arXiv:2602.23322v1 [math.MG] 26 Feb 2026

不可定向流形与带边界流形的度量基本类

DENIS MARTI

Abstract. 我们为同胚于紧致不可定向光滑流形（其边界可以为空）的度量空间引入度量基本类。它是一个整数可求长流，为该空间的拓扑基本类提供解析表示。在某些较弱的几何条件下，我们证明了此类流的存在，从而推广了此前与 Basso 和 Wenger 合作得到的可定向闭流形结果。作为应用，我们给出新的可整流性结果。

1. 引言 Introduction

在此前与 Basso 和 Wenger 合作的一项研究中，作者证明，在某些几何条件下，同胚于闭可定向光滑流形的度量空间存在一个非平凡的积分循环（按 Ambrosio–Kirchheim 的定义） [3]。这个积分循环是光滑流形拓扑基本类的度量类比，称为该流形的度量基本类。

定义1.1。 设 X 是一个具有有限 *Hausdorff* n-测度且同胚于某个闭、定向黎曼 n-流形 M的度量空间。 X 的度量基本类是一个整流 $T \in \mathbf{I}_n(X)$ ，满足 $\partial T = 0$ ，并且：

(a) 对每个利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$，都有 $\varphi_\# T = \deg(\varphi) \cdot [\![M]\!]$；*(b)* 存在 $C > 0$，使得 $\|T\| \le C \cdot \mathcal{H}^n$。

这里， M 赋予任意黎曼度量，而 $[\![M]\!]$ 表示通过对微分 n-形式积分得到的基本类， $\|T\|$ 表示T的质量测度。通俗地说，条件 (a) 和 (b) 分别确保 T 与 X的拓扑结构和度量结构相容。我们注意到，度量基本类一旦存在便是唯一的，并且通过整流生成第 n 维同调群；参见 [5, 命题 5.5]。同胚于光滑流形的度量空间称为度量流形。这类空间及其几何性质与解析性质之间的关系在度量几何中发挥着核心作用；例如参见 [11, 12, 24, 41, 46]。由此来看，度量基本类为研究度量流形提供了有力工具。例如，Semmes 的一项深刻定理 [46] 保证了：对于同胚于某个闭、定向光滑流形的 Ahlfors 正则且线性局部可缩的度量空间，庞加莱不等式成立。在 [5], 中，作者利用度量基本类给出了这一结果的新证明；更多应用另见 [5, 22, 25, 40] 。

本文旨在将这些思想和结果推广到不可定向流形和带边界流形。在不可定向情形下，每个顶维积分流必然具有非零边界，因此度的概念并未定义。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 53C23；次分类号 49Q15、28A75。
Key words and phrases. 度量几何、度量流形、整流、长田维数、度理论。D.M. 获得瑞士国家科学基金会 212867 号资助。

因此，我们调整了度量基本类的定义。我们要求该流按照 [2, 4]中的定义模2无边界。此外，在定义1.1(a)中，我们使用通过系数取 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的奇异同调所定义的度。更确切地说，整数可求长流 T模 $\partial T = 0$ 满足条件，当且仅当 $\mathcal{F}_2(\partial T) = 0$。这里， $\mathcal{F}_2(\partial T)$表示 ∂T的模2平坦范数。该距离定义为以下表达式的下确界：$\mathbf{M}(U) + \mathbf{M}(V)$；其中， U 和 V 分别是维数为 $n-1$ 和 n的整数可求长流，并且满足 $\partial T = U + \partial V + 2Q$ ，其中某个平坦流为 Q。关于模2平坦流的详细概述，请参见第3.4节。此外，系数取任意赋范阿贝尔群 [15]的平坦链理论也已发展得相当完善，它将 [51] 中讨论的平坦链推广到了度量空间。该理论也为不可定向流形的度量基本类提供了一个自然的定义框架。尽管如此，我们还是选择采用Ambrosio–Kirchheim流，因为它们与 [5] 中关于可定向流形的结果有直接联系。

1.1. 主要结果陈述。 若度量空间 X 与紧致光滑 n流形 M同胚，则称其为度量 n 流形。根据 X 是否具有相应性质，我们称其为可定向、不可定向或闭。若 M 具有非空边界 ∂M，则记 ∂X 为 ∂M 在从 X 到 M的同胚映射下的像。本文所讨论的所有流形均假设为连通的。我们用 $\mathcal{I}_n(X)$ 表示 X中整数可求长流的空间；相关定义见第3节。

第一个结果证明了线性局部可缩的可定向度量流形上度量基本类的存在性，并将 [5, 定理 11]推广到带边界流形。若存在 $\lambda > 0$ ，使得每个半径为 $0 < r < \operatorname{diam} X/\lambda$ 的球都能在具有相同中心、半径为 λr 的球内可缩，则称该度量空间是线性局部可缩的。这一性质常见于度量几何的各种情境中；例如参见 [11, 12, 20, 21, 30, 47]。

定理 1.2. 设 X 是一个紧致、可定向的度量 n-流形，具有有限的豪斯多夫 n-测度以及（可能为空的）边界。假设 X 是线性局部可缩的，且 $\mathcal{H}^n(\partial X) = 0$。则 X 具有度量基本类 $T \in \mathcal{I}_n(X)$，满足

$$C^{-1}\mathcal{H}^n \le \|T\| \le C\mathcal{H}^n, \tag{1.1}$$

并且每当 $S \in \mathbf{I}_n(X)$ 满足支撑集$(\partial S) \subset \partial X$时，则存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得$S = k \cdot T$。

这里， C 仅依赖于 n。若 X 是闭的，则 T 如定义1.1所述，且第二条性质对所有满足 $\partial S = 0$的 $S \in \mathbf{I}_n(X)$成立。度量流形 X 中具有非空边界的整数可求长流$T \in \mathcal{I}_n(X)$称为 X 的度量基本类，如果 T 满足定义1.1(b)，并且对每一个满足 $\varphi(\partial X) \subset \partial(M)$的利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$满足定义1.1(a)。

接下来，我们考虑不可定向流形。如前所述，度量基本类的定义需要针对这类流形进行调整。

定义1.3。 设 X 是一个有限 *Hausdorff* n-测度的度量空间，且与一个闭的、不可定向的光滑 n流形 M同胚。X 模 2 的度量基本类是一个整数可求长流 $T \in \mathcal{I}_n(X)$ ，满足 $\partial T = 0$ 模 2 ，使得

$$\varphi_{\#}T = \deg(\varphi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cdot [\![M]\!] \text{ for every Lipschitz map } \varphi\colon X \to M. \tag{1.2}$$

如果 X 有边界，那么式 (1.2) 仅对满足 $\varphi(\partial X) \subset \partial M$ 的利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$ 成立。流形 M 可以赋予任意黎曼度量，而 $[\![M]\!]$ 表示相应的模 2 基本类。与可定向情形不同，我们不要求第二个性质，因为我们总有 $\|T\|_2 \le$

$C\mathcal{H}^n$，其中 C 仅取决于 n。度 $\deg(\varphi,\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是根据系数为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的奇异同调群定义的，并根据其是否为平凡群，解释为 0 或 1。

下一个结果是定理 1.2 在不可定向流形情形下的对应版本。

定理 1.4. 设 X 是一个紧致、不可定向的度量 n-流形，具有有限的 *Hausdorff* n-测度和（可能为空的）边界。假设 X 是线性局部可缩的，且 $\mathcal{H}^n(\partial X) = 0$。那么， X 具有模2 的度量基本类$T \in \mathcal{I}_n(X)$ ，满足

$$C^{-1}\mathcal{H}^n \le \|T\|_2 = \|T\| \le C\mathcal{H}^n, \tag{1.3}$$

并且每当 $S \in \mathbf{I}_n(X)$ 满足支撑集$_2(\partial S) \subset \partial X$时，则 $S = k \cdot T$ 模 2 ，其中 k等于1 或0。

这里， C仅取决于 n，而 $\|T\|_2$是 T的2-质量测度。积分流 $S \in \mathbf{I}_n(X)$的2-支撑集 $\operatorname{spt}_2 S$ 定义为其2-质量测度 $\|S\|_2$的支撑。如果 X 是闭的，那么对于所有满足 $\partial S = 0$ 模 2 的 $S \in \mathcal{I}_n(X)$，唯一性性质均成立。

我们指出，证明定理 1.2 和定理 1.4 时，我们采用了较弱版本的线性局部可缩性，正如上文所述的标准定义。具体而言，对于几乎处处线性局部可缩的度量流形，这两个结果（以及下文的推论）均成立；参见第 4 节。顾名思义，这可以看作标准定义的一个测度论版本。由此我们得到以下推论。

推论 1.5. 设 X 是一个紧致度量 n-流形，具有有限的豪斯多夫 n 测度和（可能为空的）边界。假设 X 线性局部可缩，并满足 $\mathcal{H}^n(\partial X) = 0$。那么 X 是 n-可整流的。

这推广了 [5] 中的可整流性结果，并且是定理 1.2 和定理 1.4 中基本类质量测度界的直接推论。对于不可定向流形，即使空间不是线性局部可缩的，我们也能证明模 2 度量基本类的存在性。

定理 1.6。 设 X 是一个紧致、不可定向的度量 n-流形，具有有限的豪斯多夫 n-测度和（可能为空的）边界。假设 X 的长田维数有限，且 $\mathcal{H}^n(\partial X) = 0$。那么， X 具有一个模 2 的度量基本类$T \in \mathcal{I}_n(X)$ ，满足 $\|T\|_2 = \|T\| \le C\mathcal{H}^n$ ；并且每当 $S \in \mathbf{I}_n(X)$满足 支撑集$_2(\partial S) \subset \partial X$时，对于取值为 1 或 0的 k ，都有 $S = k \cdot T$ 模 2 。

这里， C 仅取决于 n。我们注意到，具有有限长田维数的度量流形不一定是可整流的。事实上，由 [48, 定理 A.1]可知，存在一个具有有限豪斯多夫 2-测度的测地度量空间 Y，它与 2-球面同胚，但不是 2-可整流的。由 [27] 可知，任何测地度量曲面，尤其是 Y，其长田维数均为 2。因此，一般而言，前述结果中的整数可求长流无法满足形如 (1.3) 的下界。最后，对于度量 2-流形（称为度量曲面），我们不要求任何条件。

定理 1.7. 设 X 是一个紧致的不可定向度量曲面，具有有限的豪斯多夫2测度和（可能为空的）边界。假设 $\mathcal{H}^2(\partial X) = 0$。那么，$X$ 具有一个模2 的度量基本类 $T \in \mathcal{I}_2(X)$ ，满足 $\|T\|_2 \le 2\mathcal{H}^2$ ；并且，只要 $S \in \mathbf{I}_2(X)$ 满足支撑集$_2(\partial S) \subset \partial X$，则对于 k 等于1 或0的情形， $S = k \cdot T$ 模 2 。

对于闭可定向曲面，这一结果早已为人所知 [5, 定理 1.3]。

我们定义子集 $E \subset X$ 相对于开子集 $U \subset X$ 的（下）闵可夫斯基容度 为

$$\mathscr{M}_-(E \mid U) = \liminf_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(E_r \cap U) - \mathcal{H}^n(E \cap U)}{r},$$

其中 $E_r = \{x \in X : \ d(x, \ E) \ < r\}$ 表示 E 在 X中的开 r-邻域。对于开球 $B = B(x, r)$以及 $\lambda > 0$，我们用 λB 表示与 $B(x, \ \lambda r)$具有相同中心 x 和半径 λr的开球。

定理 1.8. 设 X 是一个维数为$n \geq 2$的闭不可定向度量流形。假设 X 是线性局部可缩的，且为阿尔福斯 n-正则的。那么存在 C、 $\lambda \geq 1$ 使得

$$\min\big\{\mathcal{H}^n\big(E \cap B\big), \mathcal{H}^n\big(B \setminus E\big)\big\} \leq C \cdot \mathscr{M}_-\big(E \mid \lambda B\big)^{\frac{n}{n-1}} \tag{1.4}$$

对于每个博雷尔子集 $E \subset X$ 和每个开球 $B \subset X$，均成立。

这里，常数 C 和 λ 仅取决于 X的数据。不等式 (1.4) 称为相对等周不等式，并且与庞加莱不等式密切相关。特别地，由此可知，定理 1.8 中的度量流形也满足弱 1-庞加莱不等式；参见 [10, 29, 31]。

1.2. **文章结构**。 在第 2 节中，我们介绍全文所需的记号和基本结果。我们在第3节回顾度量流的理论，并详细概述模 p 的平坦流。在该节中，我们还证明了这类流的紧致性和可求长性结果。

我们在第 4 节提出线性局部可缩性的一个新的测度论版本，并称之为几乎处处线性局部可缩性。此外，我们解释度量流形的可定向双覆盖的构造，以及如何沿着边界粘合两个流形副本。对于这两种空间，我们都利用原流形的度量构造度量。提出线性局部可缩性这一新版本的主要动机，是它与这些构造相容。事实上，如果 X 是线性局部可缩的，那么沿边界粘合两个副本得到的流形 X 不一定是线性局部可缩的。然而，如果 X 的边界的 Hausdorff n-测度为零，那么 X 将几乎处处线性局部可缩。最后，我们讨论如何以受控的方式将从欧几里得空间到度量流形的双利普希茨映射延拓出去。利用这些技巧，我们证明，在几乎处处线性局部可缩的度量流形中，利普希茨映射的度具有良好的性质。类似结果已在 [5] 中得到。

在第 5 节中，我们证明几乎处处线性局部可缩的可定向流形存在度量基本类。我们首先只考虑闭流形。此时，论证与 [5,定理1.1]的证明非常相似。事实上，利用线性局部可缩性，我们可以为流形的可整流部分配备一个与拓扑流形相容的定向。这一“度量定向”诱导出一个整数可求长流 T ，它满足(1.1)中的上测度界。由Bate的一个深刻定理、定理2.3以及度理论可知， T 是一个闭链，并且定义1.1(a)成立。带边界流形的结果可以借助第 4 节中的构造轻易归结为闭的情形。

不同存在性结果中关于模 2 度量基本类的证明均见第 6 节。我们首先讨论流形 X 为闭流形且几乎处处线性局部可缩的情形。根据构造，可定向˜双覆盖 X 是可定向的，并且与原流形局部等距。因此

˜， X 也几乎处处线性局部可缩，因而˜具有度量基本类 T。我们在 X 中构造一个积分流 T，它由T 得到，并满足测度界（1.3）。为证明 T 是模 2 闭链且满足（1.2），我们使用度理论以及第 4 节中引入的技巧。对于 X 为闭流形且具有有限长田维数的情形，我们用单纯复形近似 X。这是长田维数研究中常用的一种构造；例如参见 [6, 34, 40]。更确切地说，存在一个单纯复形Σ，其豪斯多夫测度有界，并存在利普希茨映射 $\varphi\colon X \to \Sigma$ 和 $\psi\colon \Sigma \to E(X)$。此外，复合映射 $(\psi \circ \varphi)\colon X \to E(X)$ 与 X 到其内射包 $E(X)$ 的包含映射任意接近。空间 $E(X)$ 具有与 l^∞ 相似的性质，但它是紧致的；见第2.1节。然后，我们用利普希茨映射近似复合映射 $(\varphi \circ \varrho)$，其中 ϱ 表示从光滑流形M 到 X 的同胚。利用这一近似，我们可以将 M 的模 2 基本类前推到 Σ 中。这样，我们构造出一列 2-质量一致有界的模 2 整循环。由第 3 节建立的模2平坦流紧致性与可求长性定理可知，X 具有模 2 度量基本类。对于不可定向的闭度量曲面 X，我们使用近期的一项一致化结果 [43]。该结果表明，存在一个从光滑曲面到 X 的弱保角映射。我们可以用面积有界的利普希茨映射近似此映射。与前面一样，我们可以利用推前论证，在 X 中找到一个模 2 度量基本类。最后，我们通过将证明归结为相应的闭流形情形，证明带边界的不可定向流形的度量基本类存在。

2. Preliminaries

2.1. 度量概念。 设 (X, d) 是一个度量空间。给定 $x \in X$ 和 $r > 0$，我们用 $B(x, r)$ 表示以 $x \in X$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的开球。两个子集 A 和 B 之间的下确界距离定义为

$$d(A, B) = \inf\big\{d(a, b) : a \in A \text{ and } b \in B\big\}.$$

给定 $A \subset X$ 和 $r > 0$，我们用 r 表示 A 的开 r-邻域

$$N_r^X(A) = \{x \in X \colon d(A, x) < r\}.$$

如果上下文已清楚表明环境空间 X，我们就简写为 $N_r(A)$。若映射 $f\colon X \to Y$ 在度量空间之间是 L-利普希茨的，即对所有 x、$y \in X$ 都有 $d(f(x)\ f(y)) \le Ld(x, y)$，则称其为利普希茨映射。满足该不等式的最小常数称为 f 的利普希茨常数，记作 $\mathrm{Lip}(f)$。如果 f 是单射，且其逆映射 f^{-1} 也是利普希茨的，则称 f 是双利普希茨的。我们用 $\mathrm{LIP}(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的所有利普希茨映射组成的集合。如果 $Y = \mathbb{R}$，则简写 $\mathrm{LIP}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{LIP}(X)$。两个映射 f、$g\colon X \to Y$ 之间的一致距离定义为

$$d(f, g) = \sup\big\{d(f(x), g(x)) : x \in X\big\}.$$

下述结果容易验证；例如参见 [5, 引理 2.1]。

引理 2.1. 设 $f\colon X \to Y$ 是从紧度量空间X 到可分度量空间 Y 的连续映射，且后者是绝对利普希茨邻域收缩。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个利普希茨映射 $g\colon X \to Y$，使得 $d(f, g) < \varepsilon$。

这里，若存在 $C > 0$使得下列条件成立，则称 Y为绝对利普希茨邻域收缩。每当 Y 是另一度量空间 Z的子集时，便存在 Z 中 Y 的开邻域 U 以及一个 C-Lipschitz收缩$\pi\colon U \to Y$。注意，每个闭黎曼 n-流形都是绝对利普希茨邻域收缩；参见例如 [26, 定理3.1]。我们还需要下述关于Lipschitz 邻域收缩的结果。

引理 2.2. 设 Y 是一个作为绝对利普希茨邻域收缩的紧度量空间。则存在 $C > 0$ 与 $\varepsilon > 0$ 具有如下性质。若f、 g: $X \to Y$是从紧度量空间 X到 Y的利普希茨映射，且满足$d(f, g) < \varepsilon$，则存在 f与 g之间的利普希茨同伦 H: $[0,1] \times X \to Y$，使得对每个 $x \in X$以及每个 $t \in [0,1]$都有 $d(H(t,x)\ f(x)) \leq Cd(f,g)$。

证明。我们嵌入 $Y \subset l^\infty$。由于 Y 是绝对利普希茨邻域收缩，存在一个 C-利普希茨收缩映射 π: $N_\varepsilon^{l^\infty}(Y) \to Y$，其中 $C > 0$ 和 $\varepsilon > 0$。令 h: $[0,1] \times X \to l^\infty$ 为 f 与 g之间的直线同伦。注意，对于每个 $x \in X$ 以及每个 $t \in [0,1]$， $h(t, x) \in N_\varepsilon(Y)$。因此， $H = \pi \circ h$ 定义良好并满足所需性质。□

最后，我们介绍内射度量空间和内射包。若一个度量空间X 满足以下条件，则称其为内射的：当 f: $A \to X$ 是 1-利普希茨的，且 A 是度量空间 B 的子集时，存在一个 1-利普希茨延拓f： $B \to X$，使其延拓 f。内射度量空间的重要例子是 $\mathbb{R}$ 和 l^∞。此外，对于每个度量空间 X，都存在一个最小的内射度量空间，称为 X 的内射包 $E(X)$，使得 X 可以等距嵌入到 $E(X)$ 中。这里，最小意味着：任何将 $X \to Y$ 等距嵌入内射空间 Y 的等距嵌入，都允许一个等距延拓 $E(X) \to Y$。如果 X 是紧致的，那么$E(X)$ 也是紧致的，并且可以实现为 l^∞的子集。更多信息请参见 [33] 。

2.2. 定向与度。我们回顾拓扑定向与度的基本定义和性质。有关该理论的详细论述，参见 [17]。设 X 是一个拓扑 n流形，无边界，但不一定紧致。注意，在本文中，所有流形都假设为连通。对于$x \in X$，我们用$H_n(X, X \setminus x)$表示系数为 $\mathbb{Z}$ 的第 n个局部奇异同调群。由切除定理可知， $H_n(X, X \setminus x)$是无限循环群。 o_x 处的局部定向是 $H_n(X, X \setminus x)$的一个生成元。此外， X 的定向是为每个 $x \in X$ 选择一个局部定向 o_x ，并且这些局部定向满足某种连续性条件。若定向存在，则称 X 为可定向流形，而带有定向的 X 称为定向流形。由此可知，若 X 是一个定向流形，则对于每个连通紧子集 $K \subset X$ ，群$H_n(X, X \setminus K)$都是无限循环群。此外，存在一个生成元 $o_K \in H_n(X, X \setminus K)$，使得对于每个 $x \in K$，由包含映射诱导的同态 $H_n(X, X \setminus K)$到 $H_n(X, X \setminus x)$将 o_K 映为 o_x。对于紧致定向 n流形 X ，我们称 o_X 为 X 的基本类，并记作 $[X]$。现在，设 f: $X \to Y$是两个无边界定向 n流形之间的连续映射。假设$K \subset Y$是一个紧致连通子集，且 $f^{-1}(K)$也是紧致的。则f_*: $H_n(X, X \setminus f^{-1}(K)) \to H_n(Y, Y \setminus K)$是定义良好的同态，并将$o_{f^{-1}(K)}$映为 o_K的一个整数倍。这个整数记作 $\deg_K(f)$，称为 f 在 K上的度。若 X 是紧致的，则对于每个紧致连通子集 $K \subset X$，$\deg_K(f)$都是同一个数，我们将其记作 $\deg(f)$。我们称 $\deg(f)$为 f的度。它是一个同伦不变量。更准确地说，若 g: $X \to Y$是另一个与 f 同伦的连续映射，则 $\deg(f) = \deg(g)$。若 Y也紧致，则度由下列等式刻画：$f_*[X] = \deg(f) \cdot [Y]$。接下来，我们定义局部度。设 $x \in X$ ，并设 $U \subset X$ 是 x 的一个开邻域。由切除定理，同态 $H_n(U, U \setminus x) \to H_n(X, X \setminus x)$是一个同构。若 $V \subset Y$是 $f(x)$的一个开邻域，满足 $f(U) \subset V$，且对所有 $y \in U \setminus x$都有 $f(y) \neq f(x)$，则 f_*: $H_n(U, U \setminus x) \to H_n(V, V \setminus f(x))$是定义良好的。该同态将局部定向 o_x 映为局部定向$o_{f(x)}$的一个整数倍。我们称这个整数为 f 在 x 处的局部度，并记作 $\deg(f, x)$。注意，局部度不依赖于 U和 V。局部度满足下述重数性质；参见 [17, 第 8 章，推论

4.6]。若 $h\colon Y \to Z$ 是映入一个无边界定向拓扑 n流形 Z的连续映射，且局部度 $\deg(f,\ x)$ 和 $\deg(h,\ f(x))$ 均有定义，则

$$\deg(h \circ f, x) = \deg(h, f(x)) \cdot \deg(f, x).$$

度与局部度之间有如下关系。设 $y \in Y$ 是一点，使得 $f^{-1}(y)$ 为有限。则 f 在每个 $x \in f^{-1}(y)$ 处的局部度都是良定义的，并且我们有

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg(f, x).$$

我们将此性质称为度的可加性；见 [17, 第8章，命题4.7]。一个带边界 X 的拓扑 n-流形称为可定向的，如果其内部 $X \setminus \partial X$ 是可定向的。若 X 紧致且已定向，则 $H_n(X, \partial X)$ 是无限循环的，并且 X 的定向诱导出 $H_n(X, \partial X)$ 的一个生成元 $[X]$。我们再次称 $[X]$ 为 X 的基本类。设 $f\colon X \to Y$ 是两个紧致、已定向的带边界 n-流形之间的连续映射，且满足 $f(\partial X) \subset \partial Y$。则 f 的度 $\deg(f)$ 是唯一的整数，使得同态 $f_*\colon H_n(X, \partial X) \to H_n(Y, \partial Y)$ 满足 $f_*[X] = \deg(f) \cdot [Y]$。最后，我们指出，可以按与前面相同的方式，用系数取自 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 而非 $\mathbb{Z}$ 的奇异同调群来定义可定向性与度；见 [17, 第8章，定义4.1]。在此意义下，每个流形都是可定向的。此外，由此得到的度是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的一个元素，并满足与上文所述相类似的全部性质。

2.3. **可求长性**。 设 X 是一个完备度量空间。我们用 $\mathcal{H}^n$ 表示 X上的 n维豪斯多夫测度，并将其归一化，使得 $\mathcal{H}^n$ 等于 $\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度 $\mathcal{L}^n$ 。如果存在紧集 $K_i \subset \mathbb{R}^n$ 和双 Lipschitz 映射 $\varphi_i\colon K_i \to X$，使得.....，则称 $\mathcal{H}^n$可测子集 $E \subset X$ 是 n-可整流的

$$\mathcal{H}^n\left(E \setminus \bigcup_i \varphi_i(K_i)\right) = 0.$$

请注意，这一定义并非标准定义，但利用 [3, 引理4.1]，很容易证明这些定义是等价的。如果对于每个 n-可整流子集 $E \subset X$，都有 $\mathcal{H}^n(P \cap E) = 0$ ，则称 $\mathcal{H}^n$可测子集 $P \subset X$ 是纯 n-不可整流的 。我们需要以下由 Bate 提出的深刻结果。

定理2.3。 ([9, 定理1。2]) 设 X 是一个完备度量空间，且 $P \subset X$是纯 n-不可整流的，并且其豪斯多夫 n测度有限。那么，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，集合

$$\{f \in \mathrm{LIP}_1(X, \mathbb{R}^m)\colon \mathcal{H}^n(f(P)) = 0\}$$

是剩余的。

这里，$\mathrm{Lip}_1(X, \mathbb{R}^m)$表示所有利普希茨映射 $X \to \mathbb{R}^m$ （其利普希茨常数至多为1）所构成的空间。该定理最初在 [7] 中得到证明，并附加了如下假设： P 的下密度在几乎每一点处为正。然而，[9, 定理1.5]表明这一假设并非必要。下一个结果可以看作先前结果在欧几里得空间中的一个强逆命题。

定理 2.4. ([8, 定理 1.1]) 设 $E \subset \mathbb{R}^k$ 是 n-可整流的且 $m > n$。则集合

$$\{f \in \mathrm{LIP}_1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)\colon \mathcal{H}^n(f(E)) = \mathcal{H}^n(E)\}$$

是剩余的。

如果 X 是一个完备度量空间，那么赋予一致距离的 $\mathrm{LIP}_1(X, \mathbb{R}^m)$ 也是一个完备度量空间。在这种情况下，贝尔纲定理意味着 $\mathrm{LIP}_1(X, \mathbb{R}^m)$ 的每个剩余子集都是稠密的。

2.4. **长田维数**。 长田维数可以看作拓扑维数的一个定量版本，更适用于 Lipschitz 分析。近年来，它在度量空间的研究中日益受到关注，尤其是在 Lipschitz 延拓问题的背景下；例如参见 [6, 13, 34, 35]。

我们称度量空间 X 的覆盖具有至多 s 重数，如果每个直径小于 s 的 X 子集与该覆盖中的至多 N 个成员相交。

定义 2.5。如果存在 $c > 0$，使得对于每个 $s > 0$，都存在 X 的一个覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，其 s-重数至多为 $N+1$，且对于每个 $i \in I$，都有 直径 $U_i < cs$，则称度量空间的长田维数为 维数$_N X \leq N$。

长田维数总是至少等于空间 [36] 的拓扑维数，且至多等于其 Assouad 维数。特别地，每个倍增度量空间的长田维数都有限。

设 Σ 是一个有限单纯复形，并用 I 表示 Σ 的顶点集。那么，经过缩放后， Σ 可以实现为以下对象的子复形

$$\Sigma(I) = \left\{ x \in l^2(I) \colon x_i \geq 0 \text{ and } \sum_{i\in I} x_i = 1 \right\}.$$

l^2-度量定义在 Σ 上，是由 l^2-范数在 l^2（I）上诱导的度量，记作 $|\cdot|_{l^2}$。关于单纯复形的更多细节，请参阅 [6]。我们需要以下分解定理。该结果本质上是 [6, 命题 6.1] 与 Federer-Fleming 变形型定理的结合。

定理 2.6。 设 X 是一个具有有限豪斯多夫 n-测度和有限长田维数的紧度量空间。那么存在一个常数 $C > 0$，它仅取决于 X的数据，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个有限单纯复形Σ，配备 l^2-度量，以及利普希茨映射 $\varphi\colon\ X \to \Sigma$, $\psi\colon\ \Sigma \to E(X)$，满足以下性质

(1) ψ 在 Σ的每个单纯形上都是 C-利普希茨的；*(2)* $\mathcal{H}^n(\varphi(X)) \leq C\mathcal{H}^n(X)$;
(3) Σ 的维数为 $\leq n$，且 Σ 中的每个单纯形都是边长为 ε的欧几里得单纯形；
(4) 凸包$(\varphi(X)) = \Sigma$ 且 $d(x, \psi(\varphi(x))) \leq C\varepsilon$ 对所有 $x \in X$均成立。

这里，Hull(A)表示 A 在 Σ 中的凸包，并且是包含 A的 Σ的最小子复形。

证明。设 $\varepsilon > 0$。由于 $E(X)$ 是内射度量空间，由 [6,命题 6.1] 和一个简单的重新缩放论证可直接得出，存在一个维数为 $\leq \dim_N X$ 的有限单纯复形 Σ'，其中每个单纯形都是边长为 ε 的欧几里得单纯形；并且存在利普希茨映射 $\varphi'\colon\ X \to \Sigma', \psi\colon\ \Sigma' \to E(X)$, 使得 φ' 是 C-利普希茨的， ψ 在 Σ' 的每个单纯形上都是 C-利普希茨的，并且对每个 $x \in X$，都有 $d(x, \psi(\varphi'(x))) \leq C\varepsilon$。这里， Σ' 配备了 l^2-度量 $|\cdot|_{l^2}$，且 C 仅取决于 X 的数据。此外，由 [40, 命题 5.3] 可知，存在映射 $p\colon\ \Sigma' \to \Sigma'$，使得复合映射 $\varphi = p \circ \varphi'$ 是利普希茨映射，并满足以下性质：像 $\varphi(X)$ 包含于 Σ' 的 n-骨架中， φ 满足 (2)，并且对所有 $x \in X$，$\varphi(x)$ $\varphi'(x)$ 包含于同一个单纯形中。注意，该命题实际上证明了 (2) 的一个更强版本。现在，设 $x \in X$。那么，存在两个 n 维单纯形 Δ_1, $\Delta_2 \subset \Sigma'$，满足 $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$，并且使得 $\varphi'(x) \in \Delta_1$ 且 $\varphi(x) \in \Delta_2$。由引理 [40, 引理 2.3] 可知，存在满足以下条件的 $z \in \Delta_1 \cap \Delta_2$

$$|\varphi'(x) - z|_{l^2} + |z - \varphi(x)|_{l^2} \leq 4\sqrt{n}|\varphi'(x) - \varphi(x)|_{l^2}.$$

由于 Σ' 中的每个单纯形的边长均为 ε，且 ψ 在每个单纯形上都是 C-利普希茨的，我们得出

$$d(\psi(\varphi'(x)),\psi(\varphi(x))) \le d(\psi(\varphi'(x)),\psi(z)) + d(\psi(z),\psi(\varphi(x))) \le 8\sqrt{n}C\varepsilon.$$

因此，

$$d(x,\psi(\varphi(x))) \le d(x,\psi(\varphi'(x))) + d(\psi(\varphi'(x)),\psi(\varphi(x))) \le (1+8\sqrt{n})C\varepsilon,$$

对所有 $x \in X$。最后，对于每个其内部未被 φ 完全覆盖的 n-单纯形 $\Delta_i \subset \Sigma'$，我们选取一点 $z_i \in \operatorname{int}\Delta_i \setminus \varphi(X)$。我们将 φ 与每个以 z_i 为投影中心的 Δ_i 上的径向投影复合（仍将所得映射记为 φ）。复合映射仍是利普希茨映射，并且不会增大 $\mathcal{H}^n(\varphi(X))$，因为投影中心不在 φ 的像中。显然，$\operatorname{Hull}(\varphi(X))$ 等于 Σ' 的 n-骨架。使用 [40, 引理 2.3], ，按照上述相同论证可知，φ 仍满足 (4) 的第二部分。取 Σ 为 Σ' 的 n-骨架，即完成证明。□

3. Metric currents

3.1. 基本定义。 本节介绍度量流理论。更多细节请参阅 [3] 和 [32]。在本节中，设 X 为一个完备度量空间。对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{D}^k(X) = \operatorname{LIP}_b(X) \times \operatorname{LIP}(X)^k$，其中 $\operatorname{LIP}_b(X)$ 表示有界利普希茨函数 $X \to \mathbb{R}$ 的集合。

定义 3.1. 若多线性映射 $T\colon \mathcal{D}^k(X) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为度量 k-流（有限质量）：

(1)（连续性）若 π_i^j 逐点收敛于 π_i，对每个 $i = 1,\dots,k$ 均成立，且 $\operatorname{Lip}\pi_i^j < C$ 有某个统一常数 $C > 0$ 作为上界，则

$$T(f,\pi_1^j,\dots,\pi_k^j) \to T(f,\pi_1,\dots,\pi_k)$$

as $j \to \infty$;

(2)（局部性）若对某个 $i \in \{1,\dots,k\}$，函数 π_i 在 $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ 上为常数，则 $T(f,\pi_1,\dots,\pi_k) = 0$；

(3)（有限质量）存在 X 上的有限博雷尔测度 μ，使得

$$|T(f,\pi_1,\dots,\pi_k)| \le \prod_{i=1}^{k} \operatorname{Lip}(\pi_i) \int_X |f(x)|\, d\mu(x) \tag{3.1}$$

for all $(f,\pi_1,\dots,\pi_k) \in \mathcal{D}^k(X)$.

满足 (3.1) 的最小测度 μ 称为 T 的质量测度，记作 $\|T\|$。我们将 T 的支撑 定义为

$$\operatorname{spt} T = \big\{x \in X : \|T\|(B(x,r)) > 0 \text{ for all } r > 0\big\}.$$

我们用 $\mathbf{M}_k(X)$ 表示 X 上所有度量 k-流构成的向量空间。赋予质量范数 $\mathbf{M}(T) = \|T\|(X)$ 后，它是一个巴拿赫空间。给定一个博雷尔集 $B \subset X$，T 在 B 上的限制 定义为

$$(T \llcorner B)(f,\pi_1\dots,\pi_k) = T(\mathbb{1}_B \cdot f,\pi_1,\dots,\pi_k).$$

这是一个定义良好的度量 k-流，因为每个度量 k-流都可以唯一地延拓到 $L^1(\|T\|) \times \operatorname{LIP}^k(X)$。该限制满足 $\|T \llcorner B\| = \|T\| \llcorner B$。若一列度量 k-流 $T_i \in \mathbf{M}_k(X)$ 弱收敛到 $T \in \mathbf{M}_k(X)$，则称

$$\lim_{i\to\infty} T_i(f,\pi_1,\dots,\pi_k) = T(f,\pi_1,\dots,\pi_k)$$

对所有 $(f,\pi_1,\dots,\pi_k) \in \mathcal{D}^k(X)$，记作 $T_i \rightharpoonup T$。对于 $T \in \mathbf{M}_k(X)$，T 的边界是定义在 $\mathcal{D}^{k-1}(X)$ 上的多线性映射，给出如下：

$$\partial T(f,\pi_1,\dots,\pi_{k-1}) = T(1,f,\pi_1,\dots,\pi_{k-1})$$

对所有 $(f, \pi_1, \dots, \pi_{k-1}) \in \mathcal{D}^{k-1}(X)$。若 ∂T满足 (3.1)，则它是一个度量 $(k-1)$-流，我们称 T 为正规 k-流。 X中所有正规 k-流的集合记为 $\mathbf{N}_k(X)$，并定义正规质量为 $\mathbf{N}(T) = \mathbf{M}(T) + \mathbf{M}(\partial T)$。同样，配备正规质量的 $\mathbf{N}_k(X)$ 是一个巴拿赫空间。 $T \in \mathbf{M}_k(X)$ 在利普希茨映射 $\varphi\colon X \to Y$ 下的前推，是 Y 中的度量 k-流，定义如下：

$$\varphi_\# T(f, \pi_1, \dots, \pi_k) = T(f \circ \varphi, \pi_1 \circ \varphi, \dots, \pi_k \circ \varphi)$$

对所有 $(f, \pi_1, \dots, \pi_k) \in \mathcal{D}(Y)$。不难验证，前推满足以下性质：$(\varphi_\# T)\, B = \varphi_\#(T \llcorner \varphi^{-1}(B))$，$\varphi_\# T$的支撑集包含于 $\varphi(\operatorname{spt} T)$的闭包中，且$\mathbf{M}(\varphi_\# T) \le \operatorname{Lip}(\varphi)^k \mathbf{M}(T)$。

3.2. 整数可求长流与积分流。 在欧几里得空间中，每个度量流都可表示为关于某个 L^1 函数的积分，如下所示。对于 $\theta \in L^1(\mathbb{R}^k)$，度量 k-流 $[\![\theta]\!] \in \mathbf{M}_k(\mathbb{R}^k)$定义为

$$[\![\theta]\!](f, \pi_1, \dots, \pi_k) = \int_{\mathbb{R}^k} \theta f \det(D\pi)\, d\mathcal{L}^k$$

对所有 $(f, \pi) = (f, \pi_1, \dots, \pi_k) \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^k)$。请注意，这一关于$k$-流在 $\mathbb{R}^k$ 中的刻画是一个非常深刻的结果；参见 [16]。整数可求长流的定义与可求长集类似，采用上述欧几里得空间中流的定义。更准确地说，若存在可数多个紧集 $K_i \subset \mathbb{R}^k$ 和函数 $\theta_i \in L^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{Z})$，满足$\operatorname{spt} \theta_i \subset K_i$，且存在双 Lipschitz 映射 $\varphi_i\colon K_i \to X$，使得

$$T = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_{i\#} [\![\theta_i]\!] \quad \text{and} \quad \mathbf{M}(T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{M}(\varphi_{i\#} [\![\theta_i]\!]).$$

我们将上述三元组 $\{\varphi_i, K_i, \theta_i\}$ 称为 T 的 参数化。 X 上整数可求长 k-流的空间记为 $\mathcal{I}_k(X)$。对于 $T \in \mathcal{I}_k(X)$， 的特征集定义为

$$\operatorname{set} T = \left\{ x \in X \colon \liminf_{r \to 0} \frac{\|T\|(B(x,r))}{r^k} > 0 \right\}. \tag{3.2}$$

根据 [3, 定理 4.6], ， T 的特征集是 k-可求长的，且 $\|T\|$ 集中于集合 T 上。现在，假设存在 $C > 0$，使得 T 有一个参数化 $\{\varphi_i, K_i, \theta_i\}$，满足对于几乎所有 $x \in K_i$ 以及每个 $i \in \mathbb{N}$， $|\theta_i(x)| \le C$ 。由 [3, 引理 9.2 和定理 9.5] 可得

$$C^{-1} \lambda \mathcal{H}^k \llcorner \operatorname{set} T \le \|T\| \le C \lambda \mathcal{H}^k \llcorner \operatorname{set} T,$$

其中 $\lambda \in L^1(X)$ 满足 $k^{-k/2} \le \lambda \le k^{k/2}$。特别地，我们有 $\mathbf{M}(T) \le C k^{k/2} \mathcal{H}^k($集合 $T)$。如果一个整数可求长流同时也是正规流，我们就称其为积分流，并将 X 上积分k-流的空间记为 $\mathbf{I}_k(X) = \mathcal{I}_k(X) \cap \mathbf{N}_k(X)$。如果积分流 T 的边界为零 $\partial T = 0$，则称 T 为积分循环。Ambrosio 和 Kirchheim 的边界可求长性定理 [3, 定理 8.6] 表明，若 $T \in \mathbf{I}_k(X)$，则 $\partial T \in \mathbf{I}_{k-1}(X)$。因此，

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} \mathbf{I}_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \mathbf{I}_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{I}_0(X)$$

是一个链复形。对于 $k \ge 0$，我们将该链复形的第 k 个同调群定义为 $H_k^{\mathrm{IC}}(X) = \ker \partial_k / \operatorname{im} \partial_{k+1}$。最后，设 M为一个闭的、定向的黎曼n维流形，并设

$$[\![M]\!](f, \pi) = \int_M f \det(D\pi)\, d\mathcal{H}^n$$

对所有 $(f, \pi) \in \mathcal{D}^n(M)$。这在 M上定义了一个积分 n-流，并且根据斯托克斯定理， T是一个闭链。此外，该闭链满足 $\|[\![M]\!]\| = \mathcal{H}^n$，并通过积分流 $H_n^{\mathrm{IC}}(X)$ 生成第n同调群。因此，我们将 $[\![M]\!]$ 称为 M的基本类。

3.3. **等周不等式**。设 $T \in \mathbf{I}_k(X)$ 是一个积分 k-闭链。若 $\partial U = T$，则称$U \in \mathbf{I}_{k+1}(X)$ 是 T的一个填充。此外，若

$$\mathbf{M}(U) = \inf\{\mathbf{M}(V) \colon V \in \mathbf{I}_{k+1}(X), \partial V = T\}$$

那么， U 称为 T的极小填充。等周不等式保证存在满足某个质量界的填充。更确切地说，如果存在 $D_k > 0$，使得对于每个满足 $\partial T = 0$的 $T \in \mathbf{I}_k(X)$，都存在一个填充 $S \in \mathbf{I}_{k+1}(X)$，它是$T$的填充，并且满足$\mathbf{M}(S) \leq D_k \mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}}$，那么我们称 X 满足 k维（欧几里得）等周不等式。在 [50], 中，Wenger证明了满足某个锥不等式的度量空间也满足整流的等周不等式。例如，这包括所有巴拿赫空间和内射度量空间。关于此处所述的等周不等式版本，请参见 [5, 定理 3.4] 。

定理 3.2. 设 $k \geq 0$ 为一个整数。那么存在一个常数 $D = D_k \geq 1$，使得以下结论成立。如果 Y 是一个内射度量空间，且 $T \in \mathbf{I}_k(Y)$ 是一个闭链，那么存在一个极小填充 $U \in \mathbf{I}_{k+1}(Y)$ 作为 T 的填充，并且任何此类填充都满足

$$\mathbf{M}(U) \leq D\,\mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}} \quad \text{and} \quad \|U\|(B(y,r)) \geq D^{-k} r^{k+1} \tag{3.3}$$

对每个 $y \in$支撑集 U以及所有 $r \in (0, d(y,$ 支撑集 $T))$。特别地，支撑集 U包含于 R-邻域支撑集 T之中，其中 $R = D\,\mathbf{M}(U)^{\frac{1}{k+1}}$。

若 $k = 0$ ，则 (3.3) 中的第一个不等式视为空命题。

3.4. **模 p 的平坦流**。我们沿用 [2] 和 [4] 中引入的模 p 平坦流理论。对于 $k \geq 0$, 记 $\mathcal{F}_k(X)$ 为 X 中平坦流构成的空间，即可写成 $T = R + \partial S$ 形式的流，其中 $R \in \mathcal{I}_k(X)$ 且 $S \in \mathcal{I}_{k+1}(X)$。显然，这定义了一个加群。若 T 是形如 $T = R + \partial S$ 的平坦 k-流，其中 $R \in \mathcal{I}_k(X)$ 且 $S \in \mathcal{I}_{k+1}(X)$，则其边界 ∂T 是由 $\partial T = \partial R$ 给出的平坦 ($k-1$)-流。注意，平坦流不一定具有 (3.1) 中定义的有限质量。因此，质量范数无法为这个空间提供合适的距离概念。我们改为考虑平坦范数

$$\mathcal{F}(T) = \inf\{\mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S) \colon T = R + \partial S, R \in \mathcal{I}_k(X), S \in \mathcal{I}_{k+1}(X)\}.$$

由 $\mathcal{F}$ 的次可加性以及 $\mathcal{I}_k(X)$关于质量范数的完备性可知， $\mathcal{F}$在 $\mathcal{F}_k(X)$上定义了一个完备度量。对于所有 $T \in \mathcal{F}_k(X)$，我们有 $\mathcal{F}(\partial T) \leq \mathcal{F}(T)$。令 $p > 1$ 为一个整数。我们将$T \in \mathcal{F}_k(X)$关于 p 的平坦范数定义为

$$\mathcal{F}_p(T) = \inf\{\mathcal{F}(T - pQ) \colon Q \in \mathcal{F}_k(X)\}.$$

对于 T， $T' \in \mathcal{F}_k(X)$，当 $\mathcal{F}_p(T - T') = 0$时，我们记 $T = T'$模 p。特别地，若存在 $S \in \mathcal{F}_k(X)$使得 $T = T' + pS$，则 $T = T'$模 p。给定$T \in \mathcal{F}_k(X)$，我们将 T的（松弛） p质量定义为

$$\mathbf{M}_p(T) = \inf\left\{\liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}(T_i) \colon T_i \in \mathcal{I}_k(X), \mathcal{F}_p(T - T_i) \to 0\right\}.$$

显然，若 $T = T'$模 p，则$\mathbf{M}_p(T) = \mathbf{M}_p(T')$。直接计算可得，$p$-质量具有次可加性，并且关于 $\mathcal{F}_p$-收敛下半连续。此外，对于所有 $T \in \mathcal{I}_k(X)$，我们有 $\mathcal{F}_p(T) \leq \mathbf{M}_p(T) \leq \mathbf{M}(T)$。设 $\varphi\colon X \to Y$是两个完备度量空间之间的利普希茨映射，且 $T \in \mathcal{F}_k(X)$。那么，前推 $\varphi_\# T$ 是 Y 中的一个平坦流，并满足

$$\mathcal{F}_p(\varphi_\# T) \leq \mathrm{Lip}(\varphi)^k \mathcal{F}_p(T) \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_p(\varphi_\# T) \leq \mathrm{Lip}(\varphi)^k\, \mathbf{M}_p(T).$$

现在，设 E 是巴拿赫空间的一个紧凸子集。此外，设 $T \in \mathcal{F}_k(E)$ 是一个具有有限 $\mathbf{M}_p$-质量的平坦 k-流，并且设 $\pi\colon E \to \mathbb{R}$ 是利普希茨的。

文献 [2] 证明，对于几乎所有 $r \in \mathbb{R}$，限制 $T \llcorner \{\pi < r\}$ 都是定义良好的平坦 k-流，并且存在一个有限、非负且 σ-可加的博雷尔测度 $\|T\|_p$，使得

$$\mathbf{M}_p(T \llcorner \{\pi < r\}) = \|T\|_p(\{\pi < r\})$$

对几乎所有的 $r \in \mathbb{R}$。我们将 $\|T\|_p$ 称为 T 的 p-质量测度。与 [4, 第 2 节4], 完全相同，我们可以将此等式推广到 E的闭集和开集。注意，在 [4], 中，假设环境巴拿赫空间满足强有限维逼近性质。然而，在其中的论证中，仅用到了 E 是紧致的，以及$\mathbf{I}_k(E)$ 在 $\mathcal{I}_k(E)$ 和 $\mathcal{F}_k(E)$中稠密这一事实；对于巴拿赫空间的闭凸子集，这一性质成立；见 [2, 命题 14.7]。对于开集或闭集 $A \subset E$，限制 $T \llcorner A$ 是一个平坦的 k-流，满足

$$\mathbf{M}_p(T \llcorner A) = \|T\|_p(A) \quad \text{and} \quad T = T \llcorner A + T \llcorner (E \setminus A).$$

由构造可知，存在一个序列 $T_n \in \mathcal{I}_k(E)$，使得对于所有闭集或开集 $A \subset E$，都有 $\mathcal{F}_p(T_n \llcorner A - T \llcorner A) \to 0$，并且$\mathbf{M}(T_n \llcorner A) \to \mathbf{M}(T \llcorner A)$，当 $n \to \infty$ 时。利用这一点，很容易证明，对于所有闭集和开集 $A \subset E$，都有 $\|T \llcorner A\|_p = \|T\|_p \llcorner A$，并且

$$\|\varphi_\# T\|_p \le \mathrm{Lip}(\varphi)^k \varphi_\# \|T\|_p$$

对于所有利普希茨映射 $\varphi \colon E \to F$，其中 F 是巴拿赫空间的紧凸子集。我们定义

$$\mathrm{spt}_p T = \{x \in E \colon \|T\|_p(B(x,r)) > 0 \text{ for all } r > 0\}.$$

根据以上结果，我们有 $\mathrm{spt}_p(\varphi_\# T) \subset \varphi(\mathrm{spt}_p(T))$。

我们还需要定义整数可求长流模 p 的约化。设 $T \in \mathcal{I}_k(X)$，并令 $\{\varphi_i, K_i, \theta_i\}$ 为 T 的参数化。T 模 p 的一个约化是任意一个整数可求长 k-流 T^p，其参数化 $\{\varphi_i, K_i, \eta_i\}$ 满足：对于几乎所有 $x \in K_i$ 以及每个 $i \in \mathbb{N}$，$\eta_i(x) = \theta_i(x) \bmod p$。注意，$T$ 模 p 的约化 T^p 并不唯一。不过，我们总有 $T = T^p \bmod p$，且 $\mathbf{M}(T^p)$ 唯一确定。由于 T^p 由满足以下条件的参数化$\{\varphi_i, K_i, \eta_i\}$ 给出：对于几乎所有 $x \in K_i$ 以及每个 $i \in \mathbb{N}$，$|\eta_i(x)| \le p$，因此我们有 $\mathbf{M}(T^p) \le p k^{k/2} \mathcal{H}^k$集合$T$。注意，集合$T^p \subset$集合$T$。如果 X 是紧长度空间，那么 [2, 定理 10.5] 推出，对于 T 模 p 的每个约化 T^p，$\mathbf{M}_p(T) = \mathbf{M}(T^p)$。利用内射包 $E(X)$，我们可以将此结论推广到紧度量空间。

引理 3.3. 设 X 为紧度量空间，且 $T \in \mathcal{I}_k(X)$。则 $\mathbf{M}_p(T) = \mathbf{M}(T^p)$，其中 $T^p \in \mathcal{I}_k(X)$ 是 T 模 p 的任意一个。特别地，存在一个有限、非负且 σ- 可加的博雷尔测度 $\|T\|_p$，使得

$$\mathbf{M}_p(T \llcorner B) = \|T\|_p(B) = \|T^p\|(B)$$

对每个博雷尔集 $B \subset X$。

测度 $\|T\|_p$ 与上文引入的 p-质量测度一致。

证明. 设 $\iota \colon X \to E(X)$ 为等距嵌入。回想 $E(X)$ 是紧致的，因为 X 是紧致的。此外，$E(X)$ 是测地的，因为它是内射度量空间。设 $T^p \in \mathcal{I}_k(X)$ 为 T模 p的任意约化。注意 $\iota_\# T^p$ 也是 $\iota_\# T$模 p 的约化。因此，

$$\|T^p\|(E) = \|\iota_\# T^p\|(E(X)) = \mathbf{M}_p(\iota_\# T) \le \mathbf{M}_p(T).$$

由于 $T = T^p$模 p，我们有 $\mathbf{M}_p(T) = \mathbf{M}_p(T^p) \le \mathbf{M}(T^p)$，因此，$\mathbf{M}_p(T) = \mathbf{M}(T^p)$。现在，设 $B \subset X$为博雷尔集。则 $T^p \llcorner B$是 $(T \llcorner B)$ 关于$\llcorner p$的约化。因此，证明的第一部分表明 $\mathbf{M}(T^p \llcorner B) = \|T^p\|(B)$。由此可知，$\|T\|_p := \|T^p\|$ 是定义良好、有限、非负且 σ-可加的博雷尔测度，并满足对每个博雷尔集 $B \subset X$，$\mathbf{M}_p(T \llcorner B) = \|T\|_p(B) = \|T^p\|(B)$。□

作为前一个引理的推论，我们得到紧度量空间 X中关于 p 的平坦范数的以下等价刻画。若 $T \in \mathcal{F}_k(X)$，则 $\mathcal{F}_p(T)$ 等于

$$\inf\{\mathbf{M}_p(R) + \mathbf{M}_p(S) \colon T = R + \partial S + pQ, R \in \mathcal{I}_k(X), S \in \mathcal{I}_{k+1}(X), Q \in \mathcal{F}_k(X)\}.$$

我们以描述闭的不可定向黎曼 n 流形 M 的模 2 基本类来结束本节。与可定向情形类似， M 支撑一个积分流 $[\![M]\!] \in \mathbf{I}_n(M)$，满足 $\partial[\![M]\!] = 0$ 模 2 以及 $\|[\![M]\!]\|_2 = \mathcal{H}^n$；例如参见 [2, 定理 13.1]。我们称 $[\![M]\!]$ 为 M 的模 2 基本类。设 τ 是任意一个博雷尔选择，它由张成 M 切空间的标准正交基组成。那么，由下式定义的整数可求长流

$$(f, \pi_1, \dots, \pi_n) \mapsto \int_M f \, \langle \tau, D\pi \rangle \, d\mathcal{H}^n$$

对于所有 $(f, \pi_1, \dots, \pi_n)$， $\in \mathcal{D}^n(M)$ 与 $[\![M]\!]$ 模 2 等价。模 2 基本类在以下意义下是唯一的：若 $T \in \mathcal{I}_n(X)$ 是满足 $\partial T = 0$ 模 2 的整数可求长流，则对于 k， $T = k \cdot [\![M]\!]$ 模 2，其中 k 等于 0 或 1。

3.5. **切片**。设 $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数。对于积分流 $T \in \mathbf{I}_k(X)$， T 在 $t \in \mathbb{R}$ 处的切片定义为

$$\langle T, \pi, t \rangle = \partial(T \llcorner \{\pi < t\}) - (\partial T) \llcorner \{\pi < t\}. \tag{3.4}$$

由此可知，对几乎所有的 $t \in \mathbb{R}$，切片 $\langle T, \pi, t \rangle$ 都是一个积分（$k-1$）-流，满足 $\operatorname{spt}\langle T, \pi, t \rangle \subset \operatorname{spt} T \cap \pi^{-1}(t)$，并且

$$\int_r^s \|\langle T, \pi, t \rangle\|(B) \, dt \le \operatorname{Lip}(\pi) \cdot \|T\|(B \cap \{r < \pi < s\}),$$

对每个博雷尔 $B \subset X$ 以及所有满足 $r < s$ 的 $r, s \in \mathbb{R}$，上述结论均成立；参见 [3, 定理 5.6 和定理 5.7]。我们将此不等式称为切片不等式。我们有 $\partial\langle T, \pi, t \rangle = -\langle \partial T, \pi, t \rangle$；特别地，若 T的边界为零，则 $\partial\langle T, \pi, t \rangle = 0$。我们需要将切片不等式用于 p-质量测度。

引理 3.4. 设 E 为 l^∞的紧凸子集。此外，设 $T \in \mathbf{I}_k(E)$，并设 $\pi\colon E \to \mathbb{R}$ 为利普希茨的。则，

$$\int_r^s \|\langle T, \pi, t \rangle\|_p(B) \, dt \le \operatorname{Lip}(\pi) \cdot \|T\|_p(B \cap \{r < \pi < s\}),$$

对每个博雷尔 $B \subset X$ 以及所有满足 $r < s$的 r、 $s \in \mathbb{R}$。

已知当 l^∞ 被可分巴拿赫空间替换时该引理成立；参见 [2, 定理 10.6]。注意，当 X 紧致时， $E(X)$满足该引理中的条件。

证明. 设 $T^p \in \mathcal{I}_k(E)$为 T模 p的约化。这是[3, 定理 9.7] 的直接推论：对几乎所有的 $t \in \mathbb{R}$，切片 $\langle T^p, \pi, t \rangle$ 是 $\langle T, \pi, t \rangle$模$p$ 的约化。因此，由引理 3.3，我们有

$$\begin{aligned} \int_r^s \|\langle T, \pi, t \rangle\|_p(B) \, dt &= \int_r^s \|\langle T^p, \pi, t \rangle\|(B) \, dt \\ &\le \|T^p\|(B \cap \{r < \pi < s\}) \\ &= \|T\|_p(B \cap \{r < \pi < s\}) \end{aligned}$$

对每个博雷尔 $B \subset X$ 以及所有满足 $r < s$的 $r, s \in \mathbb{R}$。证明完毕。 □

3.6. **乘积流与锥构造**。我们赋予 $[0,1] \times E$ 欧氏乘积度量。给定函数 $f\colon [0,1] \times X \to \mathbb{R}$ 和 $t \in [0,1]$，我们令 $f_t\colon X \to \mathbb{R}$， $x \mapsto f(t,x)$。对于 $T \in \mathbf{I}_k(X)$，我们定义积分流

$[\![t]\!] \times T \in \mathbf{I}_k([0,1] \times E)$ 由

$$[\![t]\!] \times T(f, \pi_1, \dots, \pi_k) := T(f_t, \pi_{1t}, \dots, \pi_{kt})$$

对所有的 $(f, \pi_1, \dots, \pi_k) \in \mathcal{D}^k([0,1] \times E)$。此外，多重线性泛函 $[\![0, 1]\!] \times T$ 在 $\mathcal{D}^{k+1}([0,1] \times X)$ 上取值为

$$(f, \pi_1, \dots, \pi_{k+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{k+1} \int_0^1 (-1)^{k+1} T\left(f_t \frac{\partial \pi_{it}}{\partial t}, \pi_{1t}, \dots, \pi_{(i-1)t}, \pi_{(i+1)t}, \dots, \pi_{(k+1)t}\right) dt$$

定义了 $\mathbf{I}_{k+1}([0,1] \times X)$ 中的一个元素，并满足

$$\partial([\![0,1]\!] \times T) + [\![0,1]\!] \times \partial T = [\![1]\!] \times T - [\![0]\!] \times T. \tag{3.5}$$

参见 [3, 定理 2.9]和 [50,定理 2.9]。

现在，假设 E 是巴拿赫空间的一个闭凸子集。那么，$\mathbf{I}_k(E)$ 在 $\mathcal{I}_k(E)$ 中关于质量范数稠密，并且在 $\mathcal{F}_k(E)$ 中关于平坦范数稠密。因此可得

$$\mathcal{F}(T) = \inf\{\mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S) \colon T = R + \partial S, R \in \mathbf{I}_k(E), S \in \mathbf{I}_{k+1}(E)\}$$

对所有 $T \in \mathcal{F}_k(E)$。此外，由 (3.5) 可得

$$[\![0,1]\!] \times (R \times \partial S) = [\![0,1]\!] \times R + [\![1]\!] \times S - [\![0]\!] \times S - \partial([\![0,1]\!] \times S),$$

对所有的 $R \in \mathbf{I}_k(E)$ 和每个 $S \in \mathbf{I}_{k+1}(E)$ 均成立。因此，利用稠密性论证，我们可以定义 $[\![t]\!] \times T$ 和 $[\![0, 1]\!] \times T$ 使得对于平坦流 $T \in \mathcal{F}_k(E)$，式 (3.5) 仍然成立。不难证明，对于满足 $T = S$ 模 p 的 T，$S \in \mathcal{F}_k(E)$，有

$$[\![t]\!] \times T = [\![t]\!] \times S \mod p \quad \text{and} \quad [\![0,1]\!] \times T = [\![0,1]\!] \times S \mod p. \tag{3.6}$$

设 $H\colon [0,1] \times E \to X$ 为利普希茨映射，使得对于固定的 $t \in [0,1]$，映射 $x \mapsto H(t, x)$ 是 L-利普希茨的；对于固定的 $x \in E$，映射 $t \mapsto H(t, x)$ 是 γ-利普希茨的。完全仿照命题 2.10] 的证明进行计算可得

$$\mathbf{M}(H_\#([\![0,1]\!] \times T)) \le (k+1)\gamma L^k \mathbf{M}(T), \tag{3.7}$$

对所有 $T \in \mathbf{I}_k(E)$ 均成立。因此，若 $T \in \mathcal{F}_k(E)$ 的 p-质量有限且为 $\mathbf{M}_p$，则将 T 中的 $\mathbf{M}$ 替换为 $\mathbf{M}_p$ 后，(3.7) 仍成立。利用这一点，不难证明

$$\mathcal{F}_p(H_\#([\![0,1]\!] \times T)) \le (k+1)\gamma L^k \mathcal{F}_p(T) \tag{3.8}$$

对所有具有有限 p-质量 $\mathbf{M}_p$ 的 $T \in \mathcal{F}_k(E)$ 均成立。接下来，我们解释锥构造。更多细节请参见 [50] 。取一点 $x \in E$。我们将 $H\colon [0,1] \times E \to E$ 记为 E 上的恒等映射与取值恒为 x 的常值映射之间的直线同伦。对于 $T \in \mathbf{I}_k(E)$，以 x 为顶点、位于 T 上方的锥定义为 $\{x\} \times T := H_\#([\![0, 1]\!] \times T) \in \mathbf{I}_{k+1}(E)$。由 (3.5) 和 (3.7) 可得其具有以下性质

$$\partial(\{x\} \times T) = T - \{x\} \times \partial T \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_p(\{x\} \times T) \le 2r\, \mathbf{M}_p(T),$$

其中 $r > 0$ 是包含 T 的支撑的最小闭球的半径。此外，若 T，$R \in \mathbf{I}_k(E)$ 和 $S \in \mathbf{I}_{k+1}(E)$ 满足 $T = R + \partial S$，则

$$\{x\} \times T = \{x\} \times (R + \partial S) = \{x\} \times (R + S) + \partial(\{x\} \times S).$$

因此，$\mathcal{F}(\{x\} \times T) \le 2\,\mathrm{diam}(E)\mathcal{F}(T)$。由此得到

$$\mathcal{F}_p(\{x\} \times T) \le 2\,\mathrm{diam}(E)\mathcal{F}_p(T)$$

对所有 $T \in \mathcal{F}_k(E)$ 均成立。特别地，如果序列 $T_i \in \mathcal{F}_k(E)$ 满足 $\mathcal{F}_p(T_i - T) \to 0$ 对某个 $T \in \mathcal{F}_k(E)$ 成立，那么这些锥也会 $\mathcal{F}_p(\{x\} \times T_i - \{x\} \times T) \to 0$ 收敛。

3.7. 模 p 的整流紧性定理。 我们基本上遵循了 [1]中的紧性定理证明。在

[1] 中使用的平坦链定义与本文使用的平坦流定义不同。因此，我们给出紧性定理的证明。

定理 3.5. 设 E 为 l^∞的紧凸子集。假设 $T_i \in \mathbf{I}_k(E)$是满足下列条件的序列

$$\sup \mathbf{M}_p(T_i) + \mathbf{M}_p(\partial T_i) < \infty.$$

则存在$(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的子列$\left(T^i_{i(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ 以及 $T \in \mathcal{F}_k(E)$ ，使得当 $j \to \infty$时，$\mathcal{F}_p($ $T_{i(j)} - T) \to 0$ 。

证明。 定义 $C = \sup_i \mathbf{M}_p(T_i) + \mathbf{M}_p(\partial T_i)$。我们对维数 k用归纳法论证。设 $k = 0$。令 $K = \{T \in \mathcal{F}_k(E) : \mathbf{M}_p(T) + \mathbf{M}_p(\partial T) \le C\}$。由 p-质量的下半连续性可知， K 是闭的。给定 $\varepsilon > 0$，我们用有限球族 $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i=1}^N$ 覆盖E ，并记 $Q \subset K$ 为形如

$$\sum_i^N q_i [\![x_i]\!], \quad |q_i| < p \quad \text{and} \quad \sum_i^N |q_i| \le C.$$

此处， $[\![x]\!]$表示由以下条件定义的 0-维链流：对于所有 $f \in \mathrm{LIP}_b(X)$， $[\![x]\!](f) = f(x)$。由于 E 是凸的，对于每个满足 $\mathcal{F}_p(T - S) \le C\varepsilon$ 的 $T \in K$ ，都存在 $S \in Q$ 。这表明 K 是全有界的，因此是紧致的。

下面进行归纳步骤。设 $x \in E$ 和 $r > 0$。我们断言，对于几乎所有的 $\delta \in (r, 2r)$，都存在一个子列 $T_{i(j)}$ ，使得对于每个 $j \in \mathbb{N}$ ，都有$T_{i(j)} \llcorner B(x, \delta) \in \mathbf{I}_k(E)$，并且

$$\mathbf{M}_p(T_{i(j)} \llcorner B(x,\delta)) + \mathbf{M}_p(\partial(T_{i(j)} \llcorner B(x,\delta))) \le \frac{2C}{\delta} + C.$$

事实上，定义 $\pi\colon E \to \mathbb{R}, \ y \to d(x, y)$，则引理 3.4 和法图引理推出

$$\int_\delta^{2\delta} \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}_p(\langle T_i, \pi, t\rangle)\, dt \le \liminf_{i\to\infty} \int_\delta^{2\delta} \mathbf{M}_p(\langle T_i, \pi, t\rangle)\, dt \le \sup_i \mathbf{M}_p(T_i) \le C.$$

因此，对于几乎所有的 $\delta \in (r, 2r)$，我们有 $\liminf_i \mathbf{M}_p(\langle T_i, \pi, \delta\rangle) \le C/\delta$。特别地，我们可以找到一个满足 $\mathbf{M}_p(\langle T_{i(j)}, \pi, \delta\rangle) \le 2C/\delta$ 且满足$\langle T_{i(j)}, \pi, \delta\rangle \in \mathbf{I}_{k-1}(E)$ 的子列 $T_{i(j)}$，对每个 $j \in \mathbb{N}$ 均成立。根据切片算子的定义，我们有

$$\mathbf{M}_p(\partial(T_{i(j)} \llcorner B(x,\delta))) \le \mathbf{M}_p(\langle T_{i(j)}, \pi, \delta\rangle) + \mathbf{M}_p((\partial T_{i(j)}) \llcorner B(x,\delta))$$

并且对每个 $j \in \mathbb{N}$， $T_{i(j)} \llcorner B(x,\delta) \in \mathbf{I}_k(E)$。由于 $\sup_i \mathbf{M}_p(T_i) + \mathbf{M}_p(\partial T_i) \le C$，结论得证。现在，取满足 $(1 + 8C)\eta < \varepsilon$ 的 $\eta > 0$ 。反复应用该结论，我们得到 E 的一个有限覆盖，它由半径属于 $(\eta, 2\eta)$ 的球 $\{B_j\}_j^n$ 组成；并且得到 $(T_i)_i$ 的一个子列（仍记为 $(T_i)_i$），使得 $T_i \llcorner B_j \in \mathbf{I}_k(E)$，且

$$\mathbf{M}_p(T_i \llcorner B_j) + \mathbf{M}_p(\partial(T_i \llcorner B_j)) \le \frac{2C}{\delta} + C. \tag{3.9}$$

对所有 $i, j \in \mathbb{N}$ 均成立。我们将 $E \setminus \bigcup_{j=1}^N \partial B_j$ 分解为一个有限划分 $\{U_l\}_{l=1}^N$。对于 $i \in \mathbb{N}$ 和 $l = 1, \ldots, N$，记作 $T_i^l = T_i \llcorner U_l$。引理 3.3 表明，$p$-测度在每个 T_i 上均可加，因此，

$$\mathbf{M}_p(T_i) = \sum_l^N \mathbf{M}_p(T_i^l),$$

对每个 $i \in \mathbb{N}$。由 (3.9)，对每个 $l = 1, \ldots, N$，我们有 $\sup_i \mathbf{M}_p(\partial T_i^l) < \infty$。因此，由归纳假设可知，我们可以再取一个子列（仍记为 $(T_i)_i$），使得对每个 $l = 1, \ldots, N$， ∂T_i^l 关于 $\mathcal{F}_p$是柯西的。对每个 U_l，我们固定一点 $x_l \in U_l$。由此可知，每一个

序列 $\{x_l\} \times \partial T_i^l$ 也是柯西的。因此，存在 $I \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathcal{F}_p(\{x_l\} \times \partial T_i^l - \{x_l\} \times \partial T_{i'}^l) < \frac{\eta}{N}$$

对每个 $l = 1, \dots, N$ 以及所有 $i, i' \geq I$。暂时固定两个大于 I 的整数 a, b。那么，对于每个 $l = 1, \dots, N$，存在 $R_l \in \mathcal{I}_k(E)$、$S_l \in \mathcal{I}_{k+1}(E)$ 和 $Q_l \in \mathcal{F}_k(E)$，满足 $\{x_l\} \times \partial T_a^l - \{x_l\} \times \partial T_b^l = R_l + \partial S_l + pQ_l$ 并且

$$\mathbf{M}_p(S_l) + \mathbf{M}_p(R_l) \leq \frac{\eta}{N}.$$

因此，利用对每个 $T \in \mathbf{I}_k(E)$ 都有 $\partial(\{x\} \times T) = T - \{x\} \times \partial T$，我们得出

$$(T_a^l - T_b^l) = \partial(\{x_l\} \times T_a^l - \{x_l\} \times T_b^l) - R_l + \partial S_l + pQ_l.$$

由于每个 U_l 的半径至多为 2η，我们有

$$\mathbf{M}_p(\{x_l\} \times T_a^l - \{x_l\} \times T_b^l) \leq 4\eta(\mathbf{M}_p(T_a^l) + \mathbf{M}_p(T_b^l)),$$

对每个 $l = 1, \dots, N$。由此可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p(T_a^l - T_b^l) &\leq \mathbf{M}_p(\{x_l\} \times T_a^l - \{x_l\} \times T_b^l) + \mathbf{M}_p(S_l) + \mathbf{M}_p(R_l) \\ &\leq 4\eta(\mathbf{M}_p(T_a^l) + \mathbf{M}_p(T_b^l)) + \frac{\eta}{N}.\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p(T_a - T_b) &\leq \sum_l^N \mathcal{F}_p(T_a^l - T_b^l) \\ &\leq \sum_l^N 4\eta(\mathbf{M}_p(T_a^l) + \mathbf{M}_p(T_b^l)) + \frac{\eta}{N} \\ &\leq 4\eta \sum_l^N (\mathbf{M}_p(T_a^l) + \mathbf{M}_p(T_b^l)) + \eta \\ &\leq 4\eta(\mathbf{M}(T_a) + \mathbf{M}(T_b)) + \eta \\ &\leq (1 + 8C)\eta < \varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，这就完成了证明。

□

3.8. 平坦流的可求 rectifiability. 设 E 为巴拿赫空间的紧凸子空间。在 [4] 中已经证明：若巴拿赫空间满足强有限维逼近性质，则 E中具有有限 p-质量的平坦 k-流 T 的 p-质量 $\|T\|_p$ 集中在一个 k-可求 rectifiable 集上。我们可以放宽对所在巴拿赫空间的条件，但需要对$\|T\|_p$假设更强的条件。我们注意到，对于具有有限质量的平坦链，已有一个更为一般的可整流性结果，见 [15, 推论 8.2.3]。然而，为了使用这一结果，我们需要将平坦流理论与平坦链理论联系起来。此外，这里给出的可整流性结果的证明采用了不同的方法，作者认为该方法具有独立的意义。

我们需要以下引理。

引理 3.6. 设 $T \in \mathcal{F}_k(l^\infty)$。假设 T 具有有限的 p-质量，且支撑集$_p T$ 是紧致的。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个有限维线性子空间$V \subset l^\infty$ 和一个1-利普希茨映射 $\pi\colon l^\infty \to V$，使得 $\mathcal{F}_p(T - \pi_\# T) \leq 2(k+1)\varepsilon \mathcal{F}_p(T)$。

证明。令 $\varepsilon > 0$。设 $K =$ 支撑集$_p T$。由于 l^∞ 具有度量逼近性质，因此存在一个有限维线性子空间 $V \subset l^\infty$ 和一个 1-利普希茨映射$\pi\colon l^\infty \to V$，使得对每个 $x \in K$，$\|\pi(x) - x\|_{l^\infty} < \varepsilon$；例如参见 [14, 命题 A.6]。令 $H\colon [0,1] \times K \to V$为连接嵌入的直线同伦

ι_K 从 K 到 l^∞ 和 π。由 (3.5) 可得

$$\partial(H_\#([\![0,1]\!]\times T)) - H_\#([\![0,1]\!]\times \partial T) = T - \pi_\# T.$$

注意，对于固定的 t，映射 $x \mapsto H(t,\ x)$ 是 1-利普希茨的；对于固定的 $x \in K$，映射 $t \mapsto H(t,\ x)$ 是 ε-利普希茨的。因此，(3.8) 蕴含

$$\mathcal{F}_p(T - \pi_\# T) \le \mathcal{F}_p(H_\#([\![0,1]\!]\times T)) + \mathcal{F}_p(H_\#([\![0,1]\!]\times \partial T)) \le 2(k+1)\varepsilon \mathcal{F}_p(T).$$

证明至此完成。 □

现在我们可以证明以下关于有限 p-质量平坦流的可整流性结果。

命题 3.7。设 E 是 l^∞ 的一个紧凸子集，且 $T \in \mathcal{F}_k(E)$。假设 T 具有有限的 p-质量，且 $\|T\|_p$ 集中在一个具有有限 *Hausdorff* k-测度的集合上。那么，$\|T\|_p$ 集中在一个 k-可整流集 $A \subset E$ 上。此外，存在 $S \in \mathcal{I}_k(E)$，使得 $S = T$ 模 p。

证明。设 $C \subset E$ 是 k 豪斯多夫测度有限且 $\|T\|_p$ 集中于其上的集合，并设 $P \subset C$ 是纯 k-不可整流的。我们需要证明 $\|T\|_p(P) = 0$。由于 $\|T\|_p$ 是博雷尔测度，根据内正则性，只需证明对所有闭子集 $P' \subset P$ 都有 $\|T\|_p(P') = 0$，即可证明 $\|T\|_p(P) = 0$。因此，我们可以假设 P 是闭集。我们声称，对于任意利普希茨映射 $\varphi\colon E \to V$，只要 V 是有限维巴拿赫空间，就有 $\varphi_\# T \llcorner P = 0 \bmod p$。显然，该命题在对 V 的度量作双利普希茨变换后保持不变。因此，只需在附加假设 V 等于赋有标准欧几里得距离的某个 $\mathbb{R}^N$ 的情况下证明这一论断。设 $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^N$ 是 L-利普希茨的，并令 $\varepsilon > 0$。由定理2.3可知，存在一个 L-利普希茨映射 $\psi\colon E \to \mathbb{R}^N$，满足 $d(\varphi,\psi) < \varepsilon$ 且 $\mathcal{H}^k(\psi(P)) = 0$。注意

$$\mathrm{spt}_p(\psi_\#(T\llcorner P)) \subset \psi(\mathrm{spt}_p(T\llcorner P)) \subset \psi(P).$$

此外，$\psi_\#(T \llcorner P)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中一个平坦的 k-流，且具有有限的 p-质量 $\mathbf{M}_p$。根据 [4, 推论 1.3], ，我们有 $\|\psi_\#(T \llcorner P)\|_p$ 关于 Hausdorff k-测度 $\mathcal{H}^k$ 绝对连续，因此 $\psi_\#(T \llcorner P) = 0$ 模 p。设 $H\colon [0,1]\times E \to \mathbb{R}^N$ 为 φ 与 ψ 之间的直线同伦。由 (3.5) 可得

$$\partial(H_\#([\![0,1]\!]\times T\llcorner P)) + H_\#([\![0,1]\!]\times \partial(T\llcorner P)) = \psi_\# T\llcorner P - \varphi_\# T\llcorner P.$$

对于固定的 t，映射 $x \mapsto H(t,x)$ 是 L-利普希茨的；对于固定的 $x \in K$，映射$t \mapsto H(t,x)$ 是 ε-利普希茨的。由 (3.8) 可得

$$\mathcal{F}_p(H_\#([\![0,1]\!]\times T\llcorner P)) \le (k+1)\varepsilon L^k \mathcal{F}_p(T\llcorner P)$$

and

$$\mathcal{F}_p(H_\#([\![0,1]\!]\times \partial(T\llcorner P))) \le (k+1)\varepsilon L^{k-1}\mathcal{F}_p(\partial(T\llcorner P)).$$

因此，

$$\mathcal{F}_p(\varphi_\#(T\llcorner P)) = \mathcal{F}_p(\varphi_\#(T\llcorner P) - \psi_\#(T\llcorner P)) \le (k+1)\varepsilon(L^{k-1}+L^k)\mathcal{F}_p(T\llcorner P).$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得出 $\varphi_\# T \llcorner P = 0$ 模 p。这就证明了该断言。引理 3.6 表明，存在一列有限维向量子空间 $V_i \subset l^\infty$ 以及利普希茨映射 $\pi_i\colon E \to V_i$，使得 $\mathcal{F}_p(T\llcorner P - \pi_{i\#}(T\llcorner P)) \le (k+1)\varepsilon \mathcal{F}_p(T\llcorner P)$。由该断言可知，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，$\pi_{i\#}(T\llcorner P) = 0$ 模 p。取极限可得 $T \llcorner P = 0$ 模 p，特别地，$\|T\|_p(P) = 0$。因此我们得出，$\|T\|_p$ 集中在一个 k- 可整流集上。现在可以完全按照 [4, 推论 1.3] 证明该陈述的第二部分。 □

4. Linear local contractibility

在本节中，X 表示一个度量空间。设 $R > 0$ 和 $\lambda \ge 1$。若对每个 $x \in B$ 和

每个 $r \in (0, R)$，球 $B(x, r)$都能在 $B(x, \lambda r)$内可缩，则称子集x为$(r, \lambda r)$-线性局部可缩。若点 $x \in X$处的球 $B(x, R)$是(λ, R)-线性局部可缩的，则称 X在点 $x \in X$附近是(λ, R)-线性局部可缩的。最后，假设 X 具有有限的 Hausdorff$n$-测度。若 X 在几乎所有点 $x \in X$附近都线性局部可缩，则称 X 几乎处处线性局部可缩。请注意，在前面的定义中，我们允许线性局部可缩常数依赖于点。下面这个简单的例子表明，该定义确实弱于标准定义。设 C 是一个朝锥尖 y 方向逐渐变细的双曲锥。那么，只要 R 取得足够小，使得 $B(x, 2R)$不会绕锥一周， C 在每个 $x \neq y$附近都是$(1, R)$-线性局部可缩的。然而， C在锥尖 y附近并非(λ, R)-线性局部可缩。

线性局部可缩性是以受控方式构造和延拓连续函数的有用工具。在此，我们利用上文引入的较弱形式的线性局部可缩性来推广这些经典技巧。我们需要如下定义。两个度量空间之间的映射 $f\colon X \to Y$ 称为 ε-连续，如果存在 $\delta > 0$，使得对所有满足 $d(x, y) < \delta$ 的 $x, y \in X$，都有 $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$。

命题 4.1. 设 X、 Y 为紧度量空间，使得 X 的拓扑维数至多为 n，且 $B \subset Y$ 是(λ, R)-线性局部可缩的闭子集。设 A 为 X的一个（可能为空的）子集。存在 $Q \geq 1$，使得若 $f\colon X \to Y$在 X 上是 ε-连续的，且满足 $\varepsilon < R/Q$，并且 f 在 A 的每一点处连续，且 $f(X \setminus A) \subset B$，则存在连续映射 $g\colon X \to Y$，它在 A 上与 f 一致，并满足 $d(f, g) < Q \cdot \varepsilon$。此处， Q 仅依赖于 λ 和 n。

我们记录命题的以下推论：若两个映射 $f_0, f_1\colon X \to B$ 连续，且满足 $d(f_0, f_1) < \varepsilon$, 那么它们可通过一个同伦 $H\colon [0,1] \times X \to Y$相互同伦，并且该同伦满足

$$d(H(t, x), f_0(x)) < (1 + Q) \cdot \varepsilon$$

对每个 $x \in X$ 以及每个 $t \in [0, 1]$,

该命题可仿照 [45]中的相应结果证明；另见 [46, 命题 5.4]。因此，我们仅给出证明概要。

证明。 取充分大的 $Q \geq 1$ （其具体取值稍后确定），并取满足以下条件的 $\delta > 0$：只要 $d(x, y) < \delta$，就有 $d(f(x), f(y)) < \varepsilon < R/Q$。由于 X是紧致的，且其拓扑维数至多为 n，因此存在 $X \setminus A$的一个重数至多为 $n+1$ 的开覆盖 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$，并且

$$\operatorname{diam} U_i < \frac{1}{2} \min\{\delta, d(U_i, A)\} \tag{4.1}$$

对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。此外，存在一个维数为 $\leq n$ 的单纯复形 Σ，以及一个连续映射 $\varphi\colon X \setminus A \to \Sigma$，具有如下性质：每当 $x \in U_i$ 且 $y \in U_j$ 时， $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 包含在同一个单纯形中，当且仅当 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$。由此可知，对每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在一个顶点 $v_i \in \Sigma$，使得 $\varphi(U_i)$ 包含在一个以 v_i 为顶点的单纯形之并中。单纯复形 Σ 通常称为覆盖 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 的神经；例如参见 [45, 第 3] 节。令 $\Sigma^0 = \{v_1, v_2, \dots\}$ 为 Σ 的 0-骨架，其中每个 v_i 都对应于 U_i，如前所述。对每个 $i \in \mathbb{N}$，取定一点 $x_i \in U_i$，并定义 $\psi^0\colon \Sigma^0 \to B$，使得对每个顶点 v_i，有 $\psi^0(v_i) = f(x_i)$。令 v_i、 v_j 为同一个单纯形的两个顶点。由 (4.1)，有 $d(x_i, x_j) < \delta$，因此， $d(\psi^0(v_i), \psi^0(v_j)) < \varepsilon$。所以，若 $Q > 0$ 相对于 λ、 n 和 R 足够大，我们就可以利用线性局部可缩性，将 ψ^0 逐步延拓到 Σ 的各个骨架上，从而得到一个连续映射 $\psi\colon \Sigma \to Y$，满足以下条件：对每个 $i \in \mathbb{N}$ 以及每个满足.....的 $y \in \Sigma$

包含在一个以 v_i 为顶点的单纯形中的

$$d(g(y), g(x_i)) \le C \operatorname{diam} U_i, \tag{4.2}$$

其中 C 仅取决于 n 和 λ。最后，我们将 $g\colon X \to Y$ 定义为在 A上的 $g = f$，并定义为在 $X \setminus A$上的 $\psi \circ \varphi$。利用 (4.1) 和 (4.2)，不难证明 g 是连续的，并且满足 $d(f, g) < Q\varepsilon$。□

4.1. 线性局部可缩性与流形。在本节余下部分，假设 X 具有有限的 Hausdorff n-测度，且同胚于一个紧致光滑的 n-流形 M。我们将该同胚记为 $\varrho\colon M \to X$。

首先，我们描述无边界流形的可定向双覆盖的构造。回顾一下，对于每个 $x \in X$，相对同调群 $H_n(X, X\setminus x)$ 是无限循环的。X 的可定向双覆盖定义为

$$\tilde{X} = \big\{(x, o_x)\colon x \in X,\ o_x \text{ is a generator of } H_n(X, X \setminus x)\big\}.$$

对于每个 $x \in X$，都存在两点 (x, o_x^+)、$(x, o_x^-) \in \tilde{X}$，它们分别对应于 x处的正、负局部定向。此外，存在 X 上的一个拓扑，使得映射 $\pi\colon X \to X, (x, o_x) \mapsto x$ 是一个（拓扑）双覆盖。因此，对于每个 $x \in X$，都存在一个开连通邻域 $U \subset X$，使得 $\pi^{-1}(U)$ 由两个连通分支 U^+、$U^- \subset \tilde{X}$ 构成，并且 π 限制在其中任一连通分支上都是一个同胚。可定向双覆盖是一个闭可定向流形，并且当且仅当 X 不可定向时，它才是连通的。最后，我们说明如何在 $\tilde{X}$ 上构造度量。设 $\{U_i\}_{i=1}^N$ 是 X 的一个开覆盖，使得对于每个 $i = 1, \ldots, N$，原像 $\pi^{-1}(U_i)$ 由两个与 U_i 同胚的连通分支构成。我们分别在每个 U_i^+ 和 U_i^- 上赋予一个度量，使得 π 在 $\{U_i^+, U_i^+\}_{i=1}^N$ 的每个成员上限制为等距映射。注意，若两个集合V、$W \in \{U_i^+, U_i^+\}_i^N$的交集非空，则对于所有 x、$y \in V \cap W$，x 与 y 在 V 和 W 中的距离相等。由此可知，X 上存在一个与拓扑相容的度量，使得映射 $\pi : X \to X$ 是局部等距映射。下一个引理直接由定义以及 π 是局部等距映射这一事实得出。

引理 4.2. 如果 X 在 x附近线性可缩，那么 X 在(x, o_x^+) 和(x, o_x^+)附近线性可缩。特别地，如果 X 几乎处处线性局部可缩，那么 X 几乎处处线性局部可缩。

现在，我们可以轻松证明：对于满足 Ahlfors n-正则且线性局部可缩的不可定向度量流形，相对等周不等式成立。

定理 1.8 的证明。 设 X 是一个与闭的、不可定向的光滑 n-流形同胚的度量空间。此外，假设 X 是 Ahlfors n-正则且线性局部可缩的。设 $\tilde{X}$ 是 X 的可定向双覆盖，且 $\pi\colon \tilde{X} \to X$ 是覆盖映射。根据引理 4.2，可定向双覆盖 $\tilde{X}$ 也线性局部可缩。此外，覆盖映射 π 是局部等距映射，因此 X 也是 Ahlfors n-正则的。由 [5, 定理 1.5] 可知，$\tilde{X}$ 满足相对等周不等式。因此，再次利用 π 是局部等距映射这一点，我们得出 X 满足局部相对等周不等式。也就是说，

$$\min\big\{\mathcal{H}^n\big(E \cap B\big), \mathcal{H}^n\big(B \setminus E\big)\big\} \le C \cdot \mathscr{M}_-\big(E \,|\, \lambda B\big)^{\frac{n}{n-1}}$$

对每个博雷尔子集 $E \subset X$ 以及每个半径充分小的开球 $B \subset X$ 成立。由于 X 是紧致的，局部相对等周不等式可提升为整体不等式。注意 X 与 X 的 Ahlfors 正则性及线性可收缩性常数是可比较的。因此，常数 $C, \lambda \ge 1$ 仅依赖于 X的数据。至此证明完成。□

接下来，我们说明如何沿边界将 X 的两个副本粘合起来。

定义 4.3. 假设 X 有边界。令 X 为如下商空间 $\hat{X} = X_1 \sqcup X_2/\sim$：其中 X_1 和 X_2 是 X 的两个副本，并且 $x \sim y$ 当且仅当 $x \in \partial X_1$、$y \in \partial X_2$ 和 $x = y$。我们赋予 X 商度量 d，在此情形下其形式如下

$$\hat{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{if } x,y \in X_1 \text{ or } x,y \in X_2, \\ \inf_{z\in\partial X} d(x,z) + d(z,y) & \text{if } x \in X_1, y \in X_2 \text{ or } y \in X_1, x \in X_2. \end{cases}$$

不难证明，X 是闭流形，并且当 X 可定向时它也是可定向的。我们用 ι_1, $\iota_2\colon X \to X$ 表示将 X 分别与 X_1 和 X_2 相对应的 X 到 X 的等距嵌入。给定满足 $\varphi(\partial X) \subset \partial M$ 的映射 $\varphi\colon X \to M$，令 $\hat{\varphi}\colon \hat{X} \to \hat{M}$ 为满足对每个 $x \in X$ 和 $i = 0,1$ 都有 $\hat{\varphi}(\iota_i^X(x)) = \iota_i^M(\varphi(x))$ 的映射。

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xhookrightarrow{\iota_1^M} & \hat{M} & \xhookleftarrow{\iota_2^M} & M_2 \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \uparrow{\scriptstyle\hat{\varphi}} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} \\ X_1 & \xhookrightarrow{\iota_1^X} & \hat{X} & \xhookleftarrow{\iota_2^X} & X_2 \end{array}$$

不难证明，如果 φ 连续或满足利普希茨条件，那么 $\hat{\varphi}$ 也连续或满足利普希茨条件。特别地，X 与 M 同胚，其同胚映射为 $\hat{\varrho}\colon M \to X$。此外，如果 X 可定向，那么 φ 的度 $\deg(\varphi)$ 有定义，并且有 $\deg(\varphi) = \deg(\hat{\varphi})$。最后，我们记录下面的引理，以备后用。

引理 4.4. 如果 X 在 $x \in X \setminus \partial X$ 附近是 (λ, R)-线性可缩的，那么 $\hat{X}$ 在 $\iota_1(x)$ 和 $\iota_2(x)$ 附近是 (λ, R)-线性可缩的，其中 $R = \min\{R, d(x,\partial X)/3\lambda\}$。特别地，如果 $\mathcal{H}^n(\partial X) = 0$，并且 X 几乎处处线性局部可缩，那么 X 几乎处处线性局部可缩。

证明。设 $\hat{x} = \iota_1(x)$。令 $\hat{y} \in B(\hat{x}, \hat{R})$ 且 $r \in (0, \hat{R})$。根据假设，球 $B(y, r)$ 可在 $B(y, \lambda r)$ 内可缩，其中 $y = \iota_1^{-1}(\hat{y})$。注意到 $B(y, \lambda r) \subset B(x, 2\lambda\hat{R})$ 且 $B(x, 2\lambda\hat{R}) \cap \partial X = \emptyset$。因此，限制在 $B(x, 2\lambda\hat{R})$ 上的 ι_1 是一个等距映射，特别地，$B(\hat{y}, r)$ 可在 $B(\hat{y}, \lambda r)$ 内可缩。关于 $\iota_2(x)$ 的证明类似。最后，由于 $\mathcal{H}^n(\iota_1(\partial X)) = 0$，命题的第二部分直接由第一部分得出。□

我们以如下引理结束讨论，它将有助于证明主要定理。

引理 *4.5.* 假设 $\hat{X}$ 具有度量基本类 $\hat{T} \in \mathcal{I}_n(\hat{X})$（模 2）。则 $T = \iota_1^{-1}\#(\hat{T}\ \iota_1(M_1)) \in \mathcal{I}_n(X)$ 定义了 X 的一个度量基本类（模 2）。此外，假设 $\hat{T}$ 具有如下唯一性性质：每当 $\hat{S} \in I_n(X)$ 是一个 n-闭链（模 2）时，存在 $k \in \mathbb{Z}$（或 $k = 0, 1$），使得 $\hat{S} = k \cdot \hat{T}$（或 $S = k \cdot T$ 模 2）。于是，T 对支撑集 $\partial S \subset \partial X$ 或（支撑集 $_2\partial S \subset \partial X$）的整流 $S \in I_n(X)$ 满足同样的唯一性性质。

证明。设 T 是 X 的度量基本类。则存在 $C > 0$ 使得 $\|\hat{T}\| \le C \cdot \mathcal{H}^n_{\hat{X}}$. 由此可知，$T$ 满足相同的不等式，因为 ι_1^X 是等距嵌入。现在，设 $\varphi\colon X \to M$ 是利普希茨映射，且满足 $\varphi(\partial X) \subset \partial M$。于是存在一个利普希茨映射 $\hat{\varphi}\colon X \to M$，满足 $\deg(\varphi) = \deg(\hat{\varphi})$，并且

ˆ$\varphi(\iota_i^X(x)) = \iota_i^M(\varphi(x))$ 对每个 $x \in X$ 和 $i = 0,\ 1$ 都成立。因此，

$$\begin{aligned}\varphi_\# T &= ((\iota_1^M)^{-1} \circ \hat{\varphi} \circ \iota_1^X)_\# T = ((\iota_1^M)^{-1} \circ \hat{\varphi})_\#(\hat{T} \llcorner \iota_1^X(X)) \\ &= (\iota_{1\#}^M)^{-1}(\deg(\hat{\varphi}) \cdot (\hat{[\![M]\!]} \llcorner \iota_1^M(M))) = \deg(\varphi) \cdot [\![M]\!].\end{aligned}$$

最后，令 $S \in \mathbf{I}_n(X)$ 满足 $\mathrm{spt}(\partial S) \subset \partial X$。则 ˆ $S = \iota_{1\#}^X S - \iota_{2\#}^X S$ 定义了 X 中的一个整数 n-闭链。因此，存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $k \cdot T = S$，特别是，

$$k \cdot T = k \cdot \iota_{1\#}^{-1}(\hat{T} \llcorner \iota_1^X(X)) = \iota_{1\#}^{-1}(\hat{S} \llcorner \iota_1^X(X)) = S.$$

ˆ若 T 是一个模 2 度量基本类，则证明类似。 □

4.2.线性局部可缩性与度。设 X 是一个闭度量 n-流形，且其 Hausdorff n-测度有限。下一个引理给出了从欧几里得空间到 X 的双 Lipschitz 映射的连续延拓，这些映射与 X 的拓扑相容。

引理 4.6。设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是紧致的，且 $\varphi\colon\ K \to X$ 是双 *Lipschitz* 映射。假设 φ 的像包含于一个线性局部可缩子集 $B \subset X$ 中。那么，存在 $\varphi\colon\ U \to X$ 的连续延拓，将 φ 延拓到 K 的一个开邻域 U 上，并且 $C > 0$ 满足

$$d(\varphi(x), \overline{\varphi}(y)) \le C\|x - y\| \tag{4.3}$$

对于每个 $x \in K$ 以及任意 $y \in U$。这里， $C > 0$ 仅取决于 n、 φ的双 *Lipschitz* 常数以及 B的线性局部可缩性常数。

该引理是 [5, 引理 5.3] 的局部化版本，且基于相同的论证。

证明。令 $\{Q_i\}_i$ 为 $\mathbb{R}^n \setminus K$的 Whitney 立方体分解，参见 [49, 定理 VI.1.1]。也就是说，这些立方体 $\{Q_i\}_i$ 覆盖 $\mathbb{R}^n \setminus K$，其内部互不相交，并且

$$n \operatorname{diam} Q_i \le d(Q_i, K) \le 4n \operatorname{diam} Q_i \tag{4.4}$$

对于每个 $i \in \mathbb{N}$。令 $\delta > 0$ 充分小，具体取值稍后确定。我们将 U 定义为所有与 δ 邻域相交的立方体 Q_i的并集。令 $U^0 = \{v_1, v_2, \dots\}$为 U的所有顶点构成的集合。对于每个 $l \in \mathbb{N}$，令 $x_l \in K$满足 $d(v_l,\ x_l) \le 2d(Q_i,\ K)$，其中 Q_i是一个以 v_l 为顶点的立方体。我们定义 $\varphi\colon\ U^0 \to X$，使得$\varphi(v_l) = \varphi(x_l)$。令 $v_l,\ v_k \in Q_i$ 为两个顶点，并令 L 为 φ的双 Lipschitz 常数。那么

$$d(\overline{\varphi}(v_l), \overline{\varphi}(v_k)) \le L\|x_l - x_k\| \le L(\operatorname{diam} Q_i + 4d(Q_i, K)) \le 5Ld(Q_i, K) < 5L\delta.$$

因此，当 δ 足够小时，我们可以利用 $\varphi(U^0)$ 包含于一个线性局部可缩子集 $B \subset X$ 这一事实，将 φ 延拓为定义在 U 上的连续映射，使得对每个立方体 $Q_i \subset U$，均有 $\operatorname{diam} \varphi(Q_i) \le cd(\overline{Q}_i,\ K)$。这里， c 仅取决于 n、 L 以及 B 的线性局部可缩常数。最后，令 $x \in K$ 和 $y \in U$。取一个包含 y 的立方体 $Q_i \subset U$，并令 v_l 为 Q_i 的一个顶点。于是

$$d(\varphi(x), \overline{\varphi}(y)) \le L\|x - x_l\| + c \operatorname{diam} Q_i \le (4L + c)d(Q_i, K) \le (4L + c)\|x - y\|.$$

这就完成了证明。 □

我们记录前一个引理的以下推论。

引理 4.7。 设 $\varphi\colon\ \overline{U} \to\ X$ 是引理 *4.6* 中双利普希茨映射$\varphi\colon\ K \to X$ 的一个连续延拓。此外，设 $\pi\colon\ X \to \mathbb{R}^n$ 是利普希茨映射，且设$\psi\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 $\pi \circ \varphi$的一个利普希茨延拓。那么，对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^n$以及每个 $z \in K \cap \psi^{-1}(y)$，局部度 $\deg(\varphi, z)$、$\deg(\pi, \varphi(z))$均有定义，且满足

$$\deg(\overline{\varphi}, z) \cdot \deg(\pi, \overline{\varphi}(z)) = \operatorname{sgn}(\det D_z\psi). \tag{4.5}$$

注意到 (4.5) 蕴含，对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^n$ 以及每个 $x \in \pi^{-1}(y) \cap \varphi(K)$，局部度 $\deg(\pi, x)$ 等于 1 或 -1。此外，取 π 为 φ^{-1} 的一个利普希茨延拓，并令 $\psi =$ 为恒等映射{id14}，可得局部度 $\deg(\varphi, z)$ 对几乎所有的 $z \in K$等于 1 或 -1 。

证明。 令 C 为 (4.3) 中的常数，并令 $L \geq 1$ 为 φ 的双利普希茨常数。暂且固定一个密度点 $z \in K$，使得 ψ 在 z 处可微。于是存在 $r > 0$，使得只要 $u \in B(z, r)$，就存在满足 $\|u - v\| < (2CL)^{-1}\|u - z\|$ 的 $v \in K$。对于这样的 u 和 v，我们有

$$d(\varphi(z), \overline{\varphi}(u)) \geq L^{-1}\|z - v\| - C\|u - v\| \geq (2L)^{-1}\|u - z\|.$$

因此，对所有 $u \in B(z, r) \setminus z$，都有 $\varphi(u) \neq \varphi(z)$，尤其是局部度 $\deg(\varphi, z)$ 有定义。此外，对于 $\varepsilon > 0$，存在 $r > 0$，使得对每个 $u \in B(z, r)$，下式成立：

(1) $\|\psi(z) - \psi(u) - D_z\psi(u - z)\| \leq 2^{-1}\varepsilon\|u - z\|$;
(2) there exists $v \in K$ satisfying $\|u - v\| < (2(\mathrm{Lip}(\psi) + C)^{-1}\varepsilon\|u - z\|$.

由于 ψ 和 $f = \pi \circ \varphi$ 在 K 上一致，我们有

$$\begin{aligned}\|f(z) - f(u) - D_z\psi(u - z)\| &\leq \|\psi(z) - \psi(u) - D_z\psi(u - z)\| + \|\psi(u) - f(u)\| \\ &\leq (2\varepsilon)^{-1}\|u - z\| + \|\psi(u) - \psi(v)\| + \|f(v) - f(u)\| \leq \varepsilon\|u - z\|\end{aligned}$$

对所有 $u \in B(z, r)$ 都成立。因此，$\pi \circ \varphi$ 在 z 处可微，且 $D_z(\pi \circ \varphi) = D_z\psi$。面积公式和余面积公式表明，对几乎所有 $y \in \mathbb{R}^n$，原像 $\psi^{-1}(y) \cap K$ 都是有限集，并且 ψ 在每个 $z \in \psi^{-1}(y) \cap K$ 处都可微，且导数非退化。注意，对于这样的 z，局部度 $\deg(\psi, z)$ 和 $\deg(\pi, \varphi(z))$ 都有定义。由于几乎每个 $z \in K$ 都是密度点，度数给出

$$\mathrm{sgn}(\det D_z\psi) = \mathrm{sgn}(\det D_z(\pi \circ \overline{\varphi})) = \deg(\pi \circ \overline{\varphi}, z) = \deg(\overline{\varphi}, z) \cdot \deg(\pi, \overline{\varphi}(z))$$

对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^n$，以及每个 $z \in K \cap \psi^{-1}(y)$，结论均成立。证明至此完成。 □

前一个引理中的局部度是通过整数系数的奇异同调群定义的。然而，如果使用系数为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的奇异同调群来定义度，该结论仍然成立，记作 $\deg(\varphi, x, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，如第 2.2 节所述。更准确地说，引理 4.7 指出，对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^n$，以及每个 $x \in \pi^{-1}(y) \cap \varphi(K)$，我们有 $\deg(\pi, x, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = [1] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。由此得到以下推论；当 X 光滑时，这是一个众所周知的结果。

推论 4.8。 设 X 是一个闭度量 n-流形，具有有限的 *Hausdorff* n-测度，且设 π: $X \to \mathbb{R}^n$ 是利普希茨映射。若 X 几乎处处线性局部可缩且 n-可整流，则对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^n$，$\#\pi^{-1}(y)$ 为偶数。

注意，一旦我们证明了推论 1.5，假设 X 是 n-可整流的便是多余的。

证明。 由于 X 是 n-可整流的，存在可数多个紧集 $K_i \subset \mathbb{R}^n$ 和双 Lipschitz 映射 φ_i: $K_i \to X$，使得 $\varphi_i(K_i)$ 两两不交，并且

$$\mathcal{H}^n\left(X \setminus \bigcup_i \varphi_i(K_i)\right) = 0.$$

将引理 4.7应用于每个 φ_i，这意味着对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^n$ 以及每个$x \in \pi^{-1}(y)$，原像 $\pi^{-1}(y)$ 都是有限的，并且局部度 $\deg(\pi, x, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 非零。因此，根据度的可加性公式

$$\deg(\pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \sum_{x \in \pi^{-1}(y)} \deg(\pi, x, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \left[\#\pi^{-1}(y)\right] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^n$。由于 X 是闭的，我们有 $\deg(\pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = [0] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；例如参见 [17, 第 269] 页。由此可知，对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^n$，$\#\pi^{-1}(y)$ 都是偶数。□

类似的论证表明，只要 $\pi\colon X \to M$ 是利普希茨映射，且 MX 是闭黎曼流形，那么当 $\deg(\pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 为零时，$\#\pi^{-1}(y)$ 为偶数；否则为奇数。

5. 可定向流形

本节旨在证明定理 1.2。证明分为两部分。我们首先证明，存在一个度量基本循环，使其满足 (1.1) 中的上界。

引理 5.1. 设 X 是一个闭的、定向的度量 n 流形，且其 *Hausdor* *ff* n-测度有限。假设 X 几乎处处线性局部可缩。那么 X 有一个度量基本类 $T \in \mathbf{I}_n(X)$，其参数化 $\{\varphi_i, K_i, \theta_i\}$ 满足条件 $|\theta_i| = 1$，对几乎所有 $x \in K_i$ 及每个 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。设 $X = E \cup P$ 是一个划分，其中 E 是 n-可整流的，而 P 是纯n-不可整流的。存在一个由紧致集 $K_i \subset \mathbb{R}^n$ 构成的可数集族，以及双利普希茨映射 $\varphi_i\colon K_i \to Y$，使得像 $\varphi_i(K_i)$ 两两不相交，并且

$$\mathcal{H}^n\Big(E \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(K_i)\Big) = 0.$$

如有必要，对每个 K_i 进行划分后，我们可以假设每个 φ_i 的像都完全包含在线性局部可缩的 X 子集中。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令$\varphi_i\colon U_i \to C$ 为由引理 4.6 给出的 φ_i 的连续延拓。由引理 4.7 可知，对于几乎所有 $z \in K_i$ 及每个 $i \in \mathbb{N}$，局部度 $\deg(\varphi_i, z)$ 存在，且等于 1 或 -1。我们定义

$$T = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_{i\#}[\![\theta_i]\!]$$

其中 $\theta_i = \deg(\varphi_i, \overline{z})$。现在，设 $\pi\colon X \to \mathbb{R}^n$ 是一个利普希茨映射，并假设$\mathcal{H}^n(\pi(P)) = 0$。暂时固定 $i \in \mathbb{N}$。令 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为 $\pi\circ\varphi_i$ 的利普希茨延拓。引理 4.7 意味着，对于几乎所有 $y \in \mathbb{R}^n$ 以及每个 $z \in \overline{K\cap\psi^{-1}(y)}$，局部度 $\deg(\varphi_i, z)$,$\deg(\pi, \varphi(z))$ 均有定义，并满足

$$\deg(\overline{\varphi}, z) \cdot \deg(\pi, \overline{\varphi}(z)) = \operatorname{sgn}(\det D_z\psi).$$

因此，

$$\begin{aligned}
\varphi_{i\#}[\![\theta_i]\!](1, \pi) &= \int_{K_i} \theta_i(z) \det(D_z\psi)\, d\mathcal{L}^n(z) \\
&= \int_{K_i} \deg(\overline{\varphi}_i, z) \operatorname{sgn}(\det D_z\psi) |\det(D_z\psi)|\, d\mathcal{L}^n(z) \\
&= \int_{K_i} \deg(\pi, \overline{\varphi}(z)) |\det(D_z\psi)|\, d\mathcal{L}^n(z).
\end{aligned}$$

根据面积公式，并且由于 φ_i 是双利普希茨的，我们有

$$\varphi_{i\#}[\![\theta_i]\!](1, \pi) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{x\in\pi^{-1}(y)} \mathbb{1}_{\varphi_i(K_i)}(x) \deg(\pi, x) \right) d\mathcal{L}^n(y).$$

回想一下， $\mathcal{H}^n(\pi(P)) = 0$ ，因此根据度的可加性

$$\begin{aligned} T(1,\pi) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_{i\#}[\![\theta_i]\!](1,\pi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{x\in\pi^{-1}(y)} \deg(\pi,x) \right) d\mathcal{L}^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \deg(\pi)\, d\mathcal{L}^n(y). \end{aligned}$$

由于 X 是闭的，我们有 $\deg(\pi) = 0$，特别地，对每个满足 $\mathcal{H}^n(\pi(P)) = 0$ 的利普希茨映射 $\pi\colon X \to \mathbb{R}^n$，都有 $T(1,\pi) = 0$。若 $\pi\colon X \to \mathbb{R}^n$ 是任意利普希茨映射，则由定理2.3可知，存在一列利普希茨映射$\pi_i\colon X \to \mathbb{R}^n$，它们一致收敛于 π，并满足 $\operatorname{Lip}\pi_i = \operatorname{Lip}\pi$ 以及$\mathcal{H}^n(\pi_i(P)) = 0$ ，对每个 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。由度量流的连续性可知， $T(1,\pi) = \lim_{i\to\infty} T(1,\pi_i) = 0$，因此 $\partial T = 0$。还需证明，对每个利普希茨映射 $\psi\colon X \to M$，都有 $\psi_\# T = \deg(\psi)\cdot[\![M]\!]$。同样，我们先假设 $\mathcal{H}^n(\psi(P)) = 0$。然后，利用面积公式和引理 4.7，按照上文进行计算可得

$$\psi_\#\varphi_{i\#}[\![\theta_i]\!](g,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{x\in\psi^{-1}(\tau^{-1}(y))} \mathbb{1}_{\varphi_i(K_i)}(x) g(\psi(x)) \deg(\tau\circ\psi,x) \right) d\mathcal{L}^n(y)$$

对每个 $i \in \mathbb{N}$以及所有 $(g,\tau) \in \mathcal{D}^n(M)$。此外，由面积公式和余面积公式可知，对几乎每个 $y \in \mathbb{R}^n$ ，原像 $\tau^{-1}(y)$ 是有限的，且不与 $\psi(P)$ 相交，并且对每个 $z \in \tau^{-1}(y)$，我们有 $\psi^{-1}(z)$ 是有限的，且 τ 在 z 处可微并具有非退化导数。因此，由局部度的重数性质，我们有

$$\deg(\tau\circ\psi,x) = \deg(\tau,z)\cdot\deg(\psi,x) = \operatorname{sgn}(\det D_z\tau)\cdot\deg(\psi,x),$$

对每个这样的 y以及每个 $z \in \tau^{-1}(y)$ 和 $x \in \psi^{-1}(z)$。由于 $\mathcal{H}^n(\psi(P)) = 0$，并由度的可加性，我们得到

$$\begin{aligned} \psi_\# T(g,\tau) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{z\in\tau^{-1}(y)} \left(\sum_{x\in\psi^{-1}(z)} \deg(\psi,x) \right) \cdot g(z) \operatorname{sgn}(\det D_z\tau) \right) d\mathcal{L}^n(y) \\ &= \deg(\psi) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{z\in\tau^{-1}(y)} g(z) \operatorname{sgn}(\det D_z\tau) \right) d\mathcal{L}^n(y). \end{aligned}$$

变量替换公式表明 $\psi_\# T = \deg(\psi)\cdot[\![M]\!]$。最后，设$\psi\colon X \to M$ 为任意利普希茨映射。由于 M 是一个闭黎曼 n-流形，存在 M 到欧几里得空间中的双Lipschitz嵌入 ι ，以及 $\iota(M)$ 的一个开邻域上的Lipschitz收缩 η 。我们可以将定理2.3应用于复合映射 $\iota\circ\psi$ ，从而得到一个 $\operatorname{Lip}(\iota\circ\psi)$-利普希茨映射 $\psi'\colon X \to M$ ，它可任意接近 ψ ，并满足 $\mathcal{H}^n(\psi'(P)) = 0$。利用Lipschitz收缩 η, 我们得出存在一个序列 $\psi_i\colon X \to M$ 一致收敛到 ψ ，使得 $\operatorname{Lip}(\psi_i) \le \operatorname{Lip}(\eta\circ\iota\circ\psi)$，并且对每个 $i \in \mathbb{N}$有 $\mathcal{H}^n(\psi_i(P)) = 0$ 。由引理 2.2 可知，当 $i \in \mathbb{N}$ 充分大时，我们有 $\deg(\psi) = \deg(\psi_i)$。因此，由度量流的连续性

$$\psi_\# T(g,\tau) = \lim_{i\to\infty} \psi_{i\#} T(g,\tau) = \lim_{i\to\infty} \deg(\psi_i)\cdot[\![M]\!](g,\tau) = \deg(\psi)\cdot[\![M]\!](g,\tau).$$

对所有 $(g,\tau) \in \mathcal{D}^n(M)$ 均成立。证明至此完成。 □

(1.1)中的下界将是以下引理的直接推论。

引理 5.2. 设 X 是具有有限豪斯多夫n-测度的闭定向度量 n-流形。假设 X 具有度量基本类 $T \in \mathbf{I}_n(X)$。如果 X 在 x附近是(λ, R)-线性局部可缩的，则

$$\|T\|(B(x,r)) \geq c \cdot r^n, \tag{5.1}$$

对每个 $r \in (0, R)$。这里， c 仅取决于 λ 和 n。

论证基本上沿用了 [5, 命题 5.7] 的证明。

证明。 根据切片不等式

$$\int_0^r \mathbf{M}(\partial(T \llcorner B(x,s)))\, ds \leq \|T\|(B(x,r)),$$

对所有 $r > 0$均成立。因此，只需证明存在一个常数 c，它仅取决于 λ 和 n，使得

$$\mathbf{M}(\partial(T \llcorner B(y,r))) \geq c r^{n-1} \tag{5.2}$$

对几乎所有的 $r \in (0, R/2)$。设 $r \in (0, R/2)$ 满足： $T \llcorner B(x,r) \in \mathbf{I}_n(X)$，且 $\partial T \llcorner B(x,r)$ 支撑于 $\{y \in X : d(x,y) = r\}$。假设对于 $c = n(4(5Q+3)D^{1+\frac{1}{n}})^{-(n-1)}$，(5.2) 不成立。这里，$D \geq 1$ 是定理 3.2 中对应于 $k = n-1$ 的常数，而 $Q \geq 1$ 是命题 4.1 中对应于 λ 和 n 的常数。将X 嵌入 $E(X)$，并令 $V \in \mathbf{I}_n(E(X))$ 为定理 3.2 给出的 $U = \partial(T \llcorner B(x,r))$ 的极小填充。因此，

$$\mathbf{M}(V) \leq D\, \mathbf{M}(U)^{\frac{n}{n-1}} < Dcr^n \quad \text{and} \quad \|V\|(B(y,r)) \geq D^{-n} r^n$$

对于每个 $y \in$ 支撑集 V以及所有 $r \in (0, d(y, \text{支撑集 } U))$。由此可得

$$d_H(\operatorname{spt} V, \operatorname{spt} U) \leq c' \cdot r, \tag{5.3}$$

其中 d_H表示豪斯多夫距离，且 $c' = D^{1+\frac{1}{n}} \cdot (cn)^{\frac{1}{n-1}}$。此外，我们设定$V =$支撑集$V$。由此可知，支撑集 V的豪斯多夫维数不超过 n，因此其拓扑维数也不超过 n 。设 $Y = X \cup$支撑集 V，并设 $\pi_0 \colon Y \to X$是一个映射，满足对所有 $x \in X$，均有 $\pi_0(x) = x$；且对所有 $y \in$支撑集V，均有$d(\pi_0(y), y) \leq 2d(X,y)$。利用 (5.3)，不难证明$\pi_0$是 $(5c'r)$- 连续的。回顾一下， $B(x,R)$ 是 (λ, R)- 线性局部可缩的。由于 $5c'r < Q^{-1}R$，命题 4.1 蕴含存在一个连续映射$\pi \colon Y \to X$，满足对所有 $x \in X$，均有 $\pi(x) = x$；并且对所有$y \in$支撑集V，均有 $d(\pi(y), \pi_0(y)) \leq 5Qc'r$。因此，

$$d(\pi(y), y) \leq d(\pi(y), \pi_0(y)) + d(\pi_0(y), y)) \leq (5Q+3)c'r$$

对每个 $y \in$支撑集V。因此，由我们对 c的选取，我们有

$$d_H(\pi(\operatorname{spt} V), \operatorname{spt} U) \leq \frac{r}{4}. \tag{5.4}$$

设 $\varrho \colon X \to M$是一个度为一的同胚，其中 M是一个闭的、定向的、光滑的 n-流形。利用 ϱ 是同胚且 X 是紧致的，我们得出存在 $\varepsilon \in (0, r/2)$，使得

$$N_\varepsilon(\varrho(A)) \subset \varrho\big(N_{\frac{r}{4}}(A)\big) \tag{5.5}$$

对所有 $A \subset X$。此外，根据 [5, 引理5.8], ，并在必要时减小 ε ，每个满足 $d(\varphi, \varrho \circ \pi) < \varepsilon$ 的利普希茨映射 $\varphi \colon Y \to M$ 都满足

$$\varphi(X \setminus B(x,r)) \subset \varrho(X \setminus B(x, r/2)). \tag{5.6}$$

引理 2.1 和引理 2.2 意味着存在 $\varphi \colon Y \to M$ 利普希茨，且$d(\varphi, \varrho \circ \pi) < \varepsilon$并且 $\deg(\varphi) = 1$。令 $W = \varphi_\#(T \llcorner B(x,r) - V) \in \mathbf{I}_n(M)$，并注意到

即 $\partial W = 0$。由 (5.4) 和 (5.5) 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{spt}(\varphi_\# V) &\subset N_\varepsilon(\varrho(\pi(\operatorname{spt} V))) \subset \varrho\big(N_{\frac{r}{4}}(\pi(\operatorname{spt} V))\big)\\ &\subset \varrho\left(\left\{y \in X : \frac{r}{2} < d(x,y) < \frac{3r}{2}\right\}\right).\end{aligned}$$

因此，支撑集 $W \subset \varrho(B(x,r)) \neq M$ 以及 M 中的常值定理，[19, 推论 3.13], 蕴含 $W = 0$。此外，

$$\varphi_\#(T \llcorner B(x,r)) = [\![M]\!] - \varphi_\#(T \llcorner (X \setminus B(x,r)))$$

并且因此由 (5.6)

$$\operatorname{spt}\big(\varphi_\#(T \llcorner (X \setminus B(x,r))\big) \subset \varphi(X \setminus B(x,r)) \subset \varrho(X \setminus B(x,r/2)).$$

我们得出 $\varrho(B(x,r/2)) \subset$ 支撑集 $\big(\varphi_\#(T \llcorner B(x,r))\big)$，从而 $W \neq 0$。这导致矛盾并完成证明。□

现在我们可以证明紧致定向度量流形的度量基本类的存在性。

定理 *1.2* 的证明。设 X 是一个具有 Hausdorff n-测度的度量空间，它几乎处处线性局部可缩，并且同胚于一个紧致定向光滑 n-流形。我们首先在 X 无边界这一附加假设下证明该定理。设 $T \in \mathbf{I}_n(X)$是由引理 5.1 给出的整 n-闭链。由于 X 几乎处处线性局部可缩，引理 5.2 蕴含

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\|T\|(B(x,r))}{r^n} > 0$$

几乎对所有 $x \in X$ 都成立。因此，T 的特征集等于 X。此外，T 可由参数化 $\{\varphi_i, K_i, \theta_i\}$ 给出，其中对几乎所有 $x \in K_i$ 以及每个 $i \in \mathbb{N}$，$|\theta_i(x)| = 1$。由此可得 $\|T\| = \lambda \mathcal{H}^n$，其中 $\lambda \in L^1(X)$ 满足 $n^{-n/2} \leq \lambda \leq n^{n/2}$。最后，[5, 命题 5.5] 蕴含 T 是 $H_n^{\mathrm{IC}}(X)$ 的一个生成元。这就完成了 X 无边界时的证明。

现在，假设 X 有边界，且 $\mathcal{H}^n(\partial X) = 0$。令 $\hat{}X$ 为将 X 的两个副本沿其边界粘合而得到的闭流形 $\hat{}$，并在 X 上赋予商度量 $\hat{}$；参见定义 4.3。由引理 4.4 可知，X 几乎处处线性局部可缩。因此，根据证明的第一部分，X 有一个度量基本类 $\hat{}T \in \mathbf{I}_n(\hat{}X)$，它生成 $H_n^{\mathrm{IC}}(\hat{}X)$，并且满足

$$n^{-n/2}\mathcal{H}^n_{\hat{X}} \leq \|\hat{T}\| \leq n^{n/2}\mathcal{H}^n_{\hat{X}}.$$

$\hat{}$设 $\iota\colon X \to X$ 是一个等距嵌入，它将 X 与其在 $\hat{}X$ 中的一个副本等同。由引理 4.5，n-流 $T = \iota^{-1}{}_\#(\hat{}T \llcorner \iota(X)) \in \mathcal{I}_n(X)$ 定义了 X 的一个度量基本类，并满足

$$n^{-n/2}\mathcal{H}^n_X \leq \|T\| \leq n^{n/2}\mathcal{H}^n_X$$

并且，每当 $S \in \mathbf{I}_n(X)$ 满足 $\operatorname{spt} S \subset \partial X$ 时，就存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $k \cdot T = S$。证明至此完成 □

我们以度量流形可整流性结果的证明结束本节。

推论 *1.5* 的证明。如前所述，我们只假设 X 几乎处处线性可缩。设 X 是将两个 X 沿其边界粘合所得的流形。由引理 4.4 可知，X 也几乎处处线性可缩。由于 X 等距嵌入到 X 中，只需对闭流形证明该定理。若 X 可定向，则由定理 1.2 可知，存在 $T \in \mathbf{I}_n(X)$，其集合为 $T = X$，因此 X 是 n-可整流的。最后，

˜若 X 不可定向，则引理 4.2 蕴含可定向双覆盖 $X\tilde{}$ 几乎处处线性局部可缩。由上述结果， X 是 n-可整流的。˜我们得出结论， X 也为 n-可整流的，因为 X 与 X 局部等距。□

6. Non-orientable manifolds

本节给出模 2 度量基本类的各种存在性结论的证明。

6.1. 线性局部可缩性。

我们先给出以下引理。

引理 6.1。 设 X 是一个紧度量空间，且 $T \in \mathbf{I}_n(X)$ 是一个整数n-流，满足对于所有利普希茨映射 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^n$，均有 $\varphi_\# T = 0$ 模 2 。那么，$\partial T = 0$ 模 2。

证明。 我们先在附加假设 X 是有限维向量空间 V 的子集的条件下证明该结论。显然，对 V 的度量作双利普希茨变换不会影响该结论。因此，我们可以假设 V 等于赋有标准欧几里得距离的某个 $\mathbb{R}^N$ 。设 $E \subset X$ 是 $\|\partial T\|$ 集中于其上的 $(n-1)$-可整流集。由定理 2.4，存在一个 1-利普希茨映射 $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ，使得 $\mathcal{H}^{n-1}(\varphi(E)) = \mathcal{H}^{n-1}(E)$。由此可知，$\varphi$ 保质量，即对于每个博雷尔集 $B \subset E$，都有 $\mathcal{H}^{n-1}(\varphi(B)) = \mathcal{H}^{n-1}(B)$；例如参见 [39, 引理 3.1]。结合 [7, 引理 7.2], ，我们得出结论：存在可数个两两不相交的子集 $E_i \subset E$ ，它们除去一个 $\mathcal{H}^{n-1}$-测度为零的集合外覆盖 E ，且对于每个 $i \in \mathbb{N}$ ， $\varphi\colon E_i \to \mathbb{R}^n$ 都是双利普希茨的，并且 $\varphi(E_i)$ 也两两不相交。因此，

$$\partial T = \sum_i (\partial T) \llcorner E_i = \sum_i \varphi_\#^{-1}(\varphi_\#(\partial T) \llcorner E_i).$$

由于 $\varphi_\# \partial T = 0$ 模 2 与 $\varphi(E_i)$ 两两不相交，因此对每个 $i \in \mathbb{N}$，都有 $\varphi_\#(\partial T) \llcorner E_i = 0$ 模 2，尤其是 $\partial T = 0$ 模 2。现在我们证明一般情形。将 X 嵌入 l^∞。由引理 3.6 可知，存在可数多个有限维线性子空间 $V_i \subset l^\infty$ 和 1-Lipschitz 映射 $\pi_i\colon X \to V_i$，使得 $\mathcal{F}_2(\partial T - \pi_{i\#}\partial T) \to 0$当 $i \to \infty$。暂且固定 $i \in \mathbb{N}$。若 $\varphi\colon V_i \to \mathbb{R}^n$是利普希茨映射，则存在 φ 的利普希茨延拓 $\tilde{\varphi}\colon l^\infty \to \mathbb{R}^n$ ，并且我们有$\varphi_\#(\pi_{i\#}T) = (\tilde{\varphi} \circ \pi_i)_\# T = 0$模 2。因此，对每个利普希茨映射 $\varphi\colon V_i \to \mathbb{R}^n$，都有 $\varphi_\#(\pi_{i\#}T) = 0$ 模 2。由证明的第一部分可知，这意味着 $\partial(\pi_{i\#}T) = 0$模 2。由此得出 $\partial T = 0$ 模 2。□

接下来，我们证明闭度量流形中模 2 度量基本类的存在性。

命题 6.2. 设 X 是一个几乎处处线性局部可缩的闭不可定向度量 n-流形。则 X 具有度量基本类 $T \in \mathbf{I}_n(X)$ 模2 ，满足

$$C^{-1}\mathcal{H}^n \le \|T\|_2 = \|T\| \le C\mathcal{H}^n.$$

这里， $C > 0$ 仅依赖于 n。

˜ ˜证明。 设 X 为 X 的可定向双覆盖，并设 $\pi\colon \tilde{X} \to X$ 为覆盖-˜映射。由引理 4.2 可知， $\tilde{X}$ 几乎处处线性局部˜可缩。因此，定理 1.2 蕴含 $\tilde{X}$ 具有度量基本类˜ ˜$T \in \mathbf{I}_n(\tilde{X})$，满足

$$C^{-1} \cdot \mathcal{H}^n_{\tilde{X}} \le \|\tilde{T}\| \le C \cdot \mathcal{H}^n_{\tilde{X}}, \tag{6.1}$$

其中 $C > 0$ 仅取决于 n。存在 $R > 0$ ，使得对于每个 $x \in X$ 及所有$0 < r < R$，原像 $\pi^{-1}(B(x, r))$ 由两个连通分支组成，且 π 在任一连通分支上的限制都是等距映射。设 x_1、…、$x_N \in X$ 和 r_1、…、$r_N \in (0, R)$ 是一组

具有以下性质的点与半径集合。球 $B_i = B(x_i,\ r_i)$ 覆盖 X，且对于每个 $i = 1、\dots、N$，切片 $\langle T,\ \pi_i,\ r_i\rangle$ 是一个整系数 $(n-1)$-闭链，其中 $\pi_i\colon X \to \mathbb{R},\quad x \mapsto d(x_i,\ \pi(x))$。注意，对于每个 $i \in \mathbb{N}$,

$$\partial(\tilde{T} \llcorner \pi^{-1}(B_i)) = \partial(\tilde{T} \llcorner B(x_i^+, r_i)) + \partial(\tilde{T} \llcorner B(x_i^-, r_i)) = \langle \tilde{T}, \pi_i, r_i\rangle,$$

其中 $\pi^{-1}(x_i) = \{x_i^+, x_i^-\}$，因而 $\tilde{T} \quad \pi^{-1}(B_i) \in \mathbf{I}_n(\tilde{X})$。设 $U_1 = B_1$，并对$i = 2, \dots, N$令 $U_i = B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$。由此可知，$\{U_i\}_{i=1}^N$是 X的一个划分，且对每个 $i = 1, \dots, N$，原像 $\pi^{-1}(U_i)$ 由两个连通分支 $U_i^+, U_i^- \subset \tilde{X}$组成，使得 $\tilde{T} \quad U_i^+, \tilde{T} \quad U_i^- \in \mathbf{I}_n(\tilde{X})$。对每个 $i = 1, \dots, N$, 选取一个连通分支 $\tilde{U}_i$（属于 $\pi^{-1}(U_i)$），并定义

$$T = \sum_i^N \pi_\#(\tilde{T} \llcorner \tilde{U}_i) \in \mathbf{I}_n(X).$$

由于这些 U_i 两两不交，且 π 在每个 U_i 上都是等距映射，故由 (6.1) 可知

$$C^{-1}\mathcal{H}_X^n \le \|T\| \le C\mathcal{H}_X^n.$$

此外，由定理 1.2，存在 T的一个参数化 $\{\varphi_j, K_j, \theta_j\}$，使得对几乎所有 $x \in K_j$ 以及每一个 $j \in \mathbb{N}$，有$|\theta_j(x)| = 1$。我们由此得出，整n-流 T 已经是一个模 2 约化，因而引理 3.3 蕴含$\|T\|_2 = \|T\|$。接下来，我们证明 $\partial T = 0$ 模 2。设 $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ 为利普希茨的。由推论 4.8 与推论 1.5，对几乎所有 $z \in \mathbb{R}^n$，$\#f^{-1}(z)$为偶数。因此，存在 T的一个参数化 $\{(\varphi_{k,l}, \varphi_N), (K_{k,l}, N), (\theta_{k,l}, \theta_N)\}$，使得对几乎所有$y \in K_k$、$l$以及每一个 k、$l \in \mathbb{N}$，有$|\theta_{k,l}(y)| = 1$，并且 $\mathcal{H}^n(f(N)) = 0$以及

$$\bigcup_l \varphi_{k,l}(K_{k,l}) = f^{-1}(\{z \in \mathbb{R}^n : \#f^{-1}(z) = 2k\}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。注意，在 $K_{k,l}$ 的子集上改变某些 $\theta_{k,l}$ 的符号，会得到相同的模 2 流。因此，我们可以假设对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有

$$f_\#\left(\sum_l \varphi_{k,l\#}[\![\theta_{k,l}]\!]\right) = 2k \cdot [\![A_k]\!],$$

其中 $A_k = \{z \in \mathbb{R}^n : \#f^{-1}(z) = 2k\}$，因此

$$f_\# T = 2S = 2\left(\sum_{k=1}^\infty k \cdot [\![A_k]\!]\right).$$

由于 f 是利普希茨的，面积公式表明 $S \in \mathcal{I}_n(\mathbb{R}^n)$ 具有有限质量，因此 $f_\# T = 0$ 模 2。引理 6.1 表明 $\partial T = 0$ 模 2。最后，设 M 是一个光滑的 n-流形，与 X 同胚，并设 $\psi\colon X \to M$ 是利普希茨的。仿照推论 4.8 可证明，对几乎所有 $z \in M$，若 $\deg(\psi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = [0]$，则原像的个数 $\#\psi^{-1}(z)$ 为偶数；若 $\deg(\psi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = [1]$，则为奇数。采用与上文相同的论证，并使用适配于 ψ 的 T 参数化，可知存在 $S \in \mathcal{I}_n(M)$，使得 $\psi_\# T = \deg(\psi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cdot [\![M]\!] + 2S$。特别地，$\psi_\# T = \deg(\psi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cdot [\![M]\!]$ 模 2。证明至此完成。□

最后，我们证明不可定向度量流形中模 2 度量基本类的唯一性。证明是对 [5, 命题5.5] 的改编。

引理6.3。设 X 是一个闭的、不可定向的度量 n-流形，具有有限的豪斯多夫 n-测度。假设 X 具有一个度量基本类 $T \in \mathcal{I}_n(X)$ 模2。那么，任意满足 $\partial S = 0$ 模 2 的 $S \in \mathcal{I}_n(X)$，对于 k 均有 $kT = S$ 模 2，且其值只能是0 或1。

证明。设 $\varrho\colon X \to M$ 是一个同胚，其中 M 是闭的不可定向黎曼流形。由引理 2.2，存在 $\delta > 0$，使得每当

φ, ψ: $X \to M$ 是满足 $d(\varphi, \psi) < 2\delta$ 的利普希茨映射，则存在一个利普希茨同伦 H: $[0,1] \times X \to M$，连接 φ 和 ψ。由式 (3.5) 可知

$$\partial H_{\#}(\llbracket 0,1 \rrbracket \times S) + H_{\#}(\llbracket 0,1 \rrbracket \times \partial S) = \varphi_{\#} S - \psi_{\#} S.$$

由于 $\mathcal{I}_{n+1}(M) = 0$，我们有 $\partial H_{\#}(\llbracket 0,1 \rrbracket \times S) = 0$。此外， $\partial S = 0$ 模 2，因此 $\varphi_{\#} S = \psi_{\#} S$ 模 2。由 $\llbracket M \rrbracket$的唯一性，我们得出存在一个 k，其值为 0 或 1，使得对于每个满足 $d(\varphi, \varrho) < \delta$ 的利普希茨映射 φ: $X \to M$，都有 $\varphi_{\#} S = k \cdot \llbracket M \rrbracket$ 模 2。将 X嵌入 l^∞。我们声称，对于每个$\varepsilon > 0$，都存在 $U \in \mathcal{I}_{n+1}(l^\infty)$，满足支撑集$U \subset N_\varepsilon(X)$，且 U 是 $S - kT$的模 2 填充，也就是说， $\partial U = S - kT$模 2。令 $\varepsilon > 0$。我们首先对 ϱ^{-1}应用引理 2.1，得到一个利普希茨映射 g: $M \to l^\infty$，满足 $d(\varrho^{-1}, g) < \varepsilon/2$。然后我们再次使用引理 2.1，找到一个 f: $X \to M$，它是利普希茨映射，且满足 $d(\varrho, f) < (\varepsilon/2\,\mathrm{Lip}(g))$。由此可得

$$d(g \circ f, \varrho^{-1} \circ \varrho) \le d(g \circ f, g \circ \varrho) + d(g \circ \varrho, \varrho^{-1} \circ \varrho) < \varepsilon.$$

令 $Q = S - kT$。不妨设 $\deg(f, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 1$。因此，由于 T是模 2 度量基本类，我们有 $f_{\#} Q = 0$ 模 2，特别地，$(g \circ f)_{\#} Q = 0$ 模 2。令 H: $[0,1] \times X \to l^\infty$ 为 $(g \circ f)$ 与包含映射 ι_X（将 X包含到 l^∞中）之间的直线同伦。设 $U = H_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times Q) \in \mathcal{I}_{n+1}(l^\infty)$。对所有 $x \in X$及每个 $t \in [0,1]$，都有 $H(t, x) \in N_\varepsilon(X)$，因此 $\operatorname{spt} U \subset N_\varepsilon(X)$。此外，利用 (3.5) 可得

$$\partial U = Q - (g \circ f)_{\#} Q - H_{\#}(\llbracket 0,1 \rrbracket \times \partial Q).$$

由于 $\partial Q = 0$ 模 2 且 $(g \circ f)_{\#} Q = 0$ 模 2，我们得出 U是 $Q = kT - S$的模 2 填充。这就证明了该断言。最后，我们证明 $kT = S$模 2。引理 3.6 蕴含存在可数多个有限维线性子空间 $V_i \subset l^\infty$ 以及 1-利普希茨映射 π_i: $l^\infty \to V_i$，使得 $\mathcal{F}_2(Q - \pi_{i\#} Q) \to 0$（当 $i \to 0$时）。暂时固定 $i \in \mathbb{N}$。令 $N = \dim V_i$, $Y = \pi_i(X)$ 且 $Q' = \pi_{i\#} Q \in \mathcal{I}_n(V_i)$。由该断言可知，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 Q' 的模 2 填充 U，满足 $\operatorname{spt} U \subset N_\varepsilon(Y) \subset V_i$。我们对模 2 整数可求长流应用 Federer 和 Fleming 变形定理的一个改进版本 [18, 定理 4.2.9$'$]。更确切地说，对于 $\eta > 0$，我们将 V_i 立方剖分为边长为 η的欧几里得立方体。接着，我们使用径向投影，先将 Q' 前推到 $(N-1)$ 维骨架，再前推到 $(N-2)$ 维骨架，如此继续，直到抵达维数为 n 的骨架。由于 $\mathcal{H}^{n+1}(Y) = 0$，我们可以选取投影中心位于 Y之外的投影来完成这一过程；参见 [28, 第 3]章和 [40, 第 5]章。由此可知，所得流 P是通过定义在 Y上的利普希茨映射 p对 Q'作前推得到的，并且 $\mathcal{F}_2(Q' - P) \le C\eta\,\mathbf{M}(Q')$，其中 C仅取决于 N。由于立方剖分的 n-骨架是绝对利普希茨邻域收缩，我们可以将 p 延拓到 Y的一个开邻域。因此，存在 Q' 的模 2 填充 U，使得前推 $p_{\#} U$ 有定义。这意味着存在一个位于n-骨架中的整数可求长流 $U' \in \mathcal{I}_{n+1}(V_i)$，满足 $\partial U' = P$模 2。然而，任何这样的 U'都必须为零，因此，$P = 0$ 模 2。由于 $\eta > 0$ 是任意的，我们得出 $\pi_{i\#} Q = Q' = 0$ 模 2。利用 $\mathcal{F}_2(Q - \pi_{i\#} Q) \to 0$ （当 $i \to 0$时），可得 $Q = 0$ 模 2，特别地，$kT = S$ 模 2。证明完毕。

□

定理 1.4 的证明是前述结果的直接推论。

定理 *1.4* 的证明。 设 X 是一个具有有限豪斯多夫 n-测度、几乎处处线性可收缩且同胚于紧致不可定向光滑 n流形的度量空间。首先，我们假设 X 是闭的。由命题 6.2 可知，存在 $T \in \mathbf{I}_n(X)$，其满足模 2 条件 $\partial T = 0$

$$C^{-1}\mathcal{H}^n \le \|T\| = \|T\|_2 \le C\mathcal{H}^n, \tag{6.2}$$

其中 $C > 0$仅依赖于 n。由引理6.3，流 T 在以下意义下是唯一的：若 $S \in \mathcal{I}_n(X)$ 满足模 2 条件 $\partial S = 0$，则对于 k 等于 0 或 1，$kT = S$满足模 2 条件。现在，假设 X 有边界，并且满足 $\hat{\mathcal{H}}^n(\partial X) = 0$。令 X 为沿 $\hat{}$ 边界粘合两份 X 所得的流形。引理 4.4 表明，X 同样几乎处处线性可收缩。令 $T \in \mathbf{I}_n(X)$为证明第一部分中构造的 X 的模 2 度量基本类。由引理 4.5 可知，$(\iota^{-1})_\# \hat{T}$ $\iota(X)$ 在 X中定义了唯一的模 2 度量基本类。这里，$\iota\colon X \to X$ 是嵌入，它将 X 与 X中的其中一份相对应。由于 ι 是等距嵌入，T也满足 (6.2)。证明至此结束。□

6.2. **长田维数**。在本节中，设 X 表示一个具有有限豪斯多夫 n-测度且长田维数小于 N 的度量空间。此外，设 $\varrho\colon M \to X$ 为一个同胚，其中 M 是一个紧致的不可定向黎曼 n-流形。将 X 嵌入其内射包 $E(X)$。

引理 6.4。假设 M 是闭的。则对每一个 $\varepsilon > 0$，存在一个利普希茨映射 $\eta\colon M \to E(X)$，使得 $d(\varrho, \eta) \leq \varepsilon$ 且 $\mathbf{M}_2(\eta_\# [\![M]\!]) \leq C\mathcal{H}^n(X)$。这里，$C$ 仅依赖于 X 的数据。

证明。设 $\varepsilon > 0$。由定理 2.6，存在一个有限的 n 维单纯复形 Σ，配备 l^2 距离 $|\cdot|_{l^2}$，且 Σ 中的每个单纯形都是边长为 ε 的标准欧几里得单纯形。此外，存在仅依赖于 X 的数据的 $C > 0$，以及具有下列性质的利普希茨映射 $\varphi\colon X \to \Sigma$、$\psi\colon \Sigma \to E(X)$：凸包$(\varphi(X)) = \Sigma$，$\psi$ 在每个单纯形上是 C-利普希茨的，对每个 $x \in X$ 有 $d(\psi(\varphi(x)), x) \leq C\varepsilon$，且 $\mathcal{H}^n(\varphi(X)) \leq C\mathcal{H}^n$。回想凸包 $(\varphi(X))$ 是 Σ 中包含 $\varphi(X)$ 的最小子复形，因此 $\mathcal{H}^n(\Sigma) \leq C\mathcal{H}^n(X)$。由于 Σ 是绝对利普希茨邻域收缩，引理 2.1 蕴含存在一个利普希茨映射 $\xi\colon M \to \Sigma$，满足 $d(\xi, \varphi \circ \varrho) < \varepsilon$，并且对所有 $z \in M$，$\xi(z)$、$(\varphi \circ \varrho)(z)$ 包含在相邻的单纯形中。令 $\eta = \psi \circ \xi$，并设 $z \in M$。由 [5, 引理 2.3] 可知，存在 $y \in \Sigma$，它与$\xi(z)$ 和 $(\varphi \circ \varrho)(z)$ 包含在同一个单纯形中，并且使得

$$|\xi(z) - y|_{l^2} + |y - (\varphi \circ \varrho)(z)|_{l^2} \leq 4\sqrt{n}|\xi(z) - (\varphi \circ \varrho)(z)|_{l^2}.$$

因此，利用 ψ 在每个单纯形上都是 C-利普希茨的这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} d(\eta(z), \varrho(z)) &\leq d(\psi(\xi(z)), \psi(\varphi(\varrho(z)))) + d(\psi(\varphi(\varrho(z))), \varrho(z)) \\ &\leq C\big(|\xi(z) - y| + |y - \varphi(\varrho(z))|\big) + C\varepsilon \leq (4\sqrt{n} + 1)C\varepsilon. \end{aligned}$$

如有必要，将 $\xi_\# [\![M]\!]$ 替换为模 2 约化后，我们可以假设$\mathbf{M}_2(\eta_\# [\![M]\!]) \leq c_n \mathcal{H}^n(\eta(M))$，其中 c_n 仅依赖于 n。因此，由于 ψ 在 Σ 的每个单纯形上都是C-利普希茨的

$$\mathbf{M}_2(\eta_\# [\![M]\!]) \leq c_n \mathcal{H}^n(\eta(M)) \leq c_n \mathcal{H}^n(\psi(\Sigma)) \leq c_n C^n \mathcal{H}^n(\Sigma) \leq c_n C^{n+1} \mathcal{H}^n(X).$$

这就完成了证明。□

现在我们可以证明定理 1.6。

$\hat{}$**定理 *1.6* 的证明。**令 X 为将两个 $X\hat{}$ 沿其边界粘合得到的流形。由此可知，X 的长田维数也不超过 N。因此，根据引理 4.5，只需在额外假设 X 为闭的情况下证明该定理，即可得到一般情形的结论。对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $\eta_k\colon M \to E(X)$ 为引理 6.4 针对 $\varepsilon_k = 1/k$ 给出的映射，并令 $T_k = \eta_{k\#} [\![M]\!] \in \mathbf{I}_n(E(X))$。我们有

$$\sup_i \mathbf{M}_p(T_i) + \mathbf{M}_p(\partial T_i) < C\mathcal{H}^n(X) < \infty,$$

其中 C 仅取决于 X 的数据。根据定理 3.5，存在 $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的一个子列（仍记为 $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$）以及 $S\in\mathcal{F}_n(E(X))$，使得当 $k\to\infty$ 时，$\mathcal{F}_2(T_k-S)\to 0$。显然，$S$ 是一个模 2 周期。由于对每个 $k\in\mathbb{N}$，$d(\varrho,\eta_k)<\varepsilon_k$，每个 T_k 的支撑都包含在 ε_k 邻域内。我们由此得出，$\|S\|_p$ 支撑在 X 上。因此，命题 3.7 表明存在 $T\in\mathcal{I}_n(X)$，使得 $S=T$ 模 2。根据引理 3.3，并在必要时将 T 约化为模 2，我们可以假设

$$\|T\|=\|T\|_2\le C\mathcal{H}^n,$$

其中 $C>0$ 仅取决于 n。现在，设 $\varphi\colon X\to M$ 是一个利普希茨映射。由于M是绝对利普希茨邻域收缩，我们可以将 φ 延拓到 X的某个邻域。因此，当 $k\in\mathbb{N}$ 充分大时，复合映射 $\varphi\circ\eta_k$是良定义的，并且对于这样的 k，我们有

$$\varphi_\#T_k=(\varphi\circ\eta_k)_\#[\![M]\!]=\deg(\varphi\circ\eta_k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cdot[\![M]\!].$$

由于对每个 $k\in\mathbb{N}$，$d(\eta_k,\varrho)<\varepsilon_k$，复合映射 $\varphi\circ\eta_k$ 一致收敛于$\varphi\circ\varrho$。由引理 2.2 可知，当 k 充分大时，映射 $\varphi\circ\eta_k$ 与$\varphi\circ\varrho$ 同伦。因此，利用度的同伦不变性以及ϱ是一个同胚这一事实，我们得到

$$\varphi_\#T_k=\deg(\varphi\circ\eta_k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cdot[\![M]\!]=\deg(\varphi\circ\varrho,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cdot[\![M]\!]=\deg(\varphi,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cdot[\![M]\!],$$

对所有充分大的 k均成立。取极限可得 $\varphi_\#T=\deg(\varphi,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cdot[\![M]\!]$。证明至此完成。□

6.3. 曲面。 设 X 是一个豪斯多夫 2-测度有限、且与闭光滑曲面 M同胚的度量空间。由 [43, 定理 1.3] 可知，存在 M 上的一个常曲率黎曼度量 g，以及一个连续、满射、单调映射 $\psi\in W^{1,2}(M,X)$，该映射是弱保角的；另见 [42,44]。若一个映射是从 M 到 X的同胚的均匀极限，则称其为单调映射。关于弱共形映射的更多细节，请参见 [43]；关于度量空间中索伯列夫映射理论的更多信息，请参见[23]。完全仿照 [5, 命题 6.1] 中的证明，可以证明存在可数多个博雷尔集$A_k\subset M$，使得 ψ 限制在每个 A_k 上都是 $2k$-利普希茨的，并且 $\mathcal{H}^n(M\setminus A_k)\le\varepsilon_k/k^2$，其中 ε_k 是一个收敛到 0 的数列。利用这一点，定理 1.7 的证明并不困难。

定理 1.7 的证明。 由引理 4.5，只需在 X 与一个闭的不可定向光滑曲面 M 同胚时证明该定理。令 $\psi\in W^{1,2}(M,X)$ 和 $A_k\subset M, k\in\mathbb{N}$ 如上所述。将 X 嵌入 $E(X)$ 中。由于 ψ 在每个 A_k 上的限制都是 $2k$-利普希茨的，因此存在 $2k$-利普希茨延拓 $\psi_k\colon M\to E(X)$ of$\psi|_{A_k}$。对于 $k\in\mathbb{N}$，我们定义 $T_k=\psi_{k\#}[\![M]\!]\in\mathbf{I}_2(E(X))$。我们有

$$\mathbf{M}_2(T_k)\le\mathbf{M}_2(\psi_{k\#}([\![M]\!]\llcorner A_k))+\mathbf{M}_2(\psi_{k\#}([\![M]\!]\llcorner M\setminus A_k))\le\mathrm{vol}^*(\psi|_{A_k})+4\varepsilon_k.$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$。这里，$\mathrm{vol}^*(\psi|_{A_k})$ 表示 ψ 的（参数化）格罗莫夫质量$*$ 体积；见 [37, 38]。由于 ψ属于 $W^{1,2}(M,X)$，我们有 $\mathrm{vol}^*(\psi)$ 一致有界。注意，对所有 $k\in\mathbb{N}$，$\partial T_k=0$ 模 2。因此，由定理 3.5 可知，存在 $S\in\mathcal{F}_2(E(X))$，使得 $\mathcal{F}_2(T_k-S)\to 0$ 当 $k\to\infty$。不难证明，ψ_k 一致收敛到 $\psi\colon M\to X$。因此，对某个 $\delta_k\to 0$，$\mathrm{spt}\,T_k\subset N_{\delta_k}(X)$，特别地，$\mathrm{spt}_2\,T\subset X$。由命题 3.7 可知，存在 $T\in\mathcal{I}_2(X)$，使得 $S=T$ 模 2。根据引理 3.3，必要时将 T 替换为模 2 约化后，我们不妨设 $\|T\|_2=\|T\|\le 2\mathcal{H}^2$。现在，令 $\varphi\colon X\to M$ 为利普希茨映射。回顾一下，ψ 是来自 $M\to X$ 的同胚的均匀极限，因此 $\deg(\psi,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=[1]\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。我们可以将 φ 延拓为 X 在 $E(X)$ 中某个开邻域上的利普希茨映射。这是可行的，因为 M 是绝对利普希茨邻域收缩。因此，当 $k\in\mathbb{N}$ 充分大时，复合映射 $\varphi\circ\psi_k\colon M\to M$ 有定义，且

一致收敛到 $\varphi \circ \psi$。因此，当 $k \in \mathbb{N}$ 充分大时，由引理 2.2 和度的重数性质可得

$$\varphi_\# T_k = (\varphi \circ \psi_k)_\# [\![M]\!] = \deg(\varphi \circ \psi_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cdot [\![M]\!] = \deg(\varphi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cdot [\![M]\!].$$

由此可得 $\varphi_\# T = \deg(\varphi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cdot [\![M]\!]$。最后， T 的唯一性（模 2）由引理6.3得出。证明至此完成。□

References

[1] Tarn Adams. 巴拿赫空间中的平坦链。 *J. Geom. Anal.*, 18(1):1–28, 2008. [2] Luigi Ambrosio and Mikhail G. Katz. 度量空间中模 p 平坦流及填充半径不等式。 *Comment. Math. Helv.*, 86(3):557–592, 2011. [3] Luigi Ambrosio and Bernd Kirchheim. 度量空间中的流。 *Acta Math.*, 185 80, 2000 1 1( ): – .[4] Luigi Ambrosio and Stefan Wenger. 系数取值于 Z$_p$ 的巴拿赫空间中平坦链的可求 rectifiability。 *Math. Z.*, 268(1-2):477–506, 2011. [5] Giuliano Basso, Denis Marti, and Stefan Wenger. 与流形同胚的度量空间上的几何与解析结构。 *Duke Math. J.*, 174(9):–, 2025. [6] Giuliano Basso, Stefan Wenger, and Robert Young. 度量空间子集中的无扭曲填充。 *Adv. Math.*, 423:54, 2023. 编号/序号 109024。[7] David Bate. 纯不可求 rectifiability 的度量空间与利普希茨函数的扰动。 *Acta Math.* 224 1 1 , ( ): –65, 2020.

[8] David Bate and Jakub Tak´ac. 可求长度量空间的典型利普希茨像。 *J. Reine Angew. Math.* 810 139 188, 2024 , : – . [9] David Bate and Julian Weigt. Alberti表示、度量空间的可求长性，以及满足 PDE 的测度的高阶可积性。 *arXiv preprint arXiv:2501.02948*, 2025. [10] Serguei G. Bobkov and Christian Houdr´e. 等周不等式与索伯列夫型不等式之间的一些联系。 *Mem. Amer. Math. Soc.*, 129(616):viii+111, 1997. [11] Mario Bonk and Bruce Kleiner. 二维度量球面的拟对称参数化。 *Invent. Math.*, 150(1):127–183, 2002. [12] Guy C. David. 流形之间的双利普希茨片段。 *Rev. Mat. Iberoam.*, 32 218, 2016 1 175( ): – .[13] Guy C. David. 具有尖锐维数的非单射 Assouad型定理。 *J. Geom. Anal.*, 34 2 45, 19, 2024 ( ):论文编号 .[14] Thierry De Pauw. 巴拿赫空间中多面体 G 链的逼近。 *Z. Anal. Anwend.*, 33 3 311( ): –334, 2014. [15] Thierry De Pauw and Robert Hardt. 度量空间中的可求长链和平坦 G 链。 *Amer. J. Math.* 134 1 1 , ( ): –69, 2012. [16] Guido De Philippis and Filip Rindler. 关于 $\mathcal{A}$自由测度的结构及其应用。*Ann. of Math. (2)*, 184(3):1017–1039, 2016. [17] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology. 2nd ed* 200 *Grundlehren Math.* , Springer 出版社，卷，Cham, 。[18] Herbert Federer. *Geometric measure theory* 153 *Die Grundlehren der math-* , *ematischen Wissenschaften* 1969 *Wiss.* 1980

Springer-Verlag New York, Inc. 出版社，纽约，卷 Band, 。[19] Herbert Federer and Wendell H. Fleming. 法向流与整流。 *Ann. Math. (2)*, 72 458: –520, 1960.[20] Karsten Grove, Peter Petersen, V, and Jyh Yang Wu. 通过受控拓扑得到的几何有限性定理。 *Invent. Math.*, 99(1):205–213, 1990. [21] Piotr Haj´asz and Pekka Koskela. 索伯列夫遇上庞加莱。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 320 10 1211 , ( ): –1215, 1995. [22] Juha Heinonen and Stephen Keith. 平坦形式、双利普希茨参数化与流形的光滑性。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 113:1–37, 2011. [23] Juha Heinonen, Pekka Koskela, Nageswari Shanmugalingam, and Jeremy T. Tyson. *Sobolev spaces on metric measure spaces* 27 *New Mathematical Monographs* , Cambridge University Press 出版社，剑桥，2015。[24] Juha Heinonen and Seppo Rickman. 广义流形之间的几何分支覆盖。 *Duke Math. J.*, 113(3):465–529, 2002. [25] Juha Heinonen and Dennis Sullivan. 关于局部具有分支的欧几里得度量规范。*Math. J.* 114 1 15 41, 2002 *Duke* , ( ): – . [26] Aarno Hohti. 关于绝对利普希茨邻域收缩核、混合器与拟凸性。*Topol. Proc.*, 18:89–106, 1993.[27] Martina Jørgensen and Urs Lang. 长田维数较低的测地空间。 *Ann. Fenn. Math.* 47 1 83 , ( ): –88, 2022。

[28] Kyle Kinneberg. 度量流形中余维-
1 *Rev. Mat.* 测度的下界。 ,
Iberoam. 34 3 1103
( ): –1118, 2018. [29] Juha Kinnunen, Riikka Korte, Nageswari Shanmugalingam, and Heli Tuominen. 零边界值牛顿函数的一种刻画。 *Calc. Var. Partial DifferentialEquations*, 43(3-4):507–528, 2012. [30] Bruce Kleiner and Urs Lang. 高秩双曲性。 *Invent. Math.*, 221(2):597–664, 2020. [31] Riikka Korte and Panu Lahti. 度量空间中的相对等周不等式及有限周长的充分条件。 *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 31(1):129– 154, 2014.[32] Urs Lang. 度量空间中的局部流。 *J. Geom. Anal.*, 21(3):683–742, 2011. [33] Urs Lang. 某些离散度量空间与群的内射包。 *J. Topol. Anal.*, 5 3 297( ): –331, 2013. [34] Urs Lang and Thilo Schlichenmaier. 长田维数、准对称嵌入与利普希茨延拓。 *Int. Math. Res. Not.*, 2005(58):3625–3655, 2005. [35] Urs Lang, Stephan Stadler, and David Urech. 渐近秩为二的 Hadamard 空间中的等周不等式。
arXiv preprint arXiv:2506.04882, 2025. [36] Enrico Le Donne and Tapio Rajala. Assouad 维数、长田维数与一致接近的度量切空间。 *Indiana Univ. Math. J.*, 64(1):21–54, 2015. [37] Alexander Lytchak and Stefan Wenger. 度量空间中极小圆盘的内在结构。*Geom. Topol.*, 22(1):591–644, 2018. [38] Alexander Lytchak and Stefan Wenger. 度量圆盘的典范参数化。
Duke
Math. J. 169 4 761 797, 2020 , ( ): – . [39]

Denis Marti. 度量流形的 Lipschitz 体积刚性问题。
arXiv preprint
arXiv:2501.05974 2025 , .[40] Denis

Marti and Elefterios Soultanis. 具有度量基本类的度量空间的刻画。 *arXiv preprint arXiv:2412.15794*, 2024. [41] Damaris Meier, Noa Vikman, and Stefan Wenger. 度量空间中的能量极小调和二球面。
arXiv preprint arXiv:2503.08553, 2025. [42] Damaris Meier and Stefan Wenger. 度量曲面的准共形近似参数化。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 即将出版。[43] Dimitrios Ntalampekos and Matthew Romney. 非长度曲面的多面体逼近与一致化。预印本 arXiv:2206.01128, 2022.[44] Dimitrios Ntalampekos and Matthew Romney. 度量曲面的多面体逼近及其在一致化中的应用。 *Duke Math. J.*, 172(9):1673–1734, 2023. [45] Peter Petersen, V. 度量空间的 Gromov-Hausdorff 收敛。载于
Differential geometry:
Riemannian geometry (Los Angeles, CA, 1990) 54, 3 ,

Proc. Sympos. Pure 中的一部分，第
Math. 489 504 1993
– 页。Amer. Math. Soc.，美国罗得岛州普罗维登斯，。[46] Stephen Semmes. 通过定量拓扑在一般空间中寻找曲线，并将其应用于索伯列夫与庞加莱不等式。 *Sel. Math., New Ser.*, 2(2):155–295, 1996. [47] Stephen Semmes. 没有良好参数化的良好度量空间。

Rev. Mat. Iberoamer- , ( ): – . [48]
icana 12 1 187 275, 1996
Christina Sormani and Stefan Wenger. 流的弱收敛与抵消。

Calc. , (-): – . 附录由
Var. Partial Differential Equations 38 1 2 183 206, 2010
Raanan Schul 和 Wenger 撰写。[49] Elias M. Stein.
Singular integrals and differentiability properties of functions。Princeton 数学丛书，第 30 号。Princeton University Press，美国新泽西州普林斯顿，1970。[50] Stefan Wenger. 度量空间中的欧几里得型等周不等式。

Geom. Funct. , ( ): – . [51]
Anal. 15 2 534 554, 2005
Brian White. 平坦链的可求长性。 *Ann. of Math. (2)*, 150(1):165–184, 1999。

Department of Mathematics, University of Fribourg, Chemin du Musée 23, 1700 Fribourg, Switzerland*Email address*: denis.marti@unifr.ch