中不存在路径，因此 $N_G(A) \neq \emptyset$。如果 $N_G(A) = \{y\}$，那么 $G_X[X \cup y] \cong H_X[X \cup y]$ 有一个长度为 $a+1$ 的环，因此 y 也必须在 H_X 中与一条长度为 a 的路径相邻两次。定义 $\phi(A)$ 为这条路径。

现在假设 $N_G(A) = \{y, z\}$。包含 A 于 $G_X[X \cup \{y, z\}]$ 中的连通分量 T 必须是一条路径或一个环，因为 $G_X[X \cup \{y, z\}]$ 是 G_X 的子图，而后者是环的并。此外，根据定义 3.2 y 和 z 不相邻，并且在 $G_X[X \cup \{y, z\}]$ 中的度必须为 2。因此， T 可以分解为 B-y-A-z-C，其中 $B = C$ 当且仅当它是一个环；见图 4。注意，$G_X[X \cup \{y, z\}]$ 比 $G_X[X]$、 $G_X[X \cup y]$ 或 $G_X[X \cup z]$ 多一个与 T 同构的连通分量。由同构 $G_X[X \cup Y] \cong H_X[X \cup Y]$ 可知，对 H 也同样成立，因此 y 和 z 位于 $H_X[X \cup \{y, z\}]$ 的同一连通分量中。

此外，将 y 添加到 $G_X[X]$ 会移除长度为 $a := \#A$ 和 $b := \#B$的路径，并添加一条长度为 $a + b + 1$ 的路径。于是由 $G_X[X] \cong H_X[X]$ 和 $G_X[X \cup y] \cong H_X[X \cup y]$ 可知， y必须与 $H_X[X \cup y]$中长度为 a和 b的路径 A_y、 B_y相邻。类似地， z与 $H_X[X \cup z]$中长度为 a和 $c = \#C$的路径A_z、 C_z相邻。此外，由于 y和 z位于 $H_X[X \cup \{y, z\}]$,的同一连通分量中，这些路径中至少有一条必须连接 y和 z。我们进一步断言，必定存在一条长度为 a的连接路径。事实上，唯一不会出现这种情况的情形是$A_y \neq A_z$和 $C_z = B_y$且满足 $b = c \neq a$。此时， $H_X[X \cup \{y, z\}]$中包含 y、 z的连通分量 T是一条长度为 $2a + b + 2$的路径，这与由 $G_X[X \cup \{y, z\}]$ 中当 T为路径且满足 $B \neq C$时的分解B-y-A-z-C可知其长度为 $a + b + c + 2$ 相矛盾。

因此，在 H_X 中至少存在一条长度为 a 的路径，它与 y 和 z 相邻。若这样的路径恰有一条，则定义 $\phi(A)$ 为这条路径。若这样的路径有两条（当 $B = C$ 和 $b = a$ 时可能出现这种情况），那么 y 和 z 属于 H_X 中的一个环 z-P_a-y-P_a-z，因此也属于 G_X。令 A 和 $\tilde{A}$ 为 G_X 中这两条 P_a 路径。将 A 和 A 映射到 H_X 中与 y, z 相邻的两条 P_a 路径（顺序任意）。我们在此定义的映射是单射，因此必为置换。它具有所需的性质，故可扩展为 G 与 H 之间的同构。□

[1]一条长度非零的路径的自同构群阶为 2。因此，A 与 $\phi(A)$之间通常有两个同构，但如果 A 是一个点，则只有一个。

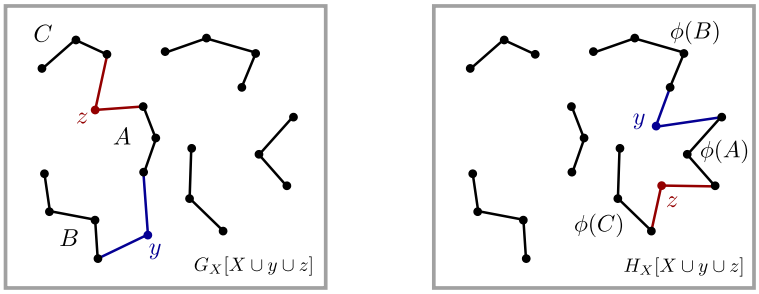

图 4. 引理 3.10 的证明基于路径 $G_X[X]$ 和 $H_X[X]$ 的一个置换 ϕ，构造了一个同构 $G \cong H$。这个置换具有如下性质：对于每个与 G 中路径 $A \subseteq G_X[X]$ 相邻的 $z \in N(X), y$，路径 $\phi(A) \subseteq H_X[X]$ 与 H 中的 y, z 相邻。

3.3. 定理 3.1 和 1.7 的证明。

定理 *3.1* 的证明。 考虑一个没有整数行的 $k \times k$ 正交矩阵 Q，其 Q-切换会产生一个同谱图。令 X 为切换集。于是，对于每个恰有一个分量等于 1 的向量 $v \in \{0,1\}^k$，都有 $Q^T v \notin \{0,1\}^k$，因为 Q 没有整数行。因此，任何与切换集 X 相邻的顶点，在 X 中至少有两个邻点。假设 G 的最小度为 ≥ 2，则邻域图 G_X 的最小度也至少为 ≥ 2，因为 X 中的顶点保持原有的度，而所有 $N(X)$ 中的顶点在 X 中都至少有两个邻点。

所有顶点的度均为 2 的图是圈的不交并。由于切换产生了一个非同构图，引理 3.10 意味着必定存在顶点 v_0，使得在 G_X 中 $\deg(v_0) > 2$。现在取 G_X 中包含 v_0 的一个环 C_0。根据 G_X 的定义， X 之外的任意一对顶点都不相邻。因此，

$$\#(C_0 \cap X) \geq \#(C_0 \setminus X). \tag{3.6}$$

接下来，我们扩展 C_0，得到一个顶点数至多为 $2\#X+1$ 且边数多于顶点数的图 .

已知 v_0 在 G_X中的度为 > 2，必定存在一个位于 C_0 之外、与 v_0相邻的顶点 v_1。考虑 $P = v_1 v_2, \ldots, v_i$在 $G_X \setminus C_0$中的一条路径，该路径从 v_1出发且无法延伸为更长的路径。路径无法延伸意味着， v_i 在 G_X 中的所有邻点都属于$C_0 \cup \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$。已知 G_X的度最小，为 ≥ 2, 因此 v_i在 $C_0 \cup \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$中至少有两个邻点。（见图 5。）无论哪种情况，由$C_0 \cup \{v_1, \ldots, v_i\}$诱导的 G_X的子图都是连通的，且至少有 $\#C_0 + i + 1$ 条边，因为路径 P有 $i-1$ 条边，并且我们从与 v_1 和 v_i的连接中又得到两条边。

此外，该路径满足 $\#(P \cap X) + 1 \geq \#(P \setminus X)$，因为 X之外的每个顶点都必须后接一个 X中的顶点，最后一个顶点可能除外。因此，所构造子图中的顶点数目满足

$$\#C_0 \cup P = \#(C_0 \cup P) \cap X + \#(C_0 \cup P_1) \setminus X \leq 2\#(C_0 \cup P_1) \cap X + 1 \leq 2\#X + 1. \tag{3.7}$$

因此， G有一个包含 $\leq 2\#X+1$ 个顶点的连通子图，其边数严格多于顶点数；具体而言，该子图是由 $C_0 \cup P$诱导的图。证明至此结束。□

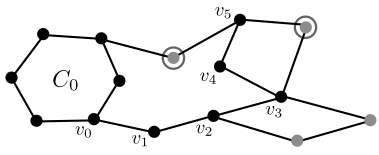

图 5. 定理 3.1 的证明通过考虑一个环$C_0 \subseteq G_X$及其度为 ≥ 3 的顶点 v_0 来构造所需的子图，并通过考虑 $G_X \setminus C_0$ 中从 v_0的一个邻点 v_1 出发的极大路径来构造第二个环。在所示例子中，这样的路径 $v_1 v_2 \ldots v_6$ 可以通过将 v_6 取为被圈出的顶点之一而得到。

注记 3.11. 在定理 3.1 中，图的最小度为 2 这一条件至关重要。即使只有一个度为 1 的顶点，切换方法也可能生成邻域图 G_X 中仅有一个环的非同构图；例如参见图 6。



图 6.（左）在此例中，邻域图 G_X 中有一个环，且有一个度为一的节点。非同构悬挂图 K_1、……、K_4 连接到 $N(X)$。（右）Godsil–McKay 切换（回顾例 1.5）会得到一个非同构图；考察唯一一个带有悬挂 K_4的顶点的邻点的度即可验证这一点。

定理 *1.7* 的证明。回顾第 3 节开头的内容，大小为 $\le m$ 的任意切换都对应于某个 $k \times k$ 正交矩阵 Q 所对应的 Q-切换，其中 $k \le m$。因此，由于连通图的 2-核始终也是连通图，且其最小度为 ≥ 2，由定理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{核}_2(C_{\text{giant}})\text{存在一种大小为 } \le m \text{ 的切换，可生成非同构图}) \\ \le \sum_{k \le 2m+1} \mathbb{P}(\mathrm{Core}_2(C_{\text{giant}}) \text{ has a subgraph with } k \text{ vertices and } \ge k+1 \text{ edges}).\end{aligned} \tag{3.8}$$

这里，对于任意一个具有 e 条边的 H 阶图，令 G 为原始 $G(n,\ p)$ 图，则有

$$\mathbb{P}\Big(H \subseteq G\Big) \le \sum_{v_1,\ldots,v_k=1}^{n} \mathbb{P}\Big(G[v_1,\ldots,v_k] \text{ has at least } e \text{ edges}\Big) = O\Big(n^k p^e\Big). \tag{3.9}$$

注意，如果 $\lambda = o(n^{\frac{e-k}{e}})$，$n^k p^e = \lambda^e / n^{e-k}$ 会趋于零。特别地，对于任意固定的 k，高概率下，$G(n,\ p)$ 图（因此其巨型分量的 2-核也）不含具有 $\le k$ 个节点和 $\ge k+1$ 条边的子图，只要 $\lambda = o(n^{1/(k+1)})$。假设 $\lambda = o(n^{1/(2m+2)})$ 现在推出，当 $n \to \infty$ 时，(3.8) 趋于零，从而完成证明。

□

4. 数值证据

最后，我们考察一个变体猜想 1.3 的数值证据，其中将邻接余谱性替换为 R-余谱性。这种设定允许应用 Wang 和 Wang 提出的算法，这些算法可以判定给定图是否由其 R-谱唯一确定；若不是，则可搜索其 R-余谱图 [26]。这些算法适用于可控或近似可控的图，也就是说，列为 $e,\ Ae,\ \ldots,\ A^{n-1}e$ 的矩阵 $W \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ 必须满足秩$(W) \ge n-1$，其中 A 是邻接矩阵，且 $e = (1,\ \ldots,\ 1)^T$。

4.1. 主要发现。 我们针对不同的平均度 $\lambda > 1$ 和节点数 n 生成了随机图，并应用了 [26], 中的算法，同时采用了下文第 4.2 节讨论的一些额外优化。结果见表 1。结论如下：

关于 R-余谱性的频率： 在总共 100×22 个抽样图中，只有 6 个样本的巨型分量 2-核被证实为 R-余谱，而许多样本则被证明可由 R-谱确定。主要需要注意的是，对于较小的 λ，有相当一部分图的算法无法得出结论。对于中等大小的平均度，我们看到算法证实许多图可由其 R-谱确定；对于 $\lambda = 5$，除一个样本外，所有样本均如此。

不可控性：导致无法得出结论的主要原因是，对于较小的 λ，秩$(W) < n-1$ 的概率相当大。[2] 例如，我们发现，当 $\lambda = 1.2$时，该概率约为 50%。随机矩阵理论的观点认为，奇异性通常应源于局部障碍 [3, 4, 5, 10, 11, 21], ，而我们的定理 1.7 表明，局部障碍不应导致余谱性；基于此，表 1 中秩$(W) < n-1$ 的大多数图似乎也可能可由其 R-谱确定。

总之，算法得出确定结论的数据有力地表明，当 2-核可控或近乎可控时，它通常应由其 R-谱唯一确定；而不可控的情况似乎也很可能经常能由 R-谱唯一确定。这支持猜想 1.3 的变体。

λ	n	平均值 #V(核$_2$))	可确定由 R-谱	R-余谱	无法确定 秩$(W) < n-1$	无法确定 已终止
	50	4.4	54	0	46	0
1.2	100	6.9	50	0	49	1
	200	10.6	49	0	51	0
	500	26.3	35	0	61	4
	1000	49.3	36	1	61	2
	2000	110.0	39	0	52	9
	50	9.8	36	0	63	1
1.5	100	21.2	49	0	49	2
	200	42.7	50	1	45	4
	500	106.9	55	0	39	6
	1000	216.8	48	0	44	8
	50	23.9	67	1	29	3
2	100	49.0	72	0	14	14
	200	94.9	75	0	18	7
	500	233.0	70	0	16	14
	50	31.6	88	1	7	4
2.5	100	65.6	87	0	5	8
	200	132.2	89	2	3	6
	500	329.0	91	0	6	3
	50	48.2	100	0	0	0
5	100	96.2	100	0	0	0
	200	191.8	99	0	0	1

表 1. $G(n,\ \lambda/(n-1))$ 的巨型分量的 2-核是否由 R-谱决定？使用 Wang 和 Wang 的算法 [26] 对每个 $(n,\ \lambda)$ 下的 100 个随机图进行测试。

4.2. **算法优化**。我们的代码主要是将 [26] 中的 Mathematica 代码移植到 SageMath，可在 https://github.com/nilsvandeberg/cospectrality_spa rse_graphs 找到。我们进行了两项值得注意的更改，以便能够对更大的图进行计算。

首先，该算法需要一个经过修改的步行矩阵的初等因子 $d_1, \ldots, d_n$，以及可逆矩阵 U, $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，它们定义了 W^p 与其史密斯标准形之间的相似关系。计算 V 的开销很大，因为步行矩阵中的元素会变得非常大。然而，只需知道 V 模一个取决于 d_n 的素数幂即可；参见 [26, 推论 3]。因此，我们只需考虑 W^p 模该素数幂的情形，这可以大幅减小步行矩阵中的数值，进而缩短计算时间。

[2] 对于固定的 λ，当 $n \to \infty$ 时，这个概率显然有一个严格大于零的下界，因为 P(秩$(W) < n-1) \geq$ P(秩$(A) < n-2$)，并且根据 [11]，2-核的邻接矩阵以不趋于零的概率比预期低 3 秩。这一粗略界证明了不可控性的概率非零，但无法确定其确切值，因为当秩$(A) = n$时，也可能出现秩$(W) < n-1$。

其次，对于近乎可控图，该算法会替换步行矩阵的最后一列，以求得一个可逆矩阵。[26] 中的实现通过计算 W原最后一列的所有余子式来确定这一列。所得向量属于W的核，参见例如 [24, 命题 1]。因此，我们也可以求得一个核向量，并且只需计算一个余子式，再对该向量进行缩放，即可得到正确的最后一列。

即使进行了这些调整，计算仍有可能溢出或耗时很长。我们采用了 [26] 中的方法，如果某些数值变得过大，就终止算法。发生这种情况的案例记录在表 1 的“已终止”列中。

致谢。 作者感谢 Aida Abiad 和 Emanuel Juliano 就本文主题展开的讨论，并感谢他们分享的相关见解。

Nils Van de Berg 获得荷兰研究理事会（NWO）资助，资助项目编号为 VI.Vidi.213.085。Alexander Van Werde 获得德国研究联合会（DFG）资助，资助来自德国卓越战略项目 EXC 2044/2 –390685587，即明斯特数学：动力学–几何–结构。

参考文献

[1] A. Abiad 和 W. Haemers。层级为 2 的余谱图与正则正交矩阵。《电子组合学杂志》，2012 年。doi: 10.37236/2383.[2] A. Abiad、N. Van de Berg 和 R. Simoens。通过切换得到的余谱图计数。《离散数学》，2026 年。doi: 10.1016/j.disc.2025.114775.[3] L. Addario-Berry 和 L. Eslava。随机矩阵的命中时间定理。《组合学、概率与计算》，2014 年。doi: 10.1017/S0963548314000285.[4] K. Costello 和 V. Vu。随机图的秩。《随机结构与算法》，2008 年。doi: 10.1002/rsa.20219.[5] K. Costello 和 V. Vu。关于随机稀疏矩阵的秩。《组合学、概率与计算》，2010 年。doi: 10.1017/S0963548309990447.[6]D. Cvetković 和 I. Gutman。关于最大特征值不大于二的图的谱结构。《数学研究所出版物》，1975 年。http://eudml.org/doc/254702.[7]D. Cvetković、S. K. Simić 和 Z. Stanić。连通分量为路径和圈的图的谱判定。《计算机与应用数学》，2010 年。doi: 10.1016/j.camwa.2010.04.021.[8] J. Ding、E. Lubetzky 和 Y. Peres。巨型分量的剖析：严格超临界情形。《欧洲组合学杂志》，2014 年。doi: 10.1016/j.ejc.2013.06.004.[9] A. Farrugia。广义余谱可控图的上图。《电子组合学杂志》，2019 年。doi: 10.37236/7883.[10] A. Ferber、M. Kwan、A. Sah 和 M. Sawhney。随机图的 k-核的奇异性。《杜克数学杂志》，2023 年。doi: 10.1215/00127094-2022-0060.[11] M. Glasgow、M. Kwan、A. Sah 和 M. Sawhney。稀疏随机图的精确秩。《欧洲数学学会杂志》，2025 年。doi: 10.4171/JEMS/1692.[12]C. Godsil。代数组合学。Chapman and Hall，第一版，1993 年。doi: 10.1201/9781315137131.[13] C. Godsil 和 B. McKay。关于图的谱的一些计算结果。载于《组合数学 IV：第四届澳大利亚会议论文集》，会议于阿德莱德大学举行，第 73–92 页。Springer，1976 年。doi: 10.1007/BFb0097370.[14] C. Godsil 和 B. McKay。构造余谱图。《数学方程》，1982 年。doi: 10.1007/BF02189621.[15] W. Haemers。几乎所有图都由其谱判定吗？《南非数学会通讯》，2016 年。https://www.researchgate.net/publication/304747396_几乎_所有_图_都由_其_谱_判定_吗？[16] W. Haemers 和 E. Spence。余谱图的枚举。《欧洲组合学杂志》，2004 年。doi: 10.1016/S0195-6698(03)00100-8。

[17] C. Johnson 和 M. Newman。关于余谱图的一则注记。组合理论杂志*B*辑，1980 年。doi: 10.1016/0095-8956(80)90058-1。[18]D. Mitrinovic 和 P. Vasic。解析不等式。Springer，第一版，1970 年。doi: 10.1007/978-3-642-99970-3。[19] S. O'Rourke 和 B. Touri。关于 Godsil 提出的可控随机图猜想。*SIAM*控制与优化杂志，2016 年。doi: 10.1137/15M1049622。[20] A. Schwenk。几乎所有树都是余谱的。图论新方向，第 275–307 页，1973 年。[21] K. Tikhomirov。随机伯努利矩阵的奇异性。数学年刊，2020 年。doi: 10.4007/annals.2020.191.2.6。[22] E. Van Dam 和 W. Haemers。哪些图由其谱判定？线性代数及其应用，2003 年。doi: 10.1016/S0024-3795(03)00483-X。[23] O. Verbitsky 和 M. Zhukovskii。稀疏随机图的典范标记。*arXiv* 预印本 *arXiv:2409.18109v2*，2024 年。doi: 10.48550/arXiv.2409.18109。[24] W. Wang、F. Liu 和 W. Wang。几乎可控图的广义谱刻画。《欧洲组合学杂志》，2021 年。doi: 10.1016/j.ejc.2021.103348。[25]W. Wang、L. Qiu 和 Y. Hu。余谱图、GM切换与层级为 p 的正则有理正交矩阵。线性代数及其应用，2019 年。doi: 10.1016/j.laa.2018.10.027。[26] W. Wang 和 W. Wang。Haemers 猜想：一种算法视角。实验数学，2025 年。doi: 10.1080/10586458.2024.2337229。[27]W. Wang 和 C.-X. Xu。图族由其广义谱判定的一个充分条件。《欧洲组合学杂志》，2006 年。doi: 10.1016/j.ejc.2005.05.004。[28] W. Wang 和 D. Zhao。几乎所有图都不存在具有固定层级的同谱图。*arXiv* 预印本 *arXiv:2509.05781v1*，2025 年。doi: 10.48550/arXiv.2509.05781。