arXiv:2602.23080v1 [math.OA] 26 Feb 2026

非交换粗度量几何

AYOUB HAFID

东京大学数理科学研究科，日本东京目黑区驹场，邮编 *153-8914*

摘要。受粗几何以及 Roe 代数作为真度量空间大尺度不变量的经典作用启发，我们证明，Latr´emoli`ere 引入的真量子度量空间是非交换粗空间。这进一步使我们得以在 Latr´emoli`ere 的框架与量子度量空间的 W*-度量方法之间搭建桥梁。此外，我们为局部紧量子度量空间构造 Roe 代数，并验证它们在交换情形下可还原为经典 Roe 代数。我们还将这一框架应用于若干局部紧量子度量空间的例子，并证明它导出了自然的结论。最后，我们利用这一框架为局部紧量子度量空间引入高指标理论的概念。

1. 引言

1.1. 量子度量空间。 非交换几何的核心思想，是将几何和拓扑概念推广到非交换 C*-代数的情形。度量空间便是其中一种结构。定义非交换意义下度量空间的主要方法有两种：

Lipschitz 半范数方法： 第一种方法源自 Alain Connes [1]的工作，他将谱三元组引入为自旋流形的非交换对应物，并指出这一结构可用于在底层 C*-代数的态空间上构造度量。

事实上，若 $(\mathfrak{A},\ \mathrm{H},\ D)$ 是一个谱三元组，其中 $\mathfrak{A}$ 是表示在希尔伯特空间 H 上的 C*-代数，而 D 是“狄拉克算子”，即 H 上具有紧预解式的无界算子，那么交换子 $\|[D,a]\|$ 的范数具有 a的 Lipschitz 半范数的性质，并对应于自旋流形的经典情形 $(C(M),\ L^2(M,S),\ D)$。由此可在 $\mathfrak{A}$ 的态空间 $\mathrm{S}(\mathfrak{A})$ 上定义距离：

$$d(\mu,\nu)=\sup\{|\mu(a)-\nu(a)|:\ a\in\mathfrak{A},\|[D,a]\|\le 1\}.$$

这一方法由 Rieffel [2], 进一步公理化并加以发展；他在有单位的 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 上考虑任意 Lipschitz 半范数 L，从而引入了紧量子度量空间的概念。最近，Latr´emoli`ere [3] 将这一框架推广到局部紧量子

电子邮件地址：hafid@ms.u-tokyo.ac.jp。

度量空间。寻找紧量子度量空间与非紧量子度量空间的例子是一个活跃的研究领域，原因在于如下分析条件：距离 $d(\mu,\nu) = \sup\{|\mu(a) - \nu(a)| : a \in \mathfrak{A}, \|[D,a]\| \leq 1\}$ 应使态集的弱*拓扑度量化（对于局部紧量子度量空间，则是其某个子集）。

量子关系方法： Kuperberg 和 Weaver [4] 引入了一种不同的方法来定义非交换度量空间，该方法使用量子关系的概念。在这一框架下，冯·诺伊曼代数 M 上的量子关系被定义为其交换子 M'上的弱*闭算子双模。随后，Kuperberg 和 Weaver 将 M上的 W*-量子度量定义为一族弱*闭算子系统 $(\mathrm{V}_r)_{r\geq 0}$，其性质类似于度量空间上传播小于或等于 r 的算子。这种方法的自然例子包括量子图（例如量子扩张子），以及与量子计算中的量子纠错相关的构造。这些例子与 Lipschitz 半范数方法所产生的“几何”例子大不相同，因此有必要在这两种方法之间建立桥梁。

在 [4], 中，人们从这一概念出发，构造了与 Lip(X)（即 Lipschitz函数空间）相对应的空间，但其中存在一些技术上的微妙之处。此外，谱三元组也关联了一种 W*-量子度量结构。不过，这种方法与 Rieffel/Latr´emoli`ere 方法之间的联系尚未得到充分探讨。

1.2. **粗几何**。 [4] 的定义使人联想到经典情形中 Roe 代数的定义。这些代数是粗不变量（它们只关注底层空间的大尺度结构），并已得到广泛研究，且被用于指标理论、Novikov猜想以及度量空间 [5] [6]的粗性质。

因此，在经典情形中，我们有：

- 任何真度量空间都是粗空间。
- 对于任意粗空间，以及函数代数在希尔伯特空间上的一个表示，都可以与之关联一个 Roe 代数。

$$\text{真度量空间} \xrightarrow{\text{遗忘函子}} \text{粗空间} \xrightarrow[\text{(not a functor)}]{\text{Roe代数}} C^*\text{-代数}$$

基于上述讨论，我们希望将这一构造推广到非交换情形。Latr´emoli`ere [7], 在局部紧量子度量空间的框架下引入了真量子度量空间的概念；此外， [8]发展了非交换粗几何的概念。但这两个概念之间的联系尚未建立。

1.3. **Roe代数上的半范数：相对交换子**。再次，当 X 是度量空间时，有如下众所周知的不等式（例如参见 [6]）

$$\|[T,f]\| \leq 8\mathrm{prop}(T)\|T\|L(f),$$

其中 L 是 $f \in C_b(X)$ 的 Lipschitz 半范数， T 是有限传播算子。从某种意义上说，这个不等式表明 prop(T) $\|T\|$ 与 $L(f)$ 之间存在对偶性。更确切地说，如果我们定义：

$$L^*(T) = \sup\{\|[T, f]\| : f \in C_0(X), L(f) \leq 1\},$$

那么， L^* 是一个满足以下条件的半范数：

$$\|[T, f]\| \leq L(f)L^*(T)$$

并满足莱布尼茨不等式 $L^*(ST) \leq \|S\|L^*(T) + L^*(S)\|T\|$。

尽管 Roe 代数包含在由有限 L^* 半范数的局部紧算子生成的 C* 代数中，但反向包含通常并不成立；事实上，这种相等关系与 Roe 猜想密切相关，该猜想已于 [9]得到解决。这个半范数 L^* 在何种程度上与传播相关?

1.4. 结果总结。 在本文中，我们对上述问题／计划给出如下回答：

- **定理 3.5**：给定希尔伯特空间上的一个表示作为附加数据后，Latr´emoli`ere [3] 意义下的局部紧量子度量空间可导出 Kuperberg 和 Weaver [4]意义下的 W*-度量空间。

- **定理 4.5 和 4.7**：若再给定希尔伯特空间上的一个表示，则 W*-度量空间，进而局部紧量子度量空间，按照 [8] 的意义都是非交换粗空间。

- **定理 5.2 和 5.5**：对于经典度量空间，谱 Roe 代数和 Higson 紧化分别与经典概念一致。
- **第 5 节**：本文给出了局部紧量子度量空间的新例子：粗不交并和近交换局部紧量子度量空间；此外，还证明了近交换局部紧量子度量空间与其底层经典度量空间粗等价：定理 5.15。

- **定理 6.5**：可以为局部紧量子度量空间定义高指标；在对这些空间中元素的交换子的渐近行为作出进一步假设后，还可以为所有 K-同调类定义这一高指标。值得注意的是，这在关键上依赖于局部紧量子度量空间的基本刻画（定理 2.9）。

- **命题 6.1**：对于非幺谱三元组，无需额外假设即可定义狄拉克算子的高指标。

- **定理 3.16 与第6.3.1节**：作为与经典情形相关的一个附带结果，我们证明，对于具有所有尺度上有限维 （有限 Assouad-Nagata 维数）的经典度量空间，相对交换子 Lipschitz 半范数与有限传播本质上是相同的。

目录

1. 引言 1 1.1. 量子度量空间 1 1.2. 粗几何 2 1.3. Roe代数上的半范数：相对交换子 2 1.4. 结果综述 3 2. 预备知识 5 2.1. 局部紧量子度量空间 5 2.2. 非交换粗几何 8 2.3. W*-量子度量空间 10 3. Roe代数：传播与交换子半范数量子度量空间 11 3.1. 谱Roe代数 11 3.2. 相对交换子 Roe 代数 14 3.3. 相对于子代数的谱Roe代数与地形 Roe 代数 18 4. 广义 Higson 紧化 20 4.1. 谱 Higson 紧化 20 4.2. 相对交换子代数 Higson 紧化 22 5. 粗量子度量空间示例 22 5.1. 交换情形 22 5.2. 紧量子度量空间 26 5.3. 紧量子度量空间的粗不交并 27 5.4. 几乎交换Lipschitz三元组 29 5.5. 谱三元组中的狄拉克算子与有限利普希茨交换子半范数 35 6. 高指标理论 37 6.1. 取值于相对交换子Roe代数的指标 37 6.2. Lipschitz 控制 K 理论与定量 K 理论：有限 Assouad-Nagata 维数情形的比较 42 6.3. 取值于交换子代数的Roe代数的指标 42 7. 展望 45 7.1. 谱 Roe 代数计算的更多示例 45 7.2. （有限）W*-量子度量空间的几何实现 45 7.3. 谱三元组 46 7.4. 指标理论 46 7.5. L^*半范数 46 参考文献 46

致谢。作者谨向导师 KAWAHIGASHI Yasuyuki 教授致以诚挚谢意，感谢他一直以来的支持与鼓励。他也感谢 KUBOTA Yosuke 教授提出宝贵的意见和建议，大大改进了这项´ `工作。最后，他感谢 LATREMOLIERE Fr´ed´eric 教授在短期访问丹佛大学期间进行的富有启发性的讨论。本工作部分得到推动变革的前沿物理与数学计划的支持。

2. 预备知识

在此处及 之后，我们对所研究的对象采用以下记号约定：

– H、K 表示希尔伯特空间，– $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$、$\mathfrak{M}$.....表示 C*-代数（其对应的量子度量空间），– X 表示局部紧空间，– M 表示冯·诺伊曼代数。

以及这些对象上的以下标准构造记号：

– $\mathbb{B}$(H) 表示 H 上有界算子的集合，– $\mathbb{K}$(H) 表示 H 上紧算子的集合，– $\sigma(\mathfrak{M})$ 表示交换 C*-代数 $\mathfrak{M}$ 的盖尔范德谱，– $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 表示 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 的自伴部分，– $\mathfrak{u}\mathfrak{A}$ 表示 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 的单位化，– M ($\mathfrak{A}$) 表示 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 的乘子代数。

2.1. 局部紧量子度量空间。

紧量子度量空间的概念，是基于康托罗维奇提出的紧度量空间上概率测度之间的距离公式而定义的，并由 Connes 和 Rieffel 在 [2] 中加以研究。此概念后来由 Latr´emoli`ere 在 [3] 中推广至局部紧情形。这里我们介绍局部紧量子度量空间的定义。由于我们主要讨论真量子度量空间，本节及后续各节涉及的所有代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{M}$ 均假定为可分。量子度量空间（至少在其 C*-版本中）是通过赋予 C*-代数一个 Lipschitz 半范数来定义的。事实上，在经典情形中，Lipschitz 半范数可以恢复距离。

定义 2.1 (利普希茨对)。 一个利普希茨对 $(\mathfrak{A}, L)$由一个 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 及定义在 $\mathfrak{A}$ 的单位化 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$ 的自伴部分的稠密子空间 dom(L) 上的半范数L构成，满足：

$$\{a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}) : L(a) = 0\} = \mathbb{R}\mathbb{1}_{\mathfrak{u}\mathfrak{A}}$$

半范数 L 推广了度量空间上函数的 Lipschitz 半范数概念。给定一个利普希茨对（$\mathfrak{A}$, L），可以在 $\mathfrak{A}$ 的态空间 S($\mathfrak{A}$) 上定义一个度量：

$$\mathrm{mk}_L(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(a) - \nu(a)| \mid a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \leq 1\}$$

考察经典情形：对于紧度量空间，该度量使态空间上的弱*拓扑度量化；但对于局部紧度量空间，通常情况并非如此。这是因为从某种意义上说，测度可能逃逸至无穷远，从而阻碍序列紧性。相反，Dobrushin [10]证明，若将范围限制在满足紧性条件的测度集合上，那么蒙日-康托罗维奇度量就能使这些集合上的弱*拓扑度量化：

定理2.2 (Dobrushin [10])。 设$\mathcal{S}$ 是局部紧度量空间(X, d) 上的博雷尔概率测度集，且对于某个 $x_0 \in X$:

$$\lim_{r\to\infty} \sup\{\int_{x:d(x,x_0)>r} d(x, x_0)d\mu(x) : \mu \in \mathcal{S}\} = 0,$$

那么，蒙日-康托罗维奇度量mk_L 在$\mathcal{S}$上诱导弱*拓扑。

量子紧度量空间必须满足这样的条件：蒙日-康托罗维奇度量在态空间上诱导弱*拓扑；等价地，Lipschitz 半范数的单位球在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})/\mathbb{R}1$ 上的商范数下全有界。

定义2.3 （量子紧度量空间 [2]）。 量子紧度量空间是一个含幺Lipschitz对 $(\mathfrak{A}, L)$，使得蒙日-康托罗维奇度量 mk_L 在态空间 $\mathrm{S}(\mathfrak{A})$ 上诱导弱*拓扑。

文献 [2] 证明了，该定义等价于Lipschitz 半范数的单位球在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})/\mathbb{R}1$ 上的商范数下全有界。

类似地，在 [3] 中，局部紧量子度量空间被要求满足以下条件：蒙日-康托罗维奇度量在态空间的某些子集上诱导弱*拓扑，而这些子集推广了上述 Dobrushin 紧性条件。为此，引入了地形这一概念，以发挥指定某种极限$_{r\to\infty} * = 0$的作用。

定义2.4 （Lipschitz 三元组）。 Lipschitz 三元组是一个三元组（$\mathfrak{A}$， $\mathfrak{M}$， L），其中:

- （$\mathfrak{A}$， L）是一个利普希茨对，
- $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{A}$的一个阿贝尔 C*-子代数，称为地形，使得 $\mathfrak{M}$ 包含 $\mathfrak{A}$的一个近似单位，

地形 $\mathfrak{M}$ 发挥着指定 $\mathfrak{A}$ 中哪些元素在无穷远处消失的作用，并使得人们能够定义局部态。

定义2.5 （局部态 [3]）。 我们引入如下定义:

- 一个态 $\mu \in \mathrm{S}(\mathfrak{A})$ 是支撑于紧的 $K \subset \sigma(\mathfrak{M})$ 中的局部态，如果 $\mu(\chi_K) = 1$。若该条件成立，我们称 μ 属于 $\mathrm{S}(\mathfrak{A}|K)$。
- 局部态 的集合记为 $\mathrm{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{M})$:

$$\mathcal{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{M}) = \bigcup_{K\subset\sigma(\mathfrak{M}) \text{ compact}} \mathcal{S}(\mathfrak{A}|K).$$

我们定义驯顺 态空间 $\mathrm{S}(\mathfrak{A})$ 的子集，它们推广了 Dobrushin 紧性条件 .

定义 2.6（态空间 [3] 的温顺子集）。若存在某个（因而也对任意）局部态 $\mu \in \mathsf{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{M})$, 使得：则称子集 $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{S}(\mathfrak{A})$ 为温顺的：

$$\lim_{K\in\mathcal{K}(\sigma(\mathfrak{M}))} \sup\{|\varphi(a-\chi_K a\chi_K)|:\ \varphi\in\mathcal{S}, a\in\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}), L(a)\le 1, \mu(a)=0\} = 0.$$

有了这些概念，我们现在可以定义局部紧量子度量空间。

定义 2.7（局部紧量子度量空间 [3]）。若 Lipschitz 三元组（$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, L）满足蒙日-康托罗维奇度量 mk_L 在态空间 $\mathsf{S}(\mathfrak{A})$ 的任意温和子集上诱导弱*拓扑，则称其为局部紧量子度量空间。

注 2.8。注意，对任意紧 Kin $\sigma(\mathfrak{M})$，局部态集 $\mathsf{S}(\mathfrak{A}|K)$ 都是温和的。因此，蒙日-康托罗维奇度量在 $\mathsf{S}(\mathfrak{A}|K)$ 上诱导弱*拓扑，尤其是：

$$\mathrm{diam}(\mathcal{S}(\mathfrak{A}|K), \mathrm{mk}_L) < \infty.$$

满足此条件的 Lipschitz 三元组称为正则。

将 [2], [3] 中紧量子度量空间的刻画推广，可通过某些集合的全有界性来刻画局部紧量子度量空间。

定理 2.9（参见 [3]）。*Lipschitz* 三元组（$\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L$）是局部紧量子度量空间，当且仅当以下等价条件之一成立：

- 对于所有局部态 $\mu \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{M})$ 以及所有紧支撑的 $s, t \in \mathfrak{M}$，集合：

$$\{sat \mid a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \le 1, \mu(a) = 0\}$$

  在 $\mathfrak{A}$ 的范数拓扑下是全有界的。
- 存在一个局部态 $\mu \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{M})$，使得对于所有紧支撑的 $s, t \in \mathfrak{M}$，集合：

$$\{sat \mid a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \le 1, \mu(a) = 0\}$$

  在 $\mathfrak{A}$ 的范数拓扑下是全有界的。
- （仅当 $\mathfrak{A}$ 可分时）存在一个局部态 $\mu \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{M})$ 和一个严格正元素 $h \in \mathfrak{M}$，使得集合：

$$\{hah \mid a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \le 1, \mu(a) = 0\}$$

  在 $\mathfrak{A}$ 的范数拓扑下是全有界的。

注2.10。特别是，本文中的所有利普希茨三元组都假定为可分的（因为我们将研究适当量子度量空间，见下文）。

Re回想一下，在经典情形中，Lipschitz 半范数满足 Leibniz 条件 :

$$L(fg) \le \|f\|L(g) + L(f)\|g\|.$$

量子情形中也考虑过这一条件。

定义 2.11（莱布尼茨-利普希茨对 [7]）。莱布尼茨-利普希茨对是满足以下条件的利普希茨对 $(\mathfrak{A}, L)$：

- 定义域 $\mathrm{dom}(L)$ 是 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{uA})$ 的约当-李子代数，即它在约当括号 $a \circ b = \frac{ab+ba}{2}$ 和李括号 $\{a,b\} = \frac{ab-ba}{2i}$ 下封闭，
- 对所有 $a, b \in \mathrm{dom}(L)$，我们有：

$$L(a \circ b) \leq \|a\|L(b) + L(a)\|b\|,$$
$$L(\{a,b\}) \leq \|a\|L(b) + L(a)\|b\|.$$

由于粗几何中所考虑的空间是真度量空间，我们需要给出量子度量空间的真性定义。

用 $\mathfrak{Loc}(\mathfrak{A}, *)$ 表示局部元素的集合：

$$\mathfrak{Loc}(\mathfrak{A}, *) = \bigcup_{K \subset \sigma(\mathfrak{M}) \text{ compact}} \mathfrak{sa}(\chi_K \mathfrak{A} \chi_K) \cap \mathrm{dom}(L).$$

定义 2.12（局部紧真量子度量空间 [3]）. 局部紧量子度量空间 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 称为真，如果

- $\mathfrak{A}$ 是可分的，
- $(\mathfrak{A}, L)$ 是一个莱布尼茨-利普希茨对，
- L 关于 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 上的范数拓扑是下半连续的，
- $\mathfrak{Loc}(\mathfrak{A}, *) \cap \mathrm{dom}(L)$ 在 $\mathrm{dom}(L)$ 中范数稠密，
- $\mathfrak{Loc}(\mathfrak{A}, *) \cap \mathrm{dom}(L) \cap \mathfrak{M}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中范数稠密，
- $(\sigma(\mathfrak{M}), \mathrm{mk}^{L|_{\mathfrak{M}}})$ 由 $(\mathfrak{M}, L|_{\mathfrak{M}})$ 诱导的度量是真度量空间，即所有闭球都是紧的。（注意，根据上述条件，$L|_{\mathfrak{M}}$ 在 $\mathfrak{M}$ 上稠密定义。）

[3]中还引入了一种更严格、更易处理的适当性概念，称为强适当性。

定义 2.13（强适当量子度量空间 [3]）。若局部紧量子度量空间 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 满足以下条件，则称其为强正规：

- L 可以扩展到 $\mathfrak{A}$的一个稠密子集，使得：

$$L(ab) \leq \|a\|L(b) + L(a)\|b\|.$$

- $\mathfrak{A}$ 可分且 L 下半连续，
- $\{m \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{M}) \mid L(m) < \infty\}$，
- 存在一个近似单位 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathfrak{M}$，满足 $\mathfrak{A}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\|e_n\| \leq 1$，$e_n \in \chi_{K_n} \mathfrak{A} \chi_{K_n}$对于某个紧 $K_n \subset \sigma(\mathfrak{M})$，且 $\lim_{n\to\infty} L(e_n) = 0$。

2.2. **非交换粗几何**。

定义 2.14（非交换粗几何 [8]）。非交换粗空间 是一个有序对 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$，其中 $\mathfrak{A}$ 是一个 C^*-代数，而 $\mathfrak{A}$ 是乘子代数 $\mathrm{M}(\mathfrak{A})$ 的一个含有 $\mathfrak{A}$ 的含幺 C^*-子代数。

备注 2.15。 上述数据等价于一个含幺 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 的数据，其中 $\mathfrak{A}$ 是一个本质理想。

在上文中，代数 $\mathfrak{A}$ 扮演“缓慢振荡函数”代数的角色，并推广了交换情形中的 Higson 紧化。该对编码了非交换空间的大尺度（粗几何）几何。下面我们回顾作为动机的经典情形中的精确陈述，更多细节请参阅 [11] 和 [8] 。

定义 2.16 （Higson 紧化）。 对于适当粗空间 X :

- 缓慢振荡函数的代数由下式给出：$Ch(X) = \{ f \in C_b(X) : \mathbf{d}f$在受控集上于无穷远处消失$\}$。其中 $\mathbf{d}f(x,y) = f(x) - f(y)$ 对所有 $(x,y) \in X \times X$。
- $Ch(X)$ 的谱称为 X的 Higson 紧化，并记为 hX。
- 在真度量空间（X， d）的情形中，该定义可以写得更为显式，并且有:

$$C^h(X) = \{f \in C_b(X) : \forall R > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists K \subset X \text{ compact}, \\ \forall x, y \notin K, d(x,y) \le R \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\}.$$

此外，若从局部紧空间 X 的紧化 $\overline{X}$ 出发，则可在 X 上定义一种粗结构，记为 $t\overline{X}$：当且仅当 E 中的网 (x_i, y_i) 收敛到 ∂X 时彼此相互收敛，即若 $x_i \to \omega \in \partial X$，则 $y_i \to \omega$ 也成立，才称子集 $E \subset X \times X$ 为受控集。

文献 [11], [8] 证明，在真度量空间的情形下，这两种构造互为逆构造。也就是说，从真度量空间 X 出发，由 Higson 紧化诱导的粗结构与度量所给出的粗结构一致；而从局部紧空间 X 的紧化 $\overline{X}$ 出发，由 X 诱导的粗结构的 Higson 紧化与 $\overline{X}$ 一致。这启发了非交换定义：固定一个缓慢振荡函数代数的类似物，并以此为基础进行定义。

尽管这两种构造在某种意义上彼此等价，但由考虑紧化拓扑空间（相对于某种自然的紧化，例如考虑带边流形时）所得到的粗结构，与由度量粗结构所得到的粗结构可能大不相同。例如，对带通常度量的 $\mathbb{R}$，与度量粗结构相联系的 Higson 紧化就不是第二可数的。若局部紧黎曼流形 M 可视为带边紧流形 $\overline{M}$ 的内部，则由紧化 $\overline{M}$ 诱导的粗结构通常不同于度量粗结构。两者之间的相互作用可能带来有趣的结果，尤其是在指标理论中，例如参见 [12]。

示例 2.17 （欧几里得平面）。 考虑 $\mathbb{R}^2$，那么可以得到两个粗结构 s:

- 由通常的欧几里得度量导出的度量粗结构。

- 由紧化 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{D}^2$ 诱导的粗结构。其中 $\mathbb{D}^2$ （分别为 $\mathbb{D}^2$）是闭（分别为开）单位圆盘。

在 [8] 中，我们考察了非交换粗结构的两种构造 ：

- 一种是从局部紧群在 C^*-代数上的连续平方可积余紧作用得到的。这推广了这样一个事实：局部紧群在局部紧空间 X 上的余紧作用 G 会在 X上诱导出粗结构，使X 与 G粗等价。这种构造令人联想到 $\mathbb{R}^2$上的度量粗结构：考虑 $\mathbb{R}^2$ （或 $\mathbb{Z}^2$）通过平移作用于 $\mathbb{R}^2$ 的情形即可看出这一点；不过，这种构造是从群作用出发，而非从度量出发。

- 另一种是从 X, X的 Rieffel 变形得到的，它同样配备了 G的连续作用。其主要例子是 Moyal 平面，它由$\mathbb{R}^2$的 Rieffel 变形得到；此外还有 $\mathbb{D}^2$的 Rieffel 变形。因此，这种构造令人联想到上文所述的第二种粗结构。

本文采用一种不同的方法，因为我们从量子度量空间出发。具体而言，我们受到 Moyal 平面这一情形的启发：在这里，我们可以从 [3], 中构造的量子度量结构出发，而不是从 Rieffel 变形出发；这令人联想到 $\mathbb{R}^2$上的度量粗结构。将这种方法与 [8] 中为概念化 Moyal 平面上的某些指标计算而考察的 Moyal 平面“拓扑粗结构”进行比较，将是未来研究中一个有趣的问题。

2.3. **W*量子度量空间**。 Kuperberg 和 Weaver 在 [4] 中引入了冯·诺伊曼代数框架下量子度量空间的概念，其灵感来源于有限传播算子的概念。下面回顾其中一些定义。

定义 2.18 （W*-滤过 [4]）。 $\mathbb{B}(\mathrm{H})$ 的一个W^*-滤过 是对偶算子系统（即弱*闭自伴单位子空间）$\mathrm{V} = (\mathrm{V}_r)_{r\geq 0}$的族，且满足：

（1） $\forall r,\ s \geq 0,\ \mathrm{V}_r \cdot \mathrm{V}_s \subseteq \mathrm{V}_{r+s}$,

（2） $\forall r \geq 0,\ \mathrm{V}_r = \bigcap_{s>r} \mathrm{V}_s$。

定义 2.19 （W*量子度量空间 [4]）。 W*量子伪度量空间是指满足以下条件的冯·诺伊曼代数 $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}(\mathrm{H})$： $\mathbb{B}(\mathrm{H})$ 具有一个 W*-滤过 $\mathrm{V} = (\mathrm{V}_r)_{r\geq 0}$，使得 $\mathrm{M}' \subseteq \mathrm{V}_0$。如果进一步有 $\mathrm{M}' = \mathrm{V}_0$, ，则称 (M, V) 为 W*量子度量空间。

直观上，V_r 中的元素是传播至多为 r的算子。在交换离散情形下，若 X是一个度量为 d的离散度量空间，且 $\mathrm{H} = l^2(X)$，则可以定义：

$$\mathcal{V}_r^d = \{T \in \mathbb{B}(l^2(X)) : d(x, y) > r \Rightarrow \langle T\delta_x, \delta_y \rangle = 0\}.$$

那么（$l^\infty(X)$，V^d）是一个 W*量子度量空间。V_0是传播为 0 的算子，即乘法算子。

如果 M 分别表示在两个希尔伯特空间 H_1 和 H_2，上，那么 [4] 表明，$\mathbb{B}(H_1)$ 和 $\mathbb{B}(H_2)$ 上的 W*-滤过之间存在一一对应关系，使得 $(M, V^{(1)})$ 和 $(M, V^{(2)})$ 成为 W*量子度量空间。因此，W*量子度量空间的概念不依赖于表示。

此外，[4] 定义了 W*量子度量空间自反性的如下概念 s.

定义 2.20（自反 W*量子度量空间 [4]）。若对所有 $r \geq 0$，V_r 作为对偶算子空间都是自反的，则称 W*量子度量空间 (M,V) 是自反的，即：

$$\mathcal{V}_r = \{B \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \mid P\mathcal{V}_r Q = 0 \implies PBQ = 0\}$$

注意到，M 中的投影可以根据 W*-滤过赋予一种距离概念，因此该定义很有用，因为它使我们能够从 M 中投影之间的距离恢复 W*-滤过。

3. Roe 代数：传播与交换子半范数量子度量空间

记号 3.1（设定）。本节中我们统一采用以下记号：

- $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 是一个适当局部紧量子度量空间。
- $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$的一个子集。
- $\rho: \mathfrak{A} \to \mathbb{B}(H)$ 是 $\mathfrak{A}$ 在希尔伯特空间 H 上的忠实非退化表示。
- 作为一种记号上的滥用，若 a 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个元素，且我们认为这样做不会造成混淆，则将 a 记作 $\rho(a)$。

记号 3.2（$\sigma(\mathfrak{M})$上的距离）。若 $\mathfrak{M} = C_0(\sigma(\mathfrak{M}))$赋予 Lipschitz 半范数 $L|_{\mathfrak{M}}$的限制，则 $\sigma(\mathfrak{M})$是一个度量空间，其通常距离记为：

$$d(x, y) := \mathrm{mk}_{L|_{\mathfrak{M}}}(\delta_x, \delta_y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in \mathfrak{M} \cap \mathrm{dom}(L), L(f) \leq 1\}.$$

特别地，由于 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 是真度量空间，$(\sigma(\mathfrak{M}), d)$ 是一个真度量空间。

更一般地，如果 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的交换子代数，我们用 $d_{\mathfrak{B}}$ 表示 $\sigma(\mathfrak{B})$ 上由 L 限制到 $\mathfrak{B}$ 所定义的距离。

3.1. **谱Roe代数**。对于局部紧量子度量空间 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 及其表示 $\rho: \mathfrak{A} \to \mathbb{B}(H)$，我们将定义谱 Roe 代数的概念。

3.1.1. 定义及其初步性质。

定义 3.3（谱传播）。设 $T \in \mathbb{B}(H)$。我们称 T 的谱传播小于或等于 R，如果：

对于所有满足 $L(a) \leq 1$的 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$：

$$\chi_{(-\infty,0]}(a) T \chi_{(R,+\infty)}(a) = 0$$

我们将 $\mathrm{prop}(T)$ 定义为最小的此类 R：

$$\mathrm{prop}(T) = \inf\{R \in \mathbb{R}_+ : T \text{ 传播小于或等于 } R\}$$

此外，令

- B^* 表示有限传播算子集合的闭包，
- B_R^* 表示传播小于或等于 R 的算子集合。

注 3.4。通过应用仿射变换，具有小于或等于 R 的谱传播的 T 等价于：

$$a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \leq C \implies \chi_{(-\infty,\alpha]}(a) T \chi_{(\beta,+\infty)}(a) = 0, \quad \text{whenever } \beta - \alpha > CR.$$

于是我们得到以下性质：

命题 3.1。对于算子 $T, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$，有以下结论：

(1) $\mathrm{prop}(T+S) \leq \max(\mathrm{prop}(T), \mathrm{prop}(S))$，*(2)* $\mathrm{prop}(TS) \leq \mathrm{prop}(T) + \mathrm{prop}(S)$，*(3)* $\mathrm{prop}(T^*) = \mathrm{prop}(T)$。

此外，对所有 $R > 0$：

(4) B_R^* 是 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 中的一个算子系统，且在弱算子拓扑下闭。*(5)* $B_R^* = \bigcap_{R'>R} B_{R'}^*$、*(6)* $B_0^* = \mathfrak{A}'$：零传播的元素恰好是 $\mathfrak{A}$ 的交换子中的元素。

证明。**(1)**：假设 $\mathrm{prop}(T) \leq R$ 且 $\mathrm{prop}(S) \leq R$。令 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$ 满足 $L(a) \leq 1$，则：

$$\chi_{(-\infty,0]}(a) T \chi_{(R,+\infty)}(a) = 0, \quad \chi_{(-\infty,0]}(a) S \chi_{(R,+\infty)}(a) = 0,$$

因此：

$$\chi_{(-\infty,0]}(a)(T+S)\chi_{(R,+\infty)}(a) = 0.$$

(2)：假设 $\mathrm{prop}(T) \leq R_1$ 且 $\mathrm{prop}(S) \leq R_2$。令 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$ 满足 $L(a) \leq 1$，则：

$$\chi_{(-\infty,0]}(a) TS \chi_{(R_1+R_2,+\infty)}(a) = \chi_{(-\infty,0]}(a) T \chi_{(-\infty,R_1]}(a) S \chi_{(R_1+R_2,+\infty)}(a) = 0$$

由于 $\chi_{(-\infty,0]}(a)T = \chi_{(-\infty,0]}(a)T\left(\chi_{(-\infty,R_1]}(a) + \chi_{(R_1,+\infty)}(a)\right) = \chi_{(-\infty,0]}(a)T\chi_{(-\infty,R_1]}(a)$，这是由 T 上的传播条件得到的；而 $\chi_{(-\infty,R_1]}(a)S\chi_{(R_1+R_2,+\infty)}(a) = 0$，这是由 S 上的传播条件得到的。

(3)：事实上 $\chi_{(-\infty,0]}(a)T^*\chi_{(R,+\infty)}(a) = \chi_{(R,+\infty)}(a)T\chi_{(-\infty,0]}(a)$，对 a 应用仿射变换即可得出结论。

(4)：由上述性质可知，B_R^* 是一个含幺算子系统。设 $(T_i)_i$ 是 B_R^* 中的一个网，并且在弱*拓扑下收敛于 T。对于满足 $L(a) \leq 1$的 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$，以及 $\xi, \eta \in \mathrm{H}$，我们有：

$$0 = \langle \eta, \chi_{(-\infty,0]}(a) T_i \chi_{(R,+\infty)}(a)\xi \rangle \underset{i}{\to} \langle \eta, \chi_{(-\infty,0]}(a) T \chi_{(R,+\infty)}(a)\xi \rangle .$$

(5)：事实上，如果 $T \in \bigcap_{R'>R} B^*_{R'}$，那么对于所有满足 $L(a) \leq 1$ 的 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$，以及所有 $\eta \in \mathrm{H}$ 和 $R' > R$：

$$\chi_{(-\infty,0]}(a)T\chi_{(R',+\infty)}(a)\eta = 0$$

取极限 $R' \to R$，由博雷尔函数演算从逐点收敛到强算子拓扑连续，且 $\chi_{(R',+\infty)}(a)$ 逐点收敛到 $\chi_{(R,+\infty)}(a)$，可得：

$$\chi_{(-\infty,0]}(a)T\chi_{(R,+\infty)}(a)\eta = 0.$$

(6)：若 $T \in B^*_0$，则由下文的命题 3.3 可知，对于所有 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$：$[T, a] = 0$（因为按照命题 3.3 的记号，$L^*(T) = 0$），因此 $T \in \mathfrak{A}'$。反向包含显然：$\chi_{(-\infty,0]}(a)T\chi_{(R,+\infty)}(a) = \chi_{(-\infty,0]}(a)\,\chi_{(R,+\infty)}(a)T = 0$。□

回顾一下，对于 $\mathfrak{A}$，我们用 $\mathfrak{A}^{**}$ 表示包络冯·诺依曼代数。若 ρ 是 $\mathfrak{A}$ 的忠实非退化表示，则 $\mathfrak{A}^{**}$ 可视为 $\rho(\mathfrak{A})''$，即由 $\rho(\mathfrak{A})$ 生成的 W^*-代数。根据上述讨论，我们得到以下推论；它本质上是对定义的重述。

定理 3.5. 若 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 是局部紧量子度量空间，则族 $(B^*_R)_R$ 在 $\mathfrak{A}^{**}$ *[4]* 上定义了一个 W^*-量子度量。

此外，该量子度量是自反的。

自反性的证明。我们需要证明：若 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$ 满足：若：

$$PB^*_R Q = \{0\} \implies PTQ = 0, \text{ for all projections } P, Q \in \mathfrak{A}^{**}, \tag{3.1}$$

则 T 属于 B^*_R。

设 T 满足 3.1，并令 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$ 使得 $L(a) \leq 1$。若记 $P = \chi_{(-\infty,0]}(a)$ 与 $Q = \chi_{(R,+\infty)}(a)$，则由谱传播的定义，$PB^*_R Q = \{0\}$，从而由 3.1：

$$\chi_{(-\infty,0]}(a)T\chi_{(R,+\infty)}(a) = 0.$$

因此 $T \in B^*_R$。 □

回顾一下，如果对所有 $a \in \mathfrak{A}$，$Ta \in \mathbb{K}(\mathrm{H})$ 和 $aT \in \mathbb{K}(\mathrm{H})$ 均成立，则称算子 T 是局部紧的。

定义 3.6（谱 Roe 代数）。与 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 和 ρ 相关联的谱 Roe 代数，是由局部紧有限传播算子生成的 C^*-代数。

$$C^*_{\mathrm{spec}}(\mathfrak{A}) = \overline{\{T \in \mathbb{B}(\mathrm{H}):\ T \text{具有有限谱传播，且 T 是局部紧的}\}}。$$

此外，我们将由与 $\mathfrak{A}$ 模紧算子交换的有限谱传播算子生成的 C^* 代数记为 $D^*_{\mathrm{spec}}(\mathfrak{A})$。

3.2. **相对交换子 Roe 代数**。

定义 3.7 (交换子半范数)。 对于 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$，我们将 T关于 $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{M},\ L)$ 的交换子半范数定义为:

$$L^*(T) = \sup\{\|[T,a]\| :\ a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}), L(a) \le 1\}.$$

备注 3.8。 于是有

$$\|[T,a]\| \le L^*(T)L(a) \quad \text{for all } a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}).$$

命题 3.2. 对于算子 $T, S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$和标量 λ，有如下结论:

(1) $L^*(\lambda T) = |\lambda| L^*(T)$,*(2)* $L^*(T+S)$
$\le L^*(T) + L^*(S)$,*(3)* $L^*(TS)$
$\le \|T\| L^*(S) + \|S\| L^*(T)$,*(4)* $L^*(T^*)$
$= L^*(T)$.

证明。 1、2 和 4 由范数的相应性质以及交换子是双线性的这一事实得出，并且 $[T^*,a] = [T,a]^*$。

3 由这一事实得出: $[TS,a] = T[S,a] + [T,a]S$。 □

命题 3.3 (从谱交换子到相对交换子)**.** 设 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 是表示在$\mathcal{H}$上的局部紧量子度量空间，则对于任意 $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$:

$$L^*(T) \le 3\mathrm{prop}(T)\|T\|$$

证明。 我们证明，对于满足 $L(a) \le 1$的 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$，记 $R = \mathrm{prop}(T)$，有 $\|[T,a]\| \le 3R\|T\|$。

固定如下对象:

- $(\alpha_i)_i$ 一个实数序列，使得: $\alpha_{i+1} - \alpha_i = R$,
- $(\lambda_i)_i$ α_i 和 α_{i+1} 的中位数: $\lambda_i = (\alpha_i + \alpha_{i+1})/2$,
- $(\chi_i)_i$ 是由 $\mathfrak{A}^{**}$ 定义的元素: $\chi_i = \chi_{[\alpha_i, \alpha_{i+1})}(a)$,
- a' 是元素: $a' = \sum_i \lambda_i \chi_i$

于是我们有:

$$\|a - a'\| \le R/2.$$

因此:

$$\|[T,a]\| \le \|[T,a']\| + \|[T,a-a']\| \le \|[T,a']\| + R\|T\|. \tag{3.2}$$

根据谱传播的定义，我们有 $\chi_i T = \chi_i T(\chi_{i-1} + \chi_i + \chi_{i+1}), T\chi_i = (\chi_{i-1} + \chi_i + \chi_{i+1}) T\chi_i$，因此:

$$\begin{aligned}[T,a'] &= \sum_i \lambda_i [T,\chi_i] = \sum_i (\lambda_i \chi_{i-1} T\chi_i - \lambda_i \chi_i T\chi_{i-1}) - \sum_i (\lambda_i \chi_i T\chi_{i+1} - \lambda_i \chi_{i+1} T\chi_i) \\ &= \sum_i (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\chi_{i-1} T\chi_i - \chi_i T\chi_{i-1}) = R\sum_i (\chi_{i-1} T\chi_i - \chi_i T\chi_{i-1}).\end{aligned}$$

由于求和式 $\sum_i \chi_{i-1} T \chi_i$ 和 $\sum_i \chi_i T \chi_{i-1}$ 中的各项彼此正交，因此我们有：

$$\|[T, a']\| \le 2R\|T\|. \tag{3.3}$$

结合 (3.2) 和 (3.3)，我们得到所需结果：$\|[T, a]\| \le 3R\|T\|$。

□

定义 3.9 (相对交换子 Roe 代数)。与 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 和 ρ 相关联的相对交换子 Roe 代数，是由具有有限交换子半范数的局部紧算子生成的 C^*-代数。

$$C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A}) = \overline{\{T \in \mathbb{B}(\mathrm{H}): \quad T\text{具有有限交换子半范数且 } T\text{是局部紧算子}\}}。$$

此外，我们用 $D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$ 表示由具有有限交换子半范数且与 $\mathfrak{A}$ 模紧算子交换的算子生成的 C* 代数。

3.2.1. 有限渐近维数：代数相等。在这一部分，作为动机，我们聚焦于经典情形，并回顾 [9], 第 4 节中介绍的方法，将其改写到我们的语境中，以说明有限渐近维数如何导致谱 Roe 代数与相对交换子 Roe 代数相等。事实上，那里证明的相等关系适用于一个更大的代数，即所谓的拟局部代数 $C^*_q(X)$，它包含相对交换子 Roe 代数。一般而言，我们有如下包含关系：

$$C^*_{\mathrm{spec}}(X) \subset C^*_{\mathrm{comm}}(X) \subset C^*_q(X).$$

其中：

定义 3.10 （拟局部算子）。若算子 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $R > 0$，使得对所有 f， $g \in C_b(X)$ 满足 $d(\mathrm{supp}(f), \ \mathrm{supp}(g)) > R$，则称其为拟局部算子：

$$\|fTg\| \le \varepsilon \|f\| \|g\|.$$

拟局部　算子局部代数 $C^*_q(X)$ 是局部紧拟局部算子构成的 C*-代数　　.

定义 3.11 （渐近维数）。对于真度量空间 X，当且仅当对每个 $R > 0$，都存在 $D = D(R) < \infty$，以及由直径为 $\le D$ 的集合组成的 X 的覆盖 U，使得每个半径为 R 的球至多与 U 中 $n+1$ 个成员相交（即 U 的 R-重数为 $\le n+1$），此时称 $\mathrm{asdim}\, X \le n$。

定理 3.12 （结果的一种变体，见 [9]）。设 (X, d) 是一个真度量空间，满足渐近维数 $X \le n$。那么对于任意表示 ρ： $C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathrm{H})$，有：

$$C^*_{\mathrm{spec}}(X) = C^*_{\mathrm{comm}}(X).$$

（事实上，更一般地，$C^*_{\mathrm{spec}}(X) = C^*_q(X)$。）

该定理的证明依赖于 [9] 中推论 4.3 的以下版本。

引理 3.13. 设 (X,d) 是真度量空间，$T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ 且 $(e_j)_j$ 是 $C_b(X)$ 中的一族正压缩算子，具有 R-不相交支撑，并设 $e := \sum_j e_j$，则：

$$\|eTe - \sum_j e_j T e_j\| \le \frac{2}{R} L^*(T).$$

下面的截断过程使我们能够将具有有限交换子半范数的算子近似为有限传播算子之和。由于我们将在 Assouad-Nagata 维数有限这一更强的控制情形中使用该过程，因此将其表述为一个引理。

引理 3.14。设 (X,d) 为一个真度量空间，$\varepsilon > 0, R > 0$ 且 $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$。此外，设 $\mathcal{U}$ 为一个一致有界直径的覆盖 D，其 R-重数小于或等于 $n+1$。

那么，对于 $0 \le i, i' \le n$，存在 $T_{ii'}$，使得：

- 下面的近似不等式成立：

$$\|T - \sum_{i,i'} T_{ii'}\| \le 16(n+1)^2 \frac{L^*(T)}{R}.$$

- 这些 $T_{ii'}$ 的传播均小于或等于 $R/2 + D$。
- 更准确地说，每个 $T_{ii'}$ 都具有 $\sum_k e_k g T g' e_k$ 的形式，其中 g, g' 是 $C_b(X)$ 中的某些压缩算子，并且存在一族 $4/R$-利普希茨正收缩算子 $(e_k)_k$，它们属于 $C_b(X)$ 且具有不相交支撑，使得每个 e_k 的支撑都包含于某个集合 $B_{3R/8}(U)$ 中，其中 $U \in \mathcal{U}$。

证明。取 $\mathrm{U}_{(0)}, \dots, \mathrm{U}_{(n)}$ 为 U 的一个划分，使得每个 $\mathrm{U}_{(i)}$ 两两 R-分离。记 $\mathrm{U}_{(i)} = \{U_j^{(i)}\}_j$，并令 $(e_j^{(i)})_{j,i}$ 为从属于 U 的单位分解，使得每个 $e_j^{(i)}$ 都是一个 $4/R$-利普希茨正压缩算子，且 $e_j^{(i)}$ 的支撑包含于 $B_{R/4}(U_{(i)j})$。那么，对每个固定的 i，$\{e_j^{(i)}\}_j$ 的支撑两两 $(R/2)$-分离。

对每个 $i \in \{0, \dots, n\}$，定义 $e^{(i)} = \sum_j e_j^{(i)}$。于是：

$$T = \sum_{ii'} e^{(i)} T e^{(i')}.$$

对于情形 $i = i'$，由上面的引理 3.13 可得：

$$\|e^{(i)} T e^{(i)} - \sum_j e_j^{(i)} T e_j^{(i)}\| \le 4 \frac{L^*(T)}{R}.$$

注意，由于每个 $e_j^{(i)}$ 的支撑都包含于 $B_{R/4}(U_{(i)j})$，T_{ii} 的传播小于或等于 $R/4 + D$。

对于 $i \ne i'$ 的情形，我们将采用与上文类似的推理，并将其应用于族 $(B_{3R/8}(U_{(i)j}) \cap B_{3R/8}(U_{(i')j'}))_{j,j'}$，同时利用该族是一个 $R/4$-不交族这一事实。

对每个 j，令 $p_j^{(i)}$ 为与 $e_j^{(i)}$ 的支撑相关联的示性函数，并令 $p^{(i)} := \sum_j p_j^{(i)}$，则：

$$e^{(i)} T e^{(i')} = p^{(i)} e^{(i)} T e^{(i')} p^{(i')}$$

因此，根据 $L^*(T)$ 的定义以及 $L(e^{(i)}) \leq 4/R$ 这一事实，我们有：

$$\|e^{(i)}Te^{(i')} - p^{(i)}e^{(i')}Te^{(i)}p^{(i')}\| \leq \frac{8}{R}L^*(T). \tag{3.4}$$

对于每个 j, j'，存在 $f_{j,\ j'}$，它是一个 $8/R$-利普希茨正压缩算子，在 $B_{R/4}(U_{(i)j}) \cap B_{R/4}(U_{(i')j'})$ 上取值为 1，且支撑于 $B_{3R/8}(U_{(i)j}) \cap B_{3R/8}(U_{(i')j'})$ 中。若令 $f = \sum_{j,\ j'} f_{j,\ j'}$，则：

$$fp^{(i)}e^{(i')} = p^{(i)}e^{(i')}$$
$$e^{(i)}p^{(i')}f = e^{(i)}p^{(i')},$$

由引理 3.13，因 $f_{j,\ j'}$ 的支撑两两 $R/4$-不交：

$$\|fp^{(i)}e^{(i')}Te^{(i)}p^{(i')}f - \sum_{j,j'} f_{j,j'}p^{(i)}e^{(i')}Te^{(i)}p^{(i')}f_{j,j'}\| \leq \frac{8}{R}L^*(T). \tag{3.5}$$

结合 3.4 和 3.5，可得：

$$\|e^{(i)}Te^{(i')} - \sum_{j,j'} f_{j,j'}e^{(i)}\hat{e}^{(i')}T\hat{e}^{(i)}e^{(i')}f_{j,j'}\| \leq \frac{16}{R}L^*(T).$$

令 $\sum_{j,\ j'} f_{j,\ j'}e^{(i)}\hat{}e^{(i')}T\hat{}e^{(i)}e^{(i')}f_{j,\ j'} =: T_{ii'}$，注意到其传播小于或等于 $3R/8 + D$，再加上对应于 i 和 i' 的 $(n+1)^2$ 项，即完成证明。

□

由上述引理可得结论。

定理 *3.12* 的证明。设 $T \in C^*_{\mathrm{comm}}(X)$ 的 L^*-半范数有限，且 $\varepsilon > 0$。由上述引理，若我们选取 $R > 16(n+1)^2 L^*(T)\varepsilon$，并将 X 分解为 $n+1$ 个集合族，每个集合族中的集合两两 R-不交，则由引理 3.13 可知，存在 $T_{ii'}$，对于 $0 \leq i, i' \leq n$ 使得：

- 以下逼近不等式成立：
$$\|T - \sum_{i,i'} T_{ii'}\| \leq \varepsilon.$$
- $\sum_{i,i'} T_{ii'}$ 的传播不超过 $R/2 + D$。
- $\sum_{i,i'} T_{ii'}$ 是局部紧的。

取 $\varepsilon \to 0$ 可知，T 属于 $C^*_{\mathrm{spec}}(X)$。 □

3.2.2. *Assouad-Nagata* 维数：通过交换半范数控制传播。首先，我们回顾 Assouad-Nagata 维数的定义，其表述方式与渐近维数的定义相似。不同之处在于，可以控制划分空间所得各集合的直径。

定义 3.15（Assouad-Nagata 维数）**.** 对于真度量空间 X，我们称 $\dim_{AN} X \leq n$ 当且仅当存在常数 $C > 0$，使得对每一个 $R > 0$，都存在 X 的一个覆盖 U，该覆盖由直径小于或等于 CR 的集合组成，并且每个半径为 R 的球至多与 U 的 $n+1$ 个成员相交（即 U 的 R-重数为 $\leq n+1$）。

在这种情况下，我们可以如下看出，交换半范数在相差扰动的意义下控制传播。这可以看作我们先前所见事实 $L^*(T) \leq 3\mathrm{prop}(T)\ \|T\|$. 的一种较弱的逆命题。

定理 3.16. 设 (X, d) 是一个真度量空间，满足 维数$_{AN}$ $X \leq n$。那么存在常数 $C > 0$ （仅依赖于 X），使得对于任意算子 $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ 和 $\alpha > 0$，都存在$T' \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$，使得：

$$\|T - T'\| < \alpha,$$
$$\mathrm{prop}(T') \leq C\frac{L^*(T)}{\alpha}.$$

证明. 对于 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$ 和 $\alpha > 0$。沿用定理 3.12 证明中的相同推理，取 $R = {}^{L^*(T)}{}_{\alpha}$ $16(n+1)^2$，并将引理 3.13 应用于直径为$\leq C'R$的 R-不交集合族，再取 $C = 16(n+1)^2(C'+1/2)$，即可得出结论。□

注 3.17. 特别地，取 $\alpha = \|T\|$，可得 T'，使得：

$$\|T - T'\| < \|T\|,$$
$$\|T'\|\mathrm{prop}(T') \leq 2CL^*(T).$$

3.3. **关于子代数的谱 Roe 代数与地形 Roe 代数**。本节中，我们定义相对于 $\mathfrak{A}$ 的子集 $\mathfrak{B}$ 的 Roe 代数。在这种情况下，利用 Lipschitz 半范数 ρ 在 $\mathfrak{B}$ 上的限制，可以如下定义有限传播算子：

定义 3.18（相对于 $\mathfrak{B}$ 的谱传播）。设 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$。我们称 T 的谱传播小于或等于 R，如果：

对于所有满足 $L(a) \leq 1$ 的 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{B}$：

$$\chi_{(-\infty,0]}(a)T\chi_{(R,+\infty)}(a) = 0$$

我们将 $\mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(T)$ 定义为满足条件的最小 R：

$$\mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(T) = \inf\{R \in \mathbb{R}_+ :\ T \text{ has propagation smaller than or equal to } R\}$$

命题 3.1 中的性质显然仍适用于这一相对情形：

命题 3.4。对于算子 $T, S \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$，以下结论成立：

(1)$\mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(T+S) \leq \max(\mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(T), \mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(S))$，*(2)*$\mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(TS) \leq \mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(T) + \mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(S)$，

(3) $\mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(T^*) = \mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(T)$。

此外，对于所有 $R > 0$：

(4) B_R^* 是 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 中的一个算子系统，且在弱算子拓扑下闭。*(5)* $B_R^* = \bigcap_{R'>R} B_{R'}^*$，*(6)* $B_0^* = \mathfrak{B}'$：零传播的元素恰好是$\mathfrak{B}$的交换子的元素。

这一次，相对传播在 $\mathbb{B}(H)$上定义了一个W*-滤过，从而在 $\mathfrak{B}^{**}$上导出一个W*-量子度量。

定义 3.19（相对于 $\mathfrak{B}$ 的谱 Roe 代数）。与 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 及 ρ 相关联的谱 Roe 代数，是由相对于 $\mathfrak{B}$ 具有有限传播的局部紧算子生成的 C^*-代数。

$$C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) = \overline{\{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(T) < +\infty \text{ and T is locally compact}\}}.$$

例如，可以取 $\mathfrak{B}$ 为包含 $\mathfrak{M}$ 的交换子代数 $\mathfrak{A}$。那么 $\sigma(\mathfrak{M})$ 是 $\sigma(\mathfrak{B})$ 的商空间，该映射将 $\mathfrak{B}$ 上的特征映为它们在 $\mathfrak{M}$ 上的限制：

$$p : \sigma(\mathfrak{B}) \to \sigma(\mathfrak{M})$$
$$\phi \mapsto \phi|_{\mathfrak{M}}.$$

于是，由 Lipschitz 半范数 $L|_{\mathfrak{M}}$ 和 $L|_{\mathfrak{B}}$ 分别定义了度量空间 $(\sigma(\mathfrak{M}), d_{\mathfrak{M}})$ 和 $(\sigma(\mathfrak{B}), d_{\mathfrak{B}})$，它们使 p 成为压缩映射。由于 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 是适当局部紧量子度量空间，$(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, L|_{\mathfrak{M}})$ 定义了一个真局部紧度量空间；取 $\mathfrak{M}$ 中的严格正元素 h 以及一个局部态 μ，使得：

$$\{hah \mid a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \le 1, \mu(a) = 0\} \text{ is norm precompact,}$$

那么：

$$\{hbh \mid b \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{B}), L(b) \le 1, \mu(b) = 0\} \text{ is norm precompact.}$$

现在，由于 $\mathfrak{M}$ 包含 $\mathfrak{B}$ 的一个近似单位（因为 $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$），$h$ 在 $\mathfrak{B}$ 中也严格为正，因此 $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, L|_{\mathfrak{B}})$ 是一个交换局部紧量子度量空间；换言之，$(\sigma(\mathfrak{B}), d_{\mathfrak{B}})$ 是一个局部紧度量空间。

现在，若 E 是 $(\sigma(\mathfrak{B}), d_{\mathfrak{B}})$ 中的闭有界子集，则 $F = p(\overline{E})$ 是 $(\sigma(\mathfrak{M}), d_{\mathfrak{M}})$ 中的闭有界子集，因此是紧集，因为 $(\sigma(\mathfrak{M}), d_{\mathfrak{M}})$ 是真度量空间。因此，对于 $x \in F$，集合 $h(x)$（$h \in \mathfrak{M}$ 是上文的严格正元素）有一个正下界 $m > 0$。现在，E 是 : 的闭子集

$$E \subset p^{-1}(F) = \{\varphi \in \sigma(\mathfrak{B}) \mid \varphi|_{\mathfrak{M}} \in F\} \subset \{\varphi \in \sigma(\mathfrak{B}) \mid \varphi(h) \ge m\}$$

其中，我们将 $\sigma(\mathfrak{B})$ 的元素与 $\mathfrak{B}$ 上的特征等同。集合 $\{\varphi \in \sigma(\mathfrak{B}) \mid \varphi(h) \ge m\}$ 是弱*紧的，因为它是 $\mathfrak{B}^*$ 单位球中的闭集，因此 E 是紧的。因此，$(\sigma(\mathfrak{B}), d_{\mathfrak{B}})$ 是一个真度量空间。我们已经证明：

命题 3.5. 若 $\mathfrak{B}$ 是包含 $\mathfrak{M}$ 的 $\mathfrak{A}$ 的交换 C^*-子代数，则与 $L|_{\mathfrak{B}}$ 相关联的蒙日－康托罗维奇度量使 $\sigma(\mathfrak{B})$成为真度量空间。

由此可见：

命题 3.6. 若 $\mathfrak{B}$ 是包含 $\mathfrak{M}$的 $\mathfrak{A}$ 的交换 C^*-子代数，则相对于 $\mathfrak{B}$，与$(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 相关联的谱 *Roe* 代数同经典 *Roe* 代数$C^*(\sigma(\mathfrak{B}))$同构。

特别地，若取 $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$，则称 $C^*(\sigma(\mathfrak{M}))$为与 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$相关联的地形 Roe 代数。

4. 广义 Higson 紧化

4.1. 谱 Higson 紧化。本节将说明，给定一个作用在希尔伯特空间 H 上的局部紧量子度量空间 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$，我们可以在 $\mathfrak{A}$ 上定义一种非交换粗结构，它推广了度量空间的 Higson 紧化。该结构将（至少先验地）取决于表示 $\rho: \mathfrak{A} \to \mathbb{B}(\mathrm{H})$ 的选择。我们还将简要介绍另一种构造方法，即使用相对交换子代数。对这两种构造之间关系的研究——它们是否一致，以及从具体的（非交换）例子出发进行研究——留待未来工作完成；例子部分的主要计算将采用谱 Higson 紧化。

更一般地，我们考虑一个 C*-代数 $\mathfrak{A}$，它忠实且非退化地作用在希尔伯特空间 H 上，并配有一个地形 $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$，以及定义在 $\mathfrak{A}^{**}$ 上的 W*量子度量 $\mathrm{V} \subset \mathbb{B}(\mathrm{H})$。我们称三元组 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, \mathrm{V})$ 为地形 W*-量子度量空间，并将 $\mathrm{prop}(T) \leq R$ 记作 $T \in \mathrm{V}_R$。

注意，由于 $\rho: \mathfrak{A} \to \mathbb{B}(\mathrm{H})$ 是忠实且非退化的，我们可以将乘子代数 $\mathrm{M}(\mathfrak{A})$ 视为 $\mathbb{B}(\mathrm{H})$ 的一个子代数。我们将把广义 Higson 紧化定义为 $\mathrm{M}(\mathfrak{A})$ 的一个含幺子代数。

我们需要一个表示无穷远处消失的概念，而这正是地形 $\mathfrak{M}$ 的作用所在。

例 4.1（局部紧量子度量空间是地形 W*-量子度量空间）。若 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 是表示在 H 上的适当局部紧量子度量空间，则 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, (B_R^*))$ 是地形 W*-量子度量空间，其中 $(B_R^*)_R$ 是利用谱传播按第 3 节中的方式定义的滤过。

记号 4.2。我们固定 $(f_\alpha)_\alpha$ 为 $\mathfrak{A}$ 的一个近似单位，该近似单位由 $\mathfrak{M}$ 中的元素构成。

定义 4.3（广义 Higson 紧化）。设 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, \mathrm{V})$ 是一个地形 W*-量子度量空间：

- 我们称 $\mathrm{M}(\mathfrak{A})$ 中的算子 S 是缓慢振荡的，如果对于所有 $R > 0$ 和所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个 α_0，使得若 $\alpha \geq \alpha_0$、$\|T\| \leq 1$ 且 $T \in \mathrm{V}_R$，则 $\|(1 - f_\alpha)\,[T, S]\| \leq \varepsilon$ 且 $\|[T, S](1 - f_\alpha)\| \leq \varepsilon$。
- 我们将 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, \mathrm{V})$ 的广义 Higson 紧化定义为由 $\mathrm{M}(\mathfrak{A})$ 中缓慢振荡的元素组成的集合 $\mathfrak{A}^H$。

引理 4.4. S 属于 $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ 是缓慢振荡的，当且仅当对于所有 $R > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在一个$(\mathfrak{M})$紧集，使得对于所有满足 $T \in \mathcal{V}_R$ 和 $\|T\| \leq 1$ 的 T，$\|\chi_{K^{\mathbb{C}}}[T, S]\| \leq \varepsilon$ 且 $\|[T, S]\chi_{K^{\mathbb{C}}}\| \leq \varepsilon$。

因此，定义 *4.3* 不依赖于近似单位 $(f_\alpha$).

证明。设 f_α 是由 $\mathfrak{M}$ 中的元素构成的 $\mathfrak{A}$ 的近似单位，并且 $S \in \mathrm{M}(\mathfrak{A})$，且假设 S 满足关于 f_α 的定义 4.3。设 $\varepsilon > 0$、$R > 0$ 和 α_0 如定义 4.3 中所述。于是，令 $K \subset \sigma(\mathfrak{M})$ 满足 $(f_{\alpha_0})|_{K^{\mathbb{C}}} \leq \varepsilon$，则 $f_\alpha \leq \chi_K + \varepsilon$，因此 $1 - \chi_K \leq 1 - f_{\alpha_0} + \varepsilon$。接着，对于满足 $\|T\| \leq 1$ 且 $\mathrm{prop}(T) \leq R$ 的 T：

$$
\begin{aligned}
\|(1-\chi_K)[T,S]\|^2 &= \|[T,S]^*(1-\chi_K)^2[T,S]\| \\
&\leq \|[T,S]^*(1-f_{\alpha_0}+\varepsilon)^2[T,S]\| \\
&\leq (2\varepsilon+\varepsilon^2)\|[T,S]\|^2 + \|(1-f_{\alpha_0})[T,S]\|^2 \\
&\leq (2\varepsilon+2\varepsilon^2)\|[T,S]\|^2.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

对 $[T,S](1-\chi_K)$ 同样如此。

反之，若 S 满足引理中的条件，取 $\varepsilon > 0$、$R > 0$ 与 K，使得对所有满足 $\mathrm{prop}(T) \leq R$ 且 $\|T\| \leq 1$ 的 T，有 $\|\chi_{K^{\mathbb{C}}}[T,S]\| \leq \varepsilon$。然后取 α_0，使得对 $\alpha \geq \alpha_0$ 有 $f_\alpha|_K \geq 1 - \varepsilon$。于是，对 $\alpha \geq \alpha_0$、$\chi_K \leq f_\alpha + \varepsilon$ 以及不等式4.1的对应形式，我们便可得出结论。□

定理4.5. 代数 $\mathfrak{A}^H$ 是 $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ 的一个含单位元的 C^*-子代数，且包含 $\mathfrak{A}$。换言之，它在 $\mathfrak{A}$ 上定义了一个非交换粗结构。

证明. C^*代数 $\mathfrak{A}^H$包含单位元（$[T, Id] = 0$），并且在加法（由三角不等式）、标量乘法和对合下封闭（因为 $((1-f_\alpha)\,[T,S])^* = -[T^*,S^*](1-f_\alpha)^*$）。

代数 $\mathfrak{A}^{-H}$ 对乘法封闭。事实上，设 (f_α) 是上述 $\mathfrak{A}$ 的一个近似单位。对该近似单位中的元素取有限凸组合后，我们可以假设它相对于 $\mathrm{M}(\mathfrak{A})$ 是拟中心的（例如参见 [12] 第 3.2 节）。如果 S_1, S_2 是缓慢振荡的，那么，

$$
\begin{aligned}
(1-f_\alpha)\,[T,S_1S_2] &= (1-f_\alpha)\,[T,S_1]S_2 + (1-f_\alpha)\,S_1[T,S_2] \\
&= \underbrace{(1-f_\alpha)\,[T,S_1]S_2}_{(1)} + \underbrace{S_1\,(1-f_\alpha)\,[T,S_2]}_{(2)} + \underbrace{[1-f_\alpha,S_1][T,S_2]}_{(3)}
\end{aligned}
$$

我们看到 S_1S_2 也是缓慢振荡的，因为对于上文的项 **(1)**（分别为 **(2)**），S_1（分别为 S_2）是缓慢振荡的；对于项 **(3)**，$[1-f_\alpha, S_1] \to 0$ 也是如此；并且可以用类似的推理来处理 α 对于 $[T, S_1S_2]\,(1-f_\alpha)$。

代数 $\mathfrak{A}^H$ 是范数闭的。事实上，若 $S_n \to S$ 属于 $\mathrm{M}(\mathfrak{A})$，且 S_n 缓慢振荡，那么对于 $R > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，取 n 使得 $\|S_n - S\| \leq \varepsilon$，并取 K 为紧集，使得 $\|\chi_{K^{\mathbb{C}}}[T,S_n]\| \leq \varepsilon$，且对于 T，取 $\|[T,S_n]\chi_{K^{\mathbb{C}}}\| \leq \varepsilon$ 使得 $\mathrm{prop}(T) \leq R$ 和 $\|T\| \leq 1$。于是对于这样的 T：

$$
\|[T,S]\chi_{K^{\mathbb{C}}}\| \leq 2\varepsilon
$$

and

$$\|\chi_{K^{\mathbb{C}}}[T,S]\| \leq 2\varepsilon.$$

代数 $\mathfrak{A}^H$ 包含 $\mathfrak{A}$，因为对于 $S \in \mathfrak{A}$，$(1-f_\alpha)S \to 0$ 当 $\alpha \to \infty$ 时成立，因此 $(1-f_\alpha)\,[T,S] \to 0$。

□

4.2. **相对交换子代数 Higson 紧化**。本节中，我们考虑 Higson 紧化的一种不同推广，它基于相对交换子 Roe 代数。因此，我们考虑在希尔伯特空间 H 上表示的适当量子度量空间（$\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L$）。我们将相对交换子 Higson 紧化定义如下：

定义 4.6（相对交换子 Higson 紧化）。若（$\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L$）是在希尔伯特空间 H 上表示的适当量子度量空间，则我们将（$\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L$）的相对交换子 Higson 紧化定义为集合 $\mathfrak{A}^H{}_{,\mathrm{comm}}$，其中包含 M $(\mathfrak{A})$ 中满足以下条件的元素 $\overline{S}$：

$$[S,T] \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \text{ for all } T \in C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A}).$$

定理 4.7. 代数 $\mathfrak{A}^H{}_{,\mathrm{comm}}$ 是 $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ 的含单位元 C^*-子代数，并且包含 $\mathfrak{A}$。换言之，它在 $\mathfrak{A}$ 上定义了一种非交换粗结构。

证明。 $\mathfrak{A}^H{}_{,\overline{\mathrm{comm}}}$ 包含单位元、在范数下闭、对加法、标量乘法和对合封闭，这些都是显然的。根据 $C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$ 的定义，它包含 $\mathfrak{A}$ 也是显然的。□

5. 粗量子度量空间示例

5.1. **交换情形**。本节将验证，对于局部紧度量空间，谱 Roe 代数与通常的 Roe 代数相对应，并且上文定义的谱 Higson 紧化与真度量空间的通常 Higson 紧化一致。

5.1.1. 谱 *Roe* 代数。为方便起见，我们回顾经典情形下传播的定义：

定义 5.1。设 (X,d) 为一个度量空间，且 $\rho\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathrm{H})$ 是 $C_0(X)$ 在希尔伯特空间 H 上的忠实非退化表示。对于 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$，其传播定义如下：

$$\mathrm{prop}(T) = \sup\{d(x,y) : (x,y) \in \mathrm{supp}(T)\}$$

其中

$$\mathrm{supp}(T) := X \times X \setminus \bigcup_{\substack{U,V \text{ open} \\ \rho(\chi_U)T\rho(\chi_V)=0}} U \times V.$$

定理 5.2。 设(X, d)是真度量空间，并考虑 *Lipschitz* 三元组$(C_0(X), C_0(X), L_d)$，其中 L_d 是通常的 *Lipschitz* 半范数。此外，设 $\rho\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$是 $C_0(X)$的忠实非退化表示。

那么，在第 *3* 节中定义的传播$\mathrm{prop}(T)$ 与上文定义 *5.1* 中定义的传播一致。

因此，谱 *Roe* 代数 $C^*_{\mathrm{spec}}(C_0(X))$与通常的 *Roe* 代数$C^*(X)$一致。

证明。 设 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$，记 $\mathrm{prop}(T)$ 为第 3 节中定义的谱传播，$\mathrm{prop}(T)$ 为上文定义 5.1 中定义的传播，我们证明这两个不等式：

- $\mathrm{prop}(T) \le \overline{\mathrm{prop}}(T)$：设 $\overline{\mathrm{prop}}(T) \le R$，换言之，对于任意开集 U, V，只要 $d(U,V) > R$，就有 $\rho(\chi_U)T\rho(\chi_V) = 0$。下面证明 T的谱传播小于或等于 R。若 $f \in \mathfrak{sa}(C_0(X))$ 满足 $L(f) \le 1$，则集合 $U = \{x \in X\colon f(x) \le \alpha\}$ 和 $V = \{x \in X\colon f(x) \ge \beta\}$ 满足 $d(U,V) \ge \beta - \alpha$。因此，若 $\beta - \alpha > R$，则$\rho(\chi_U)T\rho(\chi_V) = 0$，这表明 T的谱传播小于或等于 R。

- $\overline{\mathrm{prop}}(T) \le \mathrm{prop}(T)$：假设 T 的谱传播小于或等于 R，我们将证明 $\mathrm{prop}(T) \le R$。若 U, V是开集，且 $d(U,V) > R$，则我们可以找到 $f \in \mathfrak{sa}(C_0(X))$，使得 $L(f) \le 1$且 $f|_U = 0$和 $f|_V > R$。由此可得 $\rho(\chi_V) \le \chi_{(R,+\infty)}(f)$，并且 $\chi_{(-\infty,0]}(f) \le \rho(\chi_U)$。根据谱传播的定义，我们有 $\chi_{(-\infty,0]}(f)T\chi_{(R,+\infty)}(f) = 0$，因此 $\rho(\chi_U)T\underline{\rho(\chi_V)} = 0$。这表明 $\mathrm{prop}(T) \le R$。

□

5.1.2. 谱 *Higson* 紧化。 首先回顾真度量空间的 Higson 紧化定义：

定义 5.3（真度量空间的 Higson 紧化）。 设 $(X,\ d)$ 为一个真度量空间。

- 对于 $f \in C_b(X)$，记
$$\Delta_R f(x) = \sup\{|f(x) - f(y)|\colon d(x,y) \le R\}.$$
- 若函数 $f \in C_b(X)$ 满足对所有 $R > 0$，则称其为缓慢振荡函数，
$$\Delta_R f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$
- X 的 Higson 紧化是由缓慢振荡函数集生成的含幺 C*-代数 $Ch(X)$ 的谱。

注记 5.4. 展开定义可知，函数是缓慢振荡的，当且仅当对于所有 $R > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $K \subset X$ 紧集，使得：

$$d(x,y) \le R \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad \text{for all } x, y \in X \setminus K$$

下面的定理为我们将 Higson 紧化推广到量子情形提供了依据，并表明这种推广与上述定义一致。

定理 5.5。 设 (X, d) 是一个真度量空间，并考虑 *Lipschitz* 三元组 $(C_0(X), C_0(X), L_d)$，其中 L_d 是通常的 *Lipschitz* 半范数。此外，设 $\rho: C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ 是 $C_0(X)$ 的忠实非退化表示。

那么，定义 *4.3* 中的 $C_0(X), C_0(X), L_d)$ 的广义 *Higson* 紧化与 $\rho(C_h(X))$ 一致，其中 $C_h(X)$ 是定义 *5.3* 中的经典 *Higson* 紧化。

$$\overline{C_0(X)}^h = \rho(C_h(X)).$$

证明。 在深入证明每个包含关系之前，回顾一下，对于任意向量 $\xi \in \mathrm{H}$，ξ 的支撑定义为集合 $\mathrm{supp}(\xi)$，其定义如下：

$$\mathrm{supp}(\xi) := X \setminus \bigcup_{\substack{U \text{ open} \\ \rho(\chi_U)\xi = 0}} U.$$

此外，对于 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$，其支撑为集合：

$$\mathrm{supp}(T) := X \times X \setminus \bigcup_{\substack{U \times V \text{ open} \\ \rho(\chi_U) T \rho(\chi_V) = 0}} U \times V.$$

并且我们有 $\mathrm{prop}(T) = \sup\{d(x, y) : (x, y) \in \mathrm{supp}(T)\}$。

步骤 1：从 Roe 代数的交换子到缓慢振荡

假设 $S \in C_0(X)^h$，特别是 $S \in \rho(\mathfrak{M}(C_0(X))) = \rho(C_b(X))$，令 $S = \rho(f)$，其中 $f \in C_b(X)$，并证明 f 是缓慢振荡的。

令 $R > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，由于 $\rho(f) \in C_0(X)^h$，存在 $K \subset X$ 紧，使得对于所有满足 $\mathrm{prop}(T) \leq R + 1$ 和 $\|T\| \leq 1$ 的 T：

$$\|[T, \rho(f)](1 - \chi_K)\| \leq \varepsilon. \tag{5.1}$$

我们使用以下断言：

断言。 对于所有 $x \in X$ 和 $\delta > 0$，存在一个单位向量 $\xi_x \in \mathrm{H}$，使得：

$$\mathrm{supp}(\xi_x) \subset B_\delta(x)$$

断言的证明。 由非退化性可知，存在一个 ξ，使得 $x \in \mathrm{supp}(\xi)$。接下来只需取：

$$\xi_x = \frac{\rho(\chi_{B_\delta(x)})\xi}{\|\rho(\chi_{B_\delta(x)})\xi\|}$$

□

No取 $x, y \in X \setminus K$ 使得 $d(x, y) \leq R$，我们将证明 $|f(x) - f(y)| \leq 3 \varepsilon$.

取 $0 < \delta < 1/2$，使得 $B_\delta(x) \subset X \setminus K$ 且 $B_\delta(y) \subset X \setminus K$，并且：

$$|f(x') - f(x)| \le \varepsilon \text{ for all } x' \in B_\delta(x),$$
$$|f(y') - f(y)| \le \varepsilon \text{ for all } y' \in B_\delta(y)$$

根据命题 5.1.2，存在单位向量 ξ_x 和 ξ_y，使得 $\mathrm{supp}(\xi_x) \subset B_\delta(x)$，且 $\mathrm{supp}(\xi_y) \subset B_\delta(y)$。算子 $T_{xy} = |\xi_x\, \xi_y|$的支撑包含于 $B_\delta(x) \times B_\delta(y)$，因此 $\mathrm{prop}(T_{xy}) \le d(x, y) + 2\delta \le R + 1$ 且 $\|T_{xy}\| = 1$。

于是 $\|(\rho(f) - f(x))\,\xi_x\| \le \varepsilon$，且 $\|(\rho(f) - f(y))\,\xi_y\| \le \varepsilon$。

因此由方程 5.1：

$$\begin{aligned}
\varepsilon \ge |\langle \xi_y | [T_{xy}, \rho(f)](1 - \chi_K)\xi_x \rangle| &= |\langle \xi_y | [T_{xy}, \rho(f)] | \xi_x \rangle| \\
&= |\langle \xi_y | T_{xy} | \rho(f)\xi_x \rangle - \langle \rho(\bar{f})\xi_y | T_{xy} | \xi_x \rangle| \\
&\ge |f(x)\,\langle \xi_y | T_{xy} | \xi_x \rangle - f(y)\,\langle \xi_y | T_{xy} | \xi_x \rangle| - 2\varepsilon \\
&= |f(x) - f(y)| - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

因此 $|f(x) - f(y)| \le 3\varepsilon$，如所需。

步骤 2：从缓慢振荡到 Roe 代数的交换子

若 f 是缓慢振荡的，我们来证明它满足条件 4.3。我们有如下事实（例如记载于 [6]），其证明基本上与命题 3.3 中的证明方式相同

断言 (交换不等式)。 对于任意 $f \in C_b(X)$，$T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$：

$$\|[\rho(f), T]\| \le 8\omega_{\mathrm{prop}(T)}(f)\|T\|.$$

其中，对于 $R \ge 0, \omega_R(f)$ 定义如下：

$$\omega_R(f) = \sup\{|f(x) - f(y)|\, x, y \in X, d(x, y) < R\}$$

现在，对于 $\varepsilon > 0$ 和 $R > 0$，令 K 满足：

$$d(x, y) \le R \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad \text{for all } x, y \in X \setminus K$$

因此，若 $T \in C^*(X)$ 满足 $\mathrm{prop}(T) \le R$和 $\|T\| \le 1$：考虑 ρ和 T的角，通过投影 $\rho(\chi_{K^c})$ 以及将 f限制到 K^c所得的限制 f_{K^c}，则有 $\omega_R(f|_{K^c}) \le \varepsilon$，于是应用交换不等式：

$$\|\rho(\chi_{K^c})\,[\rho(f|_{K^c}), \rho(\chi_{K^c})T\rho(\chi_{K^c})]\,\rho(\chi_{K^c})\| \le \varepsilon.$$

Thus

$$\|\rho(\chi_{K^c})\,[\rho(f), T]\,\rho(\chi_{K^c})\| \le \varepsilon.$$

现在，由于 $[T, \rho(f)]$ 的传播小于或等于 R，对于满足 $B_R(K) \subset L$的紧 L ：

$$\| [\rho(f),\ T] \rho(\chi_{L^c}) \| = \|\rho(\chi_{B_R}(L^c)) [\rho(f),\ T]\rho(\chi_{L^c}) \| \leqslant \|\rho(\chi_{K^c}) [\rho(f|_{K^c}),\ T] \rho(\chi_{K^c}) \| \leq \varepsilon。$$

□

5.2. **紧量子度量空间**。 对于表示在希尔伯特空间 H 上的紧量子度量空间，如预期的那样，$\mathbb{B}$(H) 中的所有算子都具有有限谱传播、有限交换子半范数和有限拓扑传播。

粗结构显然是平凡的，因为 C*-代数含幺，因此 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^h = \mathrm{M}(\mathfrak{A})$。

首先回顾 [3]，含幺 Lipschitz 对（$\mathfrak{A}$，L）是紧量子度量空间，当且仅当（$\mathfrak{A}$，L，$\mathbb{C}\mathbb{1}$）是局部紧量子度量空间。因此，我们可以将 Rieffel 意义下的紧量子度量空间视为局部紧量子度量空间。

命题 5.1。 设（$\mathfrak{A}$，L）是一个紧量子度量空间，ρ： $\mathfrak{A} \to \mathbb{B}$（H）是 $\mathfrak{A}$的一个表示，且 R_0 是其直径，那么对于任意属于 $\mathbb{B}$（H）的算子 T

- T 的谱传播有界于 R_0：传播$(T) \leq R_0$。

T 的交换半范数有界。

证明。 若$T \in \mathbb{B}$(H)，且$a \in \mathfrak{A}$是自伴的，并满足 $L(a) \leq 1$，我们来证明$\chi_{(-\infty,0]}(a)T\chi_{(R_0,+\infty)}(a) = 0$。

断言。 对于 $\xi \in$H，要么$\chi_{[R_0,+\infty)}(a)\xi = 0$，要么$\chi_{(-\infty,0)}(a)\xi = 0$。

断言的证明。 注意，根据直径的定义，即态空间$S(\mathfrak{A})$在蒙日-康托罗维奇距离下的直径，

$$|\mu(a) - \nu(a)| \leq R_0 \text{ for all } \mu \text{ and } \nu \text{ states on } \mathfrak{A}.$$

对于 $\xi \in$H，记$\xi_+ = \chi_{[R_0,+\infty)}(a)\xi$和 $\xi_- = \chi_{(-\infty,0)}(a)\xi$，并反设 $\xi_+ \neq 0$且 $\xi_- \neq 0$，那么考虑以下态可得： $a \mapsto \langle \xi_+,\ \rho(a)\xi_+\rangle \|\xi_+\|^2$ 和 $a \mapsto \langle \xi_-,\ \rho(a)\xi_-\rangle \|\xi_-\|^2$，~~可得~~

$$\frac{\langle \xi_+, \rho(a)\xi_+\rangle}{\|\xi_+\|^2} - \frac{\langle \xi_-, \rho(a)\xi_-\rangle}{\|\xi_-\|^2} \leq R_0$$

此外，根据 ξ_+ 和 ξ_- 的定义，我们有

$$\frac{\langle \xi_+, \rho(a)\xi_+\rangle}{\|\xi_+\|^2} \geq R_0, \frac{\langle \xi_-, \rho(a)\xi_-\rangle}{\|\xi_-\|^2} < 0,$$

thus

$$\frac{\langle \xi_+, \rho(a)\xi_+\rangle}{\|\xi_+\|^2} - \frac{\langle \xi_-, \rho(a)\xi_-\rangle}{\|\xi_-\|^2} > R_0,$$

这就产生了矛盾，因此： $\xi_+ = 0$或 $\xi_- = 0$。 □

现在，若 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$ 且 $\xi \in \mathrm{H}$:

$$\langle \xi | \chi_{(-\infty,0)}(a) T \chi_{[R_0,+\infty)}(a) \xi \rangle = \langle \chi_{(-\infty,0)}(a)\xi | T \chi_{[R_0,+\infty)}(a)\xi \rangle = 0,$$

由于根据上面的断言，要么 $\chi_{(-\infty,0)}(a)\xi = 0$ 要么 $\chi_{[R_0,+\infty)}(a)\xi = 0$。因此 $\chi_{(-\infty,0)}(a) T \chi_{[R_0,+\infty)}(a) = 0$。□

5.3. **紧量子度量空间的粗不交并**。

5.3.1. 一般设定。 我们考虑一列紧量子度量空间 $(\mathfrak{A}_n, L_n)$ 的粗不交并，其中对所有 n，$\mathfrak{A}_n$ 都是幺的。我们在直和 $\bigoplus_n \mathfrak{A}_n$ 上赋予 Lip-范数和地形，使其成为局部紧量子度量空间；其中一个动机是研究量子扩张子。

定义 5.6 （紧量子度量空间的粗不交并）。 设 $(\mathfrak{A}_n, L_n)$ 是一列紧量子度量空间。固定 φ_n 个态于 $\mathfrak{A}_n$ 上，并取满足 $R_n \to \infty$ 的一列正实数 R_n。

我们将具有态之间的距离 R_n 的 $(\mathfrak{A}_n, L_n)$ 的粗不交并定义为 Lipschitz 三元组 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$，其中:

- $\mathfrak{A} = \bigoplus_n \mathfrak{A}_n$,
- $\mathfrak{M} = \bigoplus_n \mathbb{C}\mathbb{1}_n$ 是地形,
- L 对 $a = (a_n)_n \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 的定义如下:

$$L((a_n)_n) = \max\left(\sup_n L_n(a_n), \sup_n \frac{|\varphi_{n+1}(a_{n+1}) - \varphi_n(a_n)|}{R_n} \right)$$

为了证明这确实是一个局部紧量子度量空间，主要的技术难点在于证明蒙日-康托罗维奇度量在（温和）态集上诱导弱*拓扑。或者，只需证明定理 2.9 中关于某些 $\mathfrak{u}\mathfrak{A}$ 子集预紧性的刻画即可。

最终，我们将把问题归结为对紧部分 $\mathfrak{A}_n$ 使用这一刻画，具体形式如下:

引理 5.7. 设$(\mathfrak{A}_0, L_0)$ 为一个紧量子度量空间， φ_0 为 $\mathfrak{A}_0$ 上的一个态，且 I 为 $\mathbb{R}$的一个有界子集。则该集合:

$$\{a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}) : \ L_0(a) \leq 1, \varphi_0(a) \in I\}$$

在 $\mathfrak{A}_0$中是范数预紧的。

证明。 对任意 $I \subset \mathbb{R}$，记 $E_I = \{a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}) : \ L_0(a) \leq 1, \ \varphi_0(a) \in I\}$。

现在假设 I 有界。根据紧量子度量空间的基本刻画 [2], $E_0 = \{a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}) : \ L_0(a) \leq 1, \ \varphi_0(a) = 0\}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中范数预紧。函数$E_0 \times \mathbb{R} \to E_{\mathbb{R}}$ 定义为 $(a, \ t) \mapsto a + t\mathbb{1}$，它是连续的，并将紧集 $E_0 \times I$ 映射到一个包含 E_I 的紧集上，因此 E_I 在 $\mathfrak{A}$ 中预紧。□

定理 5.8。 任意紧量子度量空间的粗不交并 $(\mathfrak{A}_n, L_n)$ 都是一个局部紧量子度量空间。

此外，若$(\mathfrak{A}_n, L_n)$ 均可分， L 在 $\mathfrak{A}_n$ 的一个稠密子集上定义且下半连续（与 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_n)$相较），并满足莱布尼茨不等式，则它们的粗不交并是强正规的，意义见 *[7],*定义 *3.2.12*。

证明。 **步骤 1：弱*可度量化条件** 将上述$(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$记为$(\mathfrak{A}_n, L_n)$的粗不交并，并将定义 L时所用的态和距离分别记为 φ_n 和 R_n 。

回顾定理 2.9：要证明 Lipschitz 三元组$(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$是一个局部紧量子度量空间，只需证明：对于任意局部态 $\psi \in \mathsf{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{M})$，以及所有具有紧支撑的 $s, t \in \mathfrak{M}$，集合：

$$\{sat : a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \leq 1, \psi(a) = 0\}$$

在 $\mathfrak{A}$中范数预紧。

由于 $\mathfrak{M} = \bigoplus_n \mathbb{C}\mathbb{1}_n \cong c_0(\mathbb{N})$， $\mathfrak{M}$ 中的紧支撑元素是对应于有限和 $\bigoplus_{k=0}^n \mathbb{C}\mathbb{1}_k$中元素的有限序列；相应地，局部态是支撑于有限和$\bigoplus_{k=0}^n \mathfrak{A}_k$上的态。

特别地，$(a_n)_n \mapsto \varphi_0(a_0)$ 在 $\mathfrak{A}$ 上定义了一个局部态。

因此，在上述情形下，只需证明对于任意 $n \in \mathbb{N}$，集合：

$$E_0 = \{(a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots) \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}) : L((a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)) \leq 1, \varphi_0(a_0) = 0\}$$

在 $\mathfrak{A}$ 中是范数预紧的。

条件

$$L((a_0, \ldots, a_n, \ldots)) \leq 1, \varphi_0(a_0) = 0$$

意味着

$$L_k(a_k) \leq 1, |\varphi_{k+1}(a_{k+1}) - \varphi_k(a_k)| \leq R_k \text{ for } 0 \leq k \leq n-1, \text{ and } \varphi_0(a_0) = 0$$

进而意味着

$$L_k(a_k) \leq 1 \text{ and } |\varphi_k(a_k)| \leq \sum_{0 \leq k' \leq k-1} R_k \text{ for } 0 \leq k \leq n-1.$$

因此， E_0 可以连续嵌入到：

$$\prod_{0 \leq k \leq n} \{a_k \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}_k) : L_k(a_k) \leq 1, |\varphi_k(a_k)| \leq C\}$$

根据引理 5.7，这些都是预紧集。因此， E_0 是预紧的。

步骤 2：强适当性：根据定义 2.13，只需证明存在一个 $\mathfrak{A}$ 的近似单位 $(e_n)_n$ ，该近似单位属于 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{M})$，由在 $\mathfrak{M}$ 中具有紧支撑的元素组成，并且满足$L(e_n) \longrightarrow 0$。取 $e_n = (\mathbb{1}_0, \ldots, \mathbb{1}_n, 0, \cdots)$，它在地形$n\to\infty$中具有紧支撑，且 $L(e_n) = \frac{1}{R_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。

—

□

5.4. **几乎交换Lipschitz三元组**。 黎曼流形，尤其是自旋流形，提供了丰富的度量空间来源。在非交换几何中，与之对应的对象，也是 C*-量子度量空间的动机示例之一，是谱三元组。在这一背景下，交换谱三元组（即自旋流形）之后一些最简单的例子，催生了粒子物理标准模型的模型；这些例子是几乎交换谱三元组，即交换谱三元组与有限维谱三元组的张量积。也就是说，形如 $(C^\infty(M)\hat{\otimes}\mathfrak{A}_F, L^2(M,S)\hat{\otimes}\mathrm{H}_F, \not{D}\hat{\otimes}\mathbb{1} + \epsilon\hat{\otimes}D_F)$ 的三元组，其中

- M 是一个紧自旋流形， S 是 M上的旋量丛，$\not{D}$ 是相应的狄拉克算子，而偶数情形下， ϵ 是 L^2（M， S）的（常值）分次（偶旋量是 +1特征向量，奇旋量是 −1），奇数情形下则为 $\epsilon = 1$ ，
- $\mathfrak{A}_F$ 是一个有限维C*-代数，
- H_F 是一个有限维希尔伯特空间，
- D_F 是H_F上的自伴算子，使得（$\mathfrak{A}_F$， H_F， D_F）构成一个有限维谱三元组。

在这个模型中，代数 $\mathfrak{A}_F$ 编码了基本粒子的内部自由度，而流形 M 编码了时空。由于我们关注的是度量粗结构，因此将考虑受这些构造启发的模型，其中：

- M 是一个完备黎曼流形（不一定是紧的）。
- 我们关注量子度量结构（并忽略自旋丛和狄拉克算子所携带的其他结构）。

在这一背景下，为了说明在 $C_0(M)\hat{\otimes}\mathfrak{A}_F$ 上应考虑的利普希茨半范数的适当类别，我们注意到，有限维C*-代数上的所有利普希茨半范数都是等价的（即它们在乘法常数意义下彼此可比），由于公式 $\inf\{\|a - c\mathbb{1} \mid \text{for } c \in \mathbb{C}\|\}$ 在 $\mathfrak{A}_F$ 上定义了一个利普希茨半范数，我们得到如下结论：

命题 5.2。 对于有限维C*-代数 $\mathfrak{A}_F$ 上的任意利普希茨半范数 L_F ，存在 $C > 0$，使得对所有 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_F)$：

$$\frac{1}{C}\inf_{c\in\mathbb{C}}\|a - c\mathbb{1}\| \le L_F(a) \le C\inf_{c\in\mathbb{C}}\|a - c\mathbb{1}\|$$

证明。 由于 $\mathfrak{A}_F$ 是有限维的， $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_F)/\mathbb{C}\mathbb{1}$ 上的所有范数都是等价的，特别是由C*-范数诱导的商范数和由 L_F 诱导的范数也是等价的。 □

基于这一观察，我们采用以下记号：

定义 5.9. 设 $\mathfrak{A}_F$ 是一个有限维 C*-代数，我们用 L_0 表示定义在 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_F)$ 上的 Lipschitz 半范数：

$$L_{\mathfrak{A}_F}(a) = \inf_{c\in\mathbb{C}}\|a - c\mathbb{1}\|$$

此外，几乎交换谱三元组被证明满足三角不等式（即使在非幺情形下） [13], ，形式如下:

$$d(\varphi \otimes \varphi_F, \psi \otimes \psi_F) \leq d_M(\varphi, \psi) + d_F(\varphi_F, \psi_F)$$

对于 $C_0(M)$ 上的态 φ, ψ和 $\mathfrak{A}_F$ 上的态 φ_F, ψ_F，其中 d_M和 d_F分别是 M 和 $\mathfrak{A}_F$ 上的蒙日-康托罗维奇度量。事实上，在含单位（紧）的情形下，还满足一个毕达哥拉斯不等式形式的下界。此处我们仅考虑上界。

基于以上观察，我们定义如下几乎交换 Lipschitz 三元组类:

定义 5.10 （几乎交换 Lipschitz三元组）**.** 设 X 是一个真度量空间， $\mathfrak{A}_F$是有限维 C*-代数。

X 在 X 上、纤维以 $\mathfrak{A}_F$ 为模型的几乎交换 Lipschitz 三元组为:

- 一个 Lipschitz 三元组（$C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F, C_0(X) \otimes \mathbb{C}\mathbb{1}, L$），满足:
- 存在 $C > 0$，使得对于 $F \in C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F$，只要 $L(F) < \infty$:

$$L(F) \leq C \left(\sup_{x \in X} (L_0(F(x))) + L_X(F) \right)$$

- 与 $(C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F, C_0(X) \otimes \mathbb{C}\mathbb{1}, L)$ 相关的蒙日-康托罗维奇度量 d 满足以下三角不等式：对于任意态 φ, ψ，若其属于 $C_0(X)$，以及 φ_F, ψ_F，若其属于 $\mathfrak{A}_F$:

$$d(\varphi \otimes \varphi_F, \psi \otimes \psi_F) \leq C \left(d_X(\varphi, \psi) + d_F(\varphi_F, \psi_F) \right)$$

其中， d_X和 d_F分别是与 $(C_0(X), C_0(X), L_d)$ 和 $(\mathfrak{A}_F, \mathbb{C}\mathbb{1}, L_0)$ 相关的蒙日-康托罗维奇度量。

注 5.11。 关于上述定义，我们作出以下显而易见（但仍然重要）的观察:

- 在上述定义中，回顾一下 $C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F \cong C_0(X, \mathfrak{A}_F)$， L_X表示:

$$L_X(F) = \sup_{x \neq y} \left(\frac{\|F(x) - F(y)\|}{d(x, y)} \right)$$

- 由此可知， L 自动稠密定义。
- 由于 $\mathfrak{A}_F$是有限维的， $C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F$上的态可以写成 $C_0(X)$ 上的态与 $\mathfrak{A}_F$ 上的态的张量积的有限和。结合地形为 $C_0(X) \otimes \mathbb{C}\mathbb{1}$这一事实，我们可以证明， $C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F$上的态的温和集由 $C_0(X)$ 上的态的温和集构成。因此，只需验证乘积态上的三角不等式，即可证明蒙日-康托罗维奇度量在 $C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F$上的态的温和集上诱导弱*拓扑：任意几乎交换 Lipschitz 三元组都是局部紧量子度量空间。

- 根据上述内容，我们也将 $(C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F, \ C_0(X) \otimes \mathbb{C}\mathbb{1}, \ L)$ 称为局部紧的几乎交换量子度量空间。

- 若 X是正规的，且 L是下半连续的并满足莱布尼茨不等式，则按照 [7] 的意义，($C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F$, $C_0(X) \otimes \mathbb{C}\mathbb{1}$, L) 是强正规的。

命题 5.3。若$(C_0(M) \otimes \mathfrak{A}_F, L^2(M,S), D)$是定义在一个（不一定紧的）自旋流形上的几乎交换谱三元组，那么，取 L由 $\|[D,\cdot]\|$定义的 *Lipschitz* 半范数，$(C_0(M) \otimes \mathfrak{A}_F, C_0(M) \otimes \mathbb{C}\mathbb{1}, L)$是一个几乎交换 *Lipschitz* 三元组。

5.4.1. 谱传播与 *Roe* 代数：我们先固定 $C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F$在希尔伯特空间上的一个表示。设 ρ_X是 $C_0(X)$ 在 H_X 上的一个丰满表示，ρ_F是 $\mathfrak{A}_F$ 在 H_F 上的一个忠实表示，并考虑：

- $C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F$在 $\mathrm{H}_X \otimes \mathrm{H}_F$ 上的表示 $\rho = \rho_X \otimes \rho_F$。
- 对于任意算子 $T \in \mathbb{B}(\mathrm{H}_X \otimes \mathrm{H}_F)$，以及任意 ξ_1, $\xi_2 \in \mathrm{H}_F$，我们将 $T_{\xi_1\xi_2} \in \mathbb{B}(\mathrm{H}_X)$ 表示为如下定义的算子：

$$\langle \eta_1 | T_{\xi_1\xi_2} | \eta_2 \rangle = \langle \eta_1 \otimes \xi_1 | T | \eta_2 \otimes \xi_2 \rangle \text{ for all } \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}_X.$$

- 特别地，如果 e_i 是 H_F 的一组标准正交基，我们可以将 T 写成算子矩阵 $(T_{ij})_{i,j}$其元素属于 $\mathbb{B}(\mathrm{H}_X)$，其中 $T_{ij} = T_{e_i e_j}$。

我们希望将 T相对于 $C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F$的谱传播，与其分块 T_{ij}相对于 $C_0(X)$ 的谱传播联系起来。

命题 5.4。设 $(C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F, C_0(X) \otimes \mathbb{C}\mathbb{1}, L)$是表示在 $\mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_F$ 上的几乎交换局部紧度量空间。设 R_0为量子度量空间 $(\mathfrak{A}_F, L_F)$的半径。那么存在 $C > 0$，使得对于 $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_F)$：

$$\frac{1}{C} \sup_{i,j} \left[\mathrm{prop}(T_{ij})\right] \leq \mathrm{prop}(T) \leq C \left(\sup_{i,j} \left[\mathrm{prop}(T_{ij})\right] + R_0 \right)$$

我们先回顾以下记号，证明的第二部分将会用到。对于$\eta \in \mathrm{H}_X$，令 $\mathrm{supp}(\eta)$ 为 X 中由下式定义的闭子集：

$$\mathrm{supp}(\xi) = \{x \in X : \text{for all open } U \ni x, \text{ we have } \rho(\chi_U)\xi \neq 0\}$$

证明。根据几乎交换 Lipschitz 三元组的定义，存在 $C > 0$，使得对于所有$f \in C_0(X) \otimes \mathfrak{A}_F$，满足 $L(f) \leq 1$：

$$\frac{1}{C} \left(\sup_{x \in X} (L_0(f(x))) + L_X(f) \right) \leq L(f) \leq C \left(\sup_{x \in X} (L_0(f(x))) + L_X(f) \right)$$

并且对于 $C_0(X)$ 上的任意态 φ, ψ以及 $\mathfrak{A}_F$上的任意态 φ_F, ψ_F：

$$d(\varphi \otimes \varphi_F, \psi \otimes \psi_F) \leq C \left(d_X(\varphi, \psi) + d_F(\varphi_F, \psi_F) \right)$$

- $\sup_{i,j} \left[\mathrm{prop}(T_{ij})\right] \leq C\mathrm{prop}(T)$:

令 $R = \mathrm{prop}(T)$，若 $f \in C_0(X)$ 满足 $L_X(f) \leq 1$，则 $L_X(f \otimes 1) \leq 1$从而$L(f \otimes \mathbb{1}) \leq C$，可得：

$$\chi_{(-\infty,0)}(f \otimes \mathbb{1}) T \chi_{[CR,+\infty)}(f \otimes \mathbb{1}) = 0$$

这意味着对于所有 i,j，$\chi_{(-\infty,0)}(f)T_{ij}\chi_{[CR,+\infty)}(f)=0$，因此对于所有$i,j$，$\mathrm{prop}(T_{ij})\leq CR$。

- 命题$(T)\leq C\left(\text{上确界}_{i,j}\left[\text{命题}(T_{ij})\right]+R_0\right)$:

  设 $R=\sup_{i,j}\left[\mathrm{prop}(T_{ij})\right]$，更一般地，对于所有 $\xi_1,\ \xi_2\in \mathrm{H}_F$，可得 $\mathrm{prop}(T_{\xi_1\xi_2})\leq R$。现在，若 $F\in C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F$ 满足 $L(F)\leq 1$，则若 $x,\ y\in X$且 $\xi_1,\ \xi_2\in \mathrm{H}_F$ 是单位向量:

$$|\langle\xi_1,F(x)\xi_1\rangle-\langle\xi_2,F(y)\xi_2\rangle|\leq C(d(x,y)+R_0)$$

  由三角不等式应用于态 $F\mapsto\xi_1,\ F(x)\xi_1$和 $F\mapsto\xi_2,\ F(y)\xi_2$ 在$C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F$ 上可得。因此，若 $\eta_1,\ \eta_2\in\mathrm{H}_X$ 和 $\xi_1,\ \xi_2\in\mathrm{H}_F$ 满足

$$\eta_1\otimes\xi_1\in(\mathbb{1}\otimes|\xi_1\rangle\langle\xi_1|)\,\chi_{(-\infty,0)}(F)(\mathcal{H}_X\otimes\mathcal{H}_F),$$
$$\eta_2\otimes\xi_2\in(\mathbb{1}\otimes|\xi_2\rangle\langle\xi_2|)\,\chi_{[C(R+R_0),+\infty)}(F)(\mathcal{H}_X\otimes\mathcal{H}_F)$$

  Then

$$\langle\eta_1\otimes\xi_1,F\eta_1\otimes\xi_1\rangle\leq 0,$$
$$\langle\eta_2\otimes\xi_2,F\eta_2\otimes\xi_2\rangle>C(R+R_0).$$

  这表明 $C(d(\mathrm{supp}(\eta_1),\ \mathrm{supp}(\eta_2))+R_0)\geq C(R+R_0)$，因此:

$$d(\mathrm{supp}(\eta_1),\mathrm{supp}(\eta_2))\geq R,$$

  由此可得:

$$\langle\eta_1\otimes\xi_1|T|\eta_2\otimes\xi_2\rangle=\langle\xi_1|T_{\xi_1,\xi_2}|\xi_2\rangle=0$$

  根据 $T_{\xi_1\xi_2}$的传播条件。因此 $\chi_{(-\infty,0)}(F)T\chi_{[C(R+R_0),\ +\infty)}(F)=0$，由此可得 $\mathrm{prop}(T)\leq C(R+R_0)$。

□

接下来显然可得:

定理 5.12. 对于一个几乎交换 *Lipschitz* 三元组$(C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F,C_0(X)\otimes\mathbb{C}\mathbb{1},L)$，其表示在$\mathcal{H}_X\otimes\mathcal{H}_F$ 上:

$$C^*_{\mathrm{spec}}(C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F)\cong C^*(X)\otimes\mathbb{B}(\mathcal{H}_F)$$

5.4.2. 谱 *Higson* 紧化与粗结构： 本节将描述几乎交换 Lipschitz 三元组的谱 Higson 紧化。首先注意到，由于$\mathfrak{A}_F$是含幺的，$\mathrm{M}(C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F)\cong C_b(X)\otimes\mathfrak{A}_F\cong C_0(\beta X)\otimes\mathfrak{A}_F$。根据定义，下面的计算可直接得到:

命题 5.5。 设 $(C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F, C_0(X)\otimes\mathbb{C}\mathbb{1}, L)$是一个几乎交换 *Lipschitz* 三元组，则关于形如 $\mathcal{H}_X\otimes\mathcal{H}_F$的表示，谱 *Higson* 紧化作为 $C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F$的子集，由下式给出：

$$\overline{C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F}^{h} = C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F + C_h(X)\otimes\mathbb{C}\mathbb{1}$$

其中 $C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F + C_h(X)\otimes\mathbb{C}\mathbb{1}$ 被认作其在 $\mathcal{H}_X\otimes\mathcal{H}_F$上的表示下的像。

证明。 我们证明双重包含：

- ~~$C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F h\subset C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F + C_h(X)\otimes\mathbb{C}\mathbb{1}$~~: 固定 H_F 的一个标准正交基 $(e_i)_i$。令 $S\in C_0~~(X)\otimes\mathfrak{A}_F~~h$，并将其相对于基 $(e_i)_i$ 的分块记为 $S_{ij}\in\mathbb{B}(\mathrm{H}_X)$。根据谱 Higson 紧化的定义，由命题 5.4 可知，形如$1\otimes|e_i\,e_j|$的算子具有有限谱传播

$$[1\otimes|e_i\rangle\langle e_j|, S]\left(\rho_X(\chi_{K\mathbb{C}})\otimes\mathbb{1}\right)\xrightarrow[K\to X]{} 0$$

$\left(1\otimes|e_i\,e_j|\right)S$写成 H_X 上算子的矩阵时，其第 i 行、第l 列的元素为 $S_{j,l}$，其余位置均为 0；而 $S\left(1\otimes|e_i\,e_j|\right)$的第 k 行、第 j 列的元素为 $S_{k,i}$，其余位置均为 0。取 $i\neq j$ 可得，$[\left(1\otimes|e_i\,e_j|\right), S]$的（$i,i$）项为 $S_{j,i}$，因此：

$$S_{j,i}\rho_X(\chi_{K\mathbb{C}})\xrightarrow[K\to X]{} 0 \text{ for } j\neq i.$$

Thus

$$S_{j,i}\in C_0(X) \text{ for } j\neq i. \tag{5.2}$$

此外，$[\left(1\otimes|e_i\,e_j|\right), S]$的 (i,j) 项为 $S_{j,j}-S_{i,i}$，因此类似地：

$$S_{j,j}-S_{i,i}\in C_0(X) \text{ for } j\neq i. \tag{5.3}$$

结合 (5.2) 和 (5.3)，我们得到：

$$S - S_{11}\otimes\mathbb{1}\in C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F.$$

此外，若 $T\in\mathbb{B}(\mathrm{H}_X)$，则根据命题 5.4，对于某个 $C>0$，有 $\mathrm{prop}(T\otimes\mathbb{1})\leq C(\mathrm{prop}(T)+R_0)$，且 R_0 与 T 无关。因此，由于 $S\in C_0(X)\otimes\overline{\mathfrak{A}_F h}$，我们得到，对于任意 $R>0$ 和 ε，存在 K 使得：

$$\|[S, T\otimes\mathbb{1}]\chi_{K\mathbb{C}}\|\leq\varepsilon, \|\chi_{K\mathbb{C}}[S, T\otimes\mathbb{1}]\|\leq\varepsilon \text{对于任意满足 } \mathrm{prop}(T)\leq R \text{ 的 } T\in(\mathbb{B}(\mathrm{H}_X))_1$$

因此取 （1，1）元素，并采用交换情形中的识别（定理 5.5 ）

$$S_{11}\in C_h(X)$$

从而可得 $S=(S-S_{11}\otimes\mathbb{1})+S_{11}\otimes\mathbb{1}\in C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F + C_h(X)\otimes\mathbb{C}\mathbb{1}$.

- $C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F + C_h(X)\otimes\mathbb{C}\mathbb{1} \subset C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F h$：只需证明，对于 $f\in C_h(X)$，$f\otimes\mathbb{1}\in C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F h$。设 $R>0$ 与 $\varepsilon>0$，由定理 5.5 中 Higson 函数的刻画，存在紧集 $K\subset X$，使得对所有满足 $\mathrm{prop}(\tilde{T})\leq CR$ 的 $\tilde{T}\in(\mathbb{B}(\mathrm{H}_X))\mathbb{1}$：

$$\|[f,\tilde{T}]\chi_{K^{\mathbb{C}}}\|\leq\varepsilon/\dim(\mathcal{H}_F),\quad \|\chi_{K^{\mathbb{C}}}[f,\tilde{T}]\|\leq\varepsilon/\dim(\mathcal{H}_F).$$

因此，对所有 $T\in\mathbb{B}(\mathrm{H}_X\otimes\mathrm{H}_F)$，若 $\mathrm{prop}(T)\leq R$，则由命题 5.4 可得 $\mathrm{prop}(T_{ij})\leq CR$，于是：

$$[f\otimes\mathbb{1},T]\chi_{K^{\mathbb{C}}}=([f,T_{ij}]\chi_{K^{\mathbb{C}}})_{ij},\quad \chi_{K^{\mathbb{C}}}[f\otimes\mathbb{1},T]=(\chi_{K^{\mathbb{C}}}[f,T_{ij}])_{ij}$$

我们有：

$$\|[f\otimes\mathbb{1},T]\chi_{K^{\mathbb{C}}}\|\leq\varepsilon,\quad \|\chi_{K^{\mathbb{C}}}[f\otimes\mathbb{1},T]\|\leq\varepsilon.$$

□

观察 Higson 余边界：$C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F h/C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F\cong C_h(X)/C_0(X)=C(\nu X)$，我们自然预期 $C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F$ 上的谱粗结构与 $C_0(X)$ 粗同构。

粗等价的概念，以及更一般的粗映射，已在 [8], 中引入；我们先回顾定义。对于一个非交换粗空间 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$，我们用 $\partial\mathfrak{A}=\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ 表示其余边界。

定义 5.13（非交换粗映射）。若 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ 和 $(\mathfrak{B},\mathfrak{B})$ 是非交换粗空间，则从 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ 到 $(\mathfrak{B},\mathfrak{B})$ 的非交换粗映射是一个含幺完全正映射 $\varphi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$，它关于 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的严格拓扑连续，并且满足：

- $\varphi=\varphi_{\restriction\mathfrak{A}}:\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 将 $\mathfrak{A}$ 映射到 $\mathfrak{B}$,
- 余边界上的诱导映射 $\partial\varphi:\ \partial\mathfrak{A}\to\partial\mathfrak{B}$ 是一个 *-同态。

定义 5.14（非交换粗等价）。对于两个非交换粗空间 $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{A})$ 和 $(\mathfrak{B},\ \mathfrak{B})$，若存在一个非交换粗映射 $\varphi:\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\varphi$，使得存在非交换粗映射 $\psi:\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$，且复合映射 $\psi\circ\varphi$ 和 $\varphi\circ\psi$ 分别与相应的恒等映射相近，也就是说，余边界上的诱导映射是恒等映射，则称其为粗等价。

定理 5.15。设 $(C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F, C_0(X)\otimes\mathbb{C}\mathbb{1}, L)$ 是一个几乎交换 *Lipschitz* 三元组，则相对于形如 $\mathcal{H}_X\otimes\mathcal{H}_F$ 的表示，$C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F$ 上的谱粗结构与 $C_0(X)$ 上的粗结构粗等价。

$$C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F\underset{coarse}{\cong}C_0(X)$$

证明。设 $\tau:\ \mathfrak{A}_F\to\mathbb{C}$ 是 $\mathfrak{A}_F$ 上的一个（迹）态。定义 $\varphi:C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F h\to C_h(X)$ 和 $\psi:\ C_h(X)\to C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F h$ 如下：

$$\overline{\varphi}(f\otimes a)=\tau(a)f,\quad \overline{\psi}(f)=f\otimes\mathbb{1}.$$

于是:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}\circ\overline{\psi}(g) &= g,\\ \overline{\psi}\circ\overline{\varphi}(g\otimes\mathbb{1}) &= g\otimes\mathbb{1},\\ \overline{\psi}\circ\overline{\varphi}(f\otimes a) &= \tau(a)f\otimes\mathbb{1} = f\otimes a \mod C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F,\end{aligned}$$

对于 $f\in C_0(X)$、$g\in C_h(X)$、$a\in\mathfrak{A}_F$。回想一下，~~$C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F h\cong C_0(X)\otimes\mathfrak{A}_F + C_h(X)\otimes\mathbb{C}\mathbb{1}$~~，余边界上的诱导映射是恒等映射。 □

注记 5.16. 上述定理的交换版本是这样的事实：一个由有限个真度量空间副本构成的空间 Y，且这些副本之间的距离一致有界 X，满足 X。$Y \cong X$。粗几何

5.5. 谱三元组中的狄拉克算子与有限利普希茨交换子半范数。 本节考虑一般的（非含幺）谱三元组 $(\mathfrak{A},\mathrm{H},D)$。一般而言，计算 Roe 代数（谱交换子或相对交换子）预计会比上一节更微妙，但我们可以证明，若固定由 $L(a) = \|[D,a]\|$ 定义的利普希茨半范数，那么对于一个傅里叶变换紧支撑的有界函数 φ，$\varphi(D)$ 关于 $(\mathfrak{A},L)$ 具有有限利普希茨交换子半范数。特别地，这表明对于任意 $\varphi\in C_0(\mathbb{R})$，$\varphi(D)\in C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$，因此，至少我们知道 $C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$ 并非平凡。此外，这些结果将用于在第6节构造 D 的高指标。

为使论述尽可能一般，我们对谱三元组（$\mathfrak{A}$，H，D）仅作最少假设；特别地，我们不提及可求和性或正则性条件，也不提及实结构。由于我们主要关注相对交换子 Lipschitz 半范数，我们也不会在 $\mathfrak{A}$ 上固定任何地形。

因此我们作如下假设:

- $\mathfrak{A}$ 是在希尔伯特空间 H 上忠实表示的 C*-代数,
- D 是 H 上的无界自伴算子，使得集合

  $$\{a\in\mathfrak{A}:\ [D,a]\text{ 稠密定义，并可延拓为 H 上的有界算子}\}$$

  包含 $\mathfrak{A}$ 的一个稠密 *-子代数 A。
- D 满足局部紧性：对所有 $a\in\mathfrak{A}$，$a(1+D^2)^{-1/2}$ 是紧的。

我们用 $L(a)$ 表示对 $a\in\mathfrak{sa}(\mathrm{A})$ 定义的 Lipschitz 半范数:

$$L(a) = \|[D,a]\|$$

于是我们有如下结果:

命题5.6. 在上述设定中，对任意 $t\in\mathbb{R}$，算子 e^{itD} 关于$(\mathfrak{A},L)$具有有限利普希茨交换子半范数:

$$L^*(e^{itD}) \le |t|$$

证明. 对于 $a \in \mathfrak{sa}(\mathrm{A})$，我们有：

$$\frac{d}{dt}\left(e^{itD}ae^{-itD}\right) = ie^{itD}[D,a]e^{-itD}.$$

由此可得：

$$\begin{aligned}\|[e^{itD},a]\| = \|e^{itD}ae^{-itD} - a\| &= \left\|\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{isD}ae^{-isD}\right)ds\right\| \\ &\leq |t|\|[D,a]\| = |t|L(a).\end{aligned}$$

由于 A 在 $\mathfrak{A}$中关于 C*-范数稠密，因此 $L^*(e^{itD}) \leq |t|$。 □

由此可得：

命题 5.7. 在上述设定下，对于任意 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 有界博雷尔函数，若其傅里叶变换$\hat{}\varphi$ 紧支撑，则算子 $\varphi(D)$ 关于 $(\mathfrak{A}, L)$具有有限的利普希茨交换子半范数，更具体地说：

$$L^*(\varphi(D)) \leq \int_{\mathbb{R}} |t||\hat{\varphi}(t)|dt$$

证明。 事实上，根据傅里叶反演公式：

$$\varphi(D) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t)e^{itD}dt$$

wh此处积分在强算子拓扑下收敛。因此，对于 $a \in \mathfrak{sa}(\mathrm{A})$ ：

$$[\varphi(D),a] = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t)[e^{itD},a]dt$$

其中积分在强算子拓扑下收敛，由此可得 ：

$$\|[\varphi(D),a]\| \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(t)|\|[e^{itD},a]\|dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |t||\hat{\varphi}(t)|dt\right)L(a).$$

这表明：

$$L^*(\varphi(D)) \leq \int_{\mathbb{R}} |t||\hat{\varphi}(t)|dt.$$

□

现在，由于 $C_0(\mathbb{R})$由 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$生成，由 D的局部紧性可知，对任意 $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$， $\varphi(D) \in \mathbb{B}(\mathrm{H})$关于 $\mathfrak{A}$ 是局部紧的：对所有 $a \in \mathfrak{A}$， $a\varphi(D)$与 $\varphi(D)a$ 都是紧的。

此外，由于 $C_0(\mathbb{R})$中傅里叶变换具有紧支撑的函数集合在 $C_0(\mathbb{R})$中稠密，由此可得，对任意 $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$， $\varphi(D) \in C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$。

推论 5.1. 在上述设定下，对于任意 $\varphi \in C_0$（$\mathbb{R}$），我们有：

$$\varphi(D) \in C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A}).$$

6. 高指标理论

本节中，我们固定一个适当局部紧量子度量空间（$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{M}$，L），它在希尔伯特空间 H 上非退化且充分地表示。利用 Roe 代数的定义，我们推导出局部紧量子度量空间高指标理论的一些方面。

由于相对于完整代数的有限谱传播算子一般难以构造，我们将考虑以下两类高指标：

- 第一类取值于第 3 节所定义的相对交换子Roe代数 $C^*\mathrm{comm}(\mathfrak{A})$，对此可以利用函子性。（注：在交换情形中，更大的 $C_q^*(\mathfrak{A})$ 已被用来定义某些伪微分算子的高指标）。虽然这一高指标一般可以对来自谱三元组的狄拉克算子加以定义，但为了对 $\mathfrak{A}$ 的 K-同调中的一般元素定义它，我们需要假定存在一个与 $\mathfrak{A}$ 的元素充分交换的单位分解。

- 第二类取值于相对于任意交换子代数 $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$（例如 $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$）的谱 Roe 代数，对此可以通过通常的截断过程构造有限传播算子。

我们首先引入对偶代数 $D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$（分别为 $D^*\mathrm{spec}.\,\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$），并证明，在关于 $\mathfrak{A}$ 中交换子相对于 Lipschitz 范数的正则性满足某些假设时，$\mathfrak{A}$ 的 K-同调可以由 $D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})/C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$（分别为 D^* spec. $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})/C^*$ spec. $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$）的 K 理论得到。因此，利用 K 理论的六项正合列，我们可以定义高指标 $\mathrm{Ind}: K^i(\mathfrak{A}) \to K_i\left(C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})\right)$（分别为 $C^*\mathrm{spec}.\,\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$）。

6.1. **取值于相对交换子Roe代数的指标**。

定义 6.1. 记 $D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$ 为由 H 上与 $\mathfrak{A}$ 交换至多相差紧算子且具有有限相对交换子半范数的算子生成的 C^*-代数。

$$D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A}) = \overline{\{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}):\ L^*(T) < \infty \text{ and } \forall a \in \mathfrak{A} : [T, a] \in \mathbb{K}(\mathcal{H})\}}$$

我们进一步回顾 Paschke 对偶中使用的以下 C^*-代数：

- $\mathrm{C}(\mathfrak{A}) = \{T \in \mathbb{B}(\mathrm{H}):\ \forall a \in \mathfrak{A}:\ Ta \in \mathbb{K}(\mathrm{H}),\ aT \in \mathbb{K}(\mathrm{H})\}$ 局部紧算子的集合。

- $\mathrm{D}(\mathfrak{A}) = \{T \in \mathbb{B}(\mathrm{H}):\ \forall a \in \mathfrak{A}:\ [T, a] \in \mathbb{K}(\mathrm{H})\}$ 与 $\mathfrak{A}$ 的对易关系模紧算子的集合。

那么，众所周知：

定理 6.2（Paschke 对偶）。

$$K_{i+1}\left(\mathcal{D}(\mathfrak{A})/C(\mathfrak{A})\right) = K^i(\mathfrak{A}).$$

定义 6.3. 我们称 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 具有满足**交换子-利普希茨** 条件的近似单位，如果存在一个严格正常数序列 C_n 使得 $C_n \to 0_{n\to\infty}$，并且存在一个由局部代数 $\mathfrak{M}$ 中的局部元素构成的近似单位 e_n，使得：

$$\|[e_n, a]\| \leq C_n L(a) \text{ for all } a \in \mathfrak{A}$$

并且对 $\sigma(\mathfrak{M})$中的任意紧集 K，存在 N使得 $e_N \chi_K = \chi_K$。

注：上述定义蕴含，对任意 n，在 $\sigma(\mathfrak{M})$中存在 $K_n \subset L_n$ 个紧集，使得$e_n \chi_{K_n} = \chi_{K_n}$且 $e_n \chi_{L_n^{\complement}} = 0$。

此外，若 $\mathfrak{A}$对某个 C满足不等式 $\|[a, b]\| \leq C L(a) L(b)$，并且在 $\mathfrak{M}$ 中存在由局部元素构成的近似单位 e_n，使得 $L(e_n) \to 0$，并且对 $\sigma(\mathfrak{M})$中的任意紧集 K，对某个 N有 $e_N \chi_K = 1$，则上述结论成立。

我们首先记录由局部紧量子度量空间的刻画以及交换子-Lipschitz近似单位的存在性所得到的如下推论：

引理 6.4. 若$(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 是一个局部紧量子度量空间，$\mu \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{M})$ 且$(e_n)_n$ 是 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中满足交换子-*Lipschitz* 条件的近似单位，则对所有 n：

$$\{e_n a \mid a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \leq 1, \mu(a) = 0\}$$

对于 $\mathfrak{A}$ 的范数拓扑是全有界的。

证明。设 $\varepsilon > 0$我们将证明 $\{e_n a \mid a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}),\ L(a) \leq 1,\ \mu(a) = 0\}$ 可被半径小于或等于 ε 的有限个球覆盖。设 K 为一个紧集，使得 $e_n \chi_{K^{\complement}} = 0$（即 e_n 支撑于 K 内）。再设 N使得 $e_N \chi_K = \chi_K$。（即 $e_N = 1$ 在 K 上），并且使得$\|[a, e_N]\| \leq \varepsilon L(a)$。由假设，这样的 K和 N存在。根据局部紧量子度量空间的刻画（定理 2.9），集合

$$\{e_n a e_N \mid a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \leq 1, \mu(a) = 0\}$$

对于 $\mathfrak{A}$ 的范数拓扑是全有界的。由此可知，存在有限集 $F \subset \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$，对所有 $b \in F$ 满足 $L(b) \leq 1$ 且 $\mu(b) = 0$，使得对所有满足 $L(a) \leq 1$ 且 $\mu(a) = 0$ 的 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$，存在 $b \in F$ 使得：

$$\|e_n a e_N - e_n b e_N\| \leq \varepsilon.$$

因此，由于 $e_n e_N = e_n$：

$$\|e_n a - e_n b\| \leq \|e_n [e_N, a]\| + \|e_n [e_N, b]\| + \|e_n a e_N - e_n b e_N\| \leq 3\varepsilon.$$

这表明所需的全有界性。 □

如果 $\mathfrak{A}$ 具有满足交换子-Lipschitz 条件的近似单位，那么在上述等式中，我们可以将 $\mathsf{D}(\mathfrak{A})$ 替换为 $D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$，并将 $\mathsf{C}(\mathfrak{A})$ 替换为 $C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$：

定理 6.5。 如果$(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, L)$ 具有满足交换子-*Lipschitz* 条件的近似单位，那么下列 C^* 代数等式成立：

$$D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})/C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A}) = \mathcal{D}(\mathfrak{A})/C(\mathfrak{A}).$$

在开始证明之前，我们先回顾一下 [14] 中的以下引理，它将在证明中发挥作用：

引理 6.6. 设 I 是 C^*-代数 L的一个理想。对于任意可分的 C^*-代数 $D \subset \mathcal{I}L$，存在一个正压缩算子 $x \in \mathcal{I}I$，使得：

- $[x, d] \in \mathcal{I}_0 I$ 对所有 $d \in D$,
- $(1 - x)d \in \mathcal{I}_0 I$ 对所有 $d \in D \cap \mathcal{I}I$。

定理 *6.5* 的证明. 只需证明 $\mathrm{D}(\mathfrak{A}) \subset D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A}) + \mathrm{C}(\mathfrak{A})$。令 e_n为 $\mathfrak{M}$ 中 $\mathfrak{A}$ 的一个近似单位，满足

$$\|[e_n, a]\| \le C_n L(a) \text{ for all } a \in \mathfrak{A}.$$

通过对 $(e_n)_n$最终取一个子序列，我们可以假设 $C_n \le \frac{1}{2^{n+2}}$。令 $f_n = e_n - e_{n-1}$ 满足$f_1 = e_1$。因此我们有：

$$\|[f_n, a]\| \le \frac{L(a)}{2^n} \text{ for all } a \in \mathfrak{A}, n \in \mathbb{N}, \text{ and } \sum_n f_n = 1 \text{ strictly.}$$

若 $T \in \mathrm{D}(\mathfrak{A})$，则对由 T 和 $\mathfrak{A}$ 生成的可分 C^*-代数 D 应用引理 6.6，将它们视为 $\mathrm{I}\mathbb{B}(\mathrm{H})$ 中的常值元素，并将 $I = \mathbb{K}(\mathrm{H})$ 视为 $L = \mathbb{B}(\mathrm{H})$ 的理想。可得存在 $x \in \mathrm{I}\mathbb{K}(\mathrm{H})$，使得：

对所有 $d \in D$, • $[x, d] \in \mathrm{I}_0\mathbb{K}(\mathrm{H})$,
对所有 $d \in D \cap \mathrm{I}\mathbb{K}(\mathrm{H})$, • $(1 - x)d \in \mathrm{I}_0\mathbb{K}(\mathrm{H})$。

取 $y = 1 - x$，并记 y_t 为在 t 处的求值，则特别有：

(1) 对所有 $a \in \mathfrak{A}$, $[y_t T, a] \underset{t\to\infty}{\to} 0$：事实上，$[y_t T, a] = (1 - x_t)[T, a] + [x_t, a]T$。考察求和中的各项，$[T, a]$ 是 $D \cap \mathrm{I}\mathbb{K}(\mathrm{H})$ 的一个元素，因此 $(1 - x_t)[T, a] \to 0$，且 a 属于 D，故 $[x_t, a]T \to 0$。(2) $(1 - y_t)T$ 是紧的（因而是局部紧的）：事实上，$(1 - y_t)T = x_t T$ 是紧的，因为 $x \in \mathrm{I}\mathbb{K}(\mathrm{H})$。

˜现在我们将构造一个 T 形式的算子

$$\tilde{T} = \sum_n y_{t_n} T f_n,$$

对于精心选择的序列 $t_n \to \infty$，使得：

$$L^*(\tilde{T}) < \infty \text{ and } T - \tilde{T} \in C(\mathfrak{A}).$$

固定 μ 上的一个局部态。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，由上面的引理，该集合

$$\{f_n a : a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}), L(a) \le 1, \mu(a) = 0\}$$

是全有界的，因为它是两个全有界集之和。现在，由于 $[y_t T, f_n a] \xrightarrow{t} 0$ 对所有$a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$都成立（上面的性质（1））， 我们可以选择足够大的 t_n， 使得对于所有带有$L(a) \leq 1$ 和 $\mu(a) = 0$ 的 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$:

$$\|[y_{t_n} T, f_n a]\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

通过最终取一个更大的 t_n， 我们还可以要求:

$$\|[y_{t_n} T, f_n]\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

于是我们有:

$$a y_{t_n} T f_n = f_n a y_{t_n} T + [a, f_n] y_{t_n} T + a[y_{t_n} T, f_n].$$

由此可知，对于满足 $L(a) \leq 1$且 $\mu(a) = 0$的 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$:

$$\begin{aligned}
\|[y_{t_n} T f_n, a]\| &= \|y_{t_n} T f_n a - a y_{t_n} T f_n\| \\
&\leq \|(y_{t_n} T f_n a - f_n a y_{t_n} T)\| + \|[a, f_n] y_{t_n} T\| + \|a[y_{t_n} T, f_n]\| \\
&\leq \|[y_{t_n} T, f_n a]\| + \|[a, f_n] y_{t_n} T\| + \|a[y_{t_n} T, f_n]\| \\
&\leq \frac{3}{2^n}
\end{aligned}$$

对 n 求和可得

$$[\tilde{T}, a] \leq 3 \text{ for all } a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{u}\mathfrak{A}) \text{ with } L(a) \leq 1 \text{ and } \mu(a) = 0.$$

现在，若 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$满足 $L(a) \leq 1$， 则令 $\tilde{a} = a - \mu(a)1$， 我们有 $L(\tilde{a}) = L(a) \leq 1$且$\mu(\tilde{a}) = 0$， 因此:

$$\|[\tilde{T}, a]\| = \|[\tilde{T}, \tilde{a} + \mu(a)1]\| = \|[\tilde{T}, \tilde{a}]\| \leq 3.$$

由此可得： $L^*(\tilde{T}) \leq 3 < \infty$。

最后，我们得到:

$$T - \tilde{T} = \sum_n T f_n - y_{t_n} T f_n = \sum_n (1 - y_{t_n}) T f_n.$$

若 a是 $\mathfrak{M}$中某个紧 K的 $\chi_K \mathfrak{A} \chi_K \cap \mathfrak{A}$的元素，则根据关于近似单位 e_n的假设，存在 N，使得对所有 $n \geq N$， $f_n a = 0$。由此可知，和 $\sum_n (1 - y_{t_n}) T f_n a$是有限个紧项的和（参见上面的性质(2)），因此我们看到 $T - \tilde{T} \in \mathsf{C}(\mathfrak{A})$。我们得出 $\mathsf{D}(\mathfrak{A}) \subset D^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A}) + \mathsf{C}(\mathfrak{A})$，因此两个商相等。□

推论6.1。对于定理 *6.5* 中的 $\mathfrak{A}$， 我们有以下同构:

$$K_{i+1}\left(D^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A}) / C^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A})\right) = K^i(\mathfrak{A})$$

现在，考虑以下短正合列,

$$0 \to C^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A}) \to D^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A}) \to D^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A}) / C^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A}) \to 0$$

我们得到一个边界映射:

$$\text{Ind} : K_{i+1}(D^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A}) / C^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A})) \to K_i(C^*_{\text{comm}}(\mathfrak{A})).$$

特别地，如果 $\mathfrak{A}$ 满足定理 6.5 的条件，我们就得到一个映射：

$$\mathrm{Ind} : K^i(\mathfrak{A}) \to K_i(C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})).$$

定义 6.7. 我们将上述映射称为取值于 $\mathfrak{A}$ 的相对交换子 Roe 代数中的 $\mathfrak{A}$ 高指标映射。

特别地，若 $(\mathfrak{A}, \mathrm{H}, D)$ 是一个非幺谱三元组（且不对 $\mathfrak{A}$ 或最终拓扑作额外假设），我们便可以构造 $D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$ 的一个元素，从而得到与狄拉克算子 D 相关的高指标，如下所示。首先回顾以下术语：

定义 6.8. 有界函数 $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为归一化函数，若其为奇函数，并满足 $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 1$ 和 $\lim_{x\to-\infty} \psi(x) = -1$。

命题 6.1. 设 $(\mathfrak{A}, \mathcal{H}, D)$ 是一个非幺谱三元组，并设 ψ 是一个归一化函数，则 $\psi(D) \in D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$；此外，类 $[\psi(D)] \in D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})/C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$ 不依赖于 ψ 的选择。

由此可得元素 $\mathrm{Ind}(D) = \mathrm{Ind}(\psi(D)) \in K_i(C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A}))$。

证明。 首先回忆，若 ψ_1 和 ψ_2 是两个归一化函数，则 $\psi_1 - \psi_2 \in C_0(\mathbb{R})$，因此 $\psi_1(D) - \psi_2(D) \in C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$。

算子 $\psi(D)$ 与 $\mathfrak{A}$ 模紧算子交换： 为完整起见，我们重述所需的 [15] (第 3 节) 和 [16] (定理 4.1) 中的证明内容。考虑归一化函数 $\psi_0 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 那么对于满足 $[D, a]$ 有界的 a 和 b，我~~们~~有：

$$[\psi_0(D), a]b = [D(1+D^2)^{-\frac{1}{2}}, a]b = [D, a](1+D^2)^{-\frac{1}{2}}b + D[(1+D^2)^{-\frac{1}{2}}, a]b$$

$[D, a](1+D^2)^{-\frac{1}{2}}b$ 是紧算子，因为它是有界算子与紧算子的乘积。此外，利用 $(1+D^2)^{-\frac{1}{2}}$ 的函数演算积分公式，我们有：

$$D[(1+D^2)^{-\frac{1}{2}}, a]b = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}} D^2(\lambda + 1 + D^2)^{-1}[D, a](\lambda + 1 + D^2)^{-1}b\,d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}} D(\lambda + 1 + D^2)^{-1}[D, a](\lambda + 1 + D^2)^{-1}Db\,d\lambda$$

上述两个积分中的每一个都在算子范数下收敛，并且是紧的，因为它是紧算子的范数极限（利用 $(\lambda + 1 + D^2)^{-1}b$ 是紧的）。因此 $[\psi_0(D), a]b$ 是紧的，并且由 A 在 $\mathfrak{A}$ 中的稠密性，我们看到它对 $\mathfrak{A}$ 中的任意 a 和 b 都是紧的。由此可得 $[\psi_0(D), ab] = [\psi_0(D), a]b + a[\psi_0(D), b]$ 也是紧的。由 $\mathfrak{A}$ 中乘积的稠密性，可得对任意 $a \in \mathfrak{A}$，$[\psi_0(D), a]$ 是紧的。

对于一般的归一化函数 ψ，我们可以写成 $\psi = \psi_0 + \phi$，其中 $\phi \in C_0(\mathbb{R})$，因此 $\phi(D)$ 是局部紧的，由此可得对任意 $a \in \mathfrak{A}$，$[\psi(D), a]$ 是紧的。

算子 $\psi(D)$ 属于 $D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$： 取一个傅里叶变换具有紧支撑的归一化函数 ψ_1（这样的函数存在），由命题 5.7 可知 $L^*(\psi_1(D)) < \infty$。由上一步可得 $\psi_1(D) \in D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$。

现在，再对一般的归一化函数 ψ，我们可以写成 $\psi = \psi_1 + \phi$，其中 $\phi \in C_0(\mathbb{R})$，从而由推论 5.1 得$\phi(D) \in C^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$，由此可得 $\psi(D) \in D^*_{\mathrm{comm}}(\mathfrak{A})$。□

6.2. **Lipschitz 控制 K 理论与定量 K 理论：有限 Assouad-Nagata 维数下的比较**。在这一简短章节中，我们指出，上述局部化相对交换子 Roe 代数的构造，结合定理 3.16，使我们能够比较度量空间近似 K 同调的两种不同方法，即定量K理论 [17] [18]和 Lipschitz 控制 K 理论 [19]。借助由传播 prop 给出的滤过，我们使用 Roe 代数的定量K理论来近似 K 同调。Lipschitz 控制 K 理论 [19] 主要用于近似度量空间的 K 理论；但如果我们转而考虑上述相对交换子代数的 Lipschitz 控制 K 理论，并采用 Lipschitz 半范数L^*，那么对于具有有限 Assouad-Nagata 维数的度量空间，这等价于使用定量K理论来近似该空间的 K 同调，例如 [18] 中所述。

我们建议感兴趣的读者参阅 [19] 和 [17] [18]，了解受控K理论这两个概念的定义；由此立即可得定理 3.16。

6.3. **取值于交换子代数的 Roe 代数的指标**。设 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$的交换子代数，满足 $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$。那么，在第 3 节中，我们已经定义了相对于 $\mathfrak{B}$的传播以及相应的 Roe 代数 $C^*\mathrm{spec}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \cong C^*_{\mathrm{spec}}(\mathfrak{B})$。于是我们可以定义以下对偶代数：

定义 6.9。记 $D^*\mathrm{spec}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ 为由 H 上与 $\mathfrak{A}$ 模紧算子交换且相对于 $\mathfrak{B}$具有有限谱传播的算子生成的 C^*-代数。

$$D^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) = \overline{\{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{prop}_{\mathfrak{B}}(T) < \infty \text{ and } \forall a \in \mathfrak{A} : [T, a] \in \mathbb{K}(\mathcal{H})\}}$$

我们再次得到以下结论：

定理 6.10。以下等式在 C^* 代数中成立：

$$D^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})/C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) = \mathcal{D}(\mathfrak{A})/C(\mathfrak{A}).$$

证明。只需证明 $\mathrm{D}(\mathfrak{A}) = D^*\mathrm{spec}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) + \mathrm{C}(\mathfrak{A})$。换言之，只需证明，任何与 $\mathfrak{A}$ 对易至相差一个紧算子的算子，都可以分解为一个“有限传播”部分和一个局部紧部分。

由于 $\mathfrak{A}$ 是真度量空间，$\sigma(\mathfrak{B})$ 是一个可分真度量空间（按经典意义），我们可以固定一个单位分解 $\chi_n \in \mathfrak{B}$，使得 $\mathrm{diam}\,(\mathrm{supp}\,(\chi_n)) \leq 1$。

现在，对于 $T \in \mathrm{D}(\mathfrak{A})$，令

$$T' = \sum_n \sqrt{\chi_n} T \sqrt{\chi_n}.$$

Then

- T' 有良好定义，且 $\mathrm{prop}(T') \leq 1$:

事实上，对于 $a \in \mathfrak{Loc}(\mathfrak{A}|K)$，其中 K在 $\sigma(\mathfrak{M})$ 中是紧的，那么和 $\sqrt{\chi_n}T\sqrt{\chi_n}a$只有有限个非零项，因此我们可以得出该和强收敛，因为$\mathfrak{Loc}(\mathfrak{A}|*)$是稠密的，且该表示是非退化的。

此外，如果 $f, g \in \mathfrak{B}$ 的支撑之间的距离至少为 1，那么 $f\sqrt{\chi_n}T\sqrt{\chi_n}g = 0$，因为$f$的支撑包含于 $\mathrm{supp}(\chi_n)$ 会意味着 g不成立，反之亦然。因此 $fT'g = 0$，且 $\mathrm{prop}(T') \leq 1$。

- $T - T'$ 是局部紧的。事实上

$$(T - T')a = \sum_n (T\chi_n - \sqrt{\chi_n}T\sqrt{\chi_n}a) = \sum_n [T, \sqrt{\chi_n}]\sqrt{\chi_n}a$$

对于 $a \in \mathfrak{Loc}(\mathfrak{A}|*)$，这是有限个紧算子的和，因此是一个紧算子。由于 $\mathfrak{Loc}(\mathfrak{A}|*)$ 是范数稠密的，且 $\mathbb{K}(\mathrm{H})$ 是闭的，我们便可得出结论。

注意，上述论证还表明 T' 与 $\mathfrak{A}$ 的交换关系在模紧算子的意义下成立，因为 T 和$T - T'$都满足这一点。因此 $T' \in D^*\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ 和 $T \in \mathrm{C}(\mathfrak{A})$.

此外，显然每个 $\sqrt{\chi_n}T\sqrt{\chi_n}$ 相对于 $\mathfrak{B}$ 都具有有限谱传播，因此 T'也如此。□

备注 6.11。 与 $\mathfrak{A}$ 为交换的情形相比，唯一的区别在于我们需要假设 $\mathfrak{Loc}(\mathfrak{A}|*)$ 是稠密的；对于适当量子度量空间而言，这一点成立。

推论 6.2。

$$K_{i+1}\left(D^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})/C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})\right) = K^i(\mathfrak{A})$$

考虑以下短正合列，

$$0 \to C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \to D^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \to D^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})/C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \to 0$$

我们得到边界映射：

$$\mathrm{Ind} : K^i(\mathfrak{A}) \to K_i(C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})) = K_i\left(C^*\left(\sigma(\mathfrak{B})\right)\right).$$

6.3.1. 通过有限传播值局部化代数得到 K-同调。

定义 6.12。 定义 $C^*_L, \mathrm{spec}, \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ 为以下集合的闭包：所有一致连续有界映射 $f: [0,\infty) \to C^*\mathrm{spec}, \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$，其关于 $\mathfrak{B}$ 具有有界传播，并且对于所有 $a \in \mathfrak{A}$,$[f(t), a] \underset{t\to\infty}{\to} 0$。

于是我们得到如下结论：

定理 6.13。 我们有一个自然同构：

$$K_i\left(C^*_{L,\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})\right) \cong K^i(\mathfrak{A})$$

.

在上述同构下，粗指标由求值映射 $\mathrm{ev}_0 : C^*_{L,\ \mathrm{spec},\ \mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \to C^*{}_{\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \cong C^*(\sigma(\mathfrak{B}))$ 诱导，该映射由 $\mathrm{ev}_0(f) = f(0)$ 给出。

$$\mathrm{Ind} = (\mathrm{ev}_0)_* : K_i\left(C^*_{L,\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})\right) \to K_i\left(C^*(\sigma(\mathfrak{B}))\right)$$

我们先引入相应的“交换紧”代数：

定义 6.14。 定义 $D^*_{L,}\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ 为下列一致连续有界映射 f：$[0,\infty) \to D^*\,\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ 所成集合的闭包，其中这些映射满足对所有 $a \in \mathfrak{A}$, $[f(t), a] \underset{t\to\infty}{\to} 0$。

接下来我们证明以下路径正则化引理：

引理 6.15。

$$D^*_{L,\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})/C^*_{L,\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) = \mathcal{I}D^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})/\mathcal{I}C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$$

证明。只需证明 $\mathrm{I}\ D^*\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A}) = D^*_{L,}\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A}) + \mathrm{I}C^*\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$。若 f 属于 $\mathrm{I}\ D^*\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ ~ ~，我们构造 $f \in D^*_{L,}\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$，使得 $f - f$ 属于 $\mathrm{I}C^*\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$。为此，令 B^* 为关于 $\mathfrak{B}$ 由有限传播算子生成的 C^*-代数，并令 $K^* = B^* \cap \mathbb{K}(\mathrm{H})$。代数 K^* 是 B^* 的一个理想。此外，令 D 为由 $\{f\}$ 以及将 $\mathfrak{A}$ 中的元素视为常值函数所生成的可分 C^*-代数。$\mathfrak{A}$ 中的元素是 $\chi_K\mathfrak{A}\chi_K$ 中有限传播算子的极限，其中 K 在 $\sigma(\mathfrak{M})$ 中紧，因此 $\mathfrak{A} \subset L^*$，从而 $D \subset \mathrm{I}\ B^*$。

利用引理 6.6，我们可以找到 $x \in \mathrm{I}K^*$，使得 $[x, d] \underset{t\to\infty}{\to} 0$ 对所有 $d \in D$ 成立，并且 $(1-x)d \underset{t\to\infty}{\to} 0$ 对所有 $d \in D \cap \mathrm{I}K^*$ 成立。

~然后令 $f = f - xf$：

- $f - \tilde{f} = xf$ 属于 $\mathrm{I}C^*\,\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$。事实上，$x \in \mathrm{I}K^*$，因此 xf 是 K^* 中的算子的一条一致连续路径。· $C^*\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A}) \subset C^*\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$。~
- $f \in D^*_{L,\ }\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$。由上文显然可知它属于 $\mathrm{I}\ D^*\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$；此外，对于 $a \in \mathfrak{A}$,

$$[\tilde{f}(t), a] = [x, a]f(t) + (1-x)[f(t), a] \underset{t\to\infty}{\to} 0,$$

分别将上面对 x 的条件应用于 $d = f$ 和 $d = a$ 即可。

□

利用以下短正合序列：

$$0 \to C^*_{L,\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \to D^*_{L,\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \to \mathcal{I}D^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})/\mathcal{I}C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \to 0$$

我们得到边界映射 $K_{i+1}\left(\mathrm{I}\ D^*\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})/\mathrm{I}C^*\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})\right) \to K_i\left(C^*_{L,}\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})\right)$.因此只需证明：

- 我们有消失公式：$K_i\left(D^*_{L,}\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A})\right) = 0$。

- 由常值函数 $D^*\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A})/C^*\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{I}\ D^*\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A})/\mathrm{I}C^*\mathrm{spec},\ \mathfrak{B}$诱导出 $(\mathfrak{A})$ 的映射在 K 理论上给出了一个同构：

$$K_i\left(\mathcal{I}D^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})/\mathcal{I}C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})\right) = K_i\left(D^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})/C^*_{\mathrm{spec},\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})\right).$$

这两点的证明依赖于埃伦伯格蛇行论证，以及以下两个观察：

- Roe 代数与 $\mathfrak{B}$（回忆一下，$\mathfrak{B}$是交换的）无关，局部化代数也与所用的表示 ρ无关。（对于局部化代数，取一条等距算子交织路径，并用 $\mathfrak{B}$ 中的元素对其截断，从而相对于 $\mathfrak{B}$得到有限传播。）
- 若 $f \in D^*_{L,}\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$，则如下定义的 $\hat{}\, f \in \mathrm{I}\mathbb{B}(\mathrm{H}^{\oplus\infty})$：

$$\hat{f}(t) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} f(t+n)$$

相对于表示 $\bigoplus_{n=0}^{\infty}\rho$也属于 $D^*_{L,}\mathrm{spec},\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$，因为对于固定的 t, $[\hat{}\, f(t), a]$是范数趋于零的紧算子的直和，因此它是紧的。

证明的其余部分便可沿用经典情形中的相同论证（见 [20]）。

7. 展望

本文建立了局部紧量子度量空间与非交换粗几何之间的联系，并在这一框架下定义了 Roe 代数和高指标理论的概念。我们相信，这种新联系仍有许多值得探索之处，也留下了许多开放问题和研究方向，供未来研究探讨；尤其是与非交换几何其他领域的发展相联系的方向。下面概述其中一些方向。

7.1. 谱 Roe 代数计算的更多例子。一个研究方向是计算更多具有更本质非交换性的局部紧量子度量空间的谱 Roe 代数。一个很有前景的例子是 Moyal 平面，其上的谱三元组结构定义见 [21]，并且如 [3] 所述，可将其视为局部紧量子度量空间。我们预计，在这类情形下，相对交换子 Roe 代数与谱 Roe 代数将有显著差异。事实上，相对交换子 Roe 代数及由其产生的非交换粗结构，似乎在非交换情形下更为自然。

7.2. （有限）W*量子度量空间的几何实现。与上文相关，一个值得研究的问题是，即使在最简单的情形下（例如带有 Lipschitz 半范数的 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$），谱传播以及相对于对角子代数 $\mathbb{C}^n$的谱传播会产生何种 W* 量子度量结构；此外，还可以研究考虑 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 的不同表示时会发生什么。由于任意量子图（尤其是那些产生量子扩张子的量子图）都可以自然地置于量子关系及 W*量子度量空间的框架下，因此这或许能让我们

按照 Lipschitz 半范数的意义，为量子图（尤其是量子扩张子）构造“几何实现”。

7.3. **谱三元组**。 在 [4], 中，W*量子度量结构与谱三元组相关联，大致是通过规定 e^{itD} 具有传播 $|t|$。在我们的构造中，我们已证明，带有忠实表示的局部紧量子度量空间给出 W*量子度量空间。比较这两种构造，并考察它们在某些情形下是否一致，将是有意义的。我们再次预期这在一般情况下会失败，而相对交换子 Roe 代数是更接近的概念。

7.4. **指标理论**。 尽管我们已为局部紧量子度量空间定义了两类高阶指标，并与经典情形平行，进一步研究更具体的例子并在某些情形下计算这些指标将是有意义的。Moyal 平面在这一方向上似乎同样是一个有前景的例子。

7.5. L^* **半范数**。 半范数 L^* 满足一些基本性质，使其成为非交换Lipschitz半范数的良好候选，只是 $L^*(T) = 0$并不蕴含 T是单位元的标量倍数。对于不可约地表示在有限维 Hilbert H_F 空间上的有限维代数，这一问题不会出现，并且在$\mathbb{B}(\mathrm{H}_F)$上得到一个 Lipschitz 半范数。更详细地研究这一半范数，并考察它能否用于构造（有限）量子度量空间的新例子，或能否为已有例子提供新的洞见，将是有意义的。对于更一般的非有限空间，可以问是否能取相对交换子 Roe 代数的子空间或商空间，使得 L^* 成为 Lipschitz 半范数，并考察这能否引出量子度量空间的新例子。

参考文献

[1] Alain Connes。《非交换几何》。Academic press，1994年。[2] Marc A. Rieffel。《态空间上的度量》。*Documenta Mathematica*，4:559–600，1999年。[3] Fr´ed´eric Latr´emoli`ere。《量子局部紧度量空间》。264(1):362–402。[4] Greg Kuperberg 和 Nik Weaver。《量子度量/量子关系的冯·诺伊曼代数方法》。美国数学会论文集第215卷第1010号。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，在线版，2012年。[5] John Roe。《指标理论、粗几何与流形拓扑》。数学中的CBMS区域会议系列第90号。由美国数学科学会议委员会委托美国数学会出版，普罗维登斯，罗得岛，1996年。[6] Rufus Willett 和 Guoliang Yu。《高指标理论》。剑桥大学出版社，第1版，2020年7月。[7] Frederic Latremoliere。《量子适当度量空间的拓扑格罗莫夫–豪斯多夫量子超拓扑》，2014年6月。[8] Tathagata Banerjee 和 Ralf Meyer。非交换粗几何。13(3):1117–1149。[9] J´an ˇSpakula 和 Aaron Tikuisis。《Roe代数的相对交换子图景》。*Communications inMathematicalPhysics*，365(3):1019–1048，2019年2月。[10] R. L. Dobrushin。《通过条件分布规定随机变量系统》。*Theory ofProbability&Its Applications*，15(3):458–486，1970年1月。

[11] John Roe。《粗几何讲义》。大学讲义丛书第31卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2003年。[12] Nigel Higson 和 John Roe。《解析K同调》。大学出版社，2000年。[13] Francesco D’Andrea 和 Pierre Martinetti。关于谱三元组乘积的毕达哥拉斯定理。*Letters inMathematical Physics*，103(5):469–492，2013年5月。[14] Marius Dadarlat、Rufus Willett 和 Jianchao Wu。局部化 c∗-代数与K理论对偶性。*K*理论年刊，3(4):615–630，2018年。[15] Alan L. Carey、Victor Gayral、Adam Charles Rennie 和 Fedor Sukochev。《局部紧非交换几何的指标理论》。美国数学会论文集第 231 卷第 1085 号。美国数学会，在线版。[16] J. Kaad、R. Nest 和 A. Rennie。冯·诺伊曼代数中的KK理论与谱流。10(2):241–277。[17] Herv´e Oyono-Oyono 和 Guoliang Yu。关于定量算子K理论。65(2):605–674。[18] Ryo Toyota。受控K理论与K同调。19(4):1139–1161。[19] Jinmin Wang、Zhizhang Xie 和 Guoliang Yu。有限渐近维数的一致可缩流形上的数量曲率衰减。77(1):372–440。[20] Yu Qiao 和 John Roe。关于Guoliang Yu的局部化代数。*Forum Mathematicum*，22(4)，2010年。[21] V. Gayral、J. M. Gracia-Bond´ıa、B. Iochum、T. Sch¨ucker 和 J. C. Varilly。Moyal平面是谱三元组。246(3):569–623。