arXiv:2602.23480v1 [math.CA] 26 Feb 2026

1

定理 1.3. 任意两个体积相同的满秩格 $L, M \subseteq \mathbb{R}^d$，都在$\mathbb{R}^d$中存在一个有界的（勒贝格）可测公共基本域。

2.1. 有界基本域。 格H 在群 $G \subseteq \mathrm{R}^d$中的一个基本域F， 是一个从G/H的每个陪集中恰好包含一个代表元的集合。给定的满秩格$L \subset \mathrm{R}^d$在R^d 中总存在一个可测的有界公共基本域。这类集合的一个标准例子是L 相对于L 的一组给定基$v_1, ..., v_d >_{\mathbb{Z}}$所确定的所谓基本平行多面体:

$$P_L := \left\{ \sum_{i \leq d} t_i v_i \mid t_i \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right\}$$

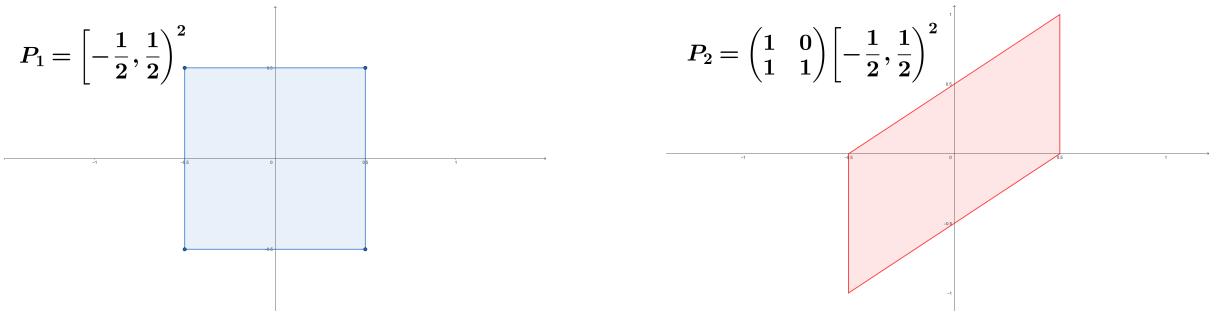


图 1. 格 $\mathbb{Z}^2$的两个不同基本平行多面体。P_1 相对于基 {(1, 0), (0, 1)}（左）以及P_2 相对于基 {(1, 1), (0, 1)}（右）。

下面的引理指出，从$\mathbb{R}^d$中格L的一个基本域，总能找到L 在子群$G \subseteq \mathbb{R}^d$中的一个基本域：

引理 2.1. 设 $L \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个满秩格，G 是$\mathbb{R}^d$ 的任意子群，满足：

$$L \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^d$$

若 F 是 L 在$\mathbb{R}^d$中的一个基本域，则 $F \cap G$ 是 L 在 G 中的一个基本域。

证明。 我们先证明，$F \cap G$ 至少包含商群G/L中每个陪集的一个代表元。考虑商群G/L中的一个陪集$g \bmod (L) \in$，其中$g \in G$。由于F 是L 在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个基本域，存在元素$x \in F$ 使得：

$$x = g \mod (L)$$

将$g \bmod (L)$视为 $\mathbb{R}^d/L$中的一个陪集。这意味着，对某个$l \in L$，有$x = g + l$ 。由于G 是包含L 的群，且$g \in G$，因此$x \in F \cap G$。

现在我们将证明，$F \cap G$ 在G/L的每个陪集中至多包含一个代表元。这直接源于以下事实：作为L 在 $\mathbb{R}^d$中的基本域，F 在 $\mathbb{R}^d/L$ 的每个陪集中恰好包含一个元素。证毕。□

2.2. **等分解性**。设空间X 带有群G的作用。我们用$g \cdot x$ 表示元素$g \in G$ 作用于点$x \in X$。

定义 2.1。如果存在有限多个集合$A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ 以及元素$g_1, \ldots, g_n \in G$，使得$\{A_j\}_{j \le n}$ 构成A 的一个划分，而$\{g_j \cdot A_j\}_{j \le n}$ 构成B的一个划分，则称两个集合$A, B \subseteq X$ 是G-等分解的。集合$A_1, \ldots, A_n$ 称为A与B之间的G-等分解的部分。

众所周知且容易看出，相对于空间X 上的群作用G 的等分解性是一种等价关系。因此，每当我们

有两个集合A、$B \subseteq X$是G-等分解的，我们有时会写 e:

$$A \overset{G}{\sim} B$$

注。在本文中，X将是R^d的一个局部紧子集，通常是满秩格L 在R^d的子群$H \supseteq L$ 内的一个有界基本域。作为H中L 的基本域，X可与商群H/L等同。通过这种等同，X 获得由H/L的阿贝尔群结构所诱导的群结构。至于X的作用群G，它通常是商群H/L的一个子群，因此我们将元素$g \in G$对点$x \in X$的作用记为$x+g$。换言之，G通过平移作用于X。

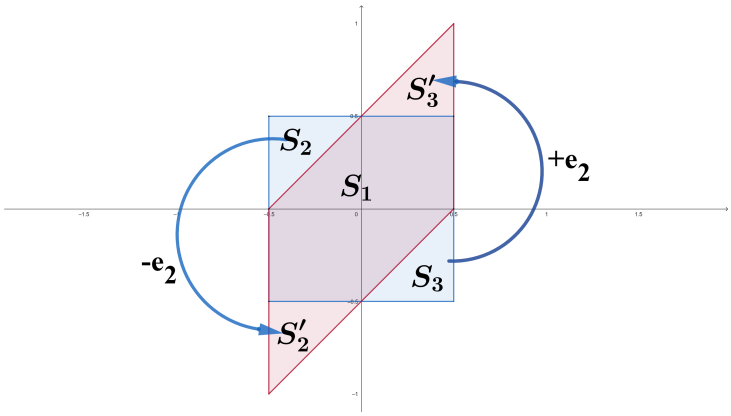


图 2. 两个在Z^2下等分解的集合示例，$P_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$以蓝色显示，$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2$以红色显示。互不相交的部分$S_1 = P_1 \cap P_2, S_2, S_3$划分$P_1$，而$S_1, S_2' = S_2 - e_2, S_3' = S_3 + e_2$将$P_2$划分，其中$e_2 = (0,1) \in \mathrm{Z}^2$。

下面这个简单引理阐明了等分解性与在R^d上两个满秩格存在有界公共基本域之间的联系。

引理 2.2. 设$L, M \subseteq \mathbb{R}^d$是两个满秩格，$P_L$和$P_M$分别是$L$和$M$的基本平行多面体。

那么，L和M在$\mathbb{R}^d$上存在有界公共基本域，当且仅当

$$P_L \overset{L+M}{\sim} P_M$$

在$\mathbb{R}^d$中。此外，如果

$$P_L \overset{L+M}{\sim} P_M$$

其中包含$\mathbb{R}^d$中的勒贝格可测子集，则L、M在$\mathbb{R}^d$上存在一个有界且勒贝格可测 的公共基本域。

尽管与L几乎等分解、且具有L的可测基本域的集合，一般并非L的基本域，但它们能够通过L的平移铺砌 R^d。换言之，若F 与L的基本域F' 几乎等分解，则：

$$\sum_{l\in L} 1_F(x-l) = 1 \tag{2}$$

$$F_k = P_k \oplus \Delta, \quad P_k = \left\{ \sum_{i \le r} n_i m_i \mid n_i \in \{0, \ldots, k-1\}, i \le r \right\}$$

要证明可测集$A \subseteq X$在G作用下于X上均匀，只需证明存在正常数$c > 0$和$k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意$k \geq k_0$以及任意$x \in X$：

$$|A \cap F_k + x| \geq ck^r$$

我们将证明，可以通过先在群 L +M 内构造 L、M 的有界公共基本域 F_1，从而在 R^d 中构造出 L、M 的有界公共基本域 F。假设这一步已经完成，那么很容易在 L + M $= Z^m \times R^{d-m}$ 内找到 L + M 的有界基本~~域 F_2~~。事实上，由于 L + M 在 L +M 中稠密，我们~~可以~~从 L + M/(L + M) 的每个陪集中选取一个代表元，使其位~~于以~~原点为中心、半径为 $\epsilon > 0$ 的某个球内。F_2 就是由 L +M/(L + M) 每个陪集中各选取一个这样的代表元组成的集合，它是 L +M 在 L + M $= Z^m \times R^{d-m}$ 中的有界基本域。最后，R^d 中所需的 L、M 公共基本域为：

$$F = [0,1)^m \times \{0\}^{d-m} + F_1 + F_2$$

就其构造方式而言，它是一个有界集合。

事实上，请注意，对于L中点的任意枚举，若$l_i \in L$ 对$i \in \mathbb{N}$成立，且对于M中点的任意枚举，若$m_i \in M$ 对$i \in \mathbb{N}$成立，则集合：

$$P = \{l_i + m_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

这意味着存在一个全测度集$X \subseteq \mathbf{Z}^m \times \mathbf{R}^{d-m}$、$\mathbf{P}(\mathbf{Z}^m) \otimes \mathbf{L}_{d-m}$-可测子集$S_i \subseteq P_L$以及元素$l_i \in L$、$m_i \in M$，对于$i \leq n \in \mathbf{N}$，使得：

$$P_L \cap X = \bigcup_{i \leq n} S_i \cap X$$

是$P_L \cap X$的一个划分，并且：

$$P_M \cap X = \bigcup_{i \leq n} (S_i + l_i + m_i) \cap X$$

是$P_M \cap X$的一个划分。考虑集合：

$$F_1 = \bigcup_{i \leq n} (S_i + l_i) \cap X$$

我们将证明，有界且关于$\mathbf{P}(\mathbf{Z}^m) \times \mathbf{L}_{d-m}$可测的$F_1$是$\mathbf{Z}^m \times \mathbf{R}^{d-m}$的一个公共几乎基本域，也就是说，它可以通过$L$的平移以及通过$M$的平移铺砌$\mathbf{Z}^m \times \mathbf{R}^{d-m}$。我们将证明，$F_1$可以通过$L$的平移铺砌$\mathbf{Z}^m \times \mathbf{R}^{d-m}$；类似地，也可以证明它可以通过$M$的平移铺砌。换句话说，我们需要证明：

$$\sum_{l \in L} 1_{F_1}(x - l) = 1$$

对于$card \otimes m_{d-m}$-几乎所有$x \in \mathbf{Z}^m \times \mathbf{R}^{d-m}$。注意，$P_L$是$L$在$\mathbf{Z}^m \times \mathbf{R}^{d-m}$中的一个可测基本域；并且注意，由于$X$是$\mathbf{Z}^m \times \mathbf{R}^{d-m}$中的一个满测度集合（相对于$card \times m_{d-m}$），我们有：

$$1_{P_L} = 1_{P \cap X} = \sum_{i \leq n} 1_{S_i \cap X} = \sum_{i \leq n} 1_{S_i}$$

，克里特大学，Voutes 校区，70013 伊拉克利翁，希腊。电子邮件地址：manos.ch.spyridakis@gmail.com