arXiv:2602.23222v1 [math.OA] 26 Feb 2026

最小量子 Mackey 变形

YVANN GAUDILLOT–ESTRADA

Abstract. 当 G 是一个实半单群时，其表示论与其运动群 G_0的表示论之间存在一种令人惊讶的相互关系，称为 Mackey 类比。本文将这一类比推广到 q-变形的框架中，适用于 $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$。事实上，我们构造了一个由 $(q, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$参数化的 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 变形，其中 q 是量子化参数，t 是麦基参数。我们展示了表示论如何沿着这一变形发生变化，并证明了针对 q-变形约化群 C*-代数的 Connes-Kasparov 同构的一个类比结果。

假设 G 是一个半单李群，$K \subset G$ 是一个极大紧子群。G 的运动群是半直积 $G_0 = K \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$，其中$\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 是 G的李代数对 K的李代数取商所得的商空间，将其视为阿贝尔李群，并赋予 K的伴随作用。基于 Mackey 的思想，[25], Higson 在复数情形下 [19]揭示了 G与 G_0 的表示论之间惊人的相似性。这一以 Mackey 命名的类比，后来由 Afgoustidis 推广至实群 [1–3]。其主要特征之一是存在一个自然双射，能够连续地（见 [4]）将 G 的温和（或约化酉）对偶映射到 G_0 的酉对偶，并保持最小K-型。Mackey 类比还促成了 Connes-Kasparov 同构的一种新证明：将 G 压缩至 G_0，可得到一个约化群 C*-代数的连续场，称为 Mackey 变形，其 K-理论保持不变。最近，[9] 的作者构造了一个嵌入 $C^*(G_0) \hookrightarrow C_r^*(G)$，并利用它刻画了麦基双射和 Connes-Kasparov 映射（在此之前，[20]已在复数情形下提出一种方法）。

在完全不同的方向上，量子化给出了 G 的另一种有趣变形。在最近的一篇论文中，[11], De Commer 构造了与 G 复化上的实 Poisson-Lie 结构相关的 G 各种卷积代数的 q-变形。若 $q \neq 1$ 是实正参数，则存在 q-类比对象：$\mathfrak{g}$ 的包络 $*$ 代数、与 $(\mathfrak{g}, K)$ 相关的 Hecke 代数，以及 G 的最大群 C*-代数，分别记作 $U_q(\mathfrak{g})$、$R_q(\mathfrak{g}, K)$ 和 $C_q^*(G)$。迄今为止，对这些代数及其表示的深入研究仅涉及复群和 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$。对于复群，De Commer 的构造与紧形式的 Drinfeld 双一致；

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46L67、46L65、22E46、46L80、17B37、20G42。
Key words and phrases. 实半单量子群、C*-代数连续场、酉表示、K-理论、Baum-Connes猜想、抛物诱导。本研究得到法国国家研究署项目 OpART（ANR-23-CE40-0016）和 CroCQG（ANR-25-CE40-5010）的资助。研究部分基于 COST行动CaLISTA CA21109 的工作，该行动由欧洲科学与技术合作组织（COST）资助 www.cost.eu。部分研究是在亨利·庞加莱研究所（UAR 839，法国国家科学研究中心—索邦大学）举办的表示论与非交换几何特别学期期间完成的——LabEx C ARMIN（ANR-10-LABX-59-01）。

其结构和表示论如今已得到充分理解 [5, 29]。SL(2, $\mathbb{R}$) 的情形是近来几篇论文的研究对象。不可约
$*$(G) 的表示以及非退化的简单 R_q(𝔤, K)-模——它们是 (𝔤, K)-模的类比对象——分别在 [13] 和 [18] 中得到分类。[14] 的作者构造了正则表示的一个类比对象，由此得到约化群 C*-代数 $C^*_{q,\ r}$(G) 的一个自然类比对象。后者的谱在 [12]中得到刻画。

本文旨在统一这些 q-变形与针对 $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 的 Mackey 变形，从而将 Mackey 类比扩展到q-变形的 SL(2, $\mathbb{R}$)。我们的工作受到 Monk 和 Voigt 对复半单群所做工作的启发 [26]。

我们为 q-变形的 SL(2, $\mathbb{R}$) 构造的运动群类比对象不依赖于 q，它是群胚 $G_0^\star$，由 $K = \mathrm{SO}(2)$ 在二维球面 $K\backslash U$上的作用构成，其中 U =SU(2)。下文将构造一个定义在 $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$上的双参数 C*-代数连续场 C_r^*(**G**)，其在 $\{1\} \times \mathbb{R}$ 上的限制恰好是 Mackey 变形场，并且对每个 $q \neq 1$，其纤维由下式给出

$$C_r^*(\mathbf{G})_{q,t} = \begin{cases} C^*_{q^t,r}(G) & \text{if } t \neq 0, \\ C^*(G_0^\star) & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

正如我们将看到的，这个 C*-代数连续场反映了一个刚性强得多的场，其中涉及相应的（量子化）包络代数。

此外，对于每个固定的 $q \neq 1$，我们证明，C_r^*(**G**) 在 $\{q\} \times [0, 1]$ 上的限制同构于某个嵌入的映射锥场

$$\alpha_0^q : C^*(G_0^\star) \hookrightarrow C^*_{q,r}(G).$$

我们还证明，这个嵌入在 C^*($G_0^\star$) 的谱与 $C^*_{q,r}$(G) 的谱之间诱导出一个双射，并且在 K-理论上诱导出一个同构。后一结果意味着 C_r^*(**G**)$|_{\{q\}\times[0,1]}$ 具有常值 K-理论，因此可以视为 Connes-Kasparov 同构的一个类比对象。

本文结构如下。第一节介绍或发展本研究所需的算子代数工具。第二节介绍双参数变形中涉及的各种卷积代数。第三节致力于构造 C*-代数连续场 C_r^*(**G**)。最后一节构造嵌入 α_0^q，并证明上述性质。

在本文余下部分，除非另有明确说明，我们将 $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$、$K = \mathrm{SO}(2)$、$U = \mathrm{SU}(2)$分别记作如此。我们用 𝔤、𝔨、𝔲 表示相应的李代数。此外，对于任意实李代数 𝔞，相应的包络 $*$-代数 U(𝔞)定义为其泛包络代数的复化，并赋予唯一的 $*$-结构，使得 𝔞 中的元素均为斜自伴的。

1. 算子代数预备知识

本节的目标是介绍一些背景材料，以便于构造量子 Mackey 变形场。在本文其余部分，任意希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界算子空间与紧算子空间分别记为 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 和 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$。

1.1. 希尔伯特空间与 C*-代数的连续场。本文通篇将引入若干巴拿赫空间的连续场。这里我们回顾其若干方面并固定记号，完整论述可参见 [17, 第 10] 章。更重要的是，我们针对与局部平凡希尔伯特空间连续场相关联的初等 C*-代数连续场引入一种约束概念。下文中， X 表示任意局部紧空间。

设 B 是定义在 X 上的任意连续巴拿赫空间场。对每个 $x \in X$， B 在其上的纤维记作 B_x；更一般地，对于任意局部紧子空间 $Y \subset X$，由 B 诱导的定义在 Y 上的连续场记作 $B_{|Y}$。 B 的连续向量场空间记作 $\Gamma(B)$，其由无穷远处消失的向量场构成的子空间记作 $\Gamma_0(B)$。对于任意 $b \in \Gamma(B)$，我们用 b_x 表示在任意 $x \in X$ 处对 b 求值。

设 B' 是另一个定义在 X 上的连续巴拿赫空间场。根据定义，连续场嵌入 $T\colon B \to B'$ 是一族等距映射 $(T_x\colon B_x \to B'_x)_{x\in X}$，它将 $\Gamma(B)$ 映入 $\Gamma(B')$。若对所有 $x \in X$， T_x 都是满射，则称此连续场嵌入 T 为同构。在这种情况下， [17, §10.2.4] 表明， $\Gamma(B)$ 被映到 $\Gamma(B')$ 上。当 B' 是常值场时，同构 $T\colon B \to B'$ 称为 B 的平凡化。

若 B_x 对所有$x \in X$ 都是 B'_x 的巴拿赫子空间，且 $\Gamma(B) \subset \Gamma(B')$，则称 B 为 B' 的连续子场。我们将反复使用以下两个事实。

- 给定对每个 $x \in X$都是 B_x 的巴拿赫子空间的 S_x，至多存在一个纤维为 S_x 的 B 的连续子场。当且仅当对于任意 $x \in X$ 和任意 $v \in B_x$，存在 $b \in B$ 使得 $b_x = v$，且对所有 $x' \in X$都有 $b_{x'} \in S_{x'}$，这样的连续子场才存在。
- 若 Y 是 X的闭子集，则限制映射 $\Gamma_0(B) \to \Gamma_0(B_{|Y})$是满射。

对于第一个事实，唯一性由 [17, §10.2.4]得出。第二个事实由 [17, §10.1.12] 和 [17, §10.2.6]结合得到。

如果每个纤维都是希尔伯特空间，我们就称 B 为希尔伯特空间连续场。在这种情况下，根据极化恒等式，两个连续向量场的逐点内积在 X上连续。

如果每个纤维都是C*-代数，且 $\Gamma(B)$关于逐点乘法和对合封闭，我们就称 B 为C*-代数连续场。在这种情况下， $\Gamma_0(B)$具有自然的C*-代数结构。它的任一不可约表示都具有如下形式：$\pi \circ \mathrm{ev}_x\colon \Gamma_0(B) \twoheadrightarrow B_x \to \mathfrak{B}(H)$，其中$\mathrm{ev}_x$ 表示在某个点 $x \in X$ 处的求值，而(π, H)是 B_x的一个不可约表示。这样， $\Gamma_0(B)$的谱便可与所有 $x \in X$处的 B_x 的谱的不交并等同。 B 的C*-代数连续子场定义为一个连续子场，其连续向量场空间是 $\Gamma(B)$的一个 $*$-子代数（这意味着其纤维是C*-子代数）。C*-代数连续场的嵌入，是指作为逐纤维C*-代数态射的连续场嵌入。

约定。 众所周知，C*-代数连续场 B 由 C*-代数 $\Gamma_0(B)$ 及其中心乘子代数中 $C_0(X)$ 的嵌入唯一确定。因此，滥用记号时，C*-代数$\Gamma_0(B)$ 也记作 B。

我们将用到的一个概念是 C*-代数连续场的推前。设 Y 是另一个局部紧豪斯多夫空间，$f\colon X \to Y$ 是一个开连续满射，且 A 是 X 上的一个 C*-代数连续场。

命题 1.1. 存在唯一的 *C*-代数连续场* f_*A *over* Y *suchthat*

- 每个 $y \in Y$ 上的 f_*A 的纤维为 $A_{|f^{-1}(y)}$,
- 如果 $a \in A$ 那么 $f_*a = \left(a_{|f^{-1}(y)}\right)_{y\in Y}$ 是 f_*A的连续向量场。

我们将 A 在 f下的推前称为 f_*A 。我们既不证明也不使用它，但可以证明 $f_*\colon A \to f_*A$ 是一个 C*-代数同构（这里忽略连续场结构）。

证明。唯一性由 [17, 命题 10.2.4], 得出；我们只证明存在性。令 $\mathscr{S} = \{f_*a : a \in A\} \subset \prod_{y\in Y} A_{|f^{-1}(y)}$。显然，$\mathscr{S}$ 在逐点运算下构成一个 $*$-代数，并且对所有 $y \in Y$，均有 $\mathscr{S}_y = A_{|f^{-1}(y)}$ 。因此，若能证明对每个 $a \in A$，$y \in Y \mapsto \|(f_*a)_y\|$ 是连续的，那么 $\mathscr{S}$ 将生成一个满足命题条件的 C*-代数连续场。

固定 $y_0 \in Y$ 和 $\epsilon > 0$。令 $x_0 \in X$ 满足 $\|(f_*a)_{y_0}\| = \|a_{x_0}\|$ ，并令 K 为 x_0 的一个紧邻域，使得对所有 $x \in X \setminus K$，都有 $\|a_x\| \leq \varepsilon$ 。由 $x \mapsto \|a_x\|$的连续性，存在一个包含 $f^{-1}(y_0)$ 的开集 $V \subset X$ ，使得

$$\forall x \in V, \exists x' \in f^{-1}(y_0), \quad \|a_x\| \leq \|a_{x'}\| + \epsilon.$$

令 $W \subset V$ 为 x_0 的一个开邻域，使得

$$\|a_{x_0}\| - \epsilon \leq \|a_x\| \qquad (\forall x \in W).$$

已知 f 是开集，且 $K \setminus V$ 是一个与 $f^{-1}(y_0)$ 不相交的紧集，则集合 $U = f(W) \setminus f(K \setminus V)$ 是 y_0的一个邻域。因此，根据构造可得

$$\|a_{x_0}\| - \epsilon \leq \|(f_*a)_y\| \leq \|a_{x_0}\| + \epsilon \qquad (\forall y \in U),$$

由此证明得证。 □

从现在起，固定一个定义在 X 上的局部平凡希尔伯特空间连续场 $\mathcal{H}$ 。我们用 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ 表示与 $\mathcal{H}$ 相关联的初等 C*- 代数连续场，见 [17, §10.7.2]。回顾一下，$\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ 在每个 $x \in X$ 上的纤维为 $\mathfrak{K}(\mathcal{H}_x)$，并且对任意 $\psi,\ \phi \in \Gamma(\mathcal{H})$，$\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ 的向量场 $(\eta \mapsto \langle\psi_x,\ \eta\rangle\phi_x)_{x\in X}$ 是连续的。

正如我们将看到的，本文涉及的每一个变形群 C*-代数都可以嵌入某个 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ 中，其中 $\mathcal{H}$是适当选取的局部平凡希尔伯特空间连续场。为了能够精确描述它们，我们引入约束的概念。

定义 1.2. $\mathcal{H}$ 上的预约束 $\mathscr{C}$ 是一族$(\mathcal{H}_{x,j})_{j\in J_x}$，对每个 $x \in X$，由 $\mathcal{H}_x$ 的彼此正交的非零闭子空间组成，其直和在 $\mathcal{H}_x$中稠密。我们记作 $\mathscr{C} =(\mathcal{H}_{x,j})_{x\in X, j\in J_x}$。

这种预约束 $\mathscr{C}$的局部固定是一个二元组(u, V)，其中 V是 X 的开子集，u 是 $\mathcal{H}_{|V}$的平凡化，使得对每个 $x \in V$，存在开子集 $V_x \subset V$ 满足：

$$\forall y \in V_x,\ \forall j' \in J_y,\ \exists j \in J_x, \quad u_x(\mathcal{H}_{x,j}) \subset u_y(\mathcal{H}_{y,j'}). \tag{1}$$

若 $\mathscr{C}$ 容许一组局部固定 $\{(u_\alpha, V_\alpha)\}_\alpha$ 使得 $X = \cup_\alpha V_\alpha$，则我们称其为约束

命题 1.3. 设 $\mathscr{C}=(\mathcal{H}_{x,j})_{x\in X,j\in J_x}$ 为 $\mathcal{H}$ 上的一个约束。存在 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ 的唯一连续子场，其在每个 $x\in X$ 处的纤维为 $\bigoplus_{j\in J_x}\mathfrak{K}(\mathcal{H}_{x,j})$。

证明。记每个 $x\in X$ 的 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_x=\bigoplus_{j\in J_x}\mathfrak{K}(\mathcal{H}_{x,j})$，并令 $\Gamma_{\mathscr{C}}$ 为空间 $\Gamma[\mathfrak{K}(\mathcal{H})]\cap\prod_{x\in X}\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_x$。为了证明该命题，只需验证：对于每个 $x\in X$，$\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_x$ 的任意元素都可以表示为 $\Gamma_{\mathscr{C}}$ 中某个元素在 x 处的求值。设 $x\in X$，且 $a\in\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_x$。通过对 $\mathscr{C}$ 进行局部固定，可以找到 x 的一个开邻域 V，以及 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})|_V$ 的一个连续向量场 b，使得 $b_x=a$，并且对所有 $y\in V$，都有 $b_y\in\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_y$。设 φ 是 V 上的连续函数，具有紧支集，且满足 $\varphi(x)=1$。将 φb 在 V 外延拓为零，便得到 $\Gamma_{\mathscr{C}}$ 的一个元素，其在 x 处的求值为 a。□

由上述命题定义的 C*-代数连续场记为 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$。将后者视为一个 C*-代数，可以很容易地确定其不可约表示。

引理 1.4. 所有表示的集合

$$\mathrm{pr}_j\circ\mathrm{ev}_x:\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})\to\bigoplus_{l\in J_x}\mathfrak{K}(\mathcal{H}_{x,l})\to\mathfrak{K}(\mathcal{H}_{x,j})\qquad(x\in X,j\in J_x),$$

其中 ev_x 表示在 x 处的求值，而 pr_j 表示到由 j 标记的分量上的投影，是 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$的谱的一组完备代表系。

证明。 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$的谱是不交并，由其各纤维的谱组成。对于每个 $x\in X$，$\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$在 x处的纤维 $\bigoplus_{j\in J_x}\mathfrak{K}(\mathcal{H}_{x,j})$ 的不可约表示，除等价外，均为其在空间 $\mathcal{H}_{x,j}$ 上的作用，其中 j 遍历 J_x。□

1.2. **广义 Stone-Weierstrass 定理**。 我们用于确定双参数变形中所涉及的 C*-代数显式形式的主要工具，是针对后极限型[17, §4.3.1] C*-代数的 Stone-Weierstrass 定理的推广。由于我们将多次用到它，故在此陈述以便查阅。

定理 1.5。 设 $\varphi:A\to B$ 是 C*-代数的一个态射，其中 B 为后极限型。假设

(i) 对于 B 的每个不可约表示 π，其拉回表示 $\varphi^*\pi$（关于 A）不可约，

(ii) 两个代数的谱之间的诱导映射 $\hat{\varphi^*}:\hat{B}\to\hat{A}$ 是双射。

那么 φ 是一个同构。

这个版本结合了 [17, §2.7.3] 和 [17, §11.1.6]。下文中，我们实际上只在极限 C*-代数的情形下使用此定理 [17, §4.2.1]。根据定义，后者是指在其不可约表示上通过紧算子作用的 C*-代数。特别地，上述 C*-代数连续场 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 是极限型的。

作为上述定理的一个应用，我们来描述 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 的谱的 Jacobson 拓扑，其中 $\mathcal{H}$ 是局部紧空间 X 上的局部平凡希尔伯特空间连续场，且其上有约束 $\mathscr{C}=(\mathcal{H}_{x,j})_{x\in X,j\in J_x}$。我们记 $J=\sqcup_{x\in X}J_x$。为简单起见，对任意 $x\in X$ 与 $j\in J_x$，我们记 $\mathcal{H}_j=\mathcal{H}_{x,j}$，并用 π_j 表示 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{H}_j$ 上的不可约表示，该表示来自引理

1.4。对 $\mathscr{C}$ 的任意局部固定 (u,V)，以及对每个 $x\in V$ 与 $j\in J_x$，我们定义

$$J(u,V)_{x,j}=\bigsqcup_{y\in V}\{j'\in J_y : u_x(\mathcal{H}_j)\subset u_y(\mathcal{H}_{j'})\}.$$

引理 1.6. 在 J 上存在唯一拓扑，使得对于每个 $x\in X$ 和 $j\in J_x$，所有形如 $J(u,V)_{x,j}$ 的子集族，其中 (u,V) 是 $\mathscr{C}$ 的一个局部固定，且满足 $x\in V$，构成 j 的邻域基。

证明。固定 $x\in X$ 和 $j\in J_x$。只需验证：(A) 若 (u,V) 和 (u',V') 是局部固定，且满足 $x\in V\cap V'$，则存在一个包含 x 的开子集 $W\subset V\cap V'$，使得 $J(u'_{|W},W)_{x,j}\subset J(u,V)_{x,j}$ca；(B) 对每个满足 $x\in V$ 的局部固定 (u,V)，都存在一个包含 x 的开子集 $W\subset V$，使得对每个 $y\in W$ 和 $j'\in J(u,V)_{x,j}$，有 $J(u_{|W},W)_{y,j'}\subset J(u,V)_{x,j}$。断言 (B) 直接由局部固定的定义得出。下面证明断言 (A)。不失一般性，可以假设 $V=V'$，$\mathcal{H}_{|V}$ 是常值，且 u' 是恒等映射。这样，$(u_x)_{y\in V}$ 就是一个强连续酉算子族。取 V 的一个开子集 V_x，使其对 u 和 u' 均满足条件 (1)。若 $\mathcal{H}_j$ 是一个非零元素，则函数 $N_\xi\colon y\mapsto\langle u_x\xi,u_y\xi\rangle$ 连续，因此存在一个开子集 $W\subset V_x$，在其上 N_ξ 处处不为零。接下来，对每个满足 $\mathcal{H}_j\subset\mathcal{H}_{j'}$ 的 $y\in W$ 和 $j'\in J_y$，空间 $u_x(\mathcal{H}_j)$ 与 $u_y(\mathcal{H}_{j'})$ 不正交，因此前者包含于后者。于是有 $J(u'_{|W},W)_{x,j}\subset J(u,V)_{x,j}$。□

我们赋予 J 由上述引理定义的拓扑。

命题 1.7。对于 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 的任意闭理想 I，我们定义

$$Z(I)=\{j\in J:\forall\sigma\in I,\ \pi_j(\sigma)=0\}.$$

若 F 是 J 的闭子集，我们记

$$\mathscr{I}(F)=\{\sigma\in\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}):\forall j\in F,\ \pi_j(\sigma)=0\}.$$

那么，$I\mapsto Z(I)$ 在 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 的闭理想与 J 的闭子集之间建立了一一对应。其逆映射由 $F\mapsto\mathscr{I}(F)$ 给出。

证明。我们先验证：若 I 是 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 的闭理想，则 $Z(I)$ 在 J 中是闭集。设 $x\in X$ 和 $j\in J_x\setminus Z(I)$。设 $\sigma\in I$ 满足 $\pi_j(\sigma)\neq 0$。由 σ 的连续性，存在一个局部固定 $(u,\ V\ni x)$，使得对任意 $y\in V$，$u_y\sigma_y u_y^*$ 在 $u_x(\mathcal{H}_j)$ 上的限制非零。因此，对任意 $j'\in J(u,\ V)_{x,\ j}$，都有 $\pi_{j'}(\sigma)\neq 0$。因此，$Z(I)$ 是闭集。

现在，让我们证明 $\mathscr{I}(Z(I))=I$。I 的谱的一个完备代表系由 $\{\pi_j$ 给出：$j\in J\setminus Z(I)\}$。由于 I 的每个不可约表示都唯一延拓为 $\mathscr{I}(Z(I))$ 的一个不可约表示，且后者在 $Z(I)$ 上消失，因此集合 $\{\pi_j:\ j\in J\setminus Z(I)\}$ 也是 $\mathscr{I}(Z(I))$ 的谱的一个完备代表系。由于 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 是极限型的，所以 $\mathscr{I}(Z(I))$ 也是极限型的。然后，应用广义 Stone-Weierstrass 定理，我们得到 $\mathscr{I}(Z(I))=I$。

最后，我们证明，对于任意闭 $F\subset J$，$Z(\mathscr{I}(F))=F$。令 $x\in X$和$j\in J_x\setminus F$。考虑 j 的一个邻域 $J(u,\ V)_{x,\ j}$，它包含于$J\setminus F$中。如有必要，对 V加以限制，我们可以假设，按照

（1）中的记号，存在一个 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$上的连续向量场 σ，它在 $X \setminus V$上消失，使得$\pi_J(\sigma) \neq 0$ 并且

$$(u_y \sigma_y u_y^*)_{|u_x(\mathcal{H}_j)^\perp} = 0 \qquad (y \in V).$$

对于所有 $j' \in J \setminus J(u, V)_{x,\,j}$，我们有 $\pi_{j'}(\sigma) = 0$，因此 $\sigma \in \mathscr{I}(F)$。这表明$Z(\mathscr{I}(F)) \subset F$。反向包含显而易见。□

推论 1.8。映射 $j \mapsto \pi_j$ 诱导出一个同胚，将 J 映射到 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$的谱；后者赋予 *Jacobson* 拓扑。

1.3. **交叉积表示论**。运动群 G_0 及其群胚类比对象 $G_0^\star$（见引言）的全 C*-代数，是交换 C*-代数与紧群的交叉积的例子。我们以此类代数的谱的一个众所周知的描述结束本节。关于交叉积的完整论述，参见例如 [32] 。

我们固定一个交换 C*-代数 A、一个紧群 K 以及一个K 通过自同构作用于 A 的作用 α 。令 $K \ltimes A$ 为相应的交叉积 C*-代数。我们要强调，后者与变换群胚的 C*-代数相同，该变换群胚记为 $\mathrm{Sp}A \curvearrowleft K$，由 K 在 A的谱上的右作用构成，而此右作用由α 诱导，见 [27,第59]页。

考虑一个点 $x \in \mathrm{Sp}A$ 和 $\pi:\ \Gamma \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 是稳定子 K_x 的闭子群 Γ 的酉表示。记

$$L(K,\mathcal{H})^\Gamma = \{\psi \in L^2(K,\mathcal{H}) : \forall(\gamma,k) \in \Gamma \times K,\ \psi(\gamma k) = \pi(\gamma)\psi(k)\}.$$

我们赋予 $L(K, \mathcal{H})^\Gamma$ K 的右正则作用，以及如下定义的 A 作用：

$$\forall(a,\psi) \in A \times L(K,\mathcal{H})^\Gamma, \forall k \in K, \quad (a\psi)(k) = a(xk)\psi(k).$$

这些作用构成动力系统（A, K, α）的协变表示，因而诱导出 $K \ltimes A$ 在 $L(K, \mathcal{H})^\Gamma$ 上的一个表示，记作 $\mathrm{Ind}(x, \pi)$；若要明确指出 Γ，则记作 $\mathrm{Ind}(x, \Gamma, \pi)$。

注 1.9. 考虑与上文相同的情形，并设 K 是固定 x 的另一个闭子群。假设 Γ' 包含 Γ，则由分步诱导可知，$\mathrm{Ind}(x, \Gamma, \pi)$ 和 $\mathrm{Ind}(x, \Gamma', \mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(\pi))$ 是典范等价的。

定理 1.10. 以下结论成立。

(i) 对每个 $x \in \mathrm{Sp}A$ 以及 K_x 的每个不可约酉表示 π， $K \ltimes A$ 的表示 $\mathrm{Ind}(x,\pi)$ 都是不可约的。*(ii)* 两个这样的表示 $\mathrm{Ind}(x,\pi)$ 和 $\mathrm{Ind}(x',\pi')$ 等价，当且仅当存在 $k \in K$ 使得 $x' = xk$，且 π 与 $\pi'(k^{-1} \cdot k)$ 等价。*(iii)* A 的任一不可约表示都等价于形如 $\mathrm{Ind}(x,\pi)$ 的表示，其中 $x \in \mathrm{Sp}A$，且 K_x 的 π 是一个不可约酉表示。

这些结论的证明见 [26, §4.1]。

2. Deformed reduced C*-algebras of SL(2, ℝ) and their duals

我们现在的目标是引入我们关于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的双参数形变中所涉及的卷积代数，并回顾它们的表示论。在下一节中，我们将构造定义在$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ 上的 C*-代数连续场 $C_r^*(\mathbf{G})$，其纤维将视基点而定，为约化 C*-代数

G 的、其 Cartan 运动群 G_0的群 C*-代数、引言中所提到的 q-形变约化 C*-代数之一 $C^*_{q,r}(G)$，或群胚 C*-代数 $C^*(G_0^\star)$。在此，我们明确描述这些 C*-代数的谱。为了刻画相应的不可约表示，方便的做法是说明某些无界乘子的有限生成代数如何作用于它们。对于 $C^*_r(G)$ 和 $C^*(G_0)$，这些代数将是包络

$*$代数分别是 G和 G_0 的李代数的代数。

约定。设 A 是任意一个 $*$-代数。若内积 $(\cdot|\cdot)$ 满足：对于所有 $v,w\in V$和 $a\in A$，都有 $w|av=(a^*w|v)$，则称其在 A-模 V 上是 A-不变的。所谓酉的A-模，是指配备了一个固定的 A-不变内积的 A-模。若一个 A-模存在 A-不变内积，则称其可酉化。

我们将对 $\mathbb{Z}$的某些子集使用特定记号。首先，偶整数集和奇整数集分别记作 $\mathbb{Z}^{\mathrm{even}}$ 和 $\mathbb{Z}^{\mathrm{odd}}$。若 $\varepsilon\in\{-1,1\}$，则将与 $(\varepsilon-1)/2$奇偶性相同的整数集记作 $\mathbb{Z}^\varepsilon$。对于任意 $\lambda\in\mathbb{Z}$，记号 $\mathbb{Z}_{>\lambda}$（分别为 $\mathbb{Z}_{\geq\lambda}$、$\mathbb{Z}_{<\lambda}$、$\mathbb{Z}_{\leq\lambda}$）表示满足 $n>\lambda$（分别为 $n\geq\lambda$、$n<\lambda$、$n\leq\lambda$）的整数集合 n。我们常常组合使用这些记号，例如，$\mathbb{Z}^\varepsilon_{>\lambda}$ 表示 $\mathbb{Z}^\varepsilon\cap\mathbb{Z}_{>\lambda}$。

在 K 上的正则函数空间（即 K-有限函数）记作 $\mathcal{O}(K)$。我们定义 $i\mathfrak{k}$的以下元素：

$$\theta=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

由下式定义的 K 的特征族 $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\zeta_n(e^{it\theta})=e^{int}\qquad(t\in\mathbb{R}),$$

是 $\mathcal{O}(K)$ 的一组基。对于每个 $\varepsilon\in\{-1,1\}$，我们将与 $(\varepsilon-1)/2$具有相同奇偶性的正则函数空间记作 $\mathcal{O}^\varepsilon(K)$，即 $\mathrm{span}(\zeta_n:\ n\in\mathbb{Z}^\varepsilon)$。

2.1. SL(2, $\mathbb{R}$) 的表示论。我们先回顾 G 表示论的若干方面。由于许多教科书都讨论过这一内容，例如 [28, 30], ，我们将主要着眼于为后文统一记号。

由 [23, §I.3], 中定义的偶对 $(\mathfrak{g},K)$ 的 Hecke 代数记作 $R(\mathfrak{g},K)$。它是支撑在 K 上的 K-有限分布所构成的卷积代数。因此，它自然带有 $*$-结构。非退化（或近似幺元） $R(\mathfrak{g},K)$-模的范畴对应于 $(\mathfrak{g},K)$-模的范畴，见 [23, 定理 1.117]。相应地，若与之关联的 $R(\mathfrak{g},K)$-模是酉的或可酉化的，则称 $(\mathfrak{g},K)$-模是酉的或可酉化的。

G的酉表示论本质上归结为对（$\mathfrak{g}$, K）-模的研究。作为这一原理的例证，G 的不可约酉表示与可酉化的简单（$\mathfrak{g}$, K）-模之间存在一一对应。定义如下：若 V是一个简单的酉（$\mathfrak{g}$, K）-模，¯则其希尔伯特完备化 V 是 G的一个不可约表示，而 V 对应于 V的 K-有限向量空间，见 [6, §3]。

构造 G 有趣表示的主要方法是抛物诱导。设 (E,F,H) 是 $\mathfrak{g}$ 的典范基。考虑 G 中的极小抛物子群 P，其李代数为 $\mathfrak{p}=\mathrm{span}(H,E)$。设 $R(\mathfrak{p},M)$ 是相对于配对 $(\mathfrak{p},M)$ 的 Hecke 代数，其中 $M=K\cap P=\{-1,1\}$。若 V 是一个 $(\mathfrak{p},M)$-模，则记 $I^{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}_{M,K}(V)$ 为由 K-有限部分给出的 $(\mathfrak{g},K)$-模

$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{p},M}(R(\mathfrak{g},K)\ V)$，见 [23, §II.1]。一维 $(\mathfrak{p},M)$-模由 $R(\mathfrak{p},M)$ 的特征标族 $(\chi_{\varepsilon,\lambda})_{\varepsilon=\pm1,\ \lambda\in\mathbb{C}}$ 给出，其特征为

$$\chi_{\varepsilon,\lambda}(-1\in M)=\varepsilon,\qquad \chi_{\varepsilon,\lambda}(H)=\lambda.$$

若 V 是一个 $(\mathfrak{p},M)$-模，则由 V 抛物诱导得到的 $(\mathfrak{g},K)$-模 $I^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{p}}{}^{K}_{M,}(V\otimes\chi_{1,1})$ 称为抛物诱导模，记作 $\mathrm{ind}(V)$。当 V 是 M-有限部分，且 $\bar{}$ 是 L 的可容许酉表示 V 时，$\mathrm{ind}(V)$ 与诱导表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\bar{V})$ 的 K-有限部分相对应。

对于每个 $(\varepsilon,\lambda)\in\{-1,1\}\times\mathbb{C}$，我们将 $\mathrm{ind}(\varepsilon,\lambda)$ 简写为 $\mathrm{ind}(\chi_{\varepsilon,\lambda})$。在紧致模型中，$\mathrm{ind}(\varepsilon,\lambda)$ 与 $\mathcal{O}^{\varepsilon}(K)$ 相对应，并赋予其 K 的右正则作用。$\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{ind}(\varepsilon,\lambda)$ 上的作用由下式给出：

$$\begin{aligned}\theta\zeta_n&=n\zeta_n,\\(H\mp i(E+F))\zeta_n&=(\lambda+1\pm n)\zeta_n,\end{aligned}\tag{3}$$

其中可以注意到 $\theta=i(E-F)$。除非 $\lambda\in\mathbb{Z}^{-\varepsilon}$，$(\mathfrak{g},K)$-模 $\mathrm{ind}(\varepsilon,\lambda)$ 是单的。若 $\lambda\in\mathbb{Z}^{-\varepsilon}_{\geq0}$，则 $\mathrm{ind}(\varepsilon,\lambda)$ 恰有两个单子模，分别为 $D^+(\lambda)=\mathrm{span}(\zeta_n:\ n\in\mathbb{Z}^{\varepsilon}_{>\lambda})$ 和 $D^-(\lambda)=\mathrm{span}(\zeta_n:\ n\in\mathbb{Z}^{\varepsilon}_{<-\lambda})$。

现在我们来描述 $C^*_r(G)$ 的谱，它与 G 的温和对偶重合（这是关于半单李群 [10] 的一般事实）。

命题 2.1。温和的单 $(\mathfrak{g},\ K)$-模包括：

- 偶酉主系列 $\mathrm{ind}(1,\ \lambda),\ \lambda\in i\mathbb{R}_+$,
- 不可约奇主系列 $\mathrm{ind}(-1,\ \lambda),\ \lambda\in i\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$,
- 离散系列及其极限，它们是 $\mathrm{ind}(\varepsilon,\ n)$ 在 $\varepsilon\in\{-1,1\}$ 和 $n\in\mathbb{Z}^{\varepsilon}_{\geq0}$ 时的单子模。

这些模中的每一个都存在唯一的不变内积（相差一个标量）。相应的完备化构成 G 的温和对偶的完备代表系。

2.2. 运动群的酉对偶。让我们继续本引言部分，明确描述运动群 G_0 的酉不可约表示。回顾一下，后者是半直积 $K\ltimes(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$，其中 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 被视为阿贝尔李群，并赋有 K 的伴随作用。由于 K 可 amenable，G_0 的全 C*- 代数与其约化 C*- 代数相同，并可识别为交叉积 $K\ltimes C^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$。因此，$G_0$ 的酉不可约表示分类可由定理 1.10 得出。为明确这一分类，我们只需确定 K 作用于 $C^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 的谱所得的轨道和稳定子。

我们用 $\mathfrak{g}_0$ 表示 G_0 的李代数。令 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 为其自身的李代数，于是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\subset\mathfrak{g}_0$。我们引入 $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 中的以下元素：

$$\delta X=H/2\bmod\mathfrak{k},\qquad \delta Z=i(E\bmod\mathfrak{k}).$$

采用这一记号的理由稍后会变得清楚。让我们将 K 视为嵌入 G_0之中，从而 $\theta\in i\mathfrak{k}\subset U(\mathfrak{g}_0)$。于是可以把 $U(\mathfrak{g}_0)$实现为由 θ、δX、δZ 生成、并服从下列关系的万有含幺 $*$-代数

$$\begin{aligned}&\theta^*=\theta,\quad \delta X^*=-\delta X,\quad \delta Z^*=\delta Z,\\&\delta X\delta Z=\delta Z\delta X,\quad \theta\delta X-\delta X\theta=-2\delta Z,\quad \theta\delta Z-\delta Z\theta=-\delta X.\end{aligned}\tag{4}$$

我们将 $C^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 的谱与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 的庞特里亚金对偶 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\hat{}$相对应。通过求导，后者又与该集合上的特征相对应，

$*$-代数 $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$，它与 $\mathbb{C}$ 一一对应，具体如下：每个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 都对应于 $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 的唯一特征，该特征将 $\delta X + \delta Z$ 映射为 λ。由 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 上的伴随作用导出的 {10} 在 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\hat{}$ 上的右作用为

$$\lambda \cdot e^{it\theta} = e^{-2it}\lambda \qquad (t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\hat{}).$$

对于每个 $\lambda \in i\mathbb{R}_+$，令 p_λ 表示 $\lambda/2 \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 中的点。$(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\hat{}$ 在 K 的作用下的每个轨道都具有如下形式：对于唯一的 $\lambda \in i\mathbb{R}_+$，有 $p_\lambda K$。此外，p_λ 的稳定子在 $\lambda \neq 0$ 时为 $M = \{-1, 1\}$，否则为 K。作为阿贝尔群，M 是自对偶的。另一方面，通过配对 $(k, n) \in K \times \mathbb{Z} \mapsto \zeta_n(k)$，$K$ 的庞特里亚金对偶可与 $\mathbb{Z}$ 等同。应用定理 1.10，可得如下结果。

命题 2.2. G_0 的酉对偶的一个完备代表系为

- $\mathrm{Ind}(p_\lambda, M, \varepsilon)$ 其中 $\lambda \in i\mathbb{R}_+^*$ 且 $\varepsilon \in \hat{M} = \{-1, 1\}$，
- $\mathrm{Ind}(p_0, K, n)$ 对于 $n \in \hat{K} = \mathbb{Z}$。

请注意，第二类表示是一维的。此外，根据注 1.9，对于每个$\varepsilon \in \{-1, 1\}$，我们有 $\mathrm{Ind}(p_0, M, \varepsilon) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}^\varepsilon} \mathrm{Ind}(p_0, K, n)$，其中 $\mathrm{Ind}(p_0, K, n)$ 的底层空间就是 $\mathbb{C}\zeta_n$。

记号 2.3。对于任意点 $x \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$、任意子群 $\Gamma \subset K_x$ 以及 Γ 的任意不可约酉表示 π，我们用 $\mathrm{ind}(x, \Gamma, \pi)$ 表示由 $\mathrm{Ind}(x, \Gamma, \pi)$ 的 K-有限向量空间构成的酉$U(\mathfrak{g}_0)$-模。更多信息请参见 [31,§4.5.5]。

对于每个 $\lambda \in i\mathbb{R}_+$ 和 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$，$\mathrm{Ind}(p_\lambda, M, \varepsilon)$ 的底层空间为

$$L^2(K)^\varepsilon = \{\psi \in L^2(K) : \forall k \in K,\, \psi(-k) = \varepsilon\psi(k)\},$$

因此，作为一个空间，$\mathrm{ind}(p_\lambda, M, \varepsilon)$ 等于 $\mathcal{O}^\varepsilon(K)$。$U(\mathfrak{g}_0)$ 对其的显式作用由以下内容刻画

$$\begin{aligned} \delta T^\pm \zeta_n &= \lambda \zeta_{n\pm 2} \\ \theta \zeta_n &= n\zeta_n \end{aligned} \qquad (n \in \mathbb{Z}^\varepsilon), \tag{5}$$

其中 $\delta T^\pm = 2(\delta X \mp \delta Z) = \delta X - \delta X^* \mp 2\delta Z$。

2.3. **SL(2 的量子化** $\mathbb{R}$)。我们感兴趣的 q-变形 G 最初由 De Commer 和 Dzokou Talla [13] 引入。其构造基于 $SL(2, \mathbb{C})$ 的量子化，后者被视为泊松李群 SU(2) 的经典 Drinfeld 双，其灵感则来自 Letzter 的量子对称对理论 [24]。下面介绍相关的卷积代数，并回顾其表示论的若干方面。我们将从简介绍，更多细节请参阅 [11, 13, 18]。

与我们先前的工作 [18], 一样，我们考虑定义在 $\mathbb{C}$ 的对合扩张上的代数。下一节将利用这一一般性来定义量子 Mackey 变形场的代数版本。下文中，$\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{C}$ 的一个域扩张，并配备了 $*$-代数结构。若定义在 $\mathbb{F}$ 上、具有 $*$-代数结构的代数 A 满足：对于每个 $(\lambda, a) \in \mathbb{F} \times A$，都有 $(\lambda a)^* = \lambda^* a^*$，则称其为 $(\mathbb{F}, *)$-代数。此外，若 A 具有 Hopf 代数结构（在 $\mathbb{F}$ 上），则称其为 Hopf $(\mathbb{F}, *)$-代数，前提是余乘法和余单位都是 $*$-代数的态射。Hopf $(\mathbb{F}, *)$-代数之间的对偶配对或斜配对，若与 $*$ 结构相容，则称为酉的，参见 [22, §1.2.7；29，§4.2.4]。以下将自由使用不带求和符号的 Sweedler 记号。

我们固定一个非零元素 $q \in \mathbb{F}$，它有一个自伴平方根 $q^{1/2}$，且不是单位根。对于任意整数 n，记 $(q-q^{-1})^{-1}(q^n-q^{-n})$ 为 $[n]_q$。$\mathbb{F}$ 中这样的元素称为 q-整数。

考虑定义在 $\mathbb{F}$ 上的 Drinfeld-Jimbo 代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$，其变形参数为 q [21,。第 1] 章。若 E, F, k 表示其典范生成元，则 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 上存在唯一的 Hopf （$\mathbb{F}, *$）代数结构，使得 k 是自伴类群元，并且

$$E^* = Fk, \qquad \Delta(E) = E \otimes 1 + k \otimes E.$$

对于这一 $*$ 结构，我们将其记作 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})$。这个 $\mathfrak{u}$ 的量子化包络 $*$ 代数与 U 的量子化坐标代数 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(U)$ 呈对偶配对。后者定义为一个幺元（$\mathbb{F}, *$）代数，由 2×2 矩阵 u 的各项自由生成，并满足

$$u^*u = uu^* = 1, \qquad u^* = \mathrm{diag}(1,q)\mathrm{adj}(u)\mathrm{diag}(1,q^{-1}),$$

其中 adj(u) 表示 u 的伴随矩阵。我们赋予它唯一的 Hopf（$\mathbb{F}, *$）代数结构，使得 $\Delta(u)$ 等于 u 的平方，且该等式成立于以 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})$ 的张量代数中的元素为项的 2×2 矩阵代数中。可以证明，${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})$ 与 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(U)$ 之间存在唯一的 Hopf（$\mathbb{F}, *$）代数酉对偶配对，使得

$$\langle E, u\rangle = \begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \langle k, u\rangle = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

这个双线性映射也可视为酉斜配对

$${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})^{\mathrm{cop}} \otimes {}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(U) \longrightarrow \mathbb{F},$$

其中 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})^{\mathrm{cop}}$ 是 Hopf ($\mathbb{F}, *$)-代数，其结构与 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})$ 相同，只是配备了反余乘。我们将相应的量子双记为 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ [22, §8.2.1; 29, §2.2.4]。粗略地说，它是一个 Hopf ($\mathbb{F}, *$)-代数，同时包含 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(U)$ 和 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})^{\mathrm{cop}}$ 作为 Hopf ($\mathbb{F}, *$)-子代数，并满足

$$yx = \langle x_{(1)}, y_{(1)}\rangle x_{(2)} y_{(2)} \langle x_{(3)}, S^{-1}(y_{(3)})\rangle \qquad (x \in {}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})^{\mathrm{cop}}, y \in {}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(U)),$$

且对于这些性质具有泛性质。

接下来，我们将由元素 $\theta_q = iq^{-1/2}(E - Fk)$ 生成的 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})$ 的含幺子代数记为 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{k})$，并令

$${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(K\backslash U) = \{y \in {}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(U) : y \triangleleft \theta_q = 0\}.$$

其中，符号 $\triangleleft$ 指 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})$ 在 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(U)$ 上的右作用，该作用由 $y \triangleleft x = \langle x, y_{(1)}\rangle y_{(2)}$ 定义。于是，${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{k})$ 和 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(K\backslash U)$ 分别是 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{u})^{\mathrm{cop}}$ 和 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(U)$ 的右余理想 ($\mathbb{F}, *$)-子代数。

定义 2.4. $\mathfrak{g}$ 的量子化包络 $*$-代数，记作 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g})$，是由 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{k})$ 和 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(K\backslash U)$ 生成的 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的子代数。

显然，${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g})$ 是 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的一个右余理想 ($\mathbb{F}$，$*$)-子代数。后者是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$（视为实李代数）的包络 $*$-代数的一个量子化版本。子代数 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g})$ 在其中可视为 $U(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的恰当类比对象。关于此点的更多说明见下文定义 6.1；18，第 2] 节。[11,

可以用生成元与关系来描述 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g})$。首先，可以证明 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(K\backslash U)$ 是具有生成元 X_q and 的泛幺（$\mathbb{F}$，$*$）代数，且

Z_q 满足以下关系:

$$\begin{aligned} Z_q^* = Z_q, \qquad X_q Z_q = q^2 Z_q X_q, \\ X_q X_q^* + q^2 Z_q^2 = 1, \qquad X_q^* X_q + q^{-2} Z_q^2 = 1, \end{aligned} \tag{6}$$

于是， ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g})$可视为由生成元 θ_q、X_q、 Z_q 生成、满足上述关系 $\theta_q^* = \theta_q$ 及以下关系的泛幺（$\mathbb{F}, *$）代数

$$q X_q \theta_q - q^{-1}\theta_q X_q = [2]_q Z_q, \qquad Z_q\theta_q - \theta_q Z_q = X_q - X_q^*. \tag{7}$$

也可以定义（$\mathfrak{g}, K$）-模的类比对象。

定义 2.5. 设 V 是一个 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g})$-模。如果 $\theta_q \in {}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{k})$的作用可对角化，且特征值为 q-整数，我们称 V 为 ${}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}, K)_q$-模。

事实证明， [18, §5] （ ${}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}, K)_q$-模）对应于某个近似幺（$\mathbb{F}, *$）代数 ${}_{\mathbb{F}}R_q(\mathfrak{g}, K)$ 上的非退化模，因此我们将其视为 Hecke 代数 $R(\mathfrak{g}, K)$的类比对象。其定义如下。设 ${}_{\mathbb{F}}R_q(K)$是一个（$\mathbb{F}, *$）-代数，具有由相互正交投影 $(e_{q,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成的 $\mathbb{F}$-基。注意， ${}_{\mathbb{F}}R_q(K)$作用于任意 ${}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}, K)_q$-模，其中 e_q、n 对每个 $n \in \mathbb{Z}$均作为到 $[n]_q$-特征空间的投影。于是，在任意 ${}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}, K)_q$-模上， ${}_{\mathbb{F}}R_q(K)$和 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(K\backslash U)$中元素的乘法满足某些普适关系。作为空间， ${}_{\mathbb{F}}R_q(\mathfrak{g}, K)$是张量积 ${}_{\mathbb{F}}R_q(K) \otimes {}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q(K\backslash U)$。其（$\mathbb{F}, *$）-代数结构由上述关系定义。更严格的定义请参见[18, §2] 。

此外，还有一对 $(\mathfrak{p}, M)$ 的 Hecke 代数的类比对象 ${}_{\mathbb{F}}R_q(\mathfrak{p}, M)$，由此可将抛物诱导推广到我们的量子化情形。更确切地说，可以构造一个诱导函子 ${}_{\mathbb{F}}\mathsf{ind}_q$ ，它将任意 ${}_{\mathbb{F}}R_q(\mathfrak{p}, M)$-模关联到一个${}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}, K)_q$-模，见 [18, 定义 6.3]。可以证明[18, 命题 6.9] ， ${}_{\mathbb{F}}R_q(\mathfrak{p}, M)$ 的特征由 $\{-1, 1\} \times \mathbb{F}^*$ 自然参数化。对于任意 (ε, λ) $\in \{-1, 1\} \times \mathbb{F}^*$，记 ${}_{\mathbb{F}}\mathsf{ind}_q(\varepsilon, \lambda)$ 为由对应于这一对 (ε, λ) 的一维 ${}_{\mathbb{F}}R_q(\mathfrak{p}, M)$-模诱导得到的${}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}, K)_q$-模。具体而言， ${}_{\mathbb{F}}\mathsf{ind}_q(\varepsilon, \lambda)$ 可以实现为一个与 λ 无关的 $\mathbb{F}$-向量空间 ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{O}_q^{\varepsilon}(K)$，它具有一组基 $(\zeta_{q,n})_{n\in\mathbb{Z}^{\varepsilon}}$，其上 ${}_{\mathbb{F}}U_q(\mathfrak{g})$ 的作用如下:

$$\begin{aligned} \theta\zeta_{q,n} = [n]_q\zeta_{q,n}, \qquad T_{q,n}\zeta_{q,n} = (\lambda + \lambda^{-1})\zeta_{q,n}, \\ T_{q,n}^{\pm}\zeta_{q,n} = (\lambda q^{1\pm n} - \lambda^{-1}q^{-1\mp n})\zeta_{q,n\pm 2}. \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$T_{q,n} = q^{-1}X_q + qX_q^* + (q^n - q^{-n})Z_q, \qquad T_{q,n}^{\pm} = q^{\pm n}X_q - q^{\mp n}X_q^* \mp [2]_q Z_q. \tag{9}$$

这些诱导模一般都是简单的。例外情况是，当 λ具有 σq^n 的形式，其中 $\sigma = \pm 1$ 且 $n \in \mathbb{Z}^{-\varepsilon}$。在后一种情况下，若 $n \geq 0$ ，则 ${}_{\mathbb{F}}\mathsf{ind}_q(\varepsilon, \sigma q^n)$ 有两个单子模，即 ${}_{\mathbb{F}}D_q^{\pm}(\sigma, n) = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}(\zeta_{q,\pm m} : m - n \in \mathbb{Z}_{>0}^{\mathrm{odd}})$，它们与离散系列表示类似。关于此问题的进一步说明，请参阅 [18, §6] 。

从现在起，我们将讨论范围限定在 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 的情形。对 q 的假设意味着$q > 0$ 且 $q \neq 1$。在此语境下，记号中对场的明确标注将予以省略。我们用 $\mathbb{U}$ 表示单位圆，并记

$$\mathbb{U}_+ = \{z \in \mathbb{U} : \Im z \geq 0\}.$$

可以证明， $R_q(\mathfrak{g}, K)$ 存在包络 C*-代数 $C_q^*(G)$，我们将其视为 G 的最大群 C*-代数的一个 q 类比对象。令

称 $(\mathfrak{g}, K)_q$-模为可酉化的或酉的，如果其对应的 $R_q(\mathfrak{g}, K)$-模是可酉化的或酉的。$C_q^*(G)$ 的谱与可酉化简单 $(\mathfrak{g}, K)_q$-模的等价类集合之间存在一一对应。该对应关系定义如下：若 V 是一个可酉化简单 $(\mathfrak{g}, K)_q$-模，则它在相差一个标量的意义下具有唯一的不变内积，并且 $R_q(\mathfrak{g}, K)$ 通过$\bar{}$有界算子作用于其上；其完备化 V 因而是 $C_q^*(G)$ 的一个不可约表示。反过来，若 $\mathcal{H}$ 是 $C_q^*(G)$ 的一个不可约表示，则 $R_q(\mathfrak{g}, K)\mathcal{H}$ 是一个简单 $(\mathfrak{g}, K)_q$-模。更详尽的说明请参阅 [18, §6] 。

此外，可以构造 [14] 一个表示 $L_q^2(G)$，它与 $C_q^*(G)$ 的正则表示类似。我们将 q-变形群 C*-代数$C_{q,\ r}^*(G)$ 定义为 $C_q^*(G)$ 关于该表示的核的商空间。根据 [18, §7], 重述[12, 定理 5.1] ，可得以下结果。

命题 2.6. $C_{q,\ r}^*(G)$ 的谱的完备代表系由下列可酉化$(\mathfrak{g}, K)_q$-模的完备化给出：

- $\mathrm{ind}_q(\varepsilon, \lambda)$ 对于满足$(\varepsilon, \lambda) \neq (-1, \pm 1)$的 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ 和 $\lambda \in \mathbb{U}_+$,
- $D_q^+(\sigma,\ n)$ 以及 $D_q^-(\sigma,\ n)$ 对于$(\sigma,\ n) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

对于任意 $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$，记作

$$T_{q,n}^m = e_{q,m} T_{q,n} e_{q,n}, \qquad T_{q,n}^{m,\pm} = e_{q,m} T_{q,n}^{\pm} e_{q,n}, \tag{10}$$

视为 $R_q(\mathfrak{g}, K)$ 中的元素。稍后我们将需要以下基本结果。

引理 2.7。 $*$-代数 $R_q(\mathfrak{g}, K)$ 由以下元素组成的集合生成：$T_{q,n}^n$, $T^{n+2}{}_{,q\ n}{}^{+}$, $T^{n-2}{}_{,q\ n}{}^{-}$,其中 n 遍历 $\mathbb{Z}$。

证明。首先注意，随着 (n, m) 遍历 $\mathbb{Z}^2$，$X_{q}^{m}{}_{,n} = e_{q,m} X_q e_{q,n}$ 和 $Z_{q}^{m}{}_{,n} = e_{q,m} Z_q e_{q,n}$ 生成 $R_q(\mathfrak{g}, K)$ 这个 $*$-代数。这直接源于以下两个观察：族 $(\sum_{|l| \leq m} e_{q,l})_{m \in \mathbb{N}}$ 是 $R_q(\mathfrak{g}, K)$ 的近似单位，而 $\{X_q, Z_q\}$ 作为 $*$-代数生成 $\mathcal{O}_q(K\backslash U)$。接下来，通过对公式 (9) 求逆，可以将 $X_{q}^{m}{}_{,n}$ 和 $Z_{q}^{m}{}_{,n}$ 表示为$T_{q}^{m}{}_{,n}$ 和 $T^{m}{}_{,q\ n}{}^{\pm}$的线性组合，对任意 $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ 均成立，因此后者生成 $R_q(\mathfrak{g}, K)$ 这个 $*$-代数。

最后，只需注意到当 $m \neq n$, $m \neq n+2$,$m \neq n-2$ 分别成立时，$T_{q}^{m}{}_{,n}$, $T^{m}{}_{,q\ n}{}^{+}$, , $T^{m}{}_{,q\ n}{}^{-}$ 均为零。事实上， $R_q(\mathfrak{g}, K)$ 嵌入到 $C_q^*(G)$ 中，而且每个可酉化的简单 $(\mathfrak{g}, K)_q$-模都可以嵌入某个诱导模 $\mathrm{ind}_q(\varepsilon, \lambda)$，其中 $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{C}$；根据 (8)，在上述关于 n和 m 的条件下，$T_{q}^{m}{}_{,n}$, $T^{m}{}_{,q\ n}{}^{\pm}$ 均为零。□

2.4. 运动群的量子化。令 $G_0^\star$ 为 K 在 $K\backslash U$ 上的右作用所对应的变换李群胚（见 [27, §1.2.a]），并令 b 为 $K\backslash U$ 的基点。它是一个可和群胚，其 C*- 代数 $C^*(G_0^\star)$ 与交叉积 $K \ltimes C(K\backslash U)$ 一致。相比之下，运动群 G_0 的群 C*-代数自然同构于 $K \ltimes C_0((\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\hat{})$。正如我们将要看到的，当麦基参数趋近于 0 时， G 的量子化族在 C*代数层面收敛于由嵌入 $K \hookrightarrow G_0^\star$诱导的正规锥形变 [15]；其中， K 被视为 $G_0^\star$ 中源点和目标点均为 b 的元素所构成的子群（胚）。随后，只要将 G_0 替换为 $G_0^\star$，便可将 G 与 G_0 之间的表示论类比扩展到 G的 q-形变。

根据定理 1.10及其作为交叉积C*-代数的表达式， $C^*(G_0^\star)$的不可约表示的描述可由确定 $K\backslash U$ 在 K作用下的轨道得出。

令 $\mathcal{O}(K\backslash U)$ 为 $K\backslash U$ 上 U-有限函数构成的含单位 $*$-代数。容易验证， $\mathcal{O}(K\backslash U)$ 是由函数X， $Z : K\backslash U \to \mathbb{C}$ 生成的含单位 $*$-代数，函数定义如下

$$\left.\begin{pmatrix} Z & iX^* \\ -iX & -Z \end{pmatrix}\right|_{b\cdot u} = u^*\theta u \qquad (u \in U),$$

其中 θ 是由 (2) 定义的矩阵。它们满足关系 $Z^* = Z$ 和 $XX^* + Z^2 = 1$。事实上， $\mathcal{O}(K\backslash U)$ 是由 X 和 Z 生成并满足这些关系的泛含单位交换 $*$-代数。等式 $X^*X + Z^2 = 1$ 意味着 $\mathcal{O}(K\backslash U)$ 存在一个包络C*-代数。后者是 $C(K\backslash U)$，因为这两个 $*$-代数均为交换代数且具有相同的特征。

引入如下变量替换:

$$T = X + X^*, \qquad T^\pm = X - X^* \mp 2Z.$$

可以验证，任意 $k \in K$ 对这些变量的作用如下

$$k \cdot T = T, \qquad k \cdot T^\pm = \zeta_{\pm 2}(k)T^\pm.$$

因此， $K\backslash U$ 在 K 作用下的轨道是 T的水平集。对闭上半圆 $\mathbb{U}_+$中的每一个λ，令 $p_\lambda^\star$ 表示由$X(p_\lambda^\star) = \lambda$, $Z(p_\lambda^\star) = 0$所定义的 $K\backslash U$ 中的点。由上述可知，每个 K-轨道由唯一的 $\lambda \in \mathbb{U}_+$所对应的 $p_\lambda^\star$ 生成。若 $\lambda \in \{-1, 1\}$，则 $p_\lambda^\star$ 的稳定子为 K，否则为$M = \{-1, 1\}$。由定理 1.10，我们得到如下结论。

命题 2.8. $C^*(G_0^\star)$ 的谱的一组代表元为

- $\mathrm{Ind}(p_\lambda^\star, M, \varepsilon)$，其中 $\lambda \in \mathbb{U}_+ \setminus \{-1, 1\}$ 且 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,
- 针对 $\sigma \in \{-1, 1\}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$的一维表示$\mathrm{Ind}(p_\sigma^\star, K, n)$。

对于每个 $(\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{U}_+ \times \{-1, 1\}$，$\mathrm{Ind}(p_\lambda^\star, M, \varepsilon)$ 的底层希尔伯特空间是$L^2(K)^\varepsilon$。当 $\lambda \in \{-1, 1\}$ 和 $n \in \mathbb{Z}^\varepsilon$时，一维子空间 $\mathbb{C}\zeta_n$ 是 $\mathrm{Ind}(p_\lambda^\star, M, \varepsilon)$ 的一个不可约子表示，并与 $\mathrm{Ind}(p_\lambda^\star, K, n)$ 相对应。

与运动群的情形一样，这些表示可以通过其在包络 $*$-代数的一个类比对象的稠密子空间上的作用来刻画，具体如下。对 $\mathcal{O}(K\backslash U)$ 上的 K作用求导，可得到 $\mathcal{O}(K\backslash U)$ 上 $U(\mathfrak{k})$ 的一个作用 #。将任意含幺 $*$-代数 A 映到满足如下条件的一对含幺 $*$-代数态射 $(\iota\colon \mathcal{O}(K\backslash U) \to A, \kappa\colon U(\mathfrak{k}) \to A)$ 的函子：对于所有 $f \in \mathcal{O}(K\backslash U)$,$\kappa(\theta)\iota(f) - \iota(f)\kappa(\theta) = \iota(\theta\# f)$，该函子是可表的。若 $\mathfrak{g}_0^\star$表示$G_0^\star$的李锚丛，则我们将 $U(\mathfrak{g}_0^\star)$ 定义为此函子的一个泛元。采用这一记号的动机在于， $U(\mathfrak{g}_0^\star)$ 可视为由 $\mathfrak{g}_0^\star$的“正则”截面空间构成的包络 $\mathcal{O}(K\backslash U)$-代数。可以验证，从 $U(\mathfrak{k})$ 和 $\mathcal{O}(K\backslash U)$ 到 $U(\mathfrak{g}_0^\star)$ 的泛 $*$-代数态射是单射。

对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的任意 $C^*(G_0^\star)$表示，通过对K的作用求微分，并将 $C(K\backslash U)$的作用限制到 $\mathcal{O}(K\backslash U)$， $\mathcal{H}$ 的 K-有限向量空间继承了 $U(\mathfrak{g}_0^\star)$-模的结构。对于任意点 $x \in K\backslash U$、任意子群 $\Gamma \subset K_x$ 以及 Γ的任意不可约酉表示 π，记 $\mathsf{ind}(x, \Gamma, \pi)$ 为由 K-有限向量空间构成的酉 $U(\mathfrak{g}_0^\star)$-模

Ind(x,Γ,π)的-有限向量空间。若 $\varepsilon\in\{-1,1\}$ 和 $\lambda\in\mathbb{U}_+$，则 ind$(\tilde{p}_\lambda,M,\varepsilon)$的底层空间为$\mathcal{O}^\varepsilon(K)$，而 $U(\mathfrak{g}_0^\star)$在其上的作用由下式刻画

$$\theta\zeta_n=n\zeta_n,\qquad T\zeta_n=(\lambda+\lambda^{-1})\zeta_n,\qquad T^\pm\zeta_n=(\lambda-\lambda^{-1})\zeta_{n\pm2}. \tag{11}$$

约定。下文中，我们通过将 δX、δZ 和 $\delta T^\pm$ 分别视为 X、Z 和 $T^\pm$ 在 b 处的微分，将 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 与 $K\backslash U$ 在 b 处的复化余切空间 $T_b^*(K\backslash U)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 等同。在这一图景下，$\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 与 $iT_b^*(K\backslash U)$ 等同。这样，$\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 的庞特里亚金对偶 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\hat{}$ 与切空间 $T_b(K\backslash U)$ 如下对应：对 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 的每个特征 χ，都存在唯一的向量 $v\in T_b(K\backslash U)$，使得对所有 $\xi\in T_b^*(K\backslash U)=-i\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$，均有 $\chi(i\xi)=e^{i\langle\xi,\,v\rangle}$。

3. The continuous field of C*-algebras

本第三节旨在定义引言中提到的 C*-代数连续场。为了更深入地理解这一构造，我们首先为（普适包络的类比对象）定义一个代数场

$*$*-代数。更确切地说，我们构造了一个定义在环 $\mathbb{A}$（$\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ 上的解析函数）上的对合代数 ${}_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$，并证明它在每个 $(q,\ t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ 处的特化符合下表。

	$q\neq1$	$q=1$
$t\neq0$	$U_{q^t}(\mathfrak{g})$	$U(\mathfrak{g})$
$t=0$	$U(\mathfrak{g}_0^\star)$	$U(\mathfrak{g}_0)$

虽然我们没有明确证明这一点，但随后构造的 C*-代数连续场使得 ${}_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$ 中的元素给出无界乘子的连续向量场。

3.1. 代数量子麦基域。

在本小节中，我们定义代数 ${}_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$，并说明其某些模如何在点 (q,t) 处特化为第 2 节中引入的各种不可约表示。我们强调，这部分主要用于说明动机，因此初次阅读时可以略过。

术语。给定交换环之间的环态射 $\varphi\colon A_1\to A_2$，并且对每个 $j\in\{1,2\}$ 都有一个 A_j-模，一个加性映射 $f\colon M_1\to M_2$ 称为φ-线性的，如果对于每个 $(a,m)\in A\times M$，都有 $f(am)=\varphi(a)f(m)$。

设 A 是一个交换 $*$-代数，设 $\varphi\colon A\to\mathbb{C}$ 是一个 $*$-代数态射，并设 B 是一个含幺 $(A,*)$-代数，即一个配备了含幺 $*$-代数态射 $\iota\colon A\to Z(B)$ 的含幺 $*$-代数，其中 $Z(B)$ 表示 B 的中心。我们将 B 在 φ 处的特化定义为函子中的一个泛元，该函子将任意含幺 $*$-代数 C 对应到 φ-线性 $*$-代数态射 $B\to C$ 的集合。设φ_B：$B\to B_\varphi$ 是这样一个特化，且 M 是任意 B-模。将任意 B_φ-模 N 对应到 φ_B-线性映射 $M\to N$ 的集合的函子是可表的。该函子的泛元称为 M 在 φ处的特化。

令 $\mathbb{A}$ 为 $*$上定义于 $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ 的实解析复值函数代数。其分式域记为 $\mathbb{F}$，是 $\mathbb{C}$ 的带对合扩张。我们用 [1] $(\wp,\ \tau)$ 表示 $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ 的典范坐标。注意，元素 $\wp^\tau\in\mathbb{F}^\times$ 满足定义变形泛包络代数 ${}_{\mathbb{F}}U_{\wp^\tau}(\mathfrak{g})$ 所需的条件，见第 2.3 节；并回顾一下，我们有生成元 $X_{\wp^\tau}$、$Z_{\wp^\tau}$、$\theta_{\wp^\tau}$，如式 (6)、(7) 所示。

[1]我们使用古希腊字母 *koppa* $\wp$ 表示参数 q 的坐标函数。

定义 3.1。 我们将 $_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$ 定义为由以下元素生成的 $_{\mathbb{F}}U_{\wp^\tau}(\mathfrak{g})$ 的 $(\mathbb{F},\ *)$-子代数

$$\theta_{\mathbb{A}} = \theta_{\wp^\tau}, \qquad x_{\mathbb{A}} = \eta^{-1}(X_{\wp^\tau} - 1), \qquad z_{\mathbb{A}} = \eta^{-1} Z_{\wp^\tau},$$

其中，η 定义为 $\mathbb{A}$ 中满足 $\wp^\tau - \wp^{-\tau} = \tau\eta$的元素。

应用与 [18, §4], 中完全相同的技巧，我们得到以下结果。

命题 3.2. $_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$ 是一个具有生成元 $\theta_{\mathbb{A}}$、$x_{\mathbb{A}}$、 $z_{\mathbb{A}}$ 及以下关系的万有含幺$(\mathbb{F}, *)$-代数

$$\begin{gathered}
\varphi^\tau x_{\mathbb{A}}\theta_{\mathbb{A}} - \varphi^{-\tau}\theta_{\mathbb{A}} x_{\mathbb{A}} = [2]_{\varphi^\tau} z_{\mathbb{A}} - \tau\theta_{\mathbb{A}}, \qquad z_{\mathbb{A}}\theta_{\mathbb{A}} - \theta_{\mathbb{A}} z_{\mathbb{A}} = x_{\mathbb{A}} - x_{\mathbb{A}}^*, \\
\varphi^\tau z_{\mathbb{A}} x_{\mathbb{A}} - \varphi^{-\tau} x_{\mathbb{A}} z_{\mathbb{A}} = -\tau z_{\mathbb{A}}, \qquad x_{\mathbb{A}} x_{\mathbb{A}}^* + \varphi^{2\tau} z_{\mathbb{A}}^2 = x_{\mathbb{A}}^* x_{\mathbb{A}} + \varphi^{-2\tau} z_{\mathbb{A}}^2, \\
x_{\mathbb{A}} + x_{\mathbb{A}}^* + \eta(x_{\mathbb{A}} x_{\mathbb{A}}^* + \varphi^{2\tau} z_{\mathbb{A}}^2) = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

$*$-代数 $\mathbb{A}$ 的特征是点$(q,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$处的求值。以下命题描述了 $_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$的相应特化。

命题 3.3. 设$(q,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ 且 $h = 2$(对数 q)。$_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$ 在(q,t)处的特化，记为$\mathrm{ev}_{q,t}\colon {}_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g}) \to U_{q,t}(\mathfrak{g})$，由下表给出。

$(q,\ t)$ 的值	$U_{q,t}(\mathfrak{g})$	$\mathrm{ev}_{q,\ t}(x_{\mathbb{A}})$	$\mathrm{ev}_{q,\ t}(z_{\mathbb{A}})$	$\mathrm{ev}_{q,\ t}(\theta_{\mathbb{A}})$
$q \neq 1,\quad t \neq 0$	$U_{q^t}(\mathfrak{g})$	$\eta(q,t)^{-1}(X_{q^t} - 1)$	$\eta(q,t)^{-1} Z_{q^t}$	θ_{q^t}
$q \neq 1,\ t = 0$	$U(\mathfrak{g}_0^\star)$	$h^{-1}(X - 1)$	$h^{-1} Z$	θ
$q = 1,\ t \neq 0$	$U(\mathfrak{g})$	$tH/2$	itE	θ
$q = 1,\ t = 0$	$U(\mathfrak{g}_0)$	δX	δZ	θ

这由上一命题中对 $_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$ 的刻画，以及前一节中以生成元与关系给出的代数 $U_q(\mathfrak{g})$、 $U(\mathfrak{g}_0^\star)$、 $U(\mathfrak{g})$、 $U(\mathfrak{g}_0)$ 的描述可得。

还可以显式描述第 2.3 节中抛物诱导模的类比对象的特化。设 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ 与 λ 为 $\mathbb{A}$ 中满足凡 $\wp = 1$ 处皆有 $\lambda = 1$ 的任意可逆元。如上一节所述，$_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}, K)_{\wp^\tau}$-模 $_{\mathbb{F}}\mathrm{ind}_{\wp^\tau}(\varepsilon, \lambda)$ 的底空间是一个 $\mathbb{F}$-向量空间 $_{\mathbb{F}}\mathcal{O}^{\varepsilon}_{\wp^\tau}(K)$，它与 λ 无关，并具有基 $(\zeta_{\wp^\tau,\ n})_{n \in \mathbb{Z}^\varepsilon}$。我们用 $_{\mathbb{A}}\mathcal{O}^{\varepsilon}(K)$ 表示 $_{\mathbb{F}}\mathcal{O}^{\varepsilon}_{\wp^\tau}(K)$ 中由该基的元素张成的 $\mathbb{A}$-子模。

引理 3.4。 $_{\mathbb{A}}U$（$\mathfrak{g}$）在 $_{\mathbb{F}}\mathrm{ind}_{\varphi^\tau}$（$\varepsilon, \lambda$）上的作用稳定 $_{\mathbb{A}}\mathcal{O}^{\varepsilon}$（$K$）。

证明。 对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，记

$$\begin{aligned}
s_{\mathbb{A},n} &= \wp^{-\tau} x_{\mathbb{A}} + \wp^\tau x_{\mathbb{A}}^* + (\wp^{n\tau} - \wp^{-n\tau}) z_{\mathbb{A}} = \eta^{-1}(T_{\wp^\tau,n} - [2]_{\wp^\tau}), \\
s^{\pm}_{\mathbb{A},n} &= \wp^{\pm n\tau} x_{\mathbb{A}} - \wp^{\mp n\tau} x_{\mathbb{A}}^* \mp [2]_{\wp^\tau} z_{\mathbb{A}} \pm \tau[n]_{\wp^\tau} = \eta^{-1} T^{\pm}_{\wp^\tau,n}.
\end{aligned} \tag{13}$$

我们将由 $\mathbf{1}$，$x_{\mathbb{A}}$，$x_{\mathbb{A}}^*$，$z_{\mathbb{A}}$ 张成的 $_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$ 的 $\mathbb{A}$-子模记为 $_{\mathbb{A}}V$。可以验证，对每个 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $_{\mathbb{A}}V = \mathrm{span}_{\mathbb{A}}(\mathbf{1},\ s_{\mathbb{A},\ n},\ s^{+}_{\mathbb{A}\ ,\ n},\ s^{-}_{\mathbb{A}\ ,\ n})$。现在，利用公式 (8)，可得

$$\begin{aligned}
s_{\mathbb{A},n}\zeta_{\wp^\tau,n} &= \eta^{-1}\left(\lambda + \lambda^{-1} - [2]_{\wp^\tau}\right)\zeta_{\wp^\tau,n}, \\
s^{\pm}_{\mathbb{A},n}\zeta_{\wp^\tau,n} &= \eta^{-1}\left(\lambda\wp^{\tau(1\pm n)} - \lambda^{-1}\wp^{-\tau(1\pm n)}\right)\zeta_{\wp^\tau,n\pm 2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

由 η 的表达式本身可知，$\eta/(\wp-1) \in \mathbb{A}^{\times}$。因此，对任意$f \in \mathbb{A}$，若 $f=1$ 在 $\wp=1$ 处处成立，则 $\eta^{-1}f \in \mathbb{A}$。由于 $\lambda=1$ 在 $\wp^{-1}(1)$ 上成立，上述表达式 (14) 表明

$$ {}_{\mathbb{A}}V\zeta_{\wp^{\tau},n} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{A}}(\zeta_{\wp^{\tau},m} : m \in \{n-2, n, n+2\}) . $$

由于 ${}_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$ 是由 ${}_{\mathbb{A}}V$ 中的元素和 $\theta_{\mathbb{A}}$ 作为 $\mathbb{A}$-代数生成的，而后者显然保持 ${}_{\mathbb{A}}\mathcal{O}^{\varepsilon}(K)$，故证明得证。□

我们将 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{ind}(\varepsilon,\lambda)$ 记为 ${}_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$-模 ${}_{\mathbb{A}}\mathcal{O}^{\varepsilon}(K) \subset {}_{\mathbb{F}}\mathrm{ind}_{\wp^{\tau}}(\varepsilon,\lambda)$。下一个命题概述了该模在 $\mathbb{R}_{+}^{*}\times\mathbb{R}$ 的每个点处如何特化。

记号 3.5. 对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，我们记 $\theta_1=\theta$, $\mathcal{O}_1^{\varepsilon}(K)=\mathcal{O}^{\varepsilon}(K)$ 和 $\zeta_{1,n}=\zeta_n$。

命题 *3.6.* 固定 $(q,t)\in\mathbb{R}_{+}^{*}\times\mathbb{R}$。令 $ev_{q,t}^{\varepsilon}: {}_{\mathbb{A}}\mathcal{O}^{\varepsilon}(K) \to \mathcal{O}_{q^t}^{\varepsilon}(K)$ 为唯一的映射，它关于 $\mathbb{A}$ 在 (q,t) 处的求值是线性的，并且满足对所有 $n\in\mathbb{Z}^{\varepsilon}$，$ev_{q,t}^{\varepsilon}(\zeta_{\wp^{\tau},n})=\zeta_{q^t,n}$。令 $ind_{q,t}(\varepsilon,\lambda)$ 为唯一的 $U_{q,t}(\mathfrak{g})$-模，其底层空间为 $\mathcal{O}_{q^t}^{\varepsilon}(K)$，并且 $ev_{q,t}^{\varepsilon}: {}_{\mathbb{A}}ind(\varepsilon,\lambda) \to ind_{q,t}(\varepsilon,\lambda)$ 是 ${}_{\mathbb{A}}ind(\varepsilon,\lambda)$ 在 $ev_{q,t}$ 处的特化。$ind_{q,t}(\varepsilon,\lambda)$ 的性质由下表给出。

	$q\neq 1$	$q=1$
$t\neq 0$	$\mathrm{ind}_{q^t}(\varepsilon,\lambda(q,t))$	$\mathrm{ind}(\varepsilon, t^{-1}\partial_{\wp}\lambda(1,t))$
$t=0$	$\mathrm{ind}(p^{\star}_{\lambda(q,0)},M,\varepsilon)$	$\mathrm{ind}(p_{\partial_{\wp}\lambda(1,0)}M,\varepsilon)$

证明。作为 $\mathbb{A}$-代数，${}_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$由 $\theta_{\mathbb{A}}$、1、$x_{\mathbb{A}}$、$x_{\mathbb{A}}^{*}$、$z_{\mathbb{A}}$生成。对每个 $n\in\mathbb{Z}$，后者可表示为由(13)定义的 $\theta_{\mathbb{A}}$、1、$s_{\mathbb{A}}{}_{,n}$、$s_{\mathbb{A}}^{+}{}_{,n}$、$s_{\mathbb{A}}^{-}{}_{,n}$的 $\mathbb{A}$-线性组合。因此，为证明$\mathrm{ind}_{q,t}(\varepsilon,\lambda)$与上表中的$U_{q,t}(\mathfrak{g})$-模一致，只需验证 $\theta_{\mathbb{A}}$、1、$s_{\mathbb{A}}{}_{,n}$、$s_{\mathbb{A}}^{+}{}_{,n}$、$s_{\mathbb{A}}^{-}{}_{,n}$ 经$\mathrm{ev}_{q,t}$ 的像在每个$\zeta_{q^t,n}$ 上对两个模的作用方式相同。为此，我们需要下表，其中 $h=\eta(q,0)=2\log q$。

(q,t) 的值	$\mathrm{ev}_{q,t}(s_{\mathbb{A},n})$	$\mathrm{ev}_{q,t}(s_{\mathbb{A},n}^{\pm})$
$q\neq 1,\ t\neq 0$	$\eta(q,t)^{-1}(T_{q^t}-[2]_{q^t})$	$\eta(q,t)^{-1}T_{q^t}^{\pm}$
$q\neq 1,\ t=0$	$h^{-1}(T-2)$	$h^{-1}T^{\pm}$
$q=1,\ t\neq 0$	0	$t(H\mp i(E+F)+n-\theta)$
$q=1,\ t=0$	0	$\delta T^{\pm}$

此外，这些元素在每个 $\zeta_{q^t,n}\in\mathrm{ind}_{q,t}(\varepsilon,\lambda)$ 上的作用是通过 b 得到的 y 在 $(q,\ t)$ 处计算 (14)：

$$ \mathrm{ev}_{q,t}(s_{\mathbb{A},n})\zeta_{q^t,n}=\kappa_n(q,t)\zeta_{q^t,n}, $$
$$ \mathrm{ev}_{q,t}(s_{\mathbb{A},n}^{\pm})\zeta_{q^t,n}=\kappa_n^{\pm}(q,t)\zeta_{q^t,n\pm 2}, $$

其中常数 $\kappa_n(q,\ t)$、$\kappa_n^{\pm}(q,\ t)$ 的值由下式给出

$(q,\ t)$ 的值	$\kappa_n(q,\ t)$	$\kappa_n^{\pm}(q,\ t)$
$q\neq 1,\ \ t=0$	$h^{-1}(\lambda(q,\ 0)+\lambda(q,\ 0)^{-1}-2)$	$h^{-1}(\lambda(q,\ 0)-\lambda(q,\ 0)^{-1})$
$q=1,\ \ t\neq 0$	0	$\partial_{\wp}\lambda(1,t)+t(1\pm n)$
$q=1,\ \ t=0$	0	$\partial_{\wp}\lambda(1,\ 0)$

如果 $q = 1$ 或 $t = 0$；否则可直接从 (14) 读取。要完成证明，只需将这些表与公式 (3)、(5)、(8)、(11) 进行比较。□

离散系列的类比对象也有类似的结论。令 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 固定，并写作 $\varepsilon = (-1)^{n+1}$。可以验证

$$ {}_{\mathbb{A}}\mathcal{O}^{\varepsilon}(K) \cap {}_{\mathbb{F}}D^{+}_{\wp^{\tau}}(1,n) \qquad \text{and} \qquad {}_{\mathbb{A}}\mathcal{O}^{\varepsilon}(K) \cap {}_{\mathbb{F}}D^{-}_{\wp^{\tau}}(1,n) $$

在 ${}_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$ 的作用下保持不变。我们将由此得到的 ${}_{\mathbb{A}}U(\mathfrak{g})$-模记为 ${}_{\mathbb{A}}D^{+}(n)$ 和 ${}_{\mathbb{A}}D^{-}(n)$。接下来，对每个 $q \in \mathbb{R}^{*}_{+}$，记作

$$ D^{\pm}_{q,t}(n) = \begin{cases} D^{\pm}_{q^t}(1,n) & (q \neq 1) \\ D^{\pm}(n) & (q = 1) \end{cases} $$

当 $t \neq 0$ 且

$$ D^{\pm}_{q,0}(n) = \begin{cases} \bigoplus_{m \in \pm\mathbb{Z}^{\varepsilon}_{>n}} \mathrm{ind}(p_1^{\star}, K, n) \subset \mathrm{ind}(p_1^{\star}, M, \varepsilon) & (q \neq 1) \\ \bigoplus_{m \in \pm\mathbb{Z}^{\varepsilon}_{>n}} \mathrm{ind}(p_0, K, n) \subset \mathrm{ind}(p_0, M, \varepsilon) & (q = 1) \end{cases} $$

将前一个命题应用于情形 $\lambda = \wp^{n\tau}$，即可得到如下结论。

命题 3.7. 对于每个 $(q,t) \in \mathbb{R}^{*}_{+} \times \mathbb{R}$，将 $\mathrm{ev}^{\varepsilon}_{q,t}$ 限制在 $\mathbb{A}$ 所张成的 $\{\zeta_{\wp^{\tau},m} : m \in \mathbb{Z}^{\varepsilon}_{\pm m>n}\}$ 上，并视为 $\mathrm{ev}_{q,t}$-线性映射

$$ {}_{\mathbb{A}}D^{\pm}(n) \to D^{\pm}_{q,t}(n), $$

定义 ${}_{\mathbb{A}}D^{\pm}(n)$ 在 (q,t) 处的特化。

注 3.8。 离散系列 ${}_{\mathbb{F}}D^{\pm}_{\wp^{\tau}}(-1,n)$ 的其他类比对象不适用于上述图景，因为它们在 $q \to 1$ 时不存在经典极限。不过，我们可以通过限制在 $(0,1) \times \mathbb{R}$ 上定义的解析函数，来发展相同的思路。

3.2. **连续场的构造。** 前面的结果表明，对于固定的 $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1,1\} \times i\mathbb{R}$，模 $\mathrm{ind}_{q,t}(\varepsilon, \wp^{\lambda})$ 的希尔伯特完备化，以及对于给定的 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，模 $D^{\pm}_{q,t}(n)$ 的希尔伯特完备化，应当构成某个定义在 $\mathbb{R}^{*}_{+} \times \mathbb{R}$ 上的 C*-代数连续场 $C^{*}_{r}(\mathbf{G})$ 的表示连续族，其纤维为

$$ C^{*}_{r}(\mathbf{G})_{q,t} = \begin{cases} C^{*}_{q^t,r}(G) & (q \neq 1,\ t \neq 0) \\ C^{*}(G_0^{\star}) & (q \neq 1,\ t = 0) \\ C^{*}_{r}(G) & (q = 1,\ t \neq 0) \\ C^{*}(G_0) & (q = 1,\ t = 0). \end{cases} \tag{15} $$

本小节旨在构造这一连续场。

下面概述我们的策略。首先，我们定义一个局部紧豪斯多夫空间 S，并赋予它一个开连续映射 $\mathcal{L} : S \to \mathbb{R}^{*}_{+} \times \mathbb{R}$，称为位置映射。粗略地说，$\mathcal{L}$ 在基点 (q,t) 上的纤维 $S_{q,t}$，参数化了与参数为 (q,t) 的变形相关联的主系列和离散系列的类比对象。然后，我们定义一个以 S 为底空间、局部常值的希尔伯特空间连续场 $\mathcal{H}$，并在其上施加约束 $\mathscr{C}$。傅里叶变换将给出 C*-代数的一个嵌入 $C^{*}_{r}(\mathbf{G})_{q,t} \hookrightarrow \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,t}}$，对每个 $(q,t) \in \mathbb{R}^{*}_{+} \times \mathbb{R}$ 都成立。最后，我们定义约化 C*-代数的连续场 $C^{*}_{r}(\mathbf{G})$，使得这些嵌入将后者的连续向量场与 $\mathcal{L}_{*}\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 的连续向量场（即 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 经 $\mathcal{L}$ 推前所得的向量场，见命题 1.1）对应起来。

我们先从 S 和 $\mathcal{L}$ 的定义开始。我们将 S 定义为以下拓扑不交并

$$S = \left(\bigcup_{\varepsilon\in\{-1,1\}} \mathrm{Pri}_\varepsilon \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{\sigma\in\{-1,1\}\\ n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}} \mathrm{Dis}^+_{\sigma,n} \cup \mathrm{Dis}^-_{\sigma,n} \right),$$

其中

- 对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，空间 $\mathbf{Dis}^{\pm}_{\sigma,\,n}$ 在 $\sigma = 1$ 时是 $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$ 的副本，在 $\sigma = -1$ 时是 $(\mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$ 的副本，
- 对于每个 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$，空间 $\mathbf{Pri}_\varepsilon$ 是相对于包含映射 $\{1\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{U}_+ \subset \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{U}_+$ 的正规锥形变的一个副本，即集合 $(\mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{U}_+ \bigsqcup \{1\} \times \mathbb{R} \times i\mathbb{R}_+$，配备满足以下条件的唯一拓扑：

  (1) 子空间 $(\mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{U}_+$ 是开集，并继承通常拓扑；**(2)** 映射

$$(q, t, \lambda) \mapsto \begin{cases} (q, t, q^\lambda) & \text{if } q \neq 1 \\ (1, t, \lambda) & \text{if } q = 1 \end{cases}$$

  是 $\{(q,\ t,\ \lambda) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R} \times i\mathbb{R}_+ \colon |\lambda \log q| < \pi\}$ 到子空间 $(\mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}) \times \mathbb{R} \times (\mathbb{U}_+ \setminus \{-1\}) \bigsqcup \{1\} \times \mathbb{R} \times i\mathbb{R}_+$ 上的同胚。

这些空间中的每一个都自然地配备了一个取值于 $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$ 的开连续映射，即对于 $\mathbf{Dis}^{\pm}_{\sigma,\,n}$ 它是自然包含映射，而对于 $\mathbf{Pri}_\varepsilon$ 则是投影到前两个坐标。将这些映射组合起来得到一个连续开满射 $\mathcal{L} \colon S \to \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$。如果 $s \in S$，我们称 $\mathcal{L}(s)$ 为 s 的位置。对于每个 $(q,\ t) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$，我们用 $S_{q,\ t}$ 表示 $(q,\ t)$ 在 $\mathcal{L}$ 下的原像。更一般地，如果 D 是 $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$ 的子空间，我们记作 $S_D = \mathcal{L}^{-1}(D)$。此外，略微滥用记号，我们将把 $\wp$ 和 τ 视为 S 上通过 $\mathcal{L}$ 的坐标。

定义 3.9。 S 中的一个元素称为连续参数，如果它属于 $\cup_{\varepsilon\in\{-1,1\}}\mathbf{Pri}_\varepsilon$；否则称为离散参数。如果对于某个 $(\sigma,\ n) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{Z}_{>0}$，有 $s \in \mathbf{Dis}^{\pm}_{\sigma,\,n}$，则称 $(n,\ \pm)$ 为 s 的阶。

我们定义实数集上的函数 Λ 和 e 如下。

$$\Lambda(s) = \begin{cases} \lambda & (s = (q,t,\lambda) \in \mathrm{Pri}_\varepsilon,\ q \neq 1) \\ \lambda/t & (s = (1,t,\lambda) \in \mathrm{Pri}_\varepsilon,\ t \neq 0) \\ \lambda/t & (s = (1,0,\lambda) \in \mathrm{Pri}_\varepsilon) \\ \sigma q^{nt} & (s = (q,t) \in \mathrm{Dis}^{\pm}_{\sigma,n},\ q \neq 1) \\ n & (s = (1,t) \in \mathrm{Dis}^{\pm}_{1,n},\ t \neq 0) \\ 0 & (s = (1,0) \in \mathrm{Dis}^{\pm}_{1,n}) \end{cases}, \qquad e(s) = \begin{cases} \varepsilon & (s \in \mathrm{Pri}_\varepsilon) \\ (-1)^{n+1} & (s \in \mathrm{Dis}^{\pm}_{\sigma,n}). \end{cases}$$

如前所述，S 可以视为不可约表示的参数空间。函数 Λ 则扮演无穷小特征的角色。对于给定的 $s \in S$，我们称 $e(s)$ 为 s 的奇偶性，并称 s 为偶（分别为奇），当且仅当 $e(s) = 1$（分别为 $e(s) = -1$）。此外，对于任意 $s \in S$，我们记

$$\mathbb{Z}(s) = \begin{cases} \mathbb{Z}^\varepsilon & (s \in \mathrm{Pri}_\varepsilon) \\ \pm\mathbb{Z}^{e(s)}_{>n} & (s \in \mathrm{Dis}^{\pm}_{\sigma,n}), \end{cases}$$

我们以某种方式将其解释为 s 的 K-类型集合。

现在来定义连续场 $\mathcal{H}$。对于每个 $q \in \mathbb{R}_+^*$ 和 $\varepsilon \in \{-1,1\}$，我们用 $L^2_q(K)^\varepsilon$ 表示 $\mathcal{O}_q^\varepsilon(K)$ 关于唯一内积 $(\cdot|\cdot)_{0,q}$ 的完备化，其中该内积满足

$$(\zeta_{q,n}|\zeta_{q,m})_{0,q} = \frac{2\delta_{n,m}}{q^n + q^{-n}} \qquad (n,m \in \mathbb{Z}^\varepsilon).$$

对于任意的 $(q,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$，若 $\varepsilon = (-1)^{n+1}$，则记 $\mathcal{D}_{q,n,\pm}$ 为子空间 $\mathrm{span}(\zeta_{q,m} : m \in \pm\mathbb{Z}^\varepsilon_{>n})$ 在 $\mathcal{O}_q^\varepsilon(K)$ 中的希尔伯特完备化，其配备的内积 $(\cdot|\cdot)_{n,q}$ 由下式刻画：

$$(\zeta_{q,m}|\zeta_{q,m'})_{n,q} = \frac{2\delta_{m,m'}}{q^m + q^{-m}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \text{ odd}}}^{|m|-n} \frac{[l-1]_q}{[l-1+2n]_q} \quad (m \in \mathbb{Z}^{\mathrm{odd}}_{>0}).$$

我们将 $\mathcal{H}$ 定义为满足以下条件的、定义在 S 上的唯一希尔伯特空间连续场：

- $\mathcal{H}_s = L^2_{\wp^\tau(s)}(K)^{e(s)}$ 对每个连续参数 s，
- $\mathcal{H}_s = \mathcal{D}_{\wp^\tau(s)\,n,\pm}$ 对每个阶为 $(n,\pm)$ 的离散参数 s，
- 对每个 $n \in \mathbb{Z}$，向量场 $s \in S \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{Z}(s)}(n)\zeta_{\wp^\tau(s)\,n}$ 都是连续的。

由于它在每个连通分支上都是平凡的，$\mathcal{H}$ 是局部平凡的。为简化记号，对于每个 $s \in S$，我们用 $(\cdot|\cdot)_s$ 和 $\|\cdot\|_s$ 分别表示 $\mathcal{H}_s$上的内积和范数。

我们如下定义 $\mathcal{H}$ 上的约束 $\mathscr{C}$。相对于 $\mathscr{C}$，$\mathcal{H}$ 的纤维的分解为：

- $\mathcal{H}_s = \mathcal{D}_{\wp^\tau(s)\,0,+} \bigoplus \mathcal{D}_{\wp^\tau(s)\,0,-}$ 若 s 是奇连续参数，且 $\tau(s) \neq 0$ 并且 $\Lambda(s) \in \mathbb{R}$，
- $\mathcal{H}_s = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}(s)} \mathbb{C}\zeta_n$ 若 $\tau(s) = 0$ 并且 $\Lambda(s) \in \mathbb{R}$，
- 对于所有其他 s，分解都是平凡的。

嵌入 $C_r^*(\mathbf{G})_{q,t} \hookrightarrow \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,t}}$ 在 $t \neq 0$ 时是同构，但在 $t = 0$处不是，这是由于主级数在 $t \to 0$ 处退化（见上一小节以及命题 2.8 后的注释）。为证明连续场 $C_r^*(\mathbf{G})$ 在边缘 $t = 0$ 附近定义良好，我们需要刻画这些嵌入的像。为此，我们引入一些补充材料。对于每个 $(\varepsilon, n) \in \{-1,1\} \times \mathbb{Z}^{-\varepsilon}_{>0}$和 $m \in \pm\mathbb{Z}^\varepsilon_{>n}$，令 $J_{n,\pm}$表示由下式定义的满射线性算子 $L^2(K)^\varepsilon \to \mathcal{D}_{1,n,\pm}$

$$J_{n,\pm}(\zeta_m) = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}^\varepsilon_{>n}}(\pm m)\zeta_m \qquad (m \in \mathbb{Z}^\varepsilon).$$

对于任意的 $(q, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z}_{>0}$，对每个连续参数 $s \in S_q$，0 以及每个阶为 $(n, \pm)$ 的离散参数 $s' \in S_q$，0，只要 $\Lambda(s) = \Lambda(s')$ 且 $e(s) = e(s')$，我们就用 $J(s', s)$ 表示算子 $J_{n,\pm} : \mathcal{H}_s \to \mathcal{H}_{s'}$。若 V 是 $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ 的任意局部闭子空间，则称 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_V}$ 的向量场 σ 是 J-等变的，当且仅当对上述任意一对 $(s, s') \in S_V \times_V S_V$，都有 $J(s', s)\sigma_s = \sigma_{s'}J(s', s)$。我们用 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_V,J}$ 表示在无穷远处消失的 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_V}$ 的连续 J-等变向量场构成的 C*-代数。假设 $\tau(V) = \{0\}$，记 S_V 的连续参数集合为 S_V^c，可以验证，限制到 S_V^c 的态射 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_V} \to \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_V^c}$ 诱导出一个 C*-代数同构

$$\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_V,J} \longrightarrow \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_V^c}. \tag{16}$$

此外，我们有如下结论。

引理 3.10。 存在唯一的 C*-代数的连续子场 $\mathcal{L}_*\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$，其在每个$(q,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ 处的纤维为 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,\,t},\,J}$。

证明。设 $(q,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ 且设 $a\in\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_q,t,J}$。首先假设 $t\neq 0$。则$\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_q,t,J}=\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,t}}$，并且存在 $\tilde{a}\in\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S\setminus\tau^{-1}(0)}=\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S\setminus\tau^{-1}(0)\,J}$，使得 $\tilde{a}_{|S_{q,t}}=a$。将 $\tilde{a}$ 在 $\tau^{-1}(0)$ 上延拓为零，得到一个元素 $b\in\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_J$，其在 $S_{q,t}$ 上的限制为 a。现在，假设 $t=0$。设 a' 是$\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|\tau^{-1}(0)^c}$ 中的一个元素，其在 $S_q^c,0$ 上的限制为 $a_{|S_q^c,0}$。由于同构 (16)，存在一个元素 $\tilde{a}$，属于 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|\tau^{-1}(0)\,J}$，使得 $\tilde{a}_{|\tau^{-1}(0)^c}=a'$。此外，由于 (16) 对 $S_V=S_q,0$ 的单射性，我们有 $\tilde{a}_{|S_{q,0}}=a$。若 $b\in\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ 是 $\tilde{a}$ 的任意延拓，则 b 是 J-等变的，且其在 $S_q,0$ 上的限制为 a。

在每种情况下，都存在 $b\in\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_J$ 使得 $(\mathcal{L}_*b)_{q,\,t}=a$，由此证明得证。□

现在我们来定义嵌入 $C_r^*(\mathbf{G})_{q,\,t}\hookrightarrow\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,\,t}}$。此处采用记号 (15)，尽管 C*-代数连续场尚未定义。这些嵌入的构造取决于 q 和t的取值，因此我们分别讨论每种情况。

情形 $q\neq 1,t\neq 0$。考虑 $q\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$。若 $s\in S_q,1$ 是一个连续参数，令 π_s 表示 $C_{q,r}^*(G)$ 在 $\mathcal{H}_s$ 上的表示，它由 $(\mathfrak{g},K)_q$-模 $\mathrm{ind}_q(e(s)\ \Lambda(s))$ 的完备化得到。我们回顾一下，$\mathcal{O}^{e(s)}(K)$ 上的内积 $(\cdot|\cdot)0,_q$ 是 $U_q(\mathfrak{g})$-不变的，见 [18, §6]。另一方面，对于每个 $(\sigma,n)\in\{-1,1\}\times\mathbb{Z}_{>0}$，内积 $(\cdot|\cdot)_{n,q}$ 使 $D_q^+(\sigma,n)$ 和 $D_q^-(\sigma,n)$ 成为酉的 $(\mathfrak{g},K)_q$-模（通过显式计算可由 [13, 命题 3.14] 得出）。若 $s\in S_q,1\cap\mathrm{Dis}_{\sigma,n}^{\pm}$，则我们用 π_s 表示 $C_{q,r}^*(G)$ 在 $\mathcal{H}_s$ 上的表示，该表示对应于 $D_q^{\pm}(\sigma,n)$ 的完备化。

$C_{q,r}^*(G)$ 的这些表示中，除非 s 是满足 $\Lambda(s)\in\{-1,1\}$ 的奇连续参数，否则每个表示都是不可约的。在这种情况下，π_s 是两个不可约子表示之和，即$\mathcal{D}_{q,0,+}$ 和 $\mathcal{D}_{q,0,-}$。因此，综合以上结果，并利用 $C_{q,r}^*(G)$ 是极限型这一事实，根据推论 5.10], ，我们得到一个 C*-代数态射

$$\pi_{q,1}:\quad C_{q,r}^*(G)\to\prod_{s\in S_{q,1}}\mathfrak{K}(\mathcal{H}_s),\quad x\mapsto(\pi_s(x))_{s\in S_{q,1}}.$$

定理 3.11. </style}映射 ,$_1$ 诱导出一个同构 $C_{q,r}^*(G)\ \to\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,1}}$。

证明。 首先，我们来验证 $C_{q,r}^*(G)$ 经由 $\pi_{q,1}$ 映射后的像属于 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})_{|S_{q,1}}$。根据引理 2.7，并且由于 $R_q(\mathfrak{g},K)$ 在 $C_{q,r}^*(G)$ 中的像是稠密的，这就归结为证明：对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，$T_{q,n}^n$, $T^{n\pm2,}$ $_{q\,n}{}^{\pm,}$ 经由 $\pi_{q,1}$ 得到的像在 $S_{q,1}$ 上连续且在无穷远处消失。对于任意 $s\in S_{q,1}$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\pi_s(T_{q,n}^n)=(\Lambda(s)+\Lambda(s)^{-1})E_n^n(s),$$
$$\pi_s(T_{q,n}^{n\pm2,\pm})=(q^{1\pm n}\Lambda(s)-q^{-1\mp n}\Lambda(s)^{-1})E_n^{n\pm2}(s),$$

其中，对于每个 $m\in\mathbb{Z}$，算子 $E_n^m(s)$ 定义为

$$E_n^m(s):\psi\longmapsto\begin{cases}\|\zeta_{q,n}\|_s^{-2}(\zeta_{q,n}|\psi)_s\zeta_{q,m} & \text{if } n,m\in\mathbb{Z}(s)\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{17}$$

这些公式由 (8) 得出，它们表明，对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，$\pi_q,1(T^n_q,n)$ 和 $\pi_q,1(T^{n\pm2},_{q\,n}{}^{\pm},)$ 都是连续向量场。此外，若 $n\notin\mathbb{Z}(s)$，则有 $\pi_s(T^n_q,n)=\pi_s(T^{n\pm2},_{q\,n}{}^{\pm},)=0$，这证明对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，$\pi_q,1(T^n_q,n)$ 和 $\pi_q,1(T^{n\pm2},_{q\,n}{}^{\pm},)$ 也都在无穷远处消失。由此完成了包含映射 $\pi_q,1(C^*_q,r(G))\subset\mathfrak{K}(\mathcal{H})|_{S_q},1$ 的证明。

由于对于每个满足 $\Lambda(s)\in\{-1,1\}$ 的奇连续参数 $s\in S_q,1$，$\mathcal{D}_q,0,+$ 和 $\mathcal{D}_q,0,-$ 都是 π_s 的子表示，因此实际上有包含映射 $\pi_q,1(C^*_q,r(G))\subset\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_q},1$。接着可以验证，广义 Stone-Weierstrass 定理（定理 1.5）的条件均得到满足：分别利用命题 2.6 和引理 1.4 给出的 $C^*_q,r(G)$ 和 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_q},1$ 的谱描述即可。由此得出 $\pi_q,1:C^*_q,r(G)\to\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_q},1$ 是一个同构。□

现在固定任意一对 $(q,t)\in\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}$，使得 $q\neq1$ 且 $t\neq0$。我们将保持奇偶性 ε、映射 Λ 以及 S 的连通分支的唯一双射 $S_q,t\to S_{q^t},1$ 记为 φ_q,t（也就是说，对于每个 ε,σ,n，有 $\varphi^{-1}_q\,t,(\mathrm{Pri}_\varepsilon)\subset\mathrm{Pri}_\varepsilon$，且 $\varphi^{-1}_q\,t,(\mathrm{Dis}^{\pm}_\sigma,n)\subset\mathrm{Dis}^{\pm}_\sigma,n$）。沿 φ_q,t 的拉回定义了一个 C*-代数同构 $\varphi^*_q,t:\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_{q^t},1}\to\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_q,t}$。于是，映射 $\pi_q,t=\varphi^*_q,t\circ\pi_{q^t},1$ 是一个 C*-代数同构 $C^*_r(\mathrm{G})_q,t\to\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_q,t}$。

情形 $q\neq1,t=0$。固定 $q\neq1$。回顾一下，$C^*_r(\mathrm{G})_q,0=C^*(G^\star_0)$。对于每个连续参数 $s\in S_q,0$，记 π_s 为由 $\mathrm{Ind}(p^\star_{\Lambda(s)},M,e(s))$ 定义的 $C^*(G^\star_0)$ 在 $\mathcal{H}_s$ 上的表示，参见第 2.4 节。如果 $s\in S_q,1$ 是阶为 $(n,\pm)$ 的离散参数，我们将 π_s 记为 $C^*(G^\star_0)$ 在 $\mathcal{H}_s$ 上的表示，它由直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}(s)}\mathrm{Ind}(p^\star_{\Lambda(s)},K,n)$ 给出，其中，对于每个 $n\in\mathbb{Z}(s)$，$\mathrm{Ind}(p^\star_{\Lambda(s)},K,n)$ 都被视为 $\mathcal{H}_s$ 的子空间 $\mathbb{C}\zeta_n$。每个表示 π_s 都是 $C^*(G^\star_0)$ 的不可约表示的希尔伯特直和。由于后者是极限型，见 [32, 第 7 节。5]，我们可以定义以下 C*-代数态射

$$\pi_{q,0}:\quad C^*(G^\star_0)\to\prod_{s\in S_{q,0}}\mathfrak{K}(\mathcal{H}_s),\quad x\mapsto(\pi_s(x))_{s\in S_{q,0}}.$$

命题 3.12。态射 $\pi_{q,\,0}$ 是单射，其像为 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_{q,\,0},\,J}$。证明。首先，证明 $\pi_{q,\,0}$ 的像包含于 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_{q,\,0}}$ 的连续向量场空间中，并且在无穷远处消失。对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，记 e_n 为 K 上的唯一测度，使得对于所有 $m\in\mathbb{Z}$ 都有 $\langle e_n,\zeta_m\rangle=\delta_{n,\,m}$。

令 $f\in C(K\backslash U)$，$n\in\mathbb{Z}$，下面证明 $fe_n\in C^*(G^\star_0)$ 经由 $\pi_q,0$ 的像属于 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_q},0$。对于每个 $s\in S_q,0$，算子 $\pi_s(fe_n)$ 的秩至多为 1，因此它属于 $\mathfrak{K}(\mathcal{H}_s)$。此外，若 $\Lambda(s)\in\{-1,1\}$，则 f 在 $\mathcal{H}_s$ 上的作用为标量 $f(p^\star_{\Lambda(s)})$，其中 $p^\star_\sigma(\sigma\in\{-1,1\})$ 表示 K-不动点，参见第 2.4 节。因此，在这种情况下，$\pi_s(fe_n)$ 与到 $\mathbb{C}\zeta_n$ 的正交投影成比例（若 $n\notin\mathbb{Z}(s)$，则为零），这意味着 $\pi_s(fe_n)\in\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_s$。因此，只需在 $S_q,1$ 中不退化为单点的连通分支上检查 $\pi_q,0(fe_n)$ 作为 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_q},0$ 的向量场的连续性；这些连通分支是偶连续参数和奇连续参数的子集。场 $\mathcal{H}$ 在这些连通分支上均为平凡场。若 $s\in S_q,1$ 是奇偶性为 $(-1)^n$ 的连续参数，则 $\pi_s(fe_n)$ 是乘以 $k\in K\mapsto f(p^\star_{\Lambda(s)}k)$ 与到 $\mathbb{C}\zeta_n$的正交投影的复合；若 s 的奇偶性与 $(-1)^n$ 不同，则有 $\pi_s(fe_n)=0$。由于 $s\in S_q,0\mapsto p^\star_{\Lambda(s)}\in K\backslash U$ 连续，$\pi_q,0(fe_n)$ 确实是 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})|_{S_q},0$ 的连续向量场。最后，若 $n\notin\mathbb{Z}(s)$，则 $\pi_s(fe_n)=0$，因此 $\pi_q,0(fe_n)$ 在无穷远处趋于零。

形如 fe_n（其中 $f \in C(K\backslash U)$ 且 $n \in \mathbb{Z}$）的元素的线性张成在 $C^*(G_0^\star)$ 中稠密。由此我们得出，$\pi_{q,\,0}(C^*(G_0^\star)) \subset \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,\,0}}$。

根据构造，对于每个连续参数 $s \in S_q$,0 以及每个满足 $\Lambda(s) = \Lambda(s')$ 和 $e(s) = e(s')$ 的离散参数 $s' \in S_q$,0，算子 $J(s', s)$ 交织 π_s 和 $\pi_{s'}$，因此 π_q,0$(C^*(G_0^\star)) \subset \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_q}$,0,$J$。为了证明 π_q,0 诱导了从 $C^*(G_0^\star)$ 到 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_q}$,0,$J$ 的同构，我们应用广义 Stone-Weierstrass 定理（定理 1.5）。通过 (16) 与 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_q^c,0} = \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}_{|S_q^c}$,0) 同构的 C*-代数 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_q}$,0,$J$ 是极限型的，其谱由引理 1.4 给出，并与 $C^*(G_0^\star)$ 的谱双射，见命题 2.8。□

情形 $q = 1,\ \ t \neq 0$。令我们固定 $t \neq 0$。若 $s \in S_{1,\,t}$ 是连续参数，令 π_s 表示 $C_r^*(G) = C_r^*(\mathbf{G})_{1,\,t}$ 上与 $(\mathfrak{g},\ K)$-模 ind$(e(s)\ \Lambda(s))$ 的完备化相对应的表示。对于任意阶为 $(n,\ \pm)$ 的离散参数 $s \in S_{1,\,t}$，记 π_s 为 $C_r^*(G)$ 在 $\mathcal{H}_s$ 上由 $D^{\pm}(n)$ 的完备化给出的表示（注意，$\mathcal{H}_s$ 上的内积经过精心选取，正是为此目的）。将定理 $[8,\, 6.8]$ 应用于 SL$(2,\ \mathbb{R})$ 的特例，我们得到如下结论。

命题 3.13。映射

$$\pi_{1,t}:\quad C_r^*(G) \to \prod_{s\in S_{1,t}} \mathfrak{B}(\mathcal{H}_s),\quad x \mapsto (\pi_s(x))_{s\in S_{1,t}}.$$

诱导出一个 C*-代数同构 $C_r^*(G) \to \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{1,\,t}}$。

情形 $q = 1, t = 0$。对每个连续参数 $s \in S_1$,0，设 π_s 为 $C^*(G_0)$ 在 $\mathcal{H}_s$ 上由 Ind$(p_{\Lambda(s)}, M, e(s))$ 定义的表示。对任意阶为 $(n, \pm)$ 的离散参数 $s \in S_q$,1，我们记 π_s 为 $C^*(G_0)$ 在 $\mathcal{H}_s$上由希尔伯特直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}(s)}$ Ind$(p_{\Lambda(s)}, K, n)$ 给出的表示，其中对每个 $n \in \mathbb{Z}(s)$，Ind$(p_{\Lambda(s)}, K, n)$ 与 $\mathcal{H}_s$ 的子空间 $\mathbb{C}\zeta_n$ 等同。由于 $C^*(G_0)$ 是极限型的，且每个表示 π_s 都是 $C^*(G_0)$ 的不可约表示的希尔伯特直和，我们可以定义如下的 C*-代数态射

$$\pi_{1,0}:\quad C^*(G_0) \to \prod_{s\in S_{1,0}} \mathfrak{K}(\mathcal{H}_s),\quad x \to (\pi_s(x))_{s\in S_{1,0}}.$$

命题 3.14. $\pi_{q,0}$ 诱导一个同构 $C^*(G_0) \to \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{1,0},J}$。

我们省略证明，因为它与命题 3.12 的证明非常相似。

结论。对于每一对 $(q, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$，我们定义了一个 C*-代数嵌入

$$\pi_{q,t} : C_r^*(\mathbf{G})_{q,t} \hookrightarrow \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,t},J}.$$

构造的最后一步是如下定理，它由引理 3.10 得出。

定理 3.15. 存在唯一的 C*-代数连续场 $C_r^*(\mathbf{G})$，其底空间为$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$，纤维由 *(15)* 给出，并且$(\pi_{q,t})_{q,t} : C_r^*(\mathbf{G}) \to \mathcal{L}_*\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$定义了一个从$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$上的 C*-代数连续场到自身的态射。

3.3. 在 $t = 0$ 和 $q = 1$处连续场的几何刻画。我们构造 $C_r^*(\mathbf{G})$ 时，明确用到了其各个纤维的表示论。我们主要选择这一视角，是因为它能使在 q-变形的背景下更容易推导 Mackey 类比。现在，我们利用法锥变形，说明如何刻画这个连续场的各个部分，而无需涉及具体表示。

若 M 是任意光滑流形且 $V \subset M$ 是嵌入子流形，我们用 $\mathrm{D}_M(V)$ 表示相应的正规锥形变 [15, §1.1]。我们回顾，后者自然配备一个典范次沉浸 $\mathrm{p}_M^V : \mathrm{D}_M(V) \to \mathbb{R}$，其在每个 $h \in \mathbb{R}^*$ 上的纤维为 M，而在 0 上的纤维是包含映射 $V \subset M$的法丛 $\mathrm{N}_M(V)$。如 [16], 中所解释，若 $V \subset M$是李群胚包含映射，则 $\mathrm{N}_M(V)$ 与 $\mathrm{D}_M(V)$ 都继承自然的李群胚结构，使得 p_M^V 的每条纤维都是 $\mathrm{D}_M(V)$ 的李子群胚。此外，对每个 $h \in \mathbb{R}$，到纤维 $\mathrm{D}_M(V)_h = (\mathrm{p}_M^V)^{-1}(h)$ 的限制诱导一个满射 C* 代数态射

$$\mathrm{Res}_h : C_r^*(\mathrm{D}_M(V)) \to C_r^*(\mathrm{D}_M(V)_h).$$

如果 $\mathrm{N}_M(V)$ 是可 amenable 的，那么在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一的 C*-代数连续场，其在每个 $h \in \mathbb{R}$ 处的纤维为 $C_r^*(\mathrm{D}_M(V)_h)$，且其无穷远处消失的连续向量场构成的 C*-代数为 $C_r^*(\mathrm{D}_M(V))$；在任意 $h \in \mathbb{R}$ 处的求值与 Res_h 相对应。理由与 [19, Lemma 6.13] 相同。

我们来考虑将 $C_r^*(\mathbf{G})$ 限制到 $\varrho^{-1}(1)$ 上。在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 这一特例中应用 [9]，可知 $C_r^*(\mathbf{G})_{|\varrho^{-1}(1)}$ 与经典的 Mackey 变形场 [19, §6.2] 相一致。这意味着 C*-代数连续场 $\tau_*\left(C_r^*(\mathbf{G})_{|\varrho^{-1}(1)}\right)$ 与 $C_r^*(\mathrm{D}_G(K))$ 相一致。

若我们改为将场限制到 $\tau^{-1}(0)$，类似的结论仍然成立。我们将 K 识别为 $G_0^\star$ 中源和目标均为 $K\backslash U$ 的基点 b 的元素所组成的群。李群胚 $\mathrm{D}^{G_0^\star}(K)$ 与相对于 K 在 $\mathrm{D}^{K\backslash U}(b)$ 上的逐纤维作用的变换群胚一致。因此它是可 amenable 的，其 C*-代数可规范地识别为交叉积 $C_0(\mathrm{D}^{K\backslash U}(b)) \rtimes K$。每个纤维 $\mathrm{D}^{G_0^\star}(K)_h$ 都是相对于 K 在 $\mathrm{D}^{K\backslash U}(b)_h$ 上的作用的变换群胚，因而是可 amenable 的。最后，限制态射

$$\mathrm{Res}_h : C_0(\mathrm{D}_{K\backslash U}(b)) \rtimes K \longrightarrow C^*(\mathrm{D}_{G_0^\star}(K)_h) = C_0(\mathrm{D}_{K\backslash U}(b)_h) \rtimes K$$

由限制映射 $C_0(\mathrm{D}^{K\backslash U}(b)) \to C_0(\mathrm{D}^{K\backslash U}(b)_h)$ 通过交叉积函子性诱导得到。

回顾约定2.4，其中 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 的庞特里亚金对偶 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\hat{}$ 被识别为 $T_b(K\backslash U)$。借助这一点，G_0 的群 C*-代数（规范地同构于 $C_0((\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\hat{}) \rtimes K$）从现在起被识别为

$$C_0(T_b(K\backslash U)) \rtimes K = C^*(\mathrm{D}_{G_0^\star}(K)_0) = C^*(\mathrm{N}_{G_0^\star}(K)).$$

命题3.16. 令 $\eta\colon q \in \mathbb{R}_+^* \mapsto$ 2对数 $q \in \mathbb{R}$。由 $C_r^*(\mathrm{D}^{G_0^\star}(K))$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上的 *C*-代数连续场与*$(\eta \circ \varrho)_*\left(C_r^*(\mathbf{G})_{|\tau^{-1}(0)}\right)$*一致。*

证明。鉴于 [17, 命题 10.2.4], 只需验证：对 $C_0(\mathrm{D}^{K\backslash U}(b)) \rtimes K$中的任意$x$，向量场 $\tilde{x} = (\mathrm{Res}^{\eta(q)}(x))_{q>0}$ 是$\varrho_*\left(C_r^*(\mathbf{G})_{|\tau^{-1}(0)}\right)$的一个元素。由命题 3.12 的证明，回顾 K上测度族$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 的定义。固定 $f \in C_0(\mathrm{D}^{K\backslash U}(b))$、$n \in \mathbb{Z}$，并记 $x = fe_n \in C_0(\mathrm{D}^{K\backslash U}(b)) \rtimes K$。由构造（定理 3.15），该向量

场 $\tilde{x}$ 连续且在无穷远处消失，当且仅当 $x' = (\pi_s(\tilde{x}_{\mathfrak{r}(s)}))_{s\in\tau^{-1}(0)}$ 属于 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|\tau^{-1}(0)\ J}$；或者等价地，由于同构(16)，当且仅当 $x'' = (\tilde{x}_{\mathfrak{r}(s)})_{s\in\tau^{-1}(0)^c}$ 属于 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|\tau^{-1}(0)^c}$。

对于任意 $s \in \tau^{-1}(0) \subset S$，记作

$$\mathbf{p}_s = \begin{cases} p^{\star}_{\Lambda(s)} \in \mathrm{D}_{K\backslash U}(b)_{\eta(q)} = K\backslash U & \text{if } \mathfrak{r}(s) = q \neq 1 \\ p_{\Lambda(s)} \in \mathrm{D}_{K\backslash U}(b)_0 = (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\wedge} & \text{if } \mathfrak{r}(s) = 1. \end{cases}$$

对于每个 $s \in \tau^{-1}(0)^c$，算子 x''_s 是将连续函数 $k \mapsto f(\mathbf{p}_s k)$ 乘以由式 (17) 定义的算子 $E^n_n(s)$ 所得到的复合算子。现在，根据第 2.2 节和第 2.4 节的内容可以验证，在我们所作的那些识别下，$s \in \tau^{-1}(0)^c \mapsto \mathbf{p}_s \in \mathrm{D}^{K\backslash U}(b)$ 是连续的。这表明 x'' 是 $\mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|\tau^{-1}(0)^c}$ 的一个元素，因此 $\tilde{x}$ 属于 $\mathfrak{r}_*\left(C^*_r(\mathbf{G})_{|\tau^{-1}(0)}\right)$。由于 $C_0(\mathrm{D}^{K\backslash U}(b)) \rtimes K$ 由同形式的元素稠密张成，证明得证。□

4. The Mackey analogy for q-deformed SL(2, ℝ)

在最后这一节中，我们给出一组关于 SL(2, ℝ) 的 q-形变的结果，它们是 Mackey 类比 [1, 3, 4, 9] 所涵盖的各种陈述的自然类比对象。我们证明，对于固定的 $q \neq 1$，C*-代数连续场 $C^*_r(\mathbf{G})$ 到 $\{q\} \times [0, 1]$ 的限制可以刻画为某个嵌入 $C^*(G^{\star}_0) \hookrightarrow C^*_{q,r}(G)$ 的映射锥。然后我们证明，后者诱导这两个代数的谱之间的一个连续双射，以及 K-理论中的一个同构。

在本文余下部分，我们固定 $q \neq 1$，并记作 $S_q = \mathfrak{r}^{-1}(q)$。我们还用 $C^*_{q,r}(\mathbf{G})$ 表示由 $C^*_r(\mathbf{G})_{|\{q\}\times\mathbb{R}}$ 经 τ 推前而得到的、定义在 $\mathbb{R}$ 上的 C*-代数连续场。

4.1. Mackey嵌入与双射。 我们从嵌入的构造开始。对任意 $t \in \mathbb{R}$，用 γ_t 表示唯一的映射 $S_{q,1} \to S_{q,t}$，它保持 Λ、ε 以及 S_q 的连通分支。注意，映射 $(t, s) \in \mathbb{R} \times S_{q,1} \mapsto \gamma_t(s) \in S_q$ 是一个同胚。此外，对任意 $s \in S_q$，令 $v_s : \mathcal{H}_s \to \mathcal{H}_{\gamma_{\tau(s)}^{-1}(s)}$ 为如下定义的等距映射

$$v_s(\zeta_{q^{\tau(s)},n}) = \frac{\|\zeta_{q^{\tau(s)},n}\|}{\|\zeta_{q,n}\|}\zeta_{q,n} \qquad (n \in \mathbb{Z}(s)).$$

然后，对任意 $t \in \mathbb{R}$，我们如下定义C*-代数同构 $\beta_t : \mathfrak{K}(\mathcal{H})_{|S_{q,t}} \to \mathfrak{K}(\mathcal{H})_{|S_{q,1}}$

$$\beta_t(a)_s = v_{\gamma_t(s)} a_{\gamma_t(s)} v^*_{\gamma_t(s)} \qquad (a \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})_{|S_{q,t}}, s \in S_{q,1}).$$

由构造，$\beta = (\beta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 给出了C*-代数连续场 $\tau_*(\mathfrak{K}(\mathcal{H})_{|S_q})$ 的一个平凡化。对任意 $t \in \mathbb{R}$，令 $\alpha_t : C^*_{q,r}(\mathbf{G})_t \hookrightarrow C^*_{q,r}(G)$ 为使下列方框交换的唯一C*-代数态射：

$$\begin{array}{ccc} C^*_{q,r}(\mathbf{G})_t & \xrightarrow{\pi_{q,t}} & \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,t}} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_t} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_t} \\ C^*_{q,r}(G) & \xrightarrow[\sim]{\pi_{q,1}} & \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S_{q,1}} \end{array} .$$

将上述性质与定理 3.15 结合起来重新表述，可得以下结论。

命题 4.1. 对于每个 $t \neq 0$，态射 α_t 是双射；而对于 $t = 0$，它仅为单射。此外，集族 $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是从 **C*-**代数连续场 $C^*_{q,r}(\mathbf{G})$ 到 $\mathbb{R}$ 上以纤维 $C^*_{q,r}(G)$ 为纤维的常值场的一个嵌入。

特别要注意，对于任意 $q' \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$，C*-代数 $C^*_{q,\ r}(G)$ 和 $C^*_{q',\ r}(G)$ 同构。此外，我们有一个 Mackey 双射的类比对象。

定理 4.2. 存在唯一的双射 μ，它从 $C^*_{q,\ r}(G)$ 的谱映射到 $C^*(G_0^\star)$ 的谱，并且满足：对于任意 $C^*_{q,\ r}(G)$的不可约表示 ω，由 α_0 拉回得到的 $C^*(G_0^\star)$的表示 $\alpha_0^*\omega$ 包含 $\mu(\omega)$ 作为子表示。此映射 μ 关于 ***Jacobson*** 拓扑是连续的，但其逆映射不是。

证明。 假设 μ 是一个双射 $\mathrm{Spec}\, C^*_{q,\ r}(G) \to \mathrm{Spec}\, C^*(G_0^\star)$，连接两个代数的谱。我们将 $\mathrm{Spec} C^*_{q,\ r}(G)$ 视为命题 2.6 中给出的不可约酉化 $(\mathfrak{g},\ K)_q$-模的列表。对于每个 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ 和 $\lambda \in \mathbb{U}_+ \setminus \{\pm 1\}$，我们有

$$\alpha_0^*[\mathrm{ind}_q(\varepsilon, \lambda)] = \mathrm{Ind}(p^\star_\lambda, M, \varepsilon),$$

因此 $\mu[\mathrm{ind}_q(\varepsilon, \lambda)] = \mathrm{Ind}(p^\star_\lambda, M, \varepsilon)$。另一方面，对于任意 $\sigma \in \{-1, 1\}$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有

$$\alpha_0^*[\mathrm{ind}_q(1, \sigma)] = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}^{\mathrm{even}}} \mathrm{Ind}(p^\star_\sigma, K, m),$$
$$\alpha_0^*[D^\pm(\sigma, n)] = \bigoplus_{\substack{m-n\in\mathbb{Z}^{\mathrm{odd}} \\ \pm m>n}} \mathrm{Ind}(p^\star_\sigma, K, m).$$

由此，利用 μ 的双射性进行简单的归纳论证可知

$$\mu[\mathrm{ind}_q(1, \sigma)] = \mathrm{Ind}(p^\star_\sigma, K, 0), \qquad \mu[D^\pm(\sigma, n)] = \mathrm{Ind}(p^\star_\sigma, K, \pm(n + 1)).$$

反过来，可以验证如此定义的映射满足定理的条件。接下来，μ的连续性可由 $\mathrm{Spec}\, C^*_{q,r}(G)$ 和 $\mathrm{Spec}\, C^*(G_0^\star)$ 上 Jacobson 拓扑的以下显式描述得出。

$\mathrm{Spec} C^*_{q,r}(G)$ 的拓扑由推论 1.8 经由同构 $\pi_{q,1}$ 给出：离散系列的类比对象是孤立点；偶主系列的类比对象构成一个与 $\mathbb{U}_+$同胚的连通分支；而奇主系列的不可约类比对象构成一个开半圆，表示 $D^\pm(\sigma,0)$ 根据 σ 粘接在其两端。类似地，由于 $\mathrm{Res}^{S^c_{q,0}} \circ \pi_{q,0} : C^*(G_0^\star) \to \mathfrak{K}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})_{|S^c_{q,0}}$ 是一个同构，见（16）和命题 3.12，我们可由推论 1.8 得出 $\mathrm{Spec}\, C^*(G_0^\star)$ 的显式描述。□

备注 4.3。可以将 $C^*(K)$视为由投影 e_n生成的 $C^*(G_0^\star)$的子代数，其中 n 遍历 $\mathbb{Z}$；因此，它可以通过 α_0嵌入到$C^*_{q,r}(G)$中。这样，$C^*(G_0^\star)$或$C^*_{q,r}(G)$的表示就可以限制到$C^*(K)$。我们通过 $n \mapsto \zeta_n$将 $K = \mathrm{SO}(2)$的酉对偶与 $\mathbb{Z}$ 等同。对于 $C^*(G_0^\star)$或$C^*_{q,r}(G)$的任意表示 ω 以及任意 $n \in \mathbb{Z}$，若将后者限制为 K 的表示后，其包含 n 作为子表示，则称 n 为 ω 的一个 K-型。如果这种 K-型在 ω的所有 K-型中绝对值最小，我们就称其为极小型。容易检验，上文定义的麦基双射与经典情形一样，保持极小 K-型的集合不变。

4.2. **Connes-Kasparov 同构的一个类比对象**。 最后，我们证明 C*-代数$C^*_{q,\ r}(G)$和 $C^*(G_0^\star)$具有相同的 K-理论。

由于场 $C^*_{q,\ r}(\mathbf{G})_{|[0,1]}$ 在 0 以外处处平凡，在 $\tau=0$ 处的求值会在 K-理论中诱导一个同构

$$\mathrm{K}(\mathrm{ev}_{\tau=0}):\mathrm{K}_*(C^*_{q,r}(\mathbf{G})_{|[0,1]})\longrightarrow \mathrm{K}_*(C^*(G_0^\star)).$$

于是自然会产生这样一个问题：映射 $\mathrm{K}(\mathrm{ev}_{\tau=1})\circ\mathrm{K}(\mathrm{ev}_{\tau=0})^{-1}$ 是否是从 $\mathrm{K}_*(C^*(G_0^\star))$ 到 $\mathrm{K}_*(C^*_{q,\ r}(G))$ 的同构。事实上，在 $q=1$ 处进行相同的操作会得到 Connes-Kasparov 同构 $\mathrm{K}_*(C^*(G_0))\to \mathrm{K}_*(C^*_r(G))$，见 [7, p.263]。

可以用嵌入 α_0 来重新表述这个猜想。考虑由下式定义的 C*-代数态射 $\sigma:\ C^*(G_0^\star)\to C^*_{q,\ r}(\mathbf{G})_{|[0,1]}$：

$$\sigma(x)_t=\begin{cases}\alpha_t^{-1}(\alpha_0(x)) & \text{if } t\neq 0\\ x & \text{otherwise}\end{cases},\qquad (x\in C^*(G_0^\star),t\in[0,1]).$$

它是 $\mathrm{ev}_{\tau=0}$ 的一个截面，并且我们有 $\mathrm{ev}_{\tau=1}\circ\sigma=\alpha_0$。由此可知，K-理论中由 α_0 诱导的映射 $\mathrm{K}(\alpha_0)$ 恰好等于 $\mathrm{K}(\mathrm{ev}_{\tau=1})\circ\mathrm{K}(\mathrm{ev}_{\tau=0})^{-1}$。

定理 4.4。 映射 $\mathrm{K}(\alpha_0):\mathrm{K}_*(C^*(G_0^\star))\ \to\mathrm{K}_*(C^*_{q,r}(G))$ 是阿贝尔群之间的一个同构。

证明与 Higson 在 [19, §7], 中的证明相同；该证明也见于 [1, 26]。

证明。 我们考虑由 $\mathbb{Z}$ 中的子集构成的序列 $(W_m)_{m\in\mathbb{N}}$，其定义如下：

$$W_m=\begin{cases}\{0\} & \text{if } m=1\\ \{-1,1\} & \text{if } m=2\\ \{l\} & \text{if } m=2l+1,\ l\geq 1\\ \{-l\} & \text{if } m=2l+2,\ l\geq 1.\end{cases}$$

这是C^*_q不可约表示的最小 K-类型的所有可能集合的列表，$_r(G)$ 和 $C^*(G_0^\star)$。若 x 是这些代数之一的元素，我们用 (x) 表示由 x生成的理想。我们分别引入 $C^*_{q,\ r}(G)$ 和 $C^*(G_0^\star)$ 的以下理想序列：

$$\mathscr{J}_m=\bigcap_{n\in W_m}(e_{q,n}),\qquad J_m=\bigcap_{n\in W_m}(e_n).$$

我们记 $\mathscr{Q}_m=(\sum_{l\leq m}\mathscr{J}_l)/(\sum_{l<m}\mathscr{J}_l)$ 和 $Q_m=(\sum_{l\leq m}J_l)/(\sum_{l<m}J_l)$。由于$\alpha_0$ 将 e_n 映射到 $e_{q,\ n}$ 对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 均成立，因此对每个 $m\in\mathbb{N}$，都有 $\alpha_0(J_m)\subset\mathscr{J}_m$。于是$\alpha_0$ 诱导出一个 C*-代数态射 $\alpha_{0,\ m}$：对所有 $m\in\mathbb{N}$均成立。

$C^*(K)$ 在 $C^*_{q,\ r}(G)$ 和 $C^*(G_0^\star)$ 中的像，在两种情况下都生成一个稠密理想。因此，$\sum_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{J}_m$ 和 $\sum_{m\in\mathbb{N}}J_m$ 分别在 $C^*_{q,\ r}(G)$ 和 $C^*(G_0^\star)$ 中稠密。由于 K-理论与归纳极限可交换，只要 α_0 对所有 $m\in\mathbb{N}$均诱导出同构 $\mathrm{K}_*(\sum_{l\leq m}J_l)\ \to\mathrm{K}_*(\sum_{l\leq m}\mathscr{J}_l)$，定理便得证。接下来，利用六项正合列的函子性进行标准的归纳论证，可将此问题归结为证明：对所有 $m\in\mathbb{N}$，$\alpha_{0,\ m}$ 在 K-理论中诱导出同构。

固定 $m\in\mathbb{N}$。 $\mathscr{Q}_m$ 的谱由 $C^*_{q,\ r}(G)$ 的不可约表示的等价类组成，这些表示的最小 K-类型集合恰好为 W_m。因此，对于任意 $n\in W_m$，元素 $e_{q,\ n}$ 在$\mathscr{Q}_m$ 的每个不可约表示上都作为秩一投影作用。利用 [19, 引理 6.1], ，我们推得$e_{q,\ n}\mathscr{Q}_m e_{q,\ n}$ 是

与 $\mathscr{Q}_m$Morita 等价。用同样的论证，C*-代数 $e_nQ_me_n$ 与 Q_mMorita 等价。现在，根据 α_0 的构造方式，可以验证$\alpha_{0,\ m}(e_nQ_me_n) = e_{q,\ n}\mathscr{Q}_me_{q,\ n}$。总而言之，图中的三条底部箭头

$$\begin{tikzcd} Q_m \arrow[r, "\alpha_{0,m}"] & \mathscr{Q}_m \\ e_nQ_me_n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\alpha_{0,m}", "\sim"'] & e_{q,n}\mathscr{Q}_me_{q,n} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

在 K-理论中诱导同构。因此，$\mathrm{K}(\alpha_{0,m}) : \mathrm{K}_*(Q_m) \to \mathrm{K}_*(\mathscr{Q}_m)$ 是一个同构，定理得证。□

注 4.5. 可以用标准方法直接计算 $C^*_{q,r}(G)$ 的 K-理论。每个表示 $D^{\pm}(\sigma, n)$ 都对应于 K_0 群的一个生成元。另一方面，奇主级数和偶主级数的类比对象分别对应 $\mathrm{K}_0[C^*_{q,r}(G)]$ 中的附加项 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}^3$。因此我们有

$$\mathrm{K}_0[C^*_{q,r}(G)] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^3 \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \sigma=\pm 1}} \mathbb{Z} \Big).$$

群 $\mathrm{K}_1[C^*_{q,r}(G)]$ 为零。

References

[1] A. Afgoustidis, *On the analogy between real reductive groups and Cartan motion groups: A proof of the Connes-Kasparov isomorphism*, 《Journal of Functional Analysis》277，第7期（2019年），2237–2258。[2] , *On the analogy between real reductive groups and Cartan motion groups: Contraction of irreducible tempered representations*, 《Duke Mathematical Journal》169，第5期（2020年），897—960。[3] , *On the analogy between real reductive groups and Cartan motion groups: The Mackey-Higson bijection* **9, 3** 2021 551 575 ,

《Cambridge Journal of Mathematics》第（ ）期，–。[4] A. Afgoustidis 和 A. Aubert, *Continuity of the Mackey-Higson bijection*, 《Pacific Journal of Mathematics》310，第2期（2021年），257-273。[5] Y. Arano, *Comparison of Unitary Duals of Drinfeld Doubles and Complex Semisimple Lie Groups* **351** 2017 1137 1147 , 《

Communications in Mathematical Physics》（ ），–。[6] M. W. Baldoni, *General representation theory of real reductive Lie groups*, 《Representation theory and automorphic forms》（爱丁堡，1996年），《Proc. Sympos. Pure Math.》，第61卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1997年，第61–72页。[7] P. Baum、A. Connes 和 N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C*-algebras* 1943 1993 1993 , 《C*-代数：–》

（圣安东尼奥，德克萨斯州，），《当代数学》，第167卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1994年，第240–291页。[8] P. Clare、T. Crisp 和 N. Higson, *Parabolic induction and restriction via C*algebras and Hilbert C*-modules* **152** 2016 1286 1318 , 《

Compositio Mathematica》（ ），–。[9] P. Clare、N. Higson 和 A. Roman, *A Mackey embedding for reduced C*-algebras of real reductive groups* 2508 02504 2025 , 预印本，

arXiv：。（ ）。[10] M. Cowling、U. Haagerup 和 R. Howe, *Almost L^2 matrix coefficients*, 《Journal für die reine und angewandte Mathematik》387（1988年），97–110。¨K. De Commer, [11] , 《Archivum Mathematicum》060，第5期（2024年），285–310。*Quantisation of semisimple real Lie groups*, [12] , *Induction for representations of coideal doubles*SL(2, *with an application to quantum*)，预印本，arXiv:2409.18551（2024年）。ℝK. De Commer 和 J. R. Dzokou Talla, [13] SL(2, *Quantum*) ℝ, 《Journal of Operator Theory》91，第2期（2024年），443–470。*and its irreducible representations*, [14] , 《International Mathematics Research Notices》2024年，第14期（2024年），10650—10677。

[15] C. Debord 和 G. Skandalis, *Adiabatic groupoid crossed product by $\mathbb{R}_0^*$ and pseudodifferential calculus*, 《数学进展丛书》（），–。[16] , *Blow-up constructions for Lie groupoids and a Boutet de Monvel type calculus*, 《Münster Journal of Mathematics》14（2021年），1–40。¨J. Dixmier, [17] , 《北荷兰数学文库》，第15卷，爱思唯尔，1977年。 *C*-algebras*Y. Gaudillot–Estrada, [18] SL(2, *A non-unitary approach to q-deformed*)（2025年）。 ℝN. Higson, [19] , 《群表示、遍历理论与数学物理：致敬 George W. Mackey》，《当代数学》，第449卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2008年，第149–172页。 *The Mackey analogy and K-theory*N. Higson 和 N. Roman, [20] , 《Representation Theory》（），. *The Mackey bijection for complex reductive groups and continuous fields of reduced group C*-algebras* **24** 2020 580 602 J. C. Jantzen, [21] , 《数学研究生教材》，第6卷，美国数学学会，1996年。 *Lectures on Quantum Groups* A. Klimyk 和 K. Schm[22] udgen, ¨, 《理论与数理物理》，施普林格柏林，海德堡，1997年。 *Quantum Groups and Their Representations*A. Knapp 和 D. Vogan, [23] , 《普林斯顿数学丛书》，第45卷，普林斯顿大学出版社，1995年。 *Cohomological Induction and Unitary Representations*G. Letzter, [24] , 《代数杂志》220，第2期（1999年），729–767。 *Symmetric Pairs for Quantized Enveloping Algebras*G. W. Mackey, [25] , 《李群及其表示》（博尧伊·亚诺什数学学会暑期学校，布达佩斯，1971年），Halsted，纽约，1975年，第339–363页。 *On the analogy between semisimple Lie groups and certain related semidirect product groups* ´ A. Monk 和 C. Voigt, [26] , 《美国数学会汇刊》（），–。 *Complex quantum groups and a deformation of the Baum–Connes assembly map* **371** 2019 8849 8877 Renault, [27] , 施普林格柏林，海德堡，1980年。 *A Groupoid Approach to C*-Algebras*D. Jr. Vogan, [28] , 《数学进展丛书》，第15卷，Birkhäuser，马萨诸塞州波士顿，1981年。 *Representations of Real Reductive Lie Groups*C. Voigt 和 R. Yuncken, ¨, 《数学讲义》，第2264卷，施普林格查姆，2020年。[29] N. Wallach, *Complex Semisimple Quantum Groups and Representation Theory*，学术出版社，1988年。[30] G. Warner, *Real reductive groups I*，《数学科学基础丛书》，第1880卷，施普林格柏林，海德堡，1972年。[31] D. P. Williams, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*，《数学调查与专著》，第134卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2007年。[32]： *Crossed products of C*-algebras*