arXiv:2602.23450v1 [math.AC] 26 Feb 2026

基本矩阵与本质矩阵相容三元组的多射影几何结构

TIMOTHY DUFF、VIKTOR KOROTYNSKIY、ANTON LEYKIN、TOMAS PAJDLA

Abstract. 我们通过计算相容基本矩阵三元组簇的多次数及其多重齐次消失理想，刻画了该簇。这回答了 Br˚atelund 和 Rydell 最近提出的一个问题中第一个有趣的情形。我们的结果改进了几何计算机视觉文献中此前发现的代数约束集；这些约束集都不完整（也就是说，它们并未生成消失理想），有时还对矩阵三元组的缩放方式作出限制性假设。我们的讨论还广泛涉及广义相容簇，其多重齐次消失理想远未得到充分理解。我们的一个重要新发现是，一组简单的四次约束在相容基本矩阵三元组上恒为零。这些四次式在本质矩阵的情形下也很重要：我们证明，它们与一些已知约束结合后，能在局部刻画相容本质矩阵三元组的簇。

1. Introduction

多视图几何 [14, 21] 是一个研究成熟且重要的框架，用于探究如何从二维图像 [26]重建三维世界的问题。该理论的核心对象是与一对针孔相机相关联的基本矩阵。它是一个 3×3 矩阵，用于检验两幅不同图像中的两个点是否是同一个三维点的投影。本质矩阵是一个重要的特殊情形，适用于一对已标定相机。对于 $n\geq 3$ 台相机，$\binom{n}{2}$基本矩阵之间存在依赖关系。本文研究这些依赖关系，在扩展已有结果的同时，对 $n=3$.

令 $\mathcal{B}_3\subset \mathsf{GL}_3(\mathbb{C})$ 表示由 3×3 上三角矩阵构成的博雷尔群，并令 $\mathbb{P}(\mathcal{B}_3)\subset \mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ 表示其射影化。对于任意子簇 $\mathcal{K}\subset \mathbb{P}(\mathcal{B}_3)^{\times 3}$，其点为 $\mathbb{P}(\mathcal{B}_3)$ 中元素构成的三元组，我们将其与一个由分量逐项矩阵乘积定义的有理映射相关联，

$$\Psi_{\mathcal{K}}\colon \mathcal{K}\times \mathsf{SO}_3(\mathbb{C})^{\times 3}\times \left(\mathbb{C}^3\right)^{\times 3} \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3})^{\times 3} \tag{1}$$

$$(K_1,K_2,K_3,R_1,R_2,R_3,c_1,c_2,c_3)\mapsto \left(K_i^{-T}R_i[c_j-c_i]_\times R_j^TK_j^{-1}\mid 1\leq i<j\leq 3\right).$$

上文中，对于 $c=(c_x,c_y,c_z)\in\mathbb{C}^3$，我们用 $[c]_\times$ 表示反对称矩阵

$$[c]_\times=\begin{pmatrix}0 & -c_z & c_y\\ c_z & 0 & -c_x\\ -c_y & c_x & 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

实体 K_i、 R_i 和 c_i 分别表示由三台针孔相机组成的配置中第 i 台相机的标定矩阵、旋转和相机中心。

定义 1. 使用上述记号，闭子簇 $Y_{\mathcal{K}}=\operatorname{im}\Psi_{\mathcal{K}}\subset\left(\mathbb{P}^8\right)^{\times 3}$ 是具有 $\mathcal{K}$-先验~~的基本~~矩阵相容三元组簇。

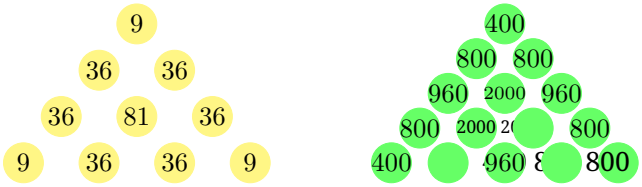


FIGURE 1. $Y_{\mathcal{F}}$（左）和 $Y_{\mathcal{E}}$（右）的多重次数。$Y_{\mathcal{F}}$以及 $\mathrm{mdeg}_{\mathcal{E}}(5,5,1)$、$=\mathrm{mdeg}_{\mathcal{E}}(5,1,5)$、$=\mathrm{mdeg}_{\mathcal{E}}(1,5,5)$ 的值分别来自定理1和命题4。$Y_{\mathcal{E}}$ 的其余值通过数值单值化启发式方法获得。

以下是相容三元组簇的三个有趣实例：

(1) 对于 $\mathcal{F}=\mathbb{P}(\mathcal{B}_3)^{\times 3}$，相容基本矩阵三元组的簇为 $Y_{\mathcal{F}}$.(2) 对于 $\mathcal{E}=\{(I,I,I)\}$，相容本质矩阵三元组的簇为 $Y_{\mathcal{E}}$。(3) 在前述两个极端之间，对于 $\Delta=\{(K,K,K)\mid K\in\mathbb{P}(\mathcal{B}_3)\}$，相容等校准未标定基本矩阵三元组的簇为 Y_{Δ}.

这三种情况 $Y_{\mathcal{E}}\subset Y_{\Delta}\subset Y_{\mathcal{F}}$ 并未涵盖 Y_K 的所有可能性——例如参见 [4]，其中对可能的标定先验进行了更丰富的分类。

在回顾这类簇如何从计算机视觉中的三维重建问题产生之前，我们先陈述本文的主要结果。我们的第一个结果较为完整地刻画了簇 $Y_{\mathcal{F}}$.

定理1。簇 $Y_{\mathcal{F}}$ 的维数为18。其多重次数函数的支撑集为格单纯形

$$\mathrm{conv}\left\{7\mathbf{e}_i+7\mathbf{e}_j+4\mathbf{e}_k \mid \text{distinct } i,j,k\in\{1,2,3\}\right\},$$

其取值如图1（左）所示。$\mathbb{Z}^3$-齐次消失理想 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})$ 在总次数3–7下有一组明确的极小生成元，如下所列：

	(三次式)	(四次式)	(五次多项式)	(七次式)
$\mathbb{Z}^3$次 # 生成元 方程	$3\mathbf{e}_i$ 3 方程（8）	$2\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k$ 9 方程（27）	$3\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k$ 18 方程 (14)	$3\mathbf{e}_i+3\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k$ 108 方程 (18)

注 1. Br˚atelund 和 Rydell [2, §5] 最近研究了 $Y_{\mathcal{F}}$ 的一种推广：给定一个图 $G=([n],E)$，其观测图簇是以下映射的闭图像

$$\Psi_G:\left(\mathcal{B}_3\times \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^3\right)^{\times n}\dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3})^{\times E} \tag{3}$$
$$(K_i,R_i,c_i\mid 1\le i\le n)\mapsto\left(K_i^{-T}R_i[c_j-c_i]_{\times}R_j^TK_j^{-1}\mid ij\in E\right).$$

值得肯定的是，他们的研究发现了在 $n\ge 4$ 的观测图簇上消失的新方程。另一方面，他们还证明，这些方程与定理1中的三次式和五次多项式一起，仍无法刻画完全图 K_n 在 $n\ge 3$ 个顶点上的观测图簇（即使作为集合也不行）。定理1在 K_3. 的第一个有趣情形中给出了完整刻画

我们的第二个主要结果是关于相容本质矩阵三元组之簇 $Y_{\mathcal{E}}$ 的一个弱得多的论断。我们强调，与 $Y_{\mathcal{F}}$ 相比，描述 $Y_{\mathcal{E}}$ 客观上更难——没有先前的结果可供比较。回顾一下，一个

多射影空间中的不可约子簇 Y 若由多齐次多项式 f_1、 $\dots f_k$ 局部定义，则零点集 $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_k)$ 包含 Y，且维数为 $\dim Y$.

定理 2。簇 $Y_{\mathcal{E}}$ 的维数为 11。其多重次数函数支撑在格单纯形上

$$\operatorname{conv}\left\{5\mathbf{e}_i + 5\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k \mid \text{distinct } i, j, k \in \{1, 2, 3\}\right\},$$

如图1（右）所示。局部定义 $Y_{\mathcal{E}}$ 的方程如下:

	（三次式）	（四次式）	（六次式）
$\mathbb{Z}^3$ 次 # 个生成元 方程	$3\mathbf{e}_i$ 27 方程 (8)	$2\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k$ 9 方程 (27)	$2\mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_j + 2\mathbf{e}_k$ 1 方程 (25)

注 2。与定理1不同，我们尚未完全理解消失理想 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{E}})$。我们关于 $Y_{\mathcal{E}}$ 的局部方程，在 [28]意义上属于一种“弱刻画”：它们对该簇提供了相对简单的描述，或许足以用于诸如在 $Y_{\mathcal{E}}$ 上进行优化或通过同伦延拓求解 [16]等应用。

1.1. 内容概要。第 2 节回顾背景知识和以往结果，以确立本文采用的符号。第 3 节讨论定理 1 和定理 2 中涉及的新四次式：它们最初是如何通过结合表示论与数值插值发现的、它们的几何解释，以及它们与先前研究的联系。第 4 节证明主要结果。这些证明借助计算机完成，需要进行（有时迂回曲折的）Macaulay2 [12] 计算。最后，我们在第 5 节提出有待进一步研究的开放问题。

支持本文结果的计算代码托管在以下代码仓库中:
https://github.com/azoviktor/compatible-fundamental-triples。

1.2. 先前工作。我们的成果建立在许多先前研究的基础上。这里我们简要概述相关工作，许多相关细节将在第 2 节中介绍。

相容基本矩阵三元组最初是在三视图射影重建的临界构型背景下得到研究的 [15, 14]。这些研究在适当的一般性假设下，给出了相容性的充要条件——具体表述见下文命题 1 和注 3。

另一条富有成果的研究路线始于 [27], ，其通过一个相关矩阵 $3n \times 3n$，给出了 $n \geq 3$ 个相机相容性的秩约束（当 $n = 3$ 时，该矩阵即为下文的矩阵 (15)。）这种刻画的一个局限在于它假设采用适当缩放。在经典双视图几何中，基本矩阵只能恢复到一个尺度因子——这解释了为何我们的映射 (1) 的陪域是射影空间的乘积。相反， [27] 及其后续研究 [19, 18, 11] 关注的是我们映射的仿射变体,

$$\widehat{\Psi}_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})^{\times 3} \times \left(\mathbb{C}^3\right)^{\times 3} \dashrightarrow \left(\mathbb{C}^{3\times 3}\right)^{\times 3} \tag{4}$$

$$(K_1, K_2, K_3, R_1, R_2, R_3, c_1, c_2, c_3) \mapsto \left(K_i^{-T} R_i [c_j - c_i]_\times R_j^T K_j^{-1} \mid 1 \leq i < j \leq 3\right).$$

我们强调，该映射的像的闭包（其维数为 $\widehat{\dim} Y_{\mathcal{K}}$）并非 $Y_{\mathcal{K}}$ over $Y_{\mathcal{K}}$仿射锥，其维数为 $3 + \dim\ Y_{\mathcal{K}}$.

为避免尺度歧义，研究 $\widehat{\Psi}_{\mathcal{K}}$ 提出了各种旨在为每对给定基本矩阵恢复相对尺度因子的优化方法。相比之下，我们的定理1刻画了那些代数约束

这些约束对基本矩阵三元组的任意重新缩放均成立。这一观点在近期工作 [2, 5], 中得到认同, 这些工作确定了任意数量相机的精确相容性条件，但集合论方程问题仍悬而未决。

对于定理 2 中本质矩阵的设定，以往的工作 [18, 11, 23]再次假设了适当缩放。因此，我们的定理 2 似乎是关于相容本质矩阵三元组的首个去除这一限制的结果。

2. Fundamentals

我们首先简要回顾几何计算机视觉的若干方面，这些内容见 Hartley 和 Zisserman 的标准教材 [14]。随后与代数几何的联系则凸显了 [21]中所综述的代数视觉这一更新近的视角。

针孔相机是满射线性投影 $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$，因此其自由度计数为 $(2+1)\times(3+1) - 1 = 11$。一般 3×4 矩阵的以下"RQ"分解也可得出相同的自由度计数,

$$P = KR\,(I \mid -c)\,, \tag{5}$$

其中 $K \in \mathcal{B}_3$, $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$，且 $c \in \mathbb{C}^3$. 当 (5) 中的 $K = I$ 为单位矩阵时，我们称 P 为标定相机。矩阵 K 编码了相机的内参数（焦距、宽高比、图像中心和斜切），而 R 和 c 则构成外参数（方向和位置）。

与 (1) 中一样，我们为任意相机对关联一个基本矩阵 $F_{ij} \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3})$:

$$P_i \sim K_i R_i\,(I \mid -c_i)\,,\ P_j \sim K_j R_j\,(I \mid -c_j)\,, \quad \rightsquigarrow \quad F_{ij} \sim K_i^{-T} R_i [c_j - c_i]_\times R_j^T K_j^{-1}. \tag{6}$$

这里我们使用符号 $\sim$，以强调 P_i、P_j 和 F_{ij} 仅在相差一个比例因子的意义下定义[1]。按照这一约定，我们注意到以下关系:

$$F_{ji} \sim F_{ij}^T, \tag{7}$$

$$\det(F_{ij}) = 0. \tag{8}$$

当 P_i 和 P_j 均为已标定相机时， F_{ij} 称为本质矩阵；为保持统一，全文舍弃传统记号 E_{ij}。

基本矩阵和本质矩阵对于双相机三维重建问题至关重要：给定 $y_{11}, \ldots, y_{1n}$, $y_{21}, \ldots, y_{2n} \in \mathbb{P}^2$，我们能否恢复相机 P_1, P_2 以及世界点 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{P}^3$，使得对于所有 i 和 j，均满足 $P_i x_j \sim y_{ij}$？请注意，如果要用未标定相机进行重建, 那么重建问题的（精确）解存在于 $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$-轨道中,

$$\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})\cdot(P_1, P_2, x_1, \ldots, x_n) = \left\{(P_1 H^{-1}, P_2 H^{-1}, Hx_1, \ldots, Hx_n) \mid H \in \mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})\right\}. \tag{9}$$

基础矩阵构造实现了 $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$作用于相机对空间上的一个有理商。更确切地说，存在一个非空扎里斯基开子集 $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 4})^{\times 2}$，使得该映射的非空纤维

$$\mathcal{U} \ni (P_1, P_2) \mapsto F_{12} \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3})$$

恰好是 $\mathcal{U}$ 中各点的 $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$-轨道。因此，恢复基本矩阵通常意味着恢复重建问题解的一个 $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$-轨道。这本质上就是射影重建定理 [14, §10.3]。

[1]在式（6）及下文中，我们采用如下记号简写：对于任意向量空间 V，当 u 和 v 各自都是 V 中的非零向量，或分别是 $\mathbb{P}(V)$ 中的对应元素时，我们可以写作 $u \sim v$。

对于旨在重建标定相机对的情形，也有类似的结论：将 $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$ 替换为其由三维相似变换构成的子群 $\mathcal{S}_3$；而一个一般的本质矩阵则编码了两个 $\mathcal{S}_3$-轨道的并集，这两个轨道通过扭曲对相关联（见 [14, §9.6], 或下文的（44））。除三次约束（8）外，本质矩阵还必须满足由 Demazure 三次约束给出的 9 个关系 [6],

$$2F_{ij}F_{ji}F_{ij} - \operatorname{tr}(F_{ij}F_{ji})F_{ij} = 0. \tag{10}$$

由于上述双相机重建问题已相当成熟地得到理解，人们自然希望对三个或更多相机的情形也能有类似的认识。这正是研究映射 (1) 的主要动机。维数计数（命题3）表明，$Y_{\mathcal{F}}$ 并非由三个三次式 (8) 切出，其中 $1 \le i < j \le 3$. 因此，还需要额外的约束。

这类相容性约束中有一组广为人知的条件，见于 [15, §2.3], [14,§15.4], ，并采用极线几何的语言。这些条件导出了定理1中的五次多项式。首先考虑一个一般点 $(F_{12}, F_{13}, F_{23}) \in Y_{\mathcal{F}}$。我们可以假设该点属于映射 $\Psi_{\mathcal{F}}$ 的像，因此对于所有 i 和 $j.$，都有 $\operatorname{rank}(F_{ij}) = 2$。我们将基本矩阵$F_{ij}$ 的第 ji 个极点定义为向量 $e_{ji} \sim \ker(F_{ij}) \in \mathbb{P}^2$。从几何上看，$e_{ji}$ 可以理解为第 i 个相机中心 c_i 在第 j 个相机下的投影。为说明这一点，令 $\hat{c}_i$ 表示 c_i 在通常嵌入 $\mathbb{C}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ 下的像，并计算

$$F_{ij}\,(P_j\hat{c}_i) \sim K_i^{-T}R_i[c_j - c_i]_\times\,(I \mid -c_i)\,\hat{c}_i = 0.$$

注意，只有当相机中心 c_1、c_2、$c_3 \in \mathbb{C}^3$ 不共线时，才有此情况。

$$e_{12} \not\sim e_{13}, \quad e_{21} \not\sim e_{23}, \quad \text{and} \quad e_{31} \not\sim e_{32}, \tag{11}$$

而当

$$e_{12} \sim e_{13}, \quad e_{21} \sim e_{23}, \quad \text{and} \quad e_{31} \sim e_{32}. \tag{12}$$

我们称 (11) 为非共线条件，称 (12) 为共线条件。

命题 1. [14, 定理 15.6] 满足非共线条件 (11) 的基本矩阵三元组 (F_{12}, F_{13}, F_{23}) 属于 $\Psi_{\mathcal{F}}$ 的像，当且仅当

$$e_{13}^T F_{12} e_{23} = e_{12}^T F_{13} e_{32} = e_{21}^T F_{23} e_{31} = 0. \tag{13}$$

注 3. [2, 例3.3] 表明，满足 (13) 和共线条件 (12) 的基本矩阵三元组不一定属于 $\Psi_{\mathcal{F}}$. 的像

一般而言，两个图像点 $y_i, y_j \in \mathbb{P}^2$ 满足 $y_i \not\sim e_{ji}, y_j \not\sim e_{ij}$ 时，它们是某个世界点 $x \in \mathbb{P}^3$ 的投影，当 $y_i^T F_{ij} y_j = 0.$ 因此，(13) 中的三角测量条件只是表达了如下约束：当 x 是三个相机中心之一时。

命题 1 涉及三元组 (F_{12}, F_{13}, F_{23}) 上的开条件：即 (11) 的非共线条件，以及隐含条件 $\operatorname{rank}(F_{ij}) = 2$.通过伴随矩阵 $\operatorname{adj} F_{ij}$ 表示极点，可得到闭条件：

$$\operatorname{adj}(F_{13})F_{12}\operatorname{adj}(F_{32}) = \operatorname{adj}(F_{12})F_{13}\operatorname{adj}(F_{23}) = \operatorname{adj}(F_{21})F_{23}\operatorname{adj}(F_{13}) = 0. \tag{14}$$

方程 (14) 总共包含 27 个多重齐次多项式——每组 9 个，多次数为 $3\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k \in \mathbb{Z}^3$. 在定理1中，由于涉及下文将介绍的四次式的关系，只需要这三组中的两组。

命题 1 的实质是，$Y_{\mathcal{F}}$ 由方程 (8) 和 (14) 局部定义。下面的例 1 表明，这些方程无法作为集合定义出 $Y_{\mathcal{F}}$。

现在转向定理 1 中的七次式。这些方程与一个秩约束密切相关，该约束最早出现在 [27]，中，并构成了 [19, 18, 11, 23]中许多后续约束的基础。这些研究将一个 9×9 矩阵$\frown F$ 与映射 $\Psi_{\mathcal{F}}$ （由 (4) 定义）的图像中的任意一点关联起来。更一般地，对于 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}(F_{12}, F_{13}, F_{23}) \in Y_{\mathcal{F}}$，我们可以关联如下 9×9 矩阵

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} \\ \hat{F}_{12}^T & 0 & \hat{F}_{23} \\ \hat{F}_{13}^T & \hat{F}_{23}^T & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

注意，对单个 F_{ij} 重新缩放并不会对 F进行重新缩放，因此涉及$\smile F$ 的条件（至少事先）应在 $Y_{\mathcal{F}}$ 上而非 $Y_{\mathcal{F}}$.上表述

命题2。 [27] 对于所有 $(\hat{F}_{12}, \hat{F}_{13}, \hat{F}_{23}) \in \widehat{Y}_{\mathcal{F}}$，都有秩$(F) \leq 6$.

我们给出一个简短且自洽的证明。

证明。根据秩的下半连续性，只需证明如下情形下该结论成立：

$$\hat{F}_{ij} = u_{ij} K_i^{-T} R_i [c_j - c_i]_\times R_j^T K_j^{-1}, \quad K_i \in \mathcal{B}_3, \quad u_{ij} \in \mathbb{C}^*, \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$

且中心 c_1、c_2、$c_3 \in \mathbb{C}^3$ 不共线。此外，由于恒等式，我们可以假设 F 是斜对称的。

$$\begin{bmatrix} 0 & u_{12}[c_2 - c_1]_\times & u_{13}[c_3 - c_1]_\times \\ u_{12}[c_1 - c_2]_\times & 0 & u_{23}[c_3 - c_1]_\times \\ u_{13}[c_1 - c_3]_\times & u_{23}[c_2 - c_3]_\times & 0 \end{bmatrix} = (D_{R,K})^T F D_{R,K}, \tag{16}$$

其中 $D_{R,K}$ 是一个对角块为 $R_i K_i$ 的可逆矩阵。只需验证矩阵 (16) 的核包含三个线性无关向量，即可得出结论，

$$\begin{bmatrix} u_{23}(c_2 - c_1) \\ u_{13}(c_1 - c_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_{23}(c_3 - c_2) \\ 0 \\ u_{12}(c_2 - c_3) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ u_{13}(c_3 - c_2) \\ u_{12}(c_2 - c_3) \end{bmatrix}. \tag{17}$$

□

$\hat{}$命题2表明， F 的 7×7 子式在 $Y_{\mathcal{F}}$. 上全都为零。这些方程并非全都在 $Y_{\mathcal{F}}$ 上消失，原因很简单：它们不是多重齐次的。不过，这些子式中有很大一部分是多重齐次的：可以取

$$\det\left(F_{[R^c, C^c]}\right) = 0, \quad F \text{ as in } (15), \tag{18}$$

其中 R、$C \subset [9]$ 为两个被删去的行和列的指标，其形式为

$$\begin{aligned} &R = \{3(k_1 - 1) + i_1,\, 3(k_2 - 1) + i_2\}, \\ &C = \{3(k_1 - 1) + j_1, 3(k_2 - 1) + j_2\}, \\ &\text{with } 1 \leq i_1 \leq j_1 \leq 3, \quad 1 \leq i_2 \leq j_2 \leq 3, \quad 1 \leq k_1 < k_2 \leq 3. \end{aligned} \tag{19}$$

(18)、(19) 中描述的 108 个七次式，正是定理1中出现的那些七次式。

矩阵 (15) 也在研究本质矩阵 [18, 11, 23] 的相容性时发挥着重要作用。与我们的工作最相关的是 Martyushev 的方程。它们的作用类似于前文讨论的七次式：尽管原先假设采用适当缩放，我们仍可利用这些方程中的部分信息构造出具有所需多重齐次性的方程（本例中只有一个）。

按照 [23], , 我们在 $n \times n$ 矩阵上定义一个“菱形算子”,

$$A \diamond B = \operatorname{adj}(A - B) - \operatorname{adj}(A) - \operatorname{adj}(B). \tag{20}$$

Martyushev 方程可写为:

$$\operatorname{tr}(\hat{F}_{12}\hat{F}_{23}\hat{F}_{31}) = 0, \tag{21}$$

$$\hat{F}_{ij}^T \hat{F}_{ij} \hat{F}_{jk} - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\hat{F}_{ij}^T \hat{F}_{ij})\, \hat{F}_{jk} + \operatorname{adj}(\hat{F}_{ij}) \hat{F}_{ki}^T = 0, \tag{22}$$

$$\hat{F}_{jk}^T \operatorname{adj}(\hat{F}_{ij}) + \operatorname{adj}(\hat{F}_{jk}) \hat{F}_{ij}^T + (\hat{F}_{ij}\hat{F}_{jk}) \diamond \hat{F}_{ki}^T = 0, \tag{23}$$

$$\operatorname{tr}^2(\hat{F}^2) - 16 \operatorname{tr}(\hat{F}^4) + 24 \sum_{i<j} \operatorname{tr}^2(\hat{F}_{ij}^T \hat{F}_{ij}) = 0, \tag{24}$$

$$\operatorname{tr}^3(F^2) - 12 \operatorname{tr}(F^2) \operatorname{tr}(F^4) + 32 \operatorname{tr}(F^6) = 0, \tag{25}$$

对于所有互不相同的 i、j、$k \in \{1,2,3\}$。

注4。Martyushev [23, 定理4和 5] 的主要结果表明，$(F_{12}$、F_{13}、$F_{23}) \in Y_{\mathcal{E}}$，当且仅当存在一个代表元 $(\hat{F}_{12}$、$\hat{F}_{13}$、$\hat{F}_{23}) \in \widehat{Y}_{\mathcal{E}}\hat{}$，使得每个 $F_{ij} \neq 0$，并且方程(10)以及(21)至(25)全部为零。

注意到(22)、(23)各由九个方程组成。在 Martyushev 方程中，只有(21)是多重齐次的，其次数为 $\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_3$. 。然而，可以从六次方程(25)中提取一个多重齐次方程 $\mathcal{M}_6(F)$，方法是取其次数为$(2\mathsf{e}_1 + 2\mathsf{e}_2 + 2\mathsf{e}_3)$的部分：具体而言，

$$\mathcal{M}_6(F) := \pi\left(\operatorname{tr}^3(F^2) - 12 \operatorname{tr}(F^2) \operatorname{tr}(F^4) + 32 \operatorname{tr}(F^6)\right), \tag{26}$$

其中 $\pi\colon\ \mathbb{C}[F]_6 \to \mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_{(2,2,2)}$ 是自然投影。通过简单的 Gr¨obner 基计算可验证其理想成员关系

$$\mathcal{M}_6(F) - \left(\operatorname{tr}^3(F^2) - 12 \operatorname{tr}(F^2) \operatorname{tr}(F^4) + 32 \operatorname{tr}(F^6)\right) \in \left\langle \text{equations (10)}, 1 \le i < j \le 3 \right\rangle.$$

Martyushev 的结果（注4）意味着，对于任意 $(F_{12}, F_{13}, F_{23}) \in Y_{\mathcal{E}}$，都存在一个非零代表元 $(\hat{F}_{12}, \hat{F}_{13}, \hat{F}_{23}) \in \widehat{Y}_{\mathcal{E}}$，使得 $\mathcal{M}_6(F)$ 为零。

由于 $\mathcal{M}_6(F)$ 是多齐次的，因此 $\mathcal{M}_6(F)$ 在 $\widehat{Y}_{\mathcal{E}}$ 和 $Y_{\mathcal{E}}$.

3. 新的四次约束

现在引入定理1中的四次式,

$$\begin{aligned} &F_{12} \operatorname{adj}(F_{32}) F_{31} - F_{13} \operatorname{adj}(F_{23}) F_{21} = \\ &F_{31} \operatorname{adj}(F_{21}) F_{23} - F_{32} \operatorname{adj}(F_{12}) F_{13} = \\ &F_{21} \operatorname{adj}(F_{31}) F_{32} - F_{23} \operatorname{adj}(F_{13}) F_{12} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

注5. 注意，(27) 可以简洁地表述为以下条件:

$$\text{for all permutations } (i,j,k) \text{ of } (1,2,3),\ F_{ij} \operatorname{adj}(F_{kj}) F_{ki} \text{ is symmetric.} \tag{28}$$

因此，三个 3×3 矩阵方程 (27) 总共给出了 9 个不同的四次多项式方程。这 9 个方程正是我们在分析第3.1节所述计算结果后，最初观察到的四次式形式。

3.1. 对称插值。我们结合数值插值与表示论，发现了四次约束 (27)。具体而言，我们旨在计算消失理想的四次分量的一组基

$$\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4 = \mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}}) \cap \mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_4.$$

由 27 个变量（即 F_{12}、 F_{13}、 F_{23} 的各个元素）构成的四次多项式的外围空间维数为

$$\dim \mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_4 = \binom{27+4-1}{4} = 27405.$$

朴素插值需要计算一个 27405×27405范德蒙德型矩阵的零空间，但由于内存限制和数值不稳定性，这在计算上不可行。为了解决这一问题，我们利用问题的对称性。 $Y_{\mathcal{F}}$ 和 $Y_{\mathcal{E}}$ 在约化群的作用下均保持不变

$$G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^*)^3,$$

该群在 $Y_{\mathcal{F}}$ 上的作用为

$$\varphi \colon G \times Y_{\mathcal{F}} \to Y_{\mathcal{F}}$$

$$(S_1, S_2, S_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, F_{12}, F_{13}, F_{23}) \mapsto \left(\lambda_1 S_1 F_{12} S_2^\top, \lambda_2 S_1 F_{13} S_3^\top, \lambda_3 S_2 F_{23} S_3^\top\right).$$

注意到， φ 也限制为对 $Y_{\mathcal{E}}$的作用。由于这些作用保持齐次多项式的次数， G 作用于 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4$和 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{E}})_4$。

李群 G 是约化的，因为其李代数 $\mathfrak{g}$ 是约化的，并且中心$Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}^3$ 在齐次多项式上通过可对角化自同态作用（事实上，它通过伸缩作用）。因此， G-模 $\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_4$ 是完全可约的（参见第2章第 6], 节） [17, ，具有同型分解

$$\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_4 = \bigoplus_{j=1}^{k} V_j. \tag{29}$$

其 G-不变子空间 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4$ 相应地分解（参见第1章，第 70]页）： [3,

$$\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4 = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4 \cap V_j.$$

因此，为了在 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4$, 中插值多项式，只需分别计算每个同型分量 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4 \cap V_j$。为了得到 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4 \cap V_j$的一组基，我们选取 V_j的一组基 $\{v_1, \ldots, v_{m_j}\}$，采样 m_j个一般点 $\{p_1, \ldots, p_{m_j}\} \subset Y_{\mathcal{F}}$，并构造一个范德蒙德型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} v_1(p_1) & \cdots & v_{m_j}(p_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(p_{m_j}) & \cdots & v_{m_j}(p_{m_j}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}$$

并计算其零空间。然后，对于 $\mathrm{null}(A)$ 的某个基中的每个向量 $(n_1, \ldots, n_{m_j})$，我们得到 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4 \cap V_j$ 的一个基元素 $\sum_{i=1}^{m_j} n_i v_i$，从而得到 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4 \cap V_j$ 的一组完整基。

利用表示论中的技术，我们将 $\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_4$ 分解为同型分量，并发现

$$k = 372, \quad \max_{j \in [k]} m_j = 375.$$

与朴素的 27405×27405插值问题相比，同型分解将最大的零空间计算简化为一个可处理的 375×375 系统。

尽管这项 375×375零空间计算在计算上已经可行，但我们还可以利用每个等型分量中最高权向量的结构，进一步缩小问题规模。令 H_j 为 V_j的最高权空间；也就是说，若 $V_j = W_j^{\oplus a_j}$，其中 W_j不可约，则 H_j是 W_j的最高权空间（每个维数为 1）的直和。因此，$\dim H_j = a_j$。只需计算以下空间的基

$$H_j' = \mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4 \cap H_j$$

因为所有约束都可以通过群作用得到：

$$\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_4 \cap V_j = G \cdot H_j' := \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{ g \cdot h' \mid g \in G, h' \in H_j' \}.$$

考察所有等型分量中最高权空间的最大维数，可以发现

$$\max_{j\in[k]} a_j = 5.$$

这意味着，借助最高权向量，插值任务可以简化为计算大小至多为 5×5的零空间，这相比原始的 27405×27405 问题和已经易于处理的 375×375都有显著改进。

为将 $\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_4 \cong \mathrm{Sym}^4(\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_1)$ 分解为不可约子表示（进而分解为同型分量），我们按如下步骤进行：

(a) 由于 $\mathfrak{g}$ 是约化的，它具有根空间分解，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{n}^+} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\alpha\in\Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{n}^-},$$

其中，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的 6 维嘉当子代数，指标 Φ^+ （分别为 Φ^-）是正（分别为负）根，而 $\mathfrak{n}^+$ （分别为 $\mathfrak{n}^-$）是正（分别为负）根空间 [13, 第 7,8] 章。若将 $\mathfrak{g}$ 表示为

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})}_{\mathfrak{g}_1} \oplus \underbrace{\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})}_{\mathfrak{g}_2} \oplus \underbrace{\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})}_{\mathfrak{g}_3} \oplus \underbrace{\mathbb{C}^3}_{\mathfrak{g}_4},$$

then

$$\mathfrak{h} = \oplus_{j=1}^4 \mathfrak{h}_j, \quad \mathfrak{n}^+ = \oplus_{j=1}^4 \mathfrak{n}_j^+, \quad \mathfrak{n}^- = \oplus_{j=1}^4 \mathfrak{n}_j^-,$$

其中，$\mathfrak{h}_j$ 是 $\mathfrak{g}_j$的嘉当子代数，且每个 $\mathfrak{n}_j^+$ 和 $\mathfrak{n}_j^-$ 分别是 $\mathfrak{g}_j$的正根空间和负根空间。由于 $\mathfrak{g}_4$ 是阿贝尔的，因此有 $\mathfrak{h}_4 = \mathfrak{g}_4$，且 $\mathfrak{n}_4^+$ 和 $\mathfrak{n}_4^-$ 均为平凡的。对于 $j = 1$，2，3，我们固定 $\mathfrak{h}_j = \langle J_3 \rangle$、$\mathfrak{n}_j^+ = \langle J_+ \rangle$、$\mathfrak{n}_j^- = \langle J_- \rangle$，其中

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad J_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) 将 $V = \mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_1$ 分解为权空间 [17, 第 6 章，第 20] 节，形式如下

$$\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_1 = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda, \tag{30}$$

其中

$$V_\lambda = \{v \in V \mid X \cdot v = \lambda(X)v \ \ \forall X \in \mathfrak{h}\}.$$

换言之，我们找到一个 $\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_1$ 的基，其中包含来自 $\mathfrak{h}$的线性算子的同时特征向量。由于我们知道每个 $\mathfrak{h}_j$的特征向量，因此为 $\mathfrak{h}$ 寻找同时特征基是直截了当的。 $\mathfrak{h}_4$ 的特征向量就是变量，因为 $\mathfrak{g}_4$ 通过伸缩作用。对于 $j = 1$中的每个 $\mathfrak{h}_j$ ，2、3，它都会作用于两个基本矩阵的行或列，同时保持另一个矩阵不变。例如，考虑 $\mathfrak{h}_j$ 的列作用

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix},$$

九个特征向量为

$$f_{1k} - if_{2k}, \quad f_{3k}, \quad f_{1k} + if_{2k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

对于行作用，我们考虑 F的转置，并以与列作用情形类似的方式求得特征向量。对于在该作用下保持不变的基本矩阵，特征向量就是变量。

(c) 如下获得 $\mathrm{Sym}^p(\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_1)$ 的权空间分解（我们需要$p = 4$）：

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sym}^p(\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_1) = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} W_\mu \text{ with} \\ &W_\mu = \bigoplus_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = \mu \\ \lambda_i \in \mathfrak{h}^*}} V_{\lambda_1} \odot \cdots \odot V_{\lambda_p} \text{ where} \\ &V \odot W := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{fg \mid f \in V, g \in W\}). \end{aligned} \tag{31}$$

例如，参见 [10, 第 375]页，了解张量积的权空间分解。

(d) 如下计算表示 $\mathrm{Sym}^4(\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_1)$ 的不可约子表示的最高权向量。对于上述分解中的每个权空间 W_μ，我们找出子空间

$$H_\mu := \{v \in W_\mu \mid X \cdot v = 0 \text{ for all } X \in \mathfrak{n}_+\}.$$

H_μ 中的元素就是包含于 $\mathrm{Sym}^4(\mathbb{C}[F_{12}, F_{13}, F_{23}]_1)$ 中的不可约子表示的最高权向量。当 μ 是等型分量 V_j （前文定义）中出现的不可约表示 W_j 的最高权时，我们有

$$H_\mu = H_j,$$

其中， H_j 是 V_j 的最高权空间。一旦确定了一个最高权向量，其在 $\mathfrak{g}$ （或仅在 $\mathfrak{n}_-$）下的轨道就会生成相应的不可约子表示 [10, 命题 **14**13]。将具有相同最高权的子空间归在一起，即可得到等型分量。根据前面的说明，构造范德蒙型矩阵时，只需考虑 H_μ 。

在计算出所有 $j \in [k] = [372]$ 的 $\mathcal{I}(Y_\mathcal{F})_4 \cap V_j$ 的一组基后，我们发现有 **51** 个非平凡交集 $\mathcal{I}(Y_\mathcal{F})_4 \cap V_j$，其中只有 **3** 个无法由 $\mathcal{I}(Y_\mathcal{F})_3$ 中约束的变量倍数得到。也就是说，如果我们考虑

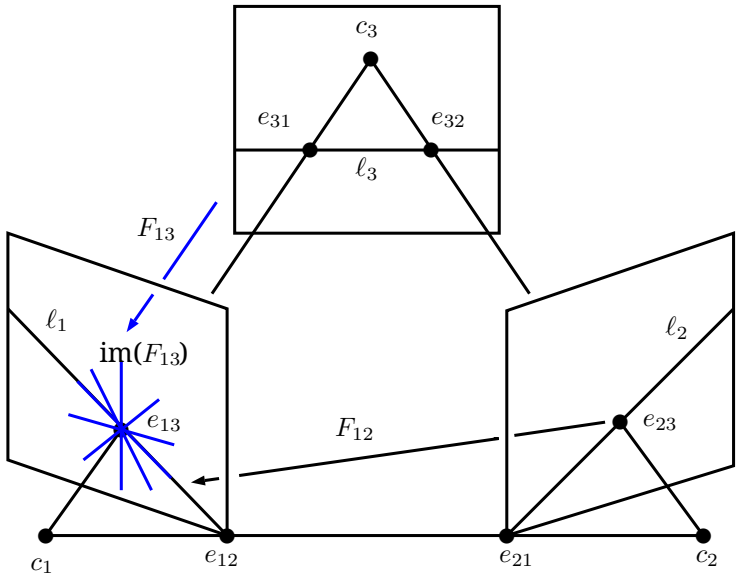


FIGURE 2. 四次式（27）的几何结构：每条极线$l_i = F_{ij}e_{jk}$ 都属于极线束 $\mathrm{im}(F_{ik})$。

由 $\{fg \mid f \in \mathbb{C}[F_{12}, F_{23}, F_{31}]_1, g \in \mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})_3\}$ 生成的向量空间 Q，51 个等型分量 V_j 中有 48 个属于 Q。这 3 个等型分量对应于使 (28) 中的多项式矩阵对称的约束。

最后，我们对 Julia 中的数值计算作一些说明。在分解为不可约表示的过程中，也会出现零空间计算，具体出现在步骤 (b) 和 (d) 中。最大的零空间问题出现在步骤 (d)，其规模为 23×23。对于分解算法中使用的基于奇异值分解的零空间计算，我们将绝对容差设为 $\varepsilon = 10^{-5}$。

为了计算范德蒙型矩阵的零空间，我们采用更严格的容差 $\varepsilon < 10^{-10}$。所得多项式最初是以浮点系数得到的，随后先进行缩放以获得整数系数，再舍入到最近的整数，从而转换为精确系数多项式。

3.2. 新四次约束的几何解释。由于基本矩阵 F_{kj} 的秩为 2，其伴随矩阵 $\mathrm{adj}(F_{kj})$ 的秩为 1，因此可写为 $\mathrm{adj}(F_{kj}) = e_{jk}u^T$，其中 $u \in \mathbb{C}^{3\times 1}$。四次式 (27) 中出现的矩阵$F_{ij}\,\mathrm{adj}(F_{kj})F_{ki}$ 是秩一对称矩阵，因此可因式分解为 $F_{ij}\,\mathrm{adj}(F_{kj})$ $F_{ki} = \alpha\, a\, a^T$，其中 $a \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ 且 $\alpha \in \mathbb{C}^*$。因此，

$$\alpha\, a\, a^T = F_{ij}e_{jk}u^T F_{ki} \quad \Rightarrow \quad \alpha\, F_{ij}e_{jk} = F_{ki}^T u = F_{ik}u,$$

这意味着 $F_{ij}e_{jk} \in \mathrm{im}(F_{ik})$。考虑 i、j、$k \in [3]$的所有无重复赋值，并结合式 (27) 的对称性，我们得到六个关系

$$F_{12}e_{23} \in \mathrm{im}(F_{13}),\ F_{13}e_{32} \in \mathrm{im}(F_{12}),\ F_{23}e_{31} \in \mathrm{im}(F_{21}),$$
$$F_{21}e_{13} \in \mathrm{im}(F_{23}),\ F_{31}e_{12} \in \mathrm{im}(F_{32}),\ F_{32}e_{21} \in \mathrm{im}(F_{31}),$$

由此得到四次式（27）。

众所周知，在多视图几何中，$\mathrm{im}(F_{ij})$表示图像 i中经过基点 e_{ij} 的极线束。该极线束中的直线对应于图像 j中的点。特别地，图像 i 中的极线 $F_{ij}e_{jk}$ 对应于极点 $e_{jk} \sim P\hat{\mathcal{C}}_k$。上述关系可从几何角度理解为要求极线 $\ell_i = F_{ij}e_{jk}$ 属于极线束$\mathrm{im}(F_{ik})$；按此理解，我们可以看到， ℓ_i 通常是由 e_{ij}和 e_{ik}. 张成的直线。图2展示了具体关系 $F_{12}e_{23} \in \mathrm{im}(F_{13})$。

3.3. 将四次式与先前已知的约束进行比较。让我们研究定理1中的四类约束在多大程度上确实是必需的。

例 1. 在 [2], 中给出了如下三元组的例子,

$$F_{12} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{13} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{23} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

对于该三元组，三次式(8)与五次多项式(14)均成立，然而$(F_{12}.F_{13}, F_{23}) \notin Y_{\mathcal{F}}$.这一点可用定理1加以确认，因为对四次式(27)与七次式(18)的直接求值表明，它们在该三元组上并非全部为零。

可以说，三元组 (32) 的意义有限，因为秩$(F_{23}) = 1$. 因此，我们接下来给出两个基本矩阵三元组的例子，其中秩$(F_{ij}) = 2$ 对所有 i, j都成立，以此说明定理1中的约束是必要的。

例2。对于基本矩阵三元组

$$F_{12} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{13} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{23} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

定理1中的所有三次式、四次式和五次多项式均为零，但108个七次式中恰有一个不为零。这里，(11)和(12)均不成立，因为

$$e_{12} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim e_{13}, \quad e_{21} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sim e_{23}, \quad e_{31} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \not\sim \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim e_{32}. \tag{34}$$

例3。与例2类似，三元组

$$F_{12} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad F_{13} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{23} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{35}$$

有五个不同的极点,

$$e_{12} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim e_{13}, \quad e_{21} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sim e_{23}, \quad e_{31} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \not\sim \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sim e_{32}, \tag{36}$$

并满足所有三次式和五次多项式，但不满足两个四次式和四个七次式。

事实证明，七次式 (18) 可以通过对由三次式、四次式和五次多项式生成的理想，关于编码共线条件 (12) 的多项式理想进行饱和而得到。事实上，我们最初正是通过这种方式发现这些方程的，后来才意识到它们可以解释为矩阵 F. 的 7×7 子式

例4. 与例2类似，我们可以构造三元组 $(F_{12}, F_{13}, F_{23}) \notin Y_{\mathcal{F}}$，使其满足所有三次式、五次多项式和七次式，但不满足所有四次式。实际上，若 F_{12} 和 F_{13} 是任意秩一矩阵，且 F_{23} 是任意秩至多为二的矩阵，则 Gröbner 基计算表明，所有三次式、五次多项式和七次式在 (F_{12}, F_{13}, F_{23}) 处都为零。然而，四次式在这样的三元组上通常不为零：具体而言，我们可以取

$$F_{12} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{13} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{23} \sim \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

这表明，为了将 $Y_{\mathcal{E}}$ 作为集合切出，四次式是必要的。

鉴于例2，自然会问：是否存在满足三次式、五次多项式和七次式、但不满足四次式的秩二三元组？结果并非如此：令 $I_1(F_{ij})$ 表示 F_{ij} 的 2×2 子式所生成的理想，我们通过计算发现

$$\Big\langle \text{cubics, quintics, septics} \Big\rangle : \Big(\big\langle \text{quartics} \big\rangle \cdot I_1(F_{12}) \cdot I_1(F_{13}) \cdot I_1(F_{23}) \Big)^{\infty} = \langle 1 \rangle. \tag{38}$$

事实上，如果将上文中的四次式与五次多项式互换，结论仍然成立：

$$\Big\langle \text{cubics, quartics, septics} \Big\rangle : \Big(\big\langle \text{quintics} \big\rangle \cdot I_1(F_{12}) \cdot I_1(F_{13}) \cdot I_1(F_{23}) \Big)^{\infty} = \langle 1 \rangle. \tag{39}$$

下面给出例4的一个类似情形，说明五次多项式与七次式和四次式一样，对于将 $Y_{\mathcal{F}}$ 作为集合切出都是必要的。

例5。对于三元组

$$F_{12} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{13} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{23} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \tag{40}$$

定理1中的所有方程，除了四个五次多项式外，均成立。注意，秩$(F_{12}) = 1$，且秩$([F_{31} \mid F_{32}]) = 2$。所有这类例子都遵循类似的模式。

注6. 鉴于定理 2，四次式 (27) 必须可由注4中列出的方程ˆ推出。事实上，将 (22) 的转置右乘 F_{jk}，得到

$$(\hat{F}_{ij}\hat{F}_{jk})^T \hat{F}_{ij}\hat{F}_{jk} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\hat{F}_{ij}^T\hat{F}_{ij})\,\hat{F}_{jk}^T\hat{F}_{jk} + \hat{F}_{ki}\operatorname{adj}(\hat{F}_{ij})^T\hat{F}_{jk} = 0$$

由此可得，最后一项ˆ F_{ki} adj(ˆF_{ij})^T ˆF_{jk}必须是对称矩阵，正如注5中所示。

4. Proofs of Main Results

为证明定理 1 和定理 2，我们需要知道 $Y_{\mathcal{F}}$ 和 $Y_{\mathcal{E}}$.的维数

命题3. 我们有如下维数公式

$$\dim(Y_{\mathcal{E}}) = 11, \quad \dim(Y_{\mathcal{F}}) = 18. \tag{41}$$

证明。由于射影重建定理指出，参数化 $\big(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 4})\big)^{\times 3} \dashrightarrow Y_{\mathcal{F}}$ 的一般纤维是单个 $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$-轨道，因此我们有

$$\dim(Y_{\mathcal{F}}) = \dim\big(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 4})^{\times 3}\big) - \dim(\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})) = 3 \times 11 - 15 = 18.$$

类似地， $Y_{\mathcal{E}}$ 中的一点对应的一般纤维是 $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$的相似子群下两个轨道的并，因此

$$\dim(Y_{\mathcal{E}}) = 3 \times 6 - 7 = 11.$$

□

定理1的证明。令 I 为由三次式、四次式、五次多项式和七次式生成的理想。注意到一个包含关系 $I \subset \mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})$，由命题3可知，只要证明 I 是一个Krull维数为 $18+3=21$.的素理想，即可得到反向包含。使用Macaulay2可以轻松得到$\dim(I) = 21$，但证明 I 是素理想则需要更多工作。考虑一个主分解，

$$I = Q_0 \cap Q_1 \cap \ldots Q_s \cap Q_{s+1} \cap \cdots \cap Q_{s+t}, \tag{42}$$

其中，对于所有$i > s.$，$\dim(Q_0) = \ldots = \dim(Q_s) = 21$, $\sqrt{Q_0} = \mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})$，且 $\dim(Q_i) < 21$。令 m 表示 Q_0 沿着 $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})$的重数。对于任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^{\times 3}_{\geq 0}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{mdeg}_I(\boldsymbol{\alpha}) &= \mathrm{mdeg}_{Q_0}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathrm{mdeg}_{Q_1}(\boldsymbol{\alpha}) + \ldots + \mathrm{mdeg}_{Q_s}(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= m \cdot \mathrm{mdeg}_{\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathrm{mdeg}_{Q_1}(\boldsymbol{\alpha}) + \ldots + \mathrm{mdeg}_{Q_s}(\boldsymbol{\alpha}) \\ &\geq \mathrm{mdeg}_{\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})}(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

要使这最后一个量非零， $\boldsymbol{\alpha}$ 必须是定理中所述的格点之一，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 必须为(7, 7, 4)、(7, 6, 5)、(6, 6, 6)或其某种置换。Macaulay2可直接验证，非零数$\mathrm{mdeg}_I(\boldsymbol{\alpha})$恰好是图1（左）所示的那些。我们还可以通过涉及零维理想的符号计算证明，这些数是相应数$\deg_{\mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})}(\boldsymbol{\alpha})$的下界。[2] 因此，我们得到 $Y_{\mathcal{F}}$的多次数，进而得到$m = 1$、$Q_1 = Q_2 \ldots = Q_s = \emptyset$和 $Q_0 = \mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})$。

最后，我们必须论证所有较低维数的分支都是平凡的，

$$Q_{s+1} = \ldots = Q_{s+t} = \emptyset.$$

这可以利用 [9]的同调判据来确立：如果

$$6 = 27 - 21 = \mathrm{codim}(I) = \min\left\{d \mid \mathrm{codim}\,\mathrm{Ext}^d(R/I, R) = d\right\}, \tag{43}$$

则 R/I 是科恩–麦考利的，因而也是等维的。Macaulay2命令 removeLowestDimension可迅速确立(43)，从而证明 $I = Q_0 = \mathcal{I}(Y_{\mathcal{F}})$。□

定理 2 的证明。根据命题3，我们可以在 $F_0 \in Y_{\mathcal{E}}$ 处计算方程 (10)、(27) 和 (25) 的雅可比矩阵 $J(F)$，并验证秩 $(J(F_0)) = 11 + 3 = 14.$ □

使用数值单值化启发式方法（如 [7] 中所述），我们计算出了图1（右）所示的 $Y_{\mathcal{E}}$ 的多次数。原则上，这些计算的结果可以经过认证，从而证明多重次数的下界。要得到相应的上界，则需要更深入地理解消失理想$\mathcal{I}(Y_{\mathcal{E}})$。不过，我们至少可以证明，对于最小的多次数，数值结果是正确的。

命题4. $\mathrm{mdeg}_{Y_{\mathcal{E}}}(5, 5, 1) = \mathrm{mdeg}_{Y_{\mathcal{E}}}(5, 1, 5) = \mathrm{mdeg}_{Y_{\mathcal{E}}}(1, 5, 5) = 400.$

[2] 有关详情，请参阅上方链接的补充代码。

证明. 首先，根据 $\mathcal{S}_3$-不变性，注意到 $Y_{\mathcal{E}}$ 也是该映射的图像

$$\widetilde{\Psi_{\mathcal{E}}} : \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})^{\times 2} \times \left(\mathbb{C}^3\right)^{\times 2} \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3})^{\times 3}$$
$$(R_{12}, R_{13}, c_{12}, c_{13}) \mapsto \left([c_{12}]_\times R_{12}^T, [c_{13}]_\times R_{13}^T, R_{12}[c_{13} - c_{12}]_\times R_{13}^T\right).$$

单个本质矩阵对应的映射，

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3})$$
$$(R, c) \mapsto [c]_\times R^T,$$

已得到充分理解：其闭图像是一个维数为 5、次数为 10 的射影簇，而 $\Phi_{\mathcal{E}}$ 的一般纤维是两条直线的并，

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{-1}\left(\Phi_{\mathcal{E}}(R, c)\right) = \{(R, uc) \mid u \in \mathbb{C}^*\} \cup \{(\mathrm{tw}(R, c), uc) \mid u \in \mathbb{C}^*\},$$

其中 tw 表示“扭曲对映射”（参见 [8, 式 (2)]），

$$\mathrm{tw} : \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 \dashrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 \tag{44}$$
$$(R, c) \mapsto \left(R\left(\frac{2}{c^T c} cc^T - I\right), -c\right). \tag{45}$$

因此，在前两个射影因子中分别用 5 个一般线性空间与 $Y_{\mathcal{E}}$ 相交，可得到配对 (F_{12}, F_{13}) 的 $10 \times 10 = 100$ 个取值，而 F_{23} 必须位于 ℓ 条直线中的一条上；对于固定的 $(R_{1i}, c_{1i}) \in \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(F_{1i})$，$i = 2, 3$，这些直线的形式为

$$\ell = \{F_{23} \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3}) \mid F_{23} \sim R_{12}[ac_{13} - bc_{12}]_\times R_{13}^T, \quad [a : b] \in \mathbb{P}^1\}.$$

将这样的 ℓ 与一个一般超平面相交，可推出 $\mathrm{mdeg}_{Y_{\mathcal{E}}}(5, 5, 1) = 400$，其余取值由对称性可得。□

5. Open Problems

最后，我们提出一些开放问题。

问题1. 求出能够作为集合切出观测图簇（3）的多项式方程，其中任意观测图为 G.

除了 $G = K_3$的情形（定理1对此给出了更强的理想论答案）之外，独立的 K_4 多项式已在 [2, 5]中得到研究。或许可以将这些多项式与定理1中的多项式结合起来，从而解决这一问题。

从未标定情形转向已标定情形，定理2体现了我们目前对 $G = K_3$. 的认知。或许可以改进这一结果。

问题2. 求出簇 $Y_{\mathcal{E}}$.的集合论方程

对于等未标定情形，我们甚至没有定理 2 这样较弱的结果。

问题 3. 确定能够在局部刻画簇 Y_{Δ}. 的方程

最后，我们指出，相容性簇只是研究三个或更多相机之间代数依赖关系的已知方法之一。另一种经过充分研究的方法是借助多视图张量 [15, Ch. 17], （也称为格拉斯曼张量 [21, §4.3.6]）。在格拉斯曼张量形式体系中，基本矩阵称为双焦张量。另外两种与针孔相机相关的格拉斯曼张量是三焦张量和四焦张量。

对于未标定相机，Aholt 和 Oeding 的工作已完全确定了三焦张量的消失理想 [1]；另请参阅 [24]，了解与张量分解相关的

最新进展。关于已标定三焦点簇 [20]，目前所知甚少。尽管 Martyushev 的工作给出了其在实数上的刻画 [22], 以及一些低次方程，但该簇的集合论描述似乎仍属未知。

对于四焦张量，已知的内容甚至更少——参见 [25]，其中给出了未标定情形下低次方程的分类。

问题 4。研究观测图 K_3 和 K_4 的相容性簇与相应格拉斯曼张量簇之间的关系。我们能否将关于方程的知识从一类簇迁移到另一类簇?

Acknowledgments

感谢 Fields 研究所邀请我们参加交换代数应用研讨会，该研讨会促成了本项目的启动。AL 的研究部分得到了美国国家科学基金会数学科学部奖项 2001267 和西蒙斯学者计划的支持。TP 得到了 OPJAK CZ.02.01.01/00/22 008/0004590 Roboprox 项目的支持。VK 得到了 CEDMO 2.0 NPO 项目的支持。

References

[1] Chris Aholt 和 Luke Oeding, *The ideal of the trifocal variety*, 《数学计算》83 (2014)，第 289 期，2553–2574。MR 3223346[2] Martin Br˚atelund 和 Felix Rydell, *Compatibility of fundamental matrices for complete view-ing graphs*, IEEE/CVF 国际计算机视觉大会，ICCV 2023，巴黎，法国，2023年10月1日至6日，IEEE，2023，第 3305–3313 页。[3] T. Br¨ocker 和 Tammo tom Dieck, *Representations of compact lie groups*, 1985。[4] Andrea Porfiri Dal Cin、Timothy Duff、Luca Magri 和 Tom´as Pajdla, *Minimal perspectiveautocalibration*, IEEE/CVF 计算机视觉与模式识别大会，CVPR 2024，美国华盛顿州西雅图，2024年6月16日至22日，IEEE，2024，第 5064–5073 页。[5] Erin Connelly 和 Felix Rydell, *Geometric interpretations of compatibility for fundamental matrices* **131** 2025 102446 ，《符号计算杂志》（），。[6] Michel Demazure, *Sur deux problemes de reconstruction*, 技术报告，1988。[7] Timothy Duff、Cvetelina Hill、Anders Jensen、Kisun Lee、Anton Leykin 和 Jeff Sommars, *Solving polynomial systems via homotopy continuation and monodromy*, 《IMA 数值分析杂志》**39** 2019 3, 1421 1446 3984062（），第 – 期。MR Timothy Duff、Viktor Korotynskiy、[8] Tomas Pajdla 和 Margaret H. Regan, *Galois/monodromy groups for decomposing minimal problems in 3D reconstruction* ，《SIAM 应用代数与几何杂志》6 (2022)，第 4 期，740–772。MR 4522866[9] David Eisenbud、Craig Huneke 和 Wolmer Vasconcelos, *Direct methods for primary decomposition* **110** 1992 2, 207 235 ，《数学发明》（），第 – 期。MR 1185582[10] *Representation theory: A first course* W. Fulton 和 J. Harris，《数学研究生教材》，施普林格，2004。[11] Amnon Geifman、Yoni Kasten、Meirav Galun 和 Ronen Basri, *Averaging essential andfundamental matrices in collinear camera settings*, 2020 IEEE/CVF 计算机视觉与模式识别大会，CVPR 2020，美国华盛顿州西雅图，2020年6月13日至19日，计算机视觉基金会 / IEEE，2020，第 6020–6029 页。[12] Daniel R Grayson、Michael E Stillman 及其他 Macaulay 2 *Macaulay2 a software system for research in algebraic geometry* 作者，，，可通过 `www.macaulay2.com` 获取。[13] Brian C. Hall, *Lie groups, lie algebras, and representations*, 施普林格，2015。[14] Richard Hartley 和 Andrew Zisserman, *Multiple view geometry in computer vision*, 剑桥大学出版社，2004。[15] Richard I. Hartley 和 Fredrik Kahl, *Critical configurations for projective reconstruction from multiple views* **71** 2007 1, 5 47 ，《国际计算机视觉杂志》（），第 – 期。[16] Petr Hruby、Timothy Duff、Anton Leykin 和 Tom´as Pajdla, *Learning to solve hard minimalproblems*, IEEE/CVF 计算机视觉与模式识别大会，CVPR 2022，美国路易斯安那州新奥尔良，2022年6月18日至24日，IEEE，2022，第 5522–5532 页。

[17] James E. Humphreys, *Introduction to lie algebras and representation theory*, 1972。[18] Yoni Kasten、Amnon Geifman、Meirav Galun 和 Ronen Basri, *Algebraic characterization of essential matrices and their averaging in multiview settings*, 2019 IEEE/CVF 国际计算机视觉大会, ICCV 2019, 韩国首尔, 2019年10月27日至11月2日, IEEE, 2019, 第 5894–5902 页。[19] , *Gpsfm: Global projective SFM using algebraic constraints on multi-view funda-mental matrices*, IEEE计算机视觉与模式识别会议, CVPR 2019, 美国加利福尼亚州长滩, 2019年6月16日至20日, 计算机视觉基金会 / IEEE, 2019, 第 3264–3272 页。[20] Joe Kileel, *Minimal problems for the calibrated trifocal variety*, 《SIAM 应用代数与几何杂志》 **1** 2017 1, 575 598 3705779 (), 第 – 期。MR Joe Kileel 和 Kathlen Kohn, [21] *Snapshot of algebraic vision*, arXiv 预印本 arXiv:2210.11443 (2022)。[22] Evgeniy V. Martyushev, *On some properties of calibrated trifocal tensors*, 《数学影像与视觉杂志》58 (2017), 第 2 期, 321–332。[23]*Necessary and sufficient polynomial constraints on compatible triplets of essential matrices* **128** 2020 12, 2781 2793 , 《国际计算机视觉杂志》 (), 第 – 期。[24]Daniel Miao、Gilad Lerman 和 Joe Kileel, *Tensor-based synchronization and the low-rankness of the block trifocal tensor*, 神经信息处理系统进展 38：2024 年神经信息处理系统年会, NeurIPS 2024, 加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华, 2024年12月10日至15日（Amir Globersons、Lester Mackey、Danielle Belgrave、Angela Fan、Ulrich Paquet、Jakub M. Tomczak 和 Cheng Zhang 编）, 2024。[25] Luke Oeding, *The quadrifocal variety*, 《线性代数及其应用》512 (2017), 306–330。MR 3567527[26] Johannes Lutz Sch¨onberger 和 J an-Michael Frahm, *Structure-from-motion revisited*, 计算机视觉与模式识别会议（CVPR）, 2016。[27] Soumyadip Sengupta、Tal Amir、Meirav Galun、Tom Goldstein、David W. Jacobs、Amit Singer 和 Ronen Basri, *A new rank constraint on multi-view fundamental matrices, and its application to camera location recovery*, 2017 IEEE计算机视觉与模式识别会议, CVPR 2017, 美国夏威夷州檀香山, 2017年7月21日至26日, IEEE计算机学会, 2017, 第 2413–2421 页。[28] Matthew Trager、Martial Hebert 和 Jean Ponce, *The joint image handbook*, 2015 IEEE 国际计算机视觉大会, ICCV 2015, 智利圣地亚哥, 2015年12月7日至13日, IEEE计算机学会, 2015, 第 909–917 页。