arXiv:2602.23380v1 [math.GN] 30 Jan 2026

稠密子集上的实解析函数的Reeb空间及其图结构

北泽直树

Abstract. *Reeb spaces* 流形上实值函数的Reeb空间是水平集所有连通分支（等高线）所组成的空间，并赋予自然的商拓扑。自20世纪Morse函数基础理论诞生以来，它们一直是通过具有温和临界点的光滑函数研究流形时的基础性且强有力的工具。

我们关注它们的拓扑与组合学。作者本人编写了关于显式函数的显式Reeb空间的说明；这些函数在稠密集上实解析，并且似乎最为简单且最具基础性。

我们研究这类函数及其Reeb空间的其他构造例子。在相当多的情况下，Reeb空间自然地构成图；作为另一项工作，我们还讨论其顶点的自然定义。

1. Introduction.

在作为引言的本节中， [11], 作者的预印本受到尊重。

拓扑空间X 上的（连续）映射 $c:\ X \to \mathbb{R}$ 的***Reeb*** 空间 R_c ，是所有原像（水平集）的全部连通分支（轮廓）所构成的空间$c^{-1}(q)$ 。自所谓Morse函数（[16]）的基本理论建立以来，这类对象一直是借助函数 c研究可微流形 X 的基本而有力的工具。

我们严格解释这一概念。 X 上的等价关系 $\sim_c$ 可由如下规则定义：关系 $p_1 \sim_c p_2$ 成立，当且仅当 p_1 与 p_2 位于同一条等高线中。 c 的***Reeb*** 空间 R_c 是商空间 $R_c :=X/\sim_c$。商映射 $q_c:\ X \to R_c$ 由此定义，并得到满足关系 $c=\bar{c}\circ q_c$ 的唯一连续映射 $\bar{c}:\ R_c \to Y$。当 X 为可微流形时， c 中包含临界点的一条等高线是 c的一条临界等高线。 c中非临界的一条等高线是 c的一条正则等高线。我们也将 R_c 的一个点称为 c的一条等高线。

在一些良好的情形下， R_c 与图同胚。在 [3], 中，Izar 已在 [3]中证明了紧流形上 Morse 函数的情形。Martinez-Alfaro、Meza-Sarmiento 和 Oliveira 在 [13], 中对 *Morse-Bott* 函数进行了相关研究。Gelbukh 和 Saeki 也在 [2, 18, 19], 中提出了关于这一主题的一般理论。例如，尤其是 [2, 定理7、5], [18, 定理3、1],以及 [19, 定理2.1 和2.8，以及“2 Reeb 空间及其图结构”] ，都讨论了 Reeb 空间的拓扑与图结构。对于光滑流形

Key words and phrases. 实解析函数与复解析函数及映射。光滑映射。Reeb 空间。图。
2020 *Mathematics Subject Classification*: 主分类号 26E05、57R45、58C05。次分类号 54C30。

X 无边界时， R_c 在相当多的情形下是一个图，其顶点集由 c的所有临界等高线组成。这就是众所周知的***Reeb*** 图 的定义。然而，正如 [2, 定理7、5] 以及 [19, “2 Reeb 空间及其图结构”],所示，重要的仅仅是 Reeb 空间与图同胚这一事实。在一篇预印本 [6], 中，作者讨论了 Reeb 空间上图结构的新定义；这对我们的某些主要结果（定理2和定理3）很重要。

以下是我们的主要问题，它与 [11] 相同。

问题 1. 我们能否构造一个良好的光滑函数，使其空间同胚于给定的拓扑空间?

这是极为新颖的。这项研究本质上由 Sharko 于 2006 年（[20]）开启。它研究的是闭曲面上的光滑函数，其临界点 p 具有 $c(z) = \Re z^l + t_p$ 的形式，且其 Reeb 图为给定的图： $z \in \mathbb{C}$，其中$\mathbb{C}$ 为全体复数构成的空间， $l > 1$ 为一个整数, $t_p \in \mathbb{R}$，并且$\Re s$ 表示 $s \in \mathbb{C}$ 的实部。这在[14]中被推广至任意有限图。在 [15], 中考虑了某一类有限图，并重构了闭流形上具有指定 Reeb 图且正则等高线为球面的 Morse函数。作者通过[4, 5, 6, 7], 对重构 Reeb 图同构于给定图的显式光滑函数这一课题做出了贡献，此外还兼顾水平集的拓扑，考虑非紧流形上的光滑函数以及所谓的非适当函数，并例如给出实代数构造。

特别地，实代数构造由作者在 2023 [6] 中率先提出。构造实代数函数或实解析函数非常困难，因为我们无法使用可微（光滑）范畴中的对象和方法。在可微情形下，我们在局部构造分别对应于顶点的局部函数，以及对应于边的乘积丛，并将它们粘合起来，从而得到具有所需 Reeb 图的光滑函数。这一点在 [10] 中有所提及，并且例如在 [9] 中得到了拓展；目前，这项研究主要由作者推动。

我们介绍作者的一个原创想法。考虑 n 维欧几里得空间（实仿射空间）中的一个区域 $\mathbb{R}^n$ ，其边界由实代数超曲面围成；构造一个映射到该区域上的实代数映射，从而将单位球面 $S^m := \{x = (x_1, \cdots x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \Sigma_{j=1}^{m+1} {x_j}^2 = 1\}$到单位圆盘 $D^n := \{x = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \Sigma_{j=1}^{n} {x_j}^2 \leq 1\}$的典范投影推广。在可微映射的奇点理论及其在流形可微拓扑中的应用术语中，这相当于在实代数情形下构造所谓的特殊广义映射。通过复合典范投影，我们便得到所需的函数。关于特殊广义映射，可参见 [17]中的基础性微分拓扑研究。最近的预印本 [12] 是相关研究，其中我们不假定读者具备相关知识。文章 [1] 也是一项相关的基础性实代数研究，作者也从这项研究中获益良多。

最近，作者提出了一种与实代数研究本质上不同的实解析研究，如 [11] 所述，并给出了非紧流形上的一个显式解析函数，以及闭流形上的一个在开稠密子集上实解析的光滑函数，并研究了它们的 Reeb 空间。它们是 Reeb 空间并非有限图的显式例子。尽管在 [2, 17, 18], 中也给出了不同于这些例子的情形，但通过初等函数给出的显式表示是首次明确提出的。

本文中，我们用新方法给出新的例子。我们引入一些额外记号。令$\pi_{k_1+k_2,k_2}$：$\mathbb{R}^{k_1+k_2} \to \mathbb{R}^{k_1}$ 表示典范投影$\pi_{k_1+k_2,k_2}(x) := x_1$ $(x := (x_1, x_2)$ $\in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} = \mathbb{R}^{k_1+k_2}$，其中 $k_1, k_2 > 0)$。我们用 $0 \in \mathbb{R}^k$ 表示 $\mathbb{R}^k$的原点。图是指一维 CW 复形，其中每个 1-胞腔（边）的闭包都与 D^1同胚。拓扑空间 X 和 Y 之间的真映射c：$X \to Y$ 是指这样一种映射：对于任意紧子集 $K \subset X$，其原像 $c^{-1}(K)$都是紧的。定理 1 是我们的新结果。

定理 1. 存在一个连通无限图 G_0，以及一个 m 维的光滑连通子流形 $X_m \subset \mathbb{R}^{m+2}$，它是非紧的，并且可表示为某个光滑映射 $e_m : \mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}^2$ 的零点集 ${e_m}^{-1}(0)$；该映射配有一个函数c_m： $X_m \to \mathbb{R}$，满足以下性质，其中 $m > 1$ 是任意大于1的整数。

(1) e_m在形如 $\{t \mid -a < t < a\} \times \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$ $(a > 0)$ 的开集上的限制是一个实多项式映射，并且 X_m 也属于 $\{t \mid -a < t < a\} \times \mathbb{R}^{m+1}$.(2) 函数 c_m 是 $\pi_{m+1,1}$ 在 X_m上的限制。(3) ***Reeb*** 空间 R_{c_m} 也可视为 c 的 ***Reeb*** 图，并且图 G_0 与 R_{c_m} 同构。(4) 映射 $q_{c_m} : X_m \to R_{c_m}$ 是适当映射。

将此与 [11, 定理 1]进行比较。在第二节中，我们证明定理 1。在证明中，我们遵循 [6, 9, 11] 中的方法，但不作相应假设。在第三节中，我们介绍另一项新成果。为此，我们在此以自包含的方式介绍 Reeb 空间上的图结构的新定义，并回顾和沿用预印本 [8]中的内容。我们在定义域的空间 X 中选取一个子集 Z，其补集 $X - Z$ 在 X中稠密。我们将这一对（R_c， $q_c(Z)$）称为（R_c， Z）空间。如果将（R_c， Z）空间视为一个顶点集为 $q_c(Z)$的图，那么我们称该图为（R_c， Z）图，并用$R_{c,\ Z}$ 表示（R_c， Z）图。在此设定下，我们通过定理 2 回答问题 1 的一类变体。这也源自我们对以 [11, 定理 2]形式呈现的例子的观察。第三节将对此作更精确的阐述。

定理 2。每个具有 $m \geq 2$ 的 S^m 都与一个光滑子流形 $Y_{m,\ i}$同胚，该光滑子流形可表示为某个光滑映射 $e_{Y,\ m}$： $\mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}^2$ 的零点集 ${e_{Y,\ m}}^{-1}(0)$，其中该映射在某个集合 $Z_{m+2,\ i}$ 之外是实解析的，并且 $\mathbb{R}^{m+2} - Z_{m+2,\ i}$ 在 $\mathbb{R}^{m+2}$ 中稠密，且在 Z_{m+2} 的任何点处都不是实解析的，$_i$；对于 $i = 1$，2 和 3，以下相应情形成立。

(5) 限制 $c_{Y,m,1}$ ***of*** $\pi_{m+2,1}$ ***to*** $Y_{m,1}$ 的 ***Reeb*** 空间 $R_{c_{Y,m,1}}$ 不同胚于任何图。***(6)*** 限制$c_{Y,m,2}$ ***of*** $\pi_{m+2,1}$ ***to*** $Y_{m,2}$ 的 ***Reeb*** 空间$R_{c_{Y,m,2}}$ 被视为 $c_{Y,m,2}$ 的 ***Reeb*** 图，而图 $R_{c_{Y,m,2},Y_{m,2} \cap Z_{m+2},2}$ 未定义。***(7)*** 限制$c_{Y,m,3}$ ***of*** $\pi_{m+2,1}$ ***to*** $Y_{m,3}$ 的 ***Reeb*** 空间$R_{c_{Y,m,3}}$ 被视为 $c_{Y,m,3}$ 的 ***Reeb*** 图，而图 $R_{c_{Y,m,3},Y_{m,3} \cap Z_{m+2},3}$ 已定义。

2. On Theorem 1.

令 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合。

定理*1*的证明。我们首先定义一个光滑映射 e_m： $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$、一个开集 $\{t \mid -a < t < a\} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1}$、一个流形 X_m，以及一个函数 c_m： $X_m \to \mathbb{R}$，在

步骤 1-1。在此步骤中，我们还将证明性质（1）。在步骤 1-2 中，我们将证明其余性质（2）、（3）和（4）。

步骤 1-1 一个光滑映射 $e_m\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$、一个开集 $\{t \mid -a < t < a\} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1}$、一个流形 X_m，以及一个函数 $c_m\colon X_m \to \mathbb{R}$。

令 $S_1 := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \{(x_1, x_2) \mid x_1 - (x_2 - 4j)^2 + \frac{1}{2} \equiv 0\}$。令 $S_2 := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \{(x_1, x_2) \mid x_1 + (x_2 - 4j - 2)^2 - \frac{1}{2} = 0\}$。我们可以看到 S_1 和 S_2 是不相交的。它们是抛物线的并集。令 $S_{i+3} := \{(2i-1, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ for $i = 0,\ 1$。令 $D_S := \{(x_1, x_2) \mid x_1 - (x_2 - 4j)^2 + \frac{1}{2} < 0\ (j \in \mathbb{Z})\ x_1 + (x_2 - 4j - 2)^2 - \frac{1}{2} > 0\ (j \in \mathbb{Z})\ -1 < x_1 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$，这是由这些曲线 $S_i\ (i = 1、2、3、4)$围成的区域。闭包 $D_S := \{(x_1, x_2) \mid x_1 - (x_2 - 4j)^2 + \frac{1}{2} \le 0\ (j \in \mathbb{Z})\ x_1 + (x_2 - 4j - 2)^2 - \frac{1}{2} \ge 0\ (j \in \mathbb{Z})\ -1 \le x_1 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$ 也很重要。集合 $S_i \bigcap D_S\ (i = 1, 2)$ 是抛物线中可数个连通曲线的不交并。该集合中的每个元素都可延拓为满足关系 $\{(c_{S_i}(x_2),\ x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \bigcap D_S = S_i \bigcap D_S$的曲线，如下所示。

- c_{S_i} 是一个光滑函数，在 $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \{x_2 \mid 4j - 2i - \frac{1}{2} < x_2 < 4j - 2i + \frac{5}{2}\}$ 上，它是一个关于抛物线的二次实多项式函数；而在 $\mathbb{R}$ 中集合 $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \{x_2 \mid 4j - 2i - \frac{1}{2} < x_2 < 4j - 2i + \frac{5}{2}\}$ 之外，c_{s_i} 的函数值的绝对值始终大于 $(3\,2)^2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$。
- 以下条件等价。$-1 \le c_{S_i}(x_2) \le 1 \Leftrightarrow 4j - 2(i-1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \le x_2 \le 4j - 2(i-1) + \frac{\sqrt{3}}{2},\ j \in \mathbb{Z}$。

设 m_1 和 m_2 是满足 $m = m_1 + m_2$的正整数。定义 $X_m := \{(x_1, x_2, (y_{1,j})_{j=1}^{m_1}, (y_{2,j})_{j=1}^{m_2}) \mid (c_{S_1}(x_2) - x_1)(x_1 - c_{S_2}(x_2)) - \Sigma_{j=1}^{m_1} y_{1,j}{}^2 = 0, (x_1 + 1)(1 - x_1) - \Sigma_{j=1}^{m_1} y_{2,j}{}^2 = 0, -1 < x_1 < 1\}$，以及映射 $e_m\colon \mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}^2$ by $e_m(x_1, x_2, (y_{1,j})_{j=1}^{m_1}, (y_{2,j})_{j=1}^{m_2}) := (c_{S_1}(x_2) - x_1)(x_1 - c_{S_2}(x_2)) - \Sigma_{j=1}^{m_1} y_{1,j}{}^2, (x_1 + 1)(1 - x_1) - \Sigma_{j=1}^{m_1} y_{2,j}{}^2$。分别用 $e_{m,1}$ 和 $e_{m,2}$ 表示映射 e_m的第 1 个和第 2 个分量。

为此，我们采用 [11, 定理 1]的证明中的一种论证。我们也为此遵循[6, 9] 。我们以自成一体的方式讨论证明。

我们通过隐函数证明，X_m 是 $\mathbb{R}^{m+2}$ 的光滑子流形。首先，根据定义，X_m 经由$\pi_{m+2,\,2}$映射到 D_S。

我们考虑以下三种情形，以说明 X_m 是一个 m维光滑流形，并且 $X_m = {e_m}^{-1}(0)$。

情形1-1-1。在点 $(x_{0,\,1},\ x_{0,\,2},\ y_0) \in X_m$处，使得 $(x_{0,\,1},\ x_{0,\,2}) \in D_S$。
此处，e_{m_1} 对某个$y_{1,\,j}$ 的偏导数值不为零，且 e_{m_2} 对某个$y_{2,\,j}$ 的偏导数值不为零。此处，e_{m_1} 对某个$y_{2,\,j}$ 的偏导数值为0，且 e_{m_2} 对某个$y_{1,\,j}$ 的偏导数值为0。我们已证明，在点 $(x_{0,\,1},\ x_{0,\,2},\ y_0) \in X_m$处，使得 $(x_{0,\,1},\ x_{0,\,2}) \in D_S$，$e_m$的微分的秩为2。

情形1-1-2 在点$(x_{0,1}, x_{0,2}, y_0) \in X_m$处，使得$(x_{0,1}, x_{0,2}) \in D_S - D_S$，并且$(\overline{x_{0,1}}, x_{0,2})$恰好位于来自 $S_i\ (i = 1,2,3,4)$的一条曲线中。
设 $(x_{0,\,1},\ x_{0,\,2}) \in S_1 \bigcup S_2$。由曲线 S_1 和 S_2的光滑性可知，函数$e_{m,\,1}$关于 x_1 或 x_2 的偏导数值不为 0。该处

函数$e_{m,\ 1}$关于$y_{i,\ j}$的偏导数值为 0。该处函数$e_{m,\ 2}$关于某个$y_{2,\ j}$的偏导数值不为 0。在点$(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2},\ y_0) \in X_m$处，满足$(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2}) \in D_S - D_S$，且$(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2})$恰好属于来自$S_1$和$S_2$的一条曲线，并且$e_m$的微分秩为 2。

在情形$(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2}) \in S_3 \bigcup S_4$中，根据对称性，我们可以采用类似的论证。

情形 1-1-3 在某一点$(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2},\ y_0) \in X_m$，使得$(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2}) \in \overline{D_S} - D_S$，并且$(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2})$恰好位于来自$S_i (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$的两条曲线中。

在那里，e_{m_1}关于某个x_a的偏导数值不为零，而e_{m_2}关于某个x_a的偏导数值也不为零。在那里，e_{m_1}关于任意$y_{a,\ j}$的偏导数值为 0，而e_{m_2}关于任意$y_{a,\ j}$的偏导数值也为 0。根据我们的设定，可以看出，在D_S中，来自$S_i (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$的至多两条曲线相交，并且它们以横截方式相交。换言之，在交集的每一点处，相应的非零切向量彼此线性无关；对于那里的法向量，也有类似的结论。

由此可见，在点$(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2},\ y_0) \in X_m$处，使得$(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2}) \in D_S - D_S$，并且$\overline{(x_{0,\ 1},\ x_{0,\ 2}}$）恰好位于来自$S_i$（$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$）的两条曲线上，$e_m$的微分的秩为2。

由情形1-1-1、情形1-1-2和情形1-1-3可知，X_m中每个点处e_m的微分秩均为2。我们对其他对象作一点简短说明。我们可以设置$a = t_a$，使得$1 < t_a < (\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$。我们还可以看到$X_m \subset \{t \mid -1 \le t \le 1\} \times \mathbb{R}^{m+1} \subset \{t \vdash a < t < a\} \times \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$。我们可以将函数$c_m$定义为$\pi_{m+2,\ 1}$在$X_m$上的限制。性质（1，2）已得到证明。

步骤 1-2 性质 (3) 和 (4)。

根据构造，c_m的每条等高线都表示为X_m与闭区间$\{(t_0, t) \mid a_{t_0,1} \le t \le a_{t_0,2}\}$的原像$\pi_{m+2,2}{}^{-1}(\{(t_0, t) \mid a_{t_0,1} \le t \le a_{t_0,2}\})$的交集，其中该闭区间为紧的。此外，$c_m$的每条临界等高线都必须表示为$X_m$与闭区间$\{(\pm\frac{1}{2}, t) \mid a_{\pm\frac{1}{2},1} \le t \le a_{\pm\frac{1}{2},2}\}$的原像$\pi_{m+2,2}{}^{-1}(\{(\pm\frac{1}{2}, t) \mid a_{\pm\frac{1}{2},1} \le t \le a_{\pm\frac{1}{2},2}\})$的交集，其中该闭区间为紧的。对于$c_m$的每条临界等高线，我们可以在$X_m$中取其一个小的、开且连通的邻域，该邻域表示为$c_m$的等高线之并，除给定的临界等高线外，其余均为正则等高线，并且其在X_m中的闭包关于c_m也是饱和的且为紧的。换言之，这样的并是关于c_m的饱和空间，其中我们保持 [19]。对于c_m的每条正则等高线，我们同样可以在X_m中取其一个小的、开且连通的邻域，该邻域表示为c_m的正则等高线之并，并且其在X_m中的闭包关于c_m也是饱和的且为紧的。根据 [18, 19],的论证，R_{c_m}被视为c_m的 Reeb 图，而c_m是无限的。Reeb 图的每条边e都表示为关于c_m的饱和开集U_e的像$q_{c_m}(U_e)$，其闭包包含c_m的一条或两条临界等高线。我们可以为性质 (3) 选择一个合适的图G_0。根据该论证，商映射$q_{c_m}; X_m \to R_{c_m}$被证明是适当的，而性质 (4) 也被证明成立。

至此完成定理 1 的证明。 □

3. On Theorem 2.

我们更准确地讨论定理 2，并以修订后的方式将其表述为定理3。

此后，令 $\mathbb{C}^k$ 表示 k维复仿射空间。将 $\mathbb{R}^k$ 自然地识别为 $\mathbb{C}^k$的实部 $\{x = (x_1, \cdots x_k) \in \mathbb{R}^k\} \subset \mathbb{C}^k\}$。

定义 1。若光滑映射 $c : \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}^{k_2}$ 在 $\mathbb{R}^{k_1}$ 上满足：除某个子集 Z 外均为实解析，且 $\mathbb{R}^{k_1} - Z$ 在 $\mathbb{R}^{k_1}$中稠密，则称其为稠密实解析或$D\text{-}RAn$。此外，若 c 在 $\mathbb{R}^{k_1} - Z$ 上的限制是一个复解析映射在 $\mathbb{R}^k$ 的某个开邻域 $U_{\mathbb{R}^k} \supset \mathbb{R}^k$ 中的子集 $U_{\mathbb{R}^k} - Z$ 上定义后所得的限制，则称 c 为稠密复实解析或$D\text{-}CRAn$。

例 1。若函数 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $c(x) := 0$ $(x \leq 0)$且 $c(x) := e^{-\frac{1}{x}}$ $(x \geq 0)$，则它是 D-RAn，但不是 D-CRAn。

例2. 函数 $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$由 $c(x) := R \times e^{-\frac{1}{x^2}} (\frac{1}{x})^{j_0} \Sigma_{j \in J} (\frac{1}{x})^{i_j} T_j(\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x})$ $(x \neq 0)$ 定义，满足以下条件，且 $c(0) := 0$ 是 D-CRAn。

- $R \neq 0$ 是一个实数。
- j_0 是一个整数。
- J 是一个非空有限集。
- i_j 是为每个 $j \in J$ 定义的非负整数。
- $T_j(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实多项式函数，并且为每个 $j \in J$ 定义

对于每个正整数 $i > 0$，函数 c 的第 i 阶导数也可以表示为这种形式。

注意，例2中的函数在稠密集 $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ 上可由一个初等函数表示。此后，我们称该函数为特殊D-CRAn 函数，或$S\text{-}D\text{-}CRAn$函数。另见 [11, 定理 2 的证明，注记 1]，其中我们不假设读者具备相关知识。这类函数在实分析中很重要，并且在 [11, 定理 2 的证明，注记 1] 中也被作为一个关键对象介绍。

定理3。我们可以得到定理 *2* 的以下一种情形。

(8) $c_{Y,m,i}$ 是$\pi_{m+2,1}$ 在 $Y_{m,i}$上的限制。*(9)* $\pi_{m+2,2}$ 在 $Y_{m,i}$ 上的限制的像如下。*(a)* 由圆 $S_{1,R_0} := \{(x_1, x_2) \ |x_1{}^2 + x_2{}^2 = R_0\}$ （其半径为 $R_0 > 0$ ）和 $S_{2,1} := \{(c_0(x_2)\ x_2) \ |x_2 \in \mathbb{R}\}$围成的区域的闭包，其中 c_0 是实多项式函数$p_{0,R_0}(t) := t(R_0 - t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的复合，并与一个适当选取的 *S-D-CRAn* 函数复合，该函数具有足够小的正数 $R > 0$ ；以及“$c(x) := R \times e^{-\frac{1}{x^2}} \times \sin^2(\frac{1}{x})$（例*2*）”，情形为 $i = 1$。*(b)* 圆 S_{1,R_0} 与$S_{2,3}$，以及将$S_{2,1}$ 绕原点 $0 \in \mathbb{R}$适当旋转所得曲线所围成的区域的闭包，情形为 $i = 3$。*(c)* 圆 S_{1,R_0} 与$S_{2,2}$，以及对$S_{2,2}$施以适当的仿射变换和平行变换所得曲线所围成的区域的闭包，情形为 $i = 2$。

定理*3*的证明，沿用定理 *2*。设 m_1 和 m_2 为正整数。设$m := m_1 + m_2$。

我们可以定义 $Y_{m,\ 1} := \{(x_1,\ x_2,\ (y_{1,\ j})_{j=1}^{m_1},\ (y_{2,\ j})_{j=1}^{m_2})$ $\mid R_0 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - \Sigma_{j=1}^{m_1} {y_{1,\ j}}^2 = 0,\ \ x_1 - c_0(x_2) - \Sigma_{j=1}^{m_1} {y_{2,\ j}}^2 = 0\}$ 这可视为由光滑映射 $e_{Y,\ m} : \mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}^2$ 定义的零点集，其定义方式与“定理1的证明”中相同，并且是 $\mathbb{R}^{m+2}$ 的一个 m 维光滑紧子流形。我们可以像“定理1的证明”中那样，通过应用隐函数定理来证明这一事实。此处省略详细论述。

函数 c_0 是一个 D-CRAn函数，其在 $\mathbb{R} - \{0\}$ 上的限制是实解析的，并以唯一的方式延拓到 $\mathbb{C} - \{0\}$，成为一个全纯函数。此外，c_0 在 0 处的 j阶导数值始终为 0。集合$Z_{m,1}$ 可以选取得使得，根据流形和映射的结构，$Y_{m,1} \bigcap Z_{m,1} := \{(0, R_0, 0), (0, -R_0, 0)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+2}$。限制$c_{Y,m,1}$ 的 Reeb 空间$R_{c_{Y,m,1}}$（其中 $\pi_{m+2,1}$ 限制在$Y_{m,1}$ 上）不同胚于一个图，因为在 (0, 0, 0) 附近，可以选取无穷多个实数$x_{2,a}$，从而得到$c_{Y,m,i}$ 的无穷多个临界点，其形式为 $(0, x_{2,a}, y_{1,a,j}, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$。另请注意，这些点会产生$c_{Y,m,1}$的无穷多个临界等高线。另见 [11, 定理 1]的证明。此外，将$Y_{m,1}$投影到直线 $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+2}$上，可得一个恰有两个临界点的光滑函数；根据一个著名的经典定理以及流形和映射的结构，它与 S^m微分同胚。

至此完成了 $c_{Y,m,1}$ 情形的证明。

我们研究$c_{Y,m,3}$ 情形。

我们可以得到情形 $c_{Y,m,1}$ 绕 $\{(0, 0, y) \mid y \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^{m+2}$的一个略微旋转的版本。由流形与映射的形式可知，$c_{Y,m,3}$ 的临界值个数是有限的。由 [18], 我们得到 Reeb 图 $R_{c_{Y,m,3}}$。集合 $Z_{m,3}$ 可以这样选取，使得 $Y_{m,3} \bigcap Z_{m,3}$ 为两点集，而这至多只向 Reeb 图添加两个顶点。

至此完成了情形 $c_{Y,m,3}$的证明。

我们研究$c_{Y,m,2}$ 情形。

我们可以得到情形 $c_{Y,m,1}$ 的一个略作改动的版本。我们考虑情形$c_{Y,m,1}$，并通过平行变换将 $S_{2,1}$ 移动到$S_{2,1,1}$，使得 $(x_1, x_2) \in S_{2,1}$ 被移动到 $(x_1 - t_1, x_2)$，其中 $t_1 > 0$ 充分小。此后，我们用唯一确定的仿射变换改变 $S_{2,1}$ 中同时也位于圆盘 $D_{1,R_0} := \{(x_1, x_2) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq R_0\}$ 内的每一个点，该仿射变换将 $(x_1 - t_1, x_2)$ 映到 $(x_1 - t_1, t_2 x_2)$，并将 $(-t_1, \pm R_0)$ 映到 $(-t_1, \pm t_2 R_0) \in S_{1,R_0}$，其中带有 $0 < t_2 < 1$。曲线 $S_{2,1,1}$ 被映到 $S_{2,1,2}$ 上。$\pi_{m+2,2}$ 在 $Y_{m,1}$ 上的限制的像被移动，并且由该构造，我们可以在一个与 S^m 微分同胚的光滑紧子流形 $Y_{m,4} \subset \mathbb{R}^{m+2}$ 上得到一个类似的映射 $c_{Y,m,4}$，并且集合 $Z_{m,4}$ 如同$Z_{m,1}$ 与 $Z_{m,3}$ 那样被映到 $\{(t, t_2 R_0) \mid t \in \mathbb{R}\} \sqcup \{(t, -t_2 R_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 上，而它与球面 $Y_{m,4}$ 在投影 $\pi_{m+2,2}$ 下的像的交集是两条直线段的不交并。通过考虑与情形$c_{Y,m,4}$ 中相同的旋转，我们同样得到 $c_{Y,m,2}$ 情形所期望的状况。

这就完成了情形 $c_{Y,\ m,\ 2}$ 的证明。

证明到此完成。

□

注 1。在这里，考虑闭流形 X 上的连续函数 $c : X \to \mathbb{R}$ 的 Reeb 图 R_c，该函数在某个勒贝格测度为 0 的集合 Z 之外光滑；当且仅当以下条件至少有一项成立时，点 $v \in R_c$ 是顶点。

- $q_c^{-1}(v)$ 是 c的一条临界等高线。
- $q_c^{-1}(v) \bigcap Z$ 非空。

注意，如果 Z 的勒贝格测度不为 0，那么 $X - Z$ 在 X中不稠密。请将此与图$R_{c,\ z}$的定义进行比较。

备注 2。 与备注 1 相关，文献 [2]研究了紧致拓扑空间上的连续映射及其 Reeb 空间。例如，对于闭流形上的光滑函数，其 Reeb 空间是所谓的*Peano*连续统，并且与有限图同伦等价。参见 [2, 定理 7.5]。

4. Conflict of interest and Data availability.

利益冲突。
作者是大阪中央高等数学研究所的研究人员（OCAMI 研究人员）。本研究得到文部科学省特色联合研究中心推进计划 JPMXP0723833165 的支持。他感谢该计划，尽管他并未受雇于该机构。

数据可用性。
除本文外，未生成其他数据。

References

[1] A. Bodin、P. Popescu-Pampu和M. S. Sorea, *Poincaré-Reeb graphs of real algebraic domains* 10 1007 13163 , Revista Matematica Complutense, https://link.springer.com/article/ . /s - 023-00469-y, arXiv:2207.06871v2。[2] I. Gelbukh, *On the topology of the Reeb graph*, Publicationes Mathematicae Debrecen 104(3– 4) (2023), 343–365。[3] Izar. S. A, *Funções de Morse e Topologia das Superfícies I: O grafo de Reeb de f: $M \to \mathbb{R}$*, M´etrica第31号，载于Estudo e Pesquisas em Matem´atica，巴西：IBILCE，1988, https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/metrica-31.pdf。[4] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values* , Topol. Methods in Nonlinear Anal.第59卷第2B期，897–912，arXiv:1902.08841。[5]N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on closed or open surfaces* 28 2 2022 127 143, , Methods of Functional Analysis and Topology.卷 期 ( )， arXiv:1908.04340。[6] N. Kitazawa, *Real algebraic functions on closed manifolds whose Reeb graphs are given graphs* 28 4 2022 302 308, , Methods of Functional Analysis and Topology 卷 期 ( )， – arXiv:2302.02339，2023。[7] N. Kitazawa, *Constructing Morse functions with given Reeb graphs and level sets*，已被接受发表于Topol. Methods in Nonlinear Anal.，arXiv:2108.06913（其中标题已相对于该处标题作了更改），2025。[8] N. Kitazawa, *Maps on manifolds onto graphs locally regarded as the quotient maps onto Reeb spaces of some differentiable maps and a new reconstruction problem* 1909 10315 , arXiv: . 。[9] N. Kitazawa, *Reconstructing real algebraic maps locally like moment maps with prescribed images and compositions with the canonical projections to the 1-dimensional real affine space*, arXiv:2303.10723。[10] N. Kitazawa, *Some remark on real algebraic maps which are topologically special generic maps and generalize the canonical projections of the unit spheres* 2312 10646, 2024 , arXiv: . 。[11] N. Kitazawa, *A note on Reeb spaces of explicit real analytic functions*，已投稿至同行评审期刊，arxiv:2601.11648。[12] N. Kitazawa, *A note on cohomological structures of special generic maps*，在第三次投稿至同行评审期刊后，根据审稿人与编辑的肯定意见提交了修订版。

[13] J. Martinez-Alfaro、I. S. Meza-Sarmiento和R. Oliveira, *Topological classification of simple Morse Bott functions on surfaces* 675 2016 165 179 ,

Contemp. Math. ( ), –。[14] Y. Masumoto和O. Saeki, *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*, Kyushu J. Math. 65 (2011), 75–84。[15] L. P. Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*。Topol. Methods in Nonlinear Anal. 52 (2) (2018), 749–762, arXiv:1805.06727。[16] G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´unefonction numérique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des S´eances de I´Acad´emie des Sciences 222 (1946), 847–849。[17] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293, 例如亦可参见"https://core.ac.uk/download/pdf/81973672.pdf"。[18] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, International Mathe- matics Research Notices, maa301, 2022年第11期, 2022年6月, 3740–3768, https://doi.org/10.1093/imrn/maa301, arXiv:2006.01689。[19] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds II*, Res. Math. Sci. 11, 文章编号24 (2024), https://link.springer.com/article/10.1007/s40687-024-00436-z。[20] V. Sharko, *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*, Methods of Functional Analysis and Topology 12 (2006), 389–396。

Osaka Central Advanced Mathematical Institute (OCAMI), 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku Osaka 558-8585 TEL: +81-6-6605-3103*Email address*: naokikitazawa.formath@gmail.com
Webpage: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html