arXiv:2602.23527v1 [math.PR] 26 Feb 2026

布尔熵的泛函不等式

´GUILLAUME CEBRON、KEWEI PAN

法国图卢兹大学、图卢兹国立应用科学学院、法国国家科学研究中心、图卢兹数学研究所，法国图卢兹。

Abstract. 基于近期引入的布尔熵概念，我们通过德布鲁因恒等式定义了相应的布尔费舍尔信息。我们研究了布尔中心极限定理中该费舍尔信息的单调性，并建立了涉及这些量的若干泛函不等式，包括对数 Sobolev 不等式。我们还发展了非微观态对应形式，并证明了相关的泛函不等式。此外，我们在布尔情形下引入了 Stein 偏差的概念，由此得到布尔中心极限定理中的新型贝里–埃森型界。

Contents

引言 1
论文结构 4
记号 4
1. 微观态方法 1.1. 布尔熵与Fisher信息 1.2. 6
信息论性质 1.3. 泛函不等式 2. 非微观态方法 6
2.1. 布尔施温格–戴森方程 2.2. 布尔熵与 12
Fisher信息 2.3. 信息论性质 2.4. 泛函不等式 15
3. 布尔独立性的 Stein 方法 3.1. Stein 方法 19
3.2. Stein偏差 3.3. 熵中心极限定理 结论与展 19
望 参考文献 20
21
22
25
25
27
28
31
31

Introduction

布尔熵与费舍尔信息。在 [30], 中，第二作者引入了一种布尔熵的概念，与 Voiculescu自由熵类似。这种布尔熵是某些随机矩阵模型的经验谱分布满足大偏差原理时的速率函数。更具体地说，研究了两种模型：条件为零特征值占多数的 GUE，以及条件为零元素占多数的 GUE。对于这两种模型，非零特征值的经验分布都满足大偏差原理。相应的速率函数（相差一个乘法常数）一致，并由此得到以下定义。对于实数轴上任意具有有限二阶矩的概率测度 μ，其布尔熵定义为 μ 以下对数积分

$$\Gamma(\mu) := \int \log|x|\, d\mu(x) \in [-\infty, +\infty).$$

E-mail address: guillaume.cebron@math.univ-toulouse.fr, kewei.pan@math.univ-toulouse.fr。

“布尔熵”这一术语反映了这样一个事实：这两种随机矩阵模型源自较早的研究 [10, 26] ，在这些研究中，渐近布尔独立性（定义见 [37]）自然出现，正如 Voiculescu 从 GUE模型 [3, 40], 定义自由熵一样，而 GUE模型是渐近自由独立性的一个实例。布尔独立性构成了由 Speicher 提出的三联体中的第三种独立性——经典统计独立性 / 自由独立性 / 布尔独立性—— [36]Speicher 将其视为非交换概率论中仅有的三种普适独立性。因此，布尔熵的定义是发展完整布尔熵理论的第一块基石，与经典和自由情形相对应。在 [30], 中证明了，布尔熵具有两种类似于经典熵和自由熵的性质：它在布尔中心极限定理下保持单调；并且在极限分布处达到最大值，即拉德马赫分布 $\mathrm{b} = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$（对称伯努利分布）。

本文通过仿照德布鲁因恒等式，引入布尔费舍尔信息 $\Psi(\mu)$：从一个对称测度出发，沿由 b 生成的布尔卷积半群对布尔熵求导，得到

$$\Psi(\mu) = \iint \frac{\log x^2 - \log y^2}{x^2 - y^2}\, d\mu(x) d\mu(y).$$

从非对称测度出发，会得到与之相关的费舍尔信息的另一种表达式，而这种表达式的分析似乎要困难得多。因此，本文余下部分将系统地研究对称概率测度，并将非对称费舍尔信息的研究留待未来工作。

我们证明，布尔熵和布尔费舍尔信息满足香农–斯塔姆不等式、布拉赫曼-斯塔姆不等式、Cram´er-Rao 不等式、熵功率不等式和 Voiculescu-斯塔姆不等式的布尔类比；这些不等式涉及布尔独立随机变量之和。此外，我们证明了布尔费舍尔信息的单调性，这为证明布尔熵的单调性提供了另一种视角。这些结果表明，这些量与布尔独立性十分契合。

泛函不等式。 接下来，我们考虑相对于平衡测度 b 的 $\Gamma(\mu)$ 和 $\Psi(\mu)$。对于任意对称概率测度 μ，定义相对于 b 的布尔熵为

$$\Gamma(\mu|\mathrm{b}) := \frac{1}{2}\int x^2\, d\mu(x) - \int \log|x|\, d\mu(x) - \frac{1}{2} \in [0, +\infty].$$

事实上，这就是前面提到的完整速率函数——包含势项时——并且它在 $\Gamma(\mathrm{b}|\mathrm{b}) = 0$ 处取最小值，正如我们将看到的（另见 [30]）。我们还将相对于 b 的布尔费舍尔信息 $\Psi(\mu|\mathrm{b})$ 定义为 $\Gamma(\mu|\mathrm{b})$ 沿布尔奥恩斯坦-乌伦贝克过程的导数，其具有如下显式表示：对于任意定义在 $\mathbb{R}$ 上的对称概率测度μ,

$$\Psi(\mu|\mathrm{b}) = \iint \frac{\log x^2 - \log y^2}{x^2 - y^2}\, d\mu(x) d\mu(y) + \int x^2\, d\mu(x) - 2 \in [0, +\infty].$$

布尔费舍尔信息的正性并非显而易见，并且意味着布尔熵沿布尔奥恩斯坦-乌伦贝克过程具有单调性。

按照 Voiculescu 的说法，上述两个量可称为微观态，因为它们源自随机矩阵近似。Voiculescu [41], 提出的自由熵非微观态方法，无需依赖微观态即可定义自由熵。在布尔情形下，这种内在方法使我们能够引入费舍尔信息的另一种形式。对于任意定义在 $\mathbb{R}$上的对称概率测度 μ，相对于 b 的非微观态布尔 *Fisher* 信息定义为

$$\Psi^*(\mu|\mathrm{b}) := \int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) + \int x^2\, d\mu(x) - 2 \in [0, +\infty].$$

将此量沿布尔 Ornstein-Uhlenbeck 过程积分，可得到相对于 b 的非微观态布尔熵；对于任意定义在 $\mathbb{R}$ 上的对称概率测度 μ，其定义如下：

$$\Gamma^*(\mu|\mathrm{b}) = \frac{1}{2}\log\left(\int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x)\right) + \frac{1}{2}\int x^2\, d\mu(x) - \frac{1}{2} \in [0, +\infty].$$

最后，仿照 [25, 16] 中分别为经典情形和自由情形所发展的 Stein 方法，我们定义布尔 *Stein* 偏差 $D^*(\mu|\mathfrak{b})$。对于定义在 $\mathbb{R}$上的任意对称概率测度 μ，其定义如下：

$$D^*(\mu|\mathfrak{b}) := \left(\int x^4 \, d\mu(x) - 2 \int x^2 \, d\mu(x) + 1 \right)^{1/2} \in [0, +\infty].$$

我们建立了以下泛函不等式，它们更清晰地说明了这些量之间的关系，尤其是它们如何都为距拉德马赫分布 $\mathfrak{b}$ 的二次Wasserstein-2距离 W_2 提供上界。这些不等式与其经典和自由对应物之间惊人的平行关系，为将这些量视为经典量和自由量的恰当布尔类比物提供了又一个论据。对于 $\mathbb{R}$上的任意对称概率测度 μ，我们有：

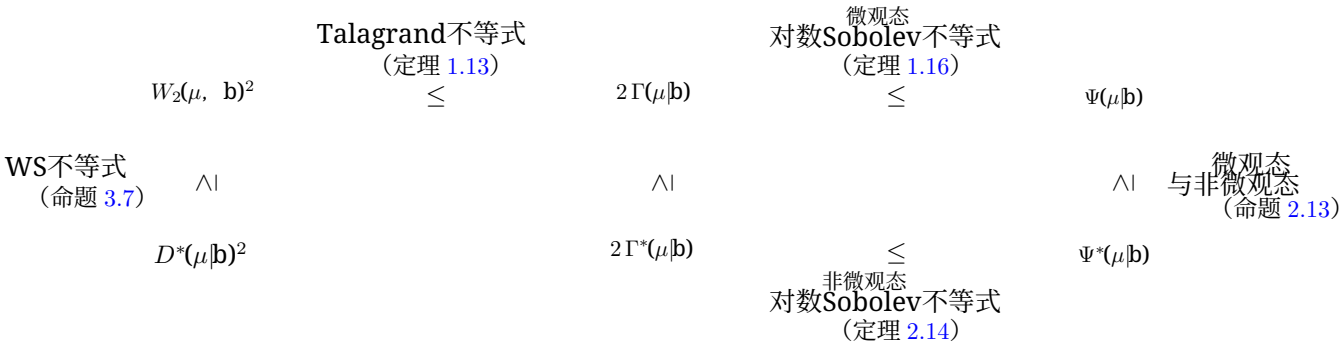


FIGURE 1. 布尔函数不等式的层级。

此外，我们还能够证明对角对数 Sobolev 不等式的两个精细版本$2\Gamma(\mu|\mathfrak{b}) \le \Psi^*(\mu|\mathfrak{b})$：即 Otto–Villani HWI 不等式的直接布尔类比，也就是布尔 *HWI* 不等式（定理 2.15）

$$2\Gamma(\mu|\mathfrak{b}) \le 2W_2(\mu, \mathfrak{b}) \sqrt{\Psi^*(\mu|\mathfrak{b})} - W_2(\mu, \mathfrak{b})^2 \le \Psi^*(\mu|\mathfrak{b})$$

以及 Ledoux-Nourdin-Peccati HSI 不等式的直接布尔类比，也就是 布尔 *HSI* 不等式（定理3.9）

$$2\Gamma(\mu|\mathfrak{b}) \le D^*(\mu|\mathfrak{b})^2 \cdot \log\left(1 + \frac{\Psi^*(\mu|\mathfrak{b})}{D^*(\mu|\mathfrak{b})^2}\right) \le \Psi^*(\mu|\mathfrak{b}).$$

与一维自由情形不同，我们观察到微观态熵与非微观态熵之间存在差异。

从一个不一定对称的测度 μ 出发，除 $W_2(\mu, \mathfrak{b})^2$ 外，所有涉及的量在对称化 $\mu^s(B) := \frac{1}{2}\mu(B \cup (-B))$ μ 时均保持不变。因此，将 $W_2(\mu, \mathfrak{b})^2$ 替换为 $W_2(\mu^s, \mathfrak{b})^2 = \int ||x| - 1|^2 d\mu(x)$ 后，上述八个不等式对实数集 $\mathbb{R}$ 上所有概率测度仍然成立，而这些测度不一定是对称的。

Berry-Esseen不等式。 WS不等式直接控制 Wasserstein 距离，并为布尔卷积 $\uplus$ 的布尔中心极限定理给出新的定量估计。对于任意测度 μ，记 $m_k(\mu)$（其中 $k \in \mathbb{Z}$）为 μ 的 k 阶矩 $\int x^k d\mu(x)$，只要该矩存在。设 μ 是一个概率测度，其前四阶矩均存在，且 $m_1(\mu) = 0$、$m_2(\mu) = 1$（μ 是中心化且归一化的），以及 $m_4(\mu) < +\infty$。我们将 μ_n 定义为 $\mu^{\uplus n}$ 按 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 伸缩所得的测度，即 $\mu_n(B) = \mu^{\uplus n}(\{x : \frac{1}{\sqrt{n}} x \in B\})$。我们证明，只要 μ 是对称的，对所有 $n \ge 1$，都有

$$W_2(\mu_n, \mathfrak{b}) \le D^*(\mu_n|\mathfrak{b}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{m_4(\mu) - 1}.$$

这直接来自 WS不等式所提供的传输控制。收敛速率 $O(n^{-1/2})$与经典中心极限定理的 Berry-Esseen不等式中的通常速率相同 [6, 15]，自由情形也如此 [12, 24]。在布尔情形下，据作者所知

，目前只有四项已有的 Berry-Esseen 型结果：在相同假设下，对较弱的 L $O(n^{-1/3}$évy 距离，收敛速率 ´已得到证明 [2], ；在存在六阶矩这一较强假设下，对 L$O(n^{-1/2}$évy 距离，收敛速率´已得到证明；在存在三阶矩这一较弱假设下，对一种特设距离，收敛速率 [33], 已得到证明 $O(n^{-1/2})$; 对于具有有界支撑的测度，耦合距离上的收敛速率也已得到证明 。上述四项研究均不需要测度具有 [20], 对称性；而且，由于 Stein偏差直接控制 Wasserstein-1 距离 $O(n^{-1/2}$，我们无需对称性假设，也能去除此假设：对所有 [22]，均有

$$W_1(\mu_n, \mathrm{b}) \le D^*(\mu_n|\mathrm{b}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{m_4(\mu) - 1}.$$

除了度量收敛之外，我们还可以研究信息论收敛。在经典（以及自由）中心极限定理中，也可以对费舍尔信息的收敛和相对熵的收敛进行定量分析。在适当条件 [5, 13, 23] 下，最优速率为 $O($ $n^{-1})$。然而，在自由和经典情形中，Stein 方法在条件非常弱 [25, 16] 时，也可以相当直接地得到（几乎最优的）速率 $O(\log(n)/n)$。本文发展的布尔 Stein 方法可以得到以下定量熵中心极限定理。设 μ 是一个对称概率测度，其矩存在 $m_1(\mu) = 0$、 $m_2(\mu) = 1$、 $m_4(\mu) < +\infty$ 和 $m_{-2}(\mu)$ $< +\infty$。那么，当 $n \to \infty$ 时，

$$\Gamma(\mu_n|\mathrm{b}) = O\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \quad \text{and} \quad \Psi(\mu_n|\mathrm{b}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

注意，在相同条件下，随着 n 增大， $\Gamma^*(\mu_n|\mathrm{b})$ 和 $\Psi^*(\mu_n|\mathrm{b})$ 保持不变，这揭示了微观态量与非微观态量在行为上的结构性差异。

论文结构。 在第1.1节中，我们引入布尔熵 $\Gamma(\mu)$ 与布尔费舍尔信息 $\Psi(\mu)$，建立沿布尔热半群的布尔 de Bruijn 恒等式，并证明 $\Gamma(\mu)$ 与 $\Psi(\mu)$ 在布尔中心极限定理中的单调性。在第 1.2节中，我们建立布尔熵与费舍尔信息的主要信息论性质，包括 Shannon–Stam 不等式、Blachman–Stam 不等式、Cram´er–Rao 不等式、熵功率不等式以及 Voiculescu–Stam 不等式。在第1.3节中，我们引入相对布尔熵 $\Gamma(\mu|\mathrm{b})$ 与相对布尔 Fisher 信息 $\Psi(\mu|\mathrm{b})$，并证明布尔塔拉格朗日输运不等式、布尔对数 Sobolev 不等式，以及相对熵沿布尔 Ornstein–Uhlenbeck 过程的指数衰减。

在第2.1节，我们引入布尔 Schwinger–Dyson 方程，它是后续定义的动机。在第2.2节，我们定义非微观态布尔 Fisher 信息$\Psi^*(\mu)$、非微观态布尔熵 $\Gamma^*(\mu)$，并建立相应的 de Bruijn 恒等式。在第2.3节，我们证明非微观态量的主要性质，包括 Blachman–Stam 不等式、Cram´er–Rao 不等式、Voiculescu–Stam 等式、熵功率等式，以及中心极限定理中的常数性。在第2.4节，我们引入非微观态相对布尔熵 $\Gamma^*(\mu|\mathrm{b})$ 和非微观态相对布尔 Fisher 信息 $\Psi^*(\mu|\mathrm{b})$，我们证明非微观态对数 Sobolev 不等式，建立微观态量与非微观态量之间的比较，并证明 HWI 不等式。

在第 3.1 节中，我们将 Stein 方法应用于 Rademacher目标 b，并为 W_1 推导出 Berry–Esseen 界。在第 3.2 节中，我们引入布尔 Stein 偏差 $D^*(\mu|\mathrm{b})$，并将其与输运联系起来，特别证明了 WS不等式以及沿布尔中心极限定理对 $D^*(\mu_n|\mathrm{b})$ 的显式 Berry–Esseen 控制。在第 3.3 节中，我们建立 HSI不等式，并据此推导出布尔中心极限定理中的定量熵收敛以及 WSH 不等式。

记号。 我们用 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的概率测度集合，并用 $\mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的对称概率测度子集。$\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 的柯西变换定义为

$$G_\mu(z) = \int \frac{1}{z - x}\, d\mu(x), \quad z \in \mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}.$$

记 $z = x + i\epsilon$，其中 $\epsilon > 0$，我们有分解 $G_\mu(x+i\varepsilon) = \pi(Q_\epsilon * \mu(x) - iP_\epsilon * \mu(x))$，其中

$$P_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}, \quad Q_\epsilon(t) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+\epsilon^2}$$

分别是泊松核与共轭泊松核。回想一下，$P_\epsilon * \mu$ 在 $\epsilon \to 0^+$时弱收敛于 μ。此外，对任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，在 f的每个勒贝格点处，我们有 $P_\epsilon * f(x) \longrightarrow f(x)$，并且若 $f \in C_0(\mathbb{R})$，则该收敛是一致的。μ的自能（或倒数柯西变换，亦称 K-变换）由 $K_\mu(z) := z - 1/G_\mu(z)$给出，其中 $z \in \mathbb{H}_+$。对 μ，$\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$，由Speicher与Woroudi [37] 引入的布尔卷积是满足如下条件的唯一测度 $\mu \uplus \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$：

$$K_{\mu\uplus\nu}(z) = K_\mu(z) + K_\nu(z), \ \forall z \in \mathbb{H}_+.$$

对 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$，只要该矩存在，我们用 $m_k(\mu)$（其中 $k \in \mathbb{Z}$）表示 μ 的第 k阶矩 $\int x^k d\mu(x)$。对 $k \geq 1$，$\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$之间的Wasserstein-$k$ 距离（或Kantorovich–Rubinstein度量）定义为

$$W_k(\mu,\nu) := \inf_\pi \left(\iint |x-y|^k \, d\pi(x,y) \right)^{\frac{1}{k}},$$

其中下确界取遍 (μ, ν) 的所有耦合。本文不会使用 L´évy 距离，但若要将我们的结果推广到 L´évy 距离，我们提及

$$\sqrt{d_{\text{Lévy}}(\mu,\nu)} \leq W_1(\mu,\nu) \leq W_2(\mu,\nu) \quad \text{and} \quad d_{\text{Lévy}}(\mu,\nu) \leq W_2(\mu,\nu).$$

若 X 和 Y 是分别具有分布 μ 和 ν 的随机变量，我们定义 $W_1(X, Y) := W_1(\mu, \nu)$，而 Kantorovich 对偶给出

$$W_1(X,Y) = \sup_{\varphi \ 1-\text{Lipschitz}} |\mathbb{E}[\varphi(X)] - \mathbb{E}[\varphi(Y)]|.$$

我们将考虑布尔独立变量。布尔独立性是一种非幺现象，通常无法在实数集-概率空间中实现。本文中的非交换概率空间$(\mathcal{M}, \tau)$是一个冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$，配备一个非退化的正规态 τ，该态不一定忠实。$\mathcal{M}$ 的元素称为（非交换随机）变量。对于任意自伴 $A = A^* \in \mathcal{M}$，A 的分布 $\mathcal{L}(A)$是唯一的测度 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有

$$\tau(A^k) = m_k(\mu).$$

柯西变换 G_μ 通常记作 G_A。

两个自伴变量 X，Y 布尔独立 当且仅当，对于任意有限的整数序列 k_1，k_2，$\ldots \geq 1$，都有

$$\tau(X^{k_1}Y^{k_2}X^{k_3}\cdots) = \tau(X^{k_1})\tau(Y^{k_2})\tau(X^{k_3})\cdots$$

and

$$\tau(Y^{k_1}X^{k_2}Y^{k_3}\cdots) = \tau(Y^{k_1})\tau(X^{k_2})\tau(Y^{k_3})\cdots,$$

在这种情况下，其和的分布由布尔卷积给出：

$$\mathcal{L}(X+Y) = \mathcal{L}(X) \uplus \mathcal{L}(Y).$$

在对称情形下，也就是说，只要 $\mathcal{L}(X)$ $\mathcal{L}(Y) \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，$X$和 Y的所有奇数阶矩均为零。特别地，$\mathcal{L}(X) \uplus \mathcal{L}(Y)$ 也是对称的。此外，我们得到

$$\mathcal{L}((X+Y)^2) = \mathcal{L}(X^2+Y^2) \tag{0.1}$$

这在本文中会多次用到。更一般地，对于所有 μ，$\nu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，若将 μ，ν和 $\mu \uplus \nu$在映射 $x \mapsto x^2$ 下的推前分别记为 $\mu^{(2)}$，$\nu^{(2)}$ 和 $(\mu \uplus \nu)^{(2)}$，则有

$$(\mu \uplus \nu)^{(2)} = \mu^{(2)} \uplus \nu^{(2)}$$

正如 [28] 中已有充分记载的那样。

对于具有有限四阶矩的概率测度 μ 在 $\mathbb{R}$ 上，我们还可以定义 $r_1(\mu)$、$r_2(\mu)$、$r_3(\mu)$ 以及 $r_4(\mu)$ 的前四个布尔累积量，其定义方程为（参见 [2, 37]）

$$\begin{aligned}
m_1(\mu) &= r_1(\mu),\\
m_2(\mu) &= r_1(\mu)^2 + r_2(\mu),\\
m_3(\mu) &= r_1(\mu)^3 + 2r_1(\mu)r_2(\mu) + r_3(\mu),\\
m_4(\mu) &= r_1(\mu)^4 + 3r_1(\mu)^2 r_2(\mu) + r_2(\mu)^2 + 2r_3(\mu)r_1(\mu) + r_4(\mu).
\end{aligned}$$

与经典累积量类似，上述定义的布尔累积量满足：对于 $\mu,\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 和 $i \in \mathbb{N}$，有

$$r_i(\mu \uplus \nu) = r_i(\mu) + r_i(\nu)$$

并且，如果 ν 是 μ 经 a 伸缩得到的，则有

$$r_i(\nu) = a^i r_i(\mu).$$

设 μ 是一个概率测度，其前四阶矩存在，且 $m_1(\mu) = 0$，$m_2(\mu) = 1$，以及 $m_4(\mu) < +\infty$。我们将 μ_n 定义为 $\mu^{\uplus n}$ 经 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 伸缩得到的测度，即 $\mu_n(B) = \mu^{\uplus n}(\{x : \frac{1}{\sqrt{n}}x \in B\})$。运用前面两条规则，我们得到

$$\begin{aligned}
m_1(\mu_n) = r_1(\mu_n) &= m_1(\mu) = 0,\\
m_2(\mu_n) = r_2(\mu_n) &= m_2(\mu) = 1,\\
m_4(\mu_n) - 1 = r_4(\mu_n) &= \frac{1}{n} r_4(\mu) = \frac{1}{n}(m_4(\mu) - 1).
\end{aligned} \tag{0.2}$$

致谢。我们衷心感谢 Octavio Arizmendi 和 Djalil Chafaï，就本文相关主题进行了富有启发性的讨论。

1. 微观状态方法

1.1. 布尔熵与费舍尔信息。在本节中，我们引入布尔费舍尔信息的概念，并证明它通过一个与经典 de Bruijn 恒等式相对应的积分公式与布尔熵相互作用。这给出了布尔熵沿热流的布尔类比的微分刻画。我们首先回顾布尔熵的定义。

定义 1.1. 设 X 为非交换概率空间 $(\mathcal{M},\tau)$ 中的自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$。$X$ 的布尔熵 $\Gamma(X)$ 定义为

$$\Gamma(X) := \int \log|x|\, d\mu(x) \in [-\infty, +\infty). \tag{1.1}$$

更一般地，对任意 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$，我们将 μ 的布尔熵 $\Gamma(\mu)$ 定义为

$$\Gamma(\mu) := \int \log|x|\, d\mu(x) = \frac{1}{2}\int \log x\, d\mu^{(2)}(x) \in [-\infty, +\infty)$$

前提是 $\int_1^{+\infty} \log\, x\, d\mu^{(2)}(x) < +\infty$。回顾可知，$\mu^{(2)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ 是 μ 经由映射 $x \mapsto x^2$的推前测度

本节中，除非另有明确说明，所有概率测度均假定为对称的。在布尔情形下，热半群由与缩放后的拉德马赫变量进行布尔卷积给出：给定非交换概率空间（X，$\mathcal{M}$，τ）中的一个自伴算子 $X+\sqrt{t}B$，其分布为对称分布，我们考察变量 $B \in \mathcal{M}$，其中 X 与 $= \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.布尔独立，且服从拉德马赫分布 b $= \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.我们的第一个结果，定理 1.3，以布尔 de Bruijn 恒等式的形式，确立了布尔熵与布尔费舍尔信息之间的基本联系。它用我们现在引入的一种量——布尔费舍尔信息——来表示布尔卷积半群（$\mathcal{L}(X+\sqrt{t}B))_{t\geq 0}$ 沿半群演化时布尔熵的增量。_

定义 1.2. 令 X 为非交换概率空间 $(\mathcal{M},\ \tau)$ 中的一个自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$。 X 的布尔费舍尔信息 $\Psi(X)$定义为

$$\Psi(X) := \iint \frac{\log x^2 - \log y^2}{x^2 - y^2}\, d\mu(x) d\mu(y) \in (0, +\infty] \tag{1.2}$$

unde对角线上采用连续延拓来理解。更一般地，对于任意 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R}$), we d定义布尔费舍尔信息 $\Psi(\mu)$（ μ 为

$$\Psi(\mu) := \iint \frac{\log x^2 - \log y^2}{x^2 - y^2}\, d\mu(x) d\mu(y) = \iint \frac{\log x - \log y}{x - y}\, d\mu^{(2)}(x) d\mu^{(2)}(y) \in (0, +\infty].$$

经典情形下，费舍尔信息是熵沿布朗运动变化的导数，这一关系称为德布鲁因恒等式。Voiculescu [40] 将这一框架推广到自由概率论，引入了自由熵和自由 Fisher 信息的概念。在布尔情形下，也可以建立类似的德布鲁因恒等式。

定理 1.3。设 X 是非交换概率空间$(\mathcal{M},\tau)$中的一个自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，并且 $B \in \mathcal{M}$ 与 X 布尔独立，且服从b分布。固定 $t \geq 0$，使得 $\Gamma(X + \sqrt{sB}) < \infty$, $\Psi(X + \sqrt{sB}) < +\infty$ 对任意 $s \in [0, t]$. 均成立。于是有

$$\Gamma(X + \sqrt{t}B) - \Gamma(X) = \int_0^t \frac{1}{2} \Psi(X + \sqrt{s}B)\, ds. \tag{1.3}$$

特别地， $\Gamma(X + \sqrt{tB})$ 关于 t是递增的。

值得注意的是，费舍尔信息 Ψ 仅依赖于由 $x \mapsto x^2$诱导的推前概率测度 $\mu^{(2)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$。因此，在不改变 Ψ的表达式的情况下，费舍尔信息可以定义在 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$上。然而，在这种朴素推广下，德布鲁因恒等式一般不再成立。事实上，若 X 的分布不对称，我们还有另一个满足上述德布鲁因关系的费舍尔信息显式表达式，即

$$\Psi(X) = \Psi(\mu) := \iint \frac{\frac{\log x^2}{x} - \frac{\log y^2}{y}}{x - y}\, d\mu(x) d\mu(y) \in [-\infty, +\infty], \quad \text{if } X \sim \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}).$$

我们强调，与经典费舍尔信息和自由 Fisher 信息不同，该量未必非负，并且平移不变性、缩放性质（即 $\Psi(\lambda X + m) = \lambda^{-2}\Psi(X)$ 对任意λ， $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) 不再成立。尽管如此，在 μ 对称的情形下，可以证明它恰好化为 (1.2) 中定义的费舍尔信息。此外，对称框架提供了显著更好的分析性质，在此框架下，经典理论中的许多结果及其自由类比均可得以恢复。因此，除非另有明确说明，我们此后均在对称框架下工作。

证明。 由于 X 和 B 是冯·诺伊曼代数中的自伴元素，因此它们是有界算子。因此， X 和 $X + \sqrt{tB}$ 的谱测度均为紧支撑。根据（0.1），我们知道 $\mathcal{L}((X + \sqrt{tB})^2) = \mathcal{L}(X^2 + tB^2)$，并且可以计算

$$\begin{aligned} G_{(X+\sqrt{t}B)^2}(z) &= G_{X^2+tB^2}(z) \\ &= \frac{1}{z - K_{X^2+tB^2}(z)} \\ &= \frac{1}{z - K_{X^2} - K_{tB^2}(z)} \\ &= \frac{1}{1/G_{X^2}(z) - K_{tB^2}(z)}. \end{aligned}$$

现在，由于 $\mathcal{L}(tB^2) = \delta_t$，我们有

$$K_{tB^2}(z) = z - \frac{1}{G_{tB^2}(z)} = z - \frac{1}{(z-t)^{-1}} = t,$$

由此得到

$$G_{(X+\sqrt{t}B)^2}(z) = \frac{1}{1/G_{X^2}(z) - t} = \frac{G_{X^2}(z)}{1 - tG_{X^2}(z)}. \tag{1.4}$$

特别地，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}G_{(X+\sqrt{t}B)^2}(z) = (G_{(X+\sqrt{t}B)^2}(z))^2.$$

为简化记号，我们用 $\mu(t,\cdot)$ 表示 $= \mathcal{L}(X+\sqrt{t}B)$，用 $G(t,z)$ 表示 $= G_{(X+\sqrt{t}B)^2}(z)$，从而 $G(t,z)$ 是 $\mu^{(2)}(t)$ 的柯西变换。令 $u(t,z) = \pi^{-1}\Re G(t,z)$ $v(t,z) = -\pi^{-1}\Im G(t,z)$，由上述关系，对 $z = x+i\epsilon$ 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,z) = -\frac{1}{\pi}\Im(G(t,z))^2 = 2\pi u(t,z)v(t,z).$$

对任意 $\delta > 0$，用 $f_\delta(x)$ 表示 $= \log|x+i\delta|$，并且

$$\Gamma_\delta(\mu) = \int_{\mathbb{R}_+} f_\delta(x)\,d\mu(x), \quad \Psi_\delta(\mu) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{f_\delta(x)-f_\delta(y)}{x-y}\,d\mu(x)d\mu(y).$$

对任意 $0 \le s \le t$ 及固定的 $\epsilon > 0$，由于 $\mu^{(2)}(s)$ 是紧支撑的，我们有 $|\frac{\partial}{\partial s}v(s,x+i\epsilon)| \le |(G(s,x+i\epsilon))^2| \le \frac{C_\epsilon}{1+|x|^2}$。因此，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Gamma_\delta(v(s,\cdot+i\epsilon)) &= \int f_\delta(x)\cdot\frac{\partial}{\partial s}v(s,x+i\epsilon)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\Im\int f_\delta(x)\cdot(G(s,x+i\epsilon))^2\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\Im\int f_\delta(x)\int\frac{1}{x+i\epsilon-y}\,d\mu^{(2)}(s,y)\int\frac{1}{x+i\epsilon-y'}\,d\mu^{(2)}(s,y')\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\Im\iint\frac{1}{y-y'}\left[\int\left(\frac{f_\delta(x)}{x+i\epsilon-y}-\frac{f_\delta(x)}{x+i\epsilon-y'}\right)dx\right]d\mu^{(2)}(s,y)d\mu^{(2)}(s,y'). \\
&= \iint\frac{1}{y-y'}(P_\epsilon * f_\delta(y) - P_\epsilon * f_\delta(y'))\,d\mu^{(2)}(s,y)d\mu^{(2)}(s,y').
\end{aligned}$$

此外，注意到

$$\Gamma_\delta(v(t,\cdot+i\epsilon)) = \int\log|x+i\delta|\cdot v(t,x+i\epsilon)\,dx = \int\log|x+i(\delta+\epsilon)|\,d\mu(t,x) = \Gamma_{\delta+\epsilon}(\mu(t)),$$

因此，我们有

$$\Gamma_{\delta+\epsilon}(\mu^{(2)}(t)) - \Gamma_{\delta+\epsilon}(\mu^{(2)}) = \int_0^t\iint\frac{P_\epsilon * f_\delta(y) - P_\epsilon * f_\delta(y')}{y-y'}\,d\mu^{(2)}(s,y)d\mu^{(2)}(s,y')\,ds, \tag{1.5}$$

设 $\epsilon \to 0^+$，右侧的被积函数收敛于 $\Psi_\delta(\mu(t))$，这是因为$P_\epsilon * f_\delta \longrightarrow f_\delta$ 在 $\mu^{(2)}(s)$ 的支撑上均匀收敛。综上，我们得到 $\Gamma_\delta(\mu^{(2)}(t)) - \Gamma_\delta(\mu^{(2)}) = \int_0^t \Psi_\delta(\mu^{(2)}(s))\,ds$。最后令 $\delta \to 0^+$，由单调收敛定理可得（1.3），其中因子 1 2 来自定义 1.1。□

根据 $\Gamma(X)$ 和 $\Psi(X)$ 的定义，我们有以下缩放性质。

命题 1.4. 设 X 是非交换概率空间 $(\mathcal{M},\tau)$上的一个自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，并设 $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$。我们有

$$\Gamma(\lambda X) = \Gamma(X) + \log|\lambda|;\ \Psi(\lambda X) = \lambda^{-2}\Psi(X).$$

如果将 Ψ的定义扩展到 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$而不改变表达式，缩放性质仍然成立。然而， Ψ 的平移不变性不再成立。

现在考虑变量 $X_t = e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}B$，它与布尔奥恩斯坦-乌伦贝克过程中的变量具有相同的分布。根据 Γ的缩放性质，我们知道

$$\Gamma(X_t) = \Gamma\left(X + \sqrt{e^{2t}-1}B\right) - t.$$

因此，根据德布鲁因恒等式（1.3）以及 Ψ 的缩放性质，我们得到

$$\frac{d}{dt}\Gamma(X_t) = e^{2t}\Psi\left(X+\sqrt{e^{2t}-1}B\right) - 1 = \Psi(X_t) - 1. \tag{1.6}$$

推论 1.5。 假设 $\Gamma(X+\sqrt{s}B) < \infty$ 且 $\Psi(X+\sqrt{s}B) < +\infty$ 对所有 $s \in [0,+\infty)$均成立。那么我们得到

$$\Gamma(X) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{s+1} - \Psi(X+\sqrt{s}B)\right) ds \tag{1.7}$$

证明。 根据前面的计算，并且显然有 $\lim_{t\to 0}\Gamma(X_t) = \Gamma(X)$，$\lim_{t\to+\infty}\Gamma(X_t) = \Gamma(B)$，因此我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma(B) - \Gamma(X) &= \int_0^{+\infty} \left[e^{2t}\Psi\left(X + \sqrt{e^{2t}-1}B\right) - 1\right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[(s+1)\Psi(X+\sqrt{s}B) - 1\right] \frac{1}{2(s+1)}\, ds,\end{aligned}$$

其中，第二个等式由变量替换 $s \mapsto \sqrt{e^{2t}-1}$ 得出。因此，结合 $\Gamma(B) = 0$ 这一事实，我们完成了证明。□

经典熵的单调性源于 Shannon 的工作（参见 [34], [38], [27]），并在 [4] 中得到解决。采用类似的策略，Shlyakhtenko 建立了自由对应形式（参见 [35]）。Dadoun 和 Youssef 后来通过最大相关方法重新研究了这一结果（参见 [14]）。我们强调，所有这些结果的证明都基于费舍尔信息的单调性，关键在于费舍尔信息的 L^2-结构（即共轭变量）。在 [30], 中，我们建立了这一单调性现象的布尔类比。然而，该论证并未涉及费舍尔信息，而是完全依赖于布尔卷积的解析结构。为求完整起见，我们现在转而讨论费舍尔信息本身的单调性；但由于量 Ψ并未呈现良好的L^2-结构，我们证明单调性的方法将不同于经典情形和自由情形。

定理 1.6（费舍尔信息的单调性）。 设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset (\mathcal{M},\tau)$是一列布尔独立且同分布的自伴随机变量，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$。定义

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

那么，对于任意整数 $n \geq m \geq 1$，我们有

$$\Psi(S_n) \leq \Psi(S_m),$$

等号成立当且仅当

$$X_1 \sim \tfrac{1}{2}\delta_{-a} + \tfrac{1}{2}\delta_a$$

对于某个 $a \neq 0$。

证明。 由于这些随机变量是冯·诺伊曼代数中的自伴元素，因此它们是有界算子，其谱测度具有紧支撑。我们首先讨论 Ψ 的单调性。根据（0.1），我们有

$$S_n^2 \overset{d}{=} \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}.$$

回忆一下，μ_n 是 $\mu^{\uplus n}$ 经过 $\frac{1}{\sqrt{n}}$伸缩后的结果，因此我们用 $\mu_n^{(2)}$表示 S_n^2的分布。通过变量替换 $x \mapsto x^2$，费舍尔信息可以改写如下：

$$\Psi(S_n) = \iint \frac{\log x - \log y}{x-y}\, d\mu_n^{(2)}(x) d\mu_n^{(2)}(y) = \int \frac{1}{x}\left(\int \frac{\log(y/x)}{y/x-1}\, d\mu_n^{(2)}(y)\right) d\mu_n^{(2)}(x).$$

因此，只需证明对于任意 $X_1 \sim \mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$ 和任意 $n \geq m$，

$$\int \frac{\log x}{x-1}\, d\mu_n^{(2)}(x) \leq \int \frac{\log x}{x-1}\, d\mu_m^{(2)}(x). \tag{1.8}$$

事实上，上述不等式（若对任意对称分布均成立，尤其是对固定$x>0$的$X_1/\sqrt{x}$ 而言）意味着我们有

$$\int \frac{\log y/x}{y/x-1}\, d\mu_n^{(2)}(y) \leq \int \frac{\log y/x}{y/x-1}\, d\mu_m^{(2)}(y),$$

并可写为

$$\Psi(S_n) = \iint \frac{\log x - \log y}{x-y}\, d\mu_n^{(2)}(x) d\mu_n^{(2)}(y) = \int \frac{1}{x}\left(\int \frac{\log(y/x)}{y/x-1}\, d\mu_n^{(2)}(y)\right) d\mu_n^{(2)}(x)$$
$$\leq \int \frac{1}{x}\left(\int \frac{\log(y/x)}{y/x-1}\, d\mu_m^{(2)}(y)\right) d\mu_n^{(2)}(x) = \int \frac{1}{y}\left(\int \frac{\log(x/y)}{x/y-1}\, d\mu_n^{(2)}(x)\right) d\mu_m^{(2)}(y)$$
$$\leq \int \frac{1}{y}\left(\int \frac{\log(x/y)}{x/y-1}\, d\mu_m^{(2)}(x)\right) d\mu_m^{(2)}(y) = \iint \frac{\log x - \log y}{x-y}\, d\mu_m^{(2)}(x) d\mu_m^{(2)}(y) = \Psi(S_m).$$

为证明（1.8），我们采用与证明布尔熵单调性（ [30]中的命题 4.2）相同的方法。根据 $\mu_n^{(2)}$的定义，回顾一下，对于任意 $\alpha > 0$，可以验证 $G_{\alpha X}$（z）$= \alpha^{-1} G_X$（$\alpha^{-1} z$）以及 $K_{\alpha X}$（z），$= \alpha K_X$（$\alpha^{-1} z$）。于是，根据自能 K 在布尔卷积下的可加性，$\mu_n^{(2)}$的柯西变换为

$$G_{\mu_n^{(2)}}(z) = \frac{1}{z - K_{X_1^2}(nz)}.$$

注意到，离散族 $(\mu_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ 可自然地扩展为连续族 $(\mu_t^{(2)})_{t\geq 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$，其定义为

$$G_{\mu_t^{(2)}}(z) = \frac{1}{z - K_{X_1^2}(tz)}, \tag{1.9}$$

我们实际上要证明一个更强的单调性结论：

$$\Psi(\mu_t^{(2)}) \leq \Psi(\mu_s^{(2)}),\ \forall t \geq s \geq 1. \tag{1.10}$$

事实上，由定义可直接得出，$\mu_t^{(2)}$ 满足乘法半群性质：$(\mu_t^{(2)})_s = \mu_{ts}^{(2)}$。因此，若对所有 $t \geq 1$，$\Psi(\mu_t^{(2)}) = +\infty$，则该不等式显然成立。否则，设存在 $t_0 \in [1, +\infty)$，使得 $\Psi(\mu_{t_0}^{(2)}) < +\infty$，而对所有 $s \in [1, t_0)$，$\Psi(\mu_s^{(2)}) = +\infty$。根据半群性质，我们可以平移参数，并不失一般性地假设 $t_0 = 1$，即 $\Psi(X) < +\infty$。此外，要证明对所有 $t \geq 1$都成立单调性，只需验证对任意 $X_1 \sim \mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，关于 t 的导数为负，

$$\frac{d}{dt}\int \frac{\log x}{x-1}\, d\mu_t^{(2)}(x) \leq 0.$$

接下来，令 $z = x + i\epsilon$ 并记 $G_{\mu_t^{(2)}}(z) = \pi\big(u_t(z) - i v_t(z)\big)$。对等式两边关于 t 求偏导，并令（1.9）中的 $t = 1$，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} G_{\mu_t^{(2)}}(z) = z(G_{\mu_1^{(2)}}(z))^2 + z G'_{\mu_1^{(2)}}(z),$$

由此得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} v_t(z) = x[2\pi u_1(z) v_1(z) + v_1'(z)] - \epsilon[u_1'(z) + \pi(u_1^2(z) - v_1^2(z))].$$

令 $L(x) = (x\log x)/(x-1)$，可以验证 L 是单调递增的，且 $\lim_{x\to 0^+} L(x) = 0$，$\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$。此外，可以去除 L 在 $x = 1$ 处的奇点，使得$L \in C^1(\mathbb{R}_+)$。特别地，L 在任意紧集上有界。对于充分大的 $K > 0$，记 $g_K(x) = \text{sign}(\log x) \cdot K \wedge |\log x|/(x-1)$，以及 $L_K(x) = x g_K(x)$。注意，$|\frac{\partial}{\partial t}|_{t=1} v_t(z)| \leq$

$|z(G_{\mu_1^{(2)}}(z))^2| + |zG'_{\mu_1^{(2)}}(z)| \le \frac{c_\epsilon}{1+|x|}$，因为 $\mu_1^{(2)}$ 是紧支撑的，因此我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=1}\int g_K(x)v_t(x+i\epsilon)\,dx &= \int g_K(x)\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} v_t(x+i\epsilon)\,dx\\ &= \int L_K(x)[2\pi u_1(x+i\epsilon)v_1(x+i\epsilon)+v_1'(x+i\epsilon)]\,dx + o(\epsilon)\\ &= \iint\left(\frac{P_\epsilon * L_K(x) - P_\epsilon * L_K(y)}{x-y}\right) d\mu_1^{(2)}(x)d\mu_1^{(2)}(y)\\ &\quad - \int L_K'(x)v_1(x+i\epsilon)\,dx + o(\epsilon).\\ &:= J_K(v_1(\cdot+i\epsilon))\end{aligned}$$

因此，由 $\{\mu_t^{(2)}\}_{t\ge1}$ 的乘法半群性质，我们有

$$\frac{d}{dt}\int g_K(x)v_t(x+i\epsilon)\,dx = \frac{1}{t}J_K(v_t(\cdot+i\epsilon)),$$

从而

$$\int g_K(x)v_t(x+i\epsilon)\,dx - \int g_K(x)v_0(x+i\epsilon)\,dx = \int_0^t \frac{1}{s}J_K(v_s(\cdot+i\epsilon))\,ds.$$

注意，当 $\epsilon\to0^+$ 时， $v_s(\cdot+i\epsilon)$ 弱收敛于 μ_s，以及 $P_\epsilon * L_K$ 在紧集上一致收敛于 L_K，由此可得

$$\int g_K(x)\,d\mu_t(x) - \int g_K(x)\,d\mu_0(x) = \int_0^t \frac{1}{s}\iint\left(\frac{L_K(x)-L_K(y)}{x-y} - L_K'(x)\right) d\mu_s^{(2)}(x)d\mu_s^{(2)}(y)\,ds.$$

最后，令 $K\to+\infty$，并结合单调收敛定理，我们得出

$$\int \frac{\log x}{x-1}\,d\mu_t(x) - \int \frac{\log x}{x-1}\,d\mu_0(x) = \int_0^t \frac{1}{s}\iint\left(\frac{L(x)-L(y)}{x-y} - L'(x)\right) d\mu_s^{(2)}(x)d\mu_s^{(2)}(y)\,ds$$

从而

$$\frac{d}{dt}\int \frac{\log x}{x-1}\,d\mu_t^{(2)}(x) = \frac{1}{t}\iint\left(\frac{L(x)-L(y)}{x-y} - L'(x)\right) d\mu_t^{(2)}(x)d\mu_t^{(2)}(y). \tag{1.11}$$

由于

$$\frac{L(x)-L(y)}{x-y} = \int_0^1 L'(\theta x+(1-\theta)y)\,d\theta.$$

如果 L' 在 $(0,\infty)$ 上是凸的，则证明是直接的。因此，剩下的工作是验证 L' 的凸性。直接计算可得

$$L'''(x) = \frac{2\big[(x-1)-\log x\big]}{x(x-1)^4} \ge 0.$$

由于 $L'(x)$ 在 $x=1$ 处存在连续延拓，我们得出 L' 在 $(0,+\infty)$ 上是凸的。此外，当且仅当 $\mu_t^{(2)}$ 是某个 $a\in(0,+\infty)$ 的狄拉克质量 δ_a 时，等号成立。根据 $\mu_t^{(2)}$ 的定义，显然，如果 $\mu^{(2)}$ 不是单点狄拉克质量，那么对于所有 t， $\mu_t^{(2)}$ 都不可能是单点狄拉克质量。因此，对于某个 $n\ne m\in\mathbb{N}$， $\Psi(S_n) = \Psi(S_m)$ 当且仅当 μ是缩放的拉德马赫分布。这就完成了费舍尔信息单调性的证明 Ψ。□

熵的单调性 Γ 由推论1.5 以及拉德马赫分布关于布尔卷积的可除性可知。因此，特别是，熵 Γ 沿布尔中心极限定理单调不减。我们的第一篇论文中的命题 4.2 已经确立了这一结果 [30], 其中我们不要求 μ 具有对称性。此外，值得指出的是，尽管我们在 μ 中只讨论了 [30], 中心化且方差为 1 的情形，但这一论证在不满足这些假设时仍然成立。事实上，中心化和方差假设仅用于确保 $\Gamma(\mu_n^{(2)}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{b})$。因此， Γ的单调性在一般情形下均成立。由此我们给出以下定理，并省略证明。

定理 1.7 (熵的单调性)。对于一列自伴随机变量 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，它们相互布尔独立且同分布，任意整数 $n \geq m \geq 1$，均有

$$\Gamma(S_n) \geq \Gamma(S_m). \tag{1.12}$$

1.2. **信息论性质**。克拉默–饶不等式和 Stam 不等式（[38]）是经典信息论中的基本结果。事实证明，这些结果与 Voiculescu自由熵和自由 Fisher 信息（[41]）相一致。受这些平行关系的启发，我们旨在建立布尔情形下的相应不等式。在此之前，我们将指出布尔熵和布尔费舍尔信息的一些性质，其中一些性质将在后续章节中用到。

命题 1.8。布尔熵 Γ 和费舍尔信息 Ψ 满足以下性质（假设所有出现的变量都是某个非交换概率空间中的自伴变量，且具有对称分布）：

（*1*）我们有以下关于 Ψ的界：

$$\tau\left(\frac{2}{X^2+\tilde{X}^2}\right) \leq \Psi(X) \leq \tau\left(\frac{1}{X^2}\right), \tag{1.13}$$

其中 $\tilde{X}$ 是 X的经典独立副本。若 X 不可逆，则上述公式应理解为 $\tau\left(\frac{2}{X^2+\tilde{X}^2}\right) = \int 2/(x^2+y^2)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$ 以及 $\tau\left(\frac{1}{X^2}\right) := \int x^{-2} d\mu(x)$，其中 $\mu = \mathcal{L}(X)$。

(2) Γ 关于具有紧支撑的概率测度的弱拓扑是上半连续的，且 Ψ 是下半连续的。特别地，设 $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为一列随机变量，使得 $X_k \to X$ 在算子范数意义下成立，则

$$\Gamma(X) \geq \limsup_{k\to+\infty} \Gamma(X_k); \quad \Psi(X) \leq \liminf_{k\to+\infty} \Psi(X_k).$$

(3) 若 X 与 Y 布尔独立，则我们有香农–斯塔姆不等式和布拉赫曼-斯塔姆不等式的布尔类比：即对任意 $\theta \in [0,1]$,

$$\Gamma(\sqrt{\theta}X + \sqrt{1-\theta}Y) \geq \theta\Gamma(X) + (1-\theta)\Gamma(Y); \tag{1.14}$$

$$\Psi(\sqrt{\theta}X + \sqrt{1-\theta}Y) \leq \theta\Psi(X) + (1-\theta)\Psi(Y). \tag{1.15}$$

证明。为证明下界（1.13），只需证明下述不等式

$$\frac{\log t - \log s}{t-s} \geq \frac{2}{t+s}. \tag{1.16}$$

不失一般性，我们可以假设 $t \geq s$，从而可将该不等式改写为

$$\left(\frac{t}{s}+1\right)\cdot\log\left(\frac{t}{s}\right) - 2\left(\frac{t}{s}-1\right) \geq 0.$$

此处我们记 $F(\zeta) := (\zeta+1)\log\zeta - 2(\zeta-1) \geq 0$，对 $\zeta \geq 1$.。注意到 $F(1) = 0$ 且 $F'(\zeta) = \log\zeta + \frac{1}{\zeta} - 1 \geq 0$，我们推得 $F(\zeta) \geq 0$ 当 $\zeta \geq 1$ 时，即为所求。

对于上界，我们注意到

$$\Psi(X) = \iint \frac{\log x^2 - \log y^2}{x^2-y^2}\, d\mu(x)d\mu(y) = \iint\int_0^1 \frac{1}{tx^2+(1-t)y^2}\, dt\, d\mu(x)d\mu(y), \tag{1.17}$$

其中，μ 是 X的分布。由 $1/x$ 的凸性和Jensen不等式可得该上界。

为证明（2），假设 $\{(\mu_k)_{k\geq1}, \mu\}$ 是紧支撑概率测度，且 $\mu_k \to \mu$ 在弱拓扑下成立。注意，$\Gamma(\mu) = \lim_{\epsilon\to0^+}\Gamma_\epsilon(\mu)$，其中

$$\Gamma_\epsilon(\mu) = \int \log(|x|+\epsilon)\, d\mu(x).$$

因此，对于任意 $\epsilon > 0$，我们有

$$\limsup_{k\to+\infty}\Gamma(\mu_k) \leq \limsup_{k\to+\infty}\Gamma_\epsilon(\mu_k) = \Gamma_\epsilon(\mu),$$

然后令右侧的 $\epsilon \to 0^+$，即可得到上半连续性。类似地，我们可以证明 Ψ 是下半连续的。

对于 (1.7)，由方程 (1.15) 以及拉德马赫分布在布尔卷积下的可除性，只需证明布拉赫曼-斯塔姆不等式。

设 $\mu^{(2)}$、$\nu^{(2)}$ 分别表示算子 X^2、Y^2 的分布，并令 $m_\theta^{(2)}$ 表示算子 $\theta X^2+(1-\theta)Y^2$ 的分布。为简化记号，我们仍将 $\Psi(\mu^{(2)}):=\Psi(X)=\iint\log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu^{(2)}(x)d\mu^{(2)}(y)$ 记作（$\nu^{(2)}$ 和 $m_\theta^{(2)}$ 也同样处理）。由 (0.1)，布拉赫曼-斯塔姆不等式变为：

$$\Psi(m_\theta^{(2)})\le\theta\Psi(\mu^{(2)})+(1-\theta)\Psi(\nu^{(2)}).$$

若 $\Psi(X)=+\infty$ 或 $\Psi(Y)=+\infty$，则不等式自动成立。因此，我们可以假设 $\Psi(X)$ 和 $\Psi(Y)$ 有限。此外，当 $\theta=0$ 或 $\theta=1$ 时，无需证明任何内容。接下来，对于 $\theta\in(0,1)$，我们先分析 $m_\theta^{(2)}$ 的柯西变换。利用柯西变换的缩放性质以及自能 K 在布尔卷积下的可加性，可得：

$$\begin{aligned}G_{m_\theta^{(2)}}(z)&=\frac{1}{z-K_{m_\theta^{(2)}}(z)} &(1.18)\\&=\frac{1}{z-\theta K_{\mu^{(2)}}(\theta^{-1}z)-(1-\theta)K_{\nu^{(2)}}((1-\theta)^{-1}z)}\\&=\frac{1}{\theta\big(z-K_{\mu^{(2)}}(\theta^{-1}z)\big)+(1-\theta)\big(z-K_{\nu^{(2)}}((1-\theta)^{-1}z)\big)}\\&=\frac{1}{\theta\frac{1}{G_{\mu_\theta^{(2)}}(z)}+(1-\theta)\frac{1}{G_{\nu_{1-\theta}^{(2)}}(z)}}, &(1.19)\end{aligned}$$

其中，$\mu_\theta^{(2)}$，$\nu_{1-\theta}^{(2)}$ 的柯西变换定义如下：

$$G_{\mu_\theta^{(2)}}(z):=\frac{1}{z-K_{\mu^{(2)}}(\theta^{-1}z)};\quad G_{\nu_{1-\theta}^{(2)}}(z):=\frac{1}{z-K_{\nu^{(2)}}((1-\theta)^{-1}z)}.$$

鉴于表达式（1.9），因此 $\mu_\theta^{(2)}$ 与 S_n^2在 $n=\theta^{-1}$ 处的分布的连续延拓相一致（这是良定义的，因为 $\theta\in(0,1)$），对$\nu_{1-\theta}^{(2)}$也可作相同的构造。此外，回忆一下，$\mu_\theta^{(2)}$，$\nu_{1-\theta}^{(2)}$ 支撑于正实轴。现在，主要观察如下：假设 x，$y>0$，则

$$\frac{\log x-\log y}{x-y}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+t)(y+t)}\,dt,$$

因此，由Fubini定理，对于任意支撑于正实轴上的概率测度 μ，有

$$\iint\frac{\log x-\log y}{x-y}\,d\mu(x)d\mu(y)=\int_0^{+\infty}\left(\int\frac{1}{x+t}\,d\mu(x)\right)^2dt=\int_0^{+\infty}(G_\mu(-t))^2\,dt.$$

由于 μ 支撑于 $\mathbb{R}_+$，柯西变换 $G_\mu(-t)$ 对 $t>0$ 是良定义的，并且我们可以将等式（1.18）延拓至 $z\in\mathbb{R}_-$。因此，使用两次Jensen不等式，可得

$$\begin{aligned}\Psi(m_\theta^{(2)})=\int_0^{+\infty}(G_{m_\theta^{(2)}}(-t))^2\,dt&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\theta\frac{1}{G_{\mu_\theta^{(2)}}(-t)}+(1-\theta)\frac{1}{G_{\nu_{1-\theta}^{(2)}}(-t)}}\right)^2dt\\&\le\int_0^{+\infty}\left(\theta G_{\mu_\theta^{(2)}}(-t)+(1-\theta)G_{\nu_{1-\theta}^{(2)}}(-t)\right)^2dt\\&\le\int_0^{+\infty}\left[\theta(G_{\mu_\theta^{(2)}}(-t))^2+(1-\theta)(G_{\nu_{1-\theta}^{(2)}}(-t))^2\right]dt\\&=\theta\Psi(\mu_\theta^{(2)})+(1-\theta)\Psi(\nu_{1-\theta}^{(2)})\\&\le\theta\Psi(\mu^{(2)})+(1-\theta)\Psi(\nu^{(2)}).\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们利用了费舍尔信息的单调性 Ψ，见（1.10）。 □

作为该命题的直接推论，可以轻松得出信息不等式的布尔对应形式。

推论 1.9 （Cram´er-Rao 不等式）。 设 $X \in$ （$\mathcal{M}, \tau$）是一个服从对称分布的自伴随机变量。我们有

$$\Psi(X) \geq \frac{1}{\tau(X^2)}. \tag{1.20}$$

证明。 只需证明 $\Psi(X)\tau(X^2) \geq 1$。根据 Ψ 在（1.13）中的下界，并结合 H¨older 不等式，我们有

$$\Psi(X)\tau(X^2) \geq \tau\left(\frac{2}{X^2+\tilde{X}^2}\right)\cdot\tau\left(\frac{X^2+\tilde{X}^2}{2}\right) \geq 1.$$

□

推论 1.10 （布尔斯坦姆不等式）。 设 X, Y 是非交换概率空间$(\mathcal{M}, \tau)$ 中的自伴随机变量，其分布为对称分布，并假设 X, Y布尔独立。我们有

$$\frac{1}{\Psi(X+Y)} \geq \frac{1}{\Psi(X)} + \frac{1}{\Psi(Y)}. \tag{1.21}$$

特别地，如果 $\Psi(X+Y) = +\infty$，那么 $\Psi(X) = \Psi(Y) = +\infty$。

证明。 首先假设 $\Psi(X)$ $\Psi(Y)$ 有限。根据布拉赫曼-斯塔姆不等式（1.15）以及费舍尔信息的缩放性质 Ψ，对任意 $\theta \in [0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}\Psi(X+Y) &= \Psi\left(\sqrt{\theta}\frac{X}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{1-\theta}\frac{Y}{\sqrt{1-\theta}}\right)\\ &\leq \theta\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\theta}}\right) + (1-\theta)\Psi\left(\frac{Y}{\sqrt{1-\theta}}\right)\\ &= \theta^2\Psi(X) + (1-\theta)^2\Psi(Y).\end{aligned}$$

设 $F(\theta) = \theta^2\Psi(X) + (1-\theta)^2\Psi(Y)$，由于上述不等式对所有 $\theta \in [0,1]$均成立，我们推出

$$\Psi(X+Y) \leq \inf_{\theta\in[0,1]} F(\theta).$$

令 $F'(\theta) = 0$，则存在唯一解 $\theta_0 = \Psi(Y)/(\Psi(X) + \Psi(Y)) \in [0,1]$，并且很容易看出这是一个极小点。最后，可以验证

$$F(\theta_0) = \frac{\Psi(X)\Psi(Y)}{\Psi(X)+\Psi(Y)},$$

由此得到所需的不等式。

若 $\Psi(X) = \Psi(Y) = +\infty$，则等式显然成立。否则，若 $\Psi(X) = +\infty$ 或 $\Psi(Y) = +\infty$，不妨设 $\Psi(X) < +\infty$ 且 $\Psi(Y) = +\infty$，则 (1.21) 化简为$\Psi(X+Y) \leq \Psi(X)$。令 $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$ 分别为 X, Y 的分布。注意，存在一列紧支撑对称概率测度 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\Psi(\nu_n) <+\infty$，且 ν_n 弱收敛于 ν。由于布尔卷积保持弱收敛，即$\mu \uplus \nu_n \longrightarrow \mu \uplus \nu$（因为柯西变换收敛）。因此，由$\Psi$的下半连续性可得

$$\Psi(X+Y) = \Psi(\mu\uplus\nu) \leq \liminf_{n\to+\infty} \Psi(\mu\uplus\nu_n) \leq \Psi(\mu) = \Psi(X), \tag{1.22}$$

最后一个不等式成立是因为 $\Psi(\nu_n) < +\infty$，并且可由 $\theta = 1$ 回溯到有限情形，因此证明完成。□

推论 1.11 (熵功率不等式)。 设 X, Y 是一个非交换概率空间$(\mathcal{M}, \tau)$ 中的自伴随机变量，其分布对称，并假设 X, Y 布尔独立。我们有

$$\exp(2\Gamma(X+Y)) \geq \exp(2\Gamma(X)) + \exp(2\Gamma(Y)). \tag{1.23}$$

特别地，若 $\Gamma(X+Y) = -\infty$，则 $\Gamma(X) = \Gamma(Y) = -\infty$。

证明。如果 $\Gamma(X) = \Gamma(Y) = -\infty$，则该不等式显然成立，因此不失一般性，可设 $\Gamma(X) > -\infty$ 且 $\Gamma(Y) = -\infty$。沿用前面证明 Stam 不等式的相同论证，也可验证 $\exp 2\Gamma(X+Y) \geq \exp 2\Gamma(X)$。现在，若 $\Gamma(X)$ $\Gamma(Y)$ 有限，则由香农–斯塔姆不等式 (1.14) 以及熵的缩放性质 Γ，对于任意 $\theta \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned}\Gamma(X+Y) &= \Gamma\left(\sqrt{\theta}\frac{X}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{1-\theta}\frac{Y}{\sqrt{1-\theta}}\right) \\ &\geq \theta\Gamma\left(\frac{X}{\sqrt{\theta}}\right) + (1-\theta)\Gamma\left(\frac{Y}{\sqrt{1-\theta}}\right) \\ &= \theta\left(\Gamma(X) - \frac{1}{2}\log\theta\right) + (1-\theta)\left(\Gamma(Y) - \frac{1}{2}\log(1-\theta)\right).\end{aligned}$$

现在对两边取 exp 2(·)，得到

$$\exp(2\Gamma(X+Y)) \geq \left(\frac{\exp(2\Gamma(X))}{\theta}\right)^{\theta} \cdot \left(\frac{\exp(2\Gamma(Y))}{1-\theta}\right)^{1-\theta}.$$

注意，选择

$$\theta = \frac{e^{2\Gamma(X)}}{e^{2\Gamma(X)} + e^{2\Gamma(Y)}}$$

即可得到结果。 □

正如从证明中所观察到的，熵幂不等式（1.23）（Stam 不等式（1.21），分别）等价于香农–斯塔姆不等式（1.14）（布拉赫曼-斯塔姆不等式（1.15），分别）。

1.3. 泛函不等式。

定义 1.12. 设 X 是非交换概率空间 $(\mathcal{M},\tau)$ 上的一个自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$。布尔熵 $\Gamma(X|\mathrm{b})$ 相对于 X b 的 定义为

$$\Gamma(X|\mathrm{b}) := \frac{1}{2}\int x^2\,d\mu(x) - \int \log|x|\,d\mu(x) - \frac{1}{2} \in [0,+\infty]. \tag{1.24}$$

M更一般地，对于任意 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$，我们将布尔熵 $\Gamma(\mu|\mathrm{b})$ 相对于 μ b 定义为 s

$$\Gamma(\mu|\mathrm{b}) := \frac{1}{2}\int x^2\,d\mu(x) - \int \log|x|\,d\mu(x) - \frac{1}{2} \in [0,+\infty].$$

由定义可立即得出 $\Gamma(\mu|\mathrm{b})$的非负性。

运输代价不等式在最优传输中发挥着重要作用，它们估计一对概率测度之间的 2-Wasserstein 距离的平方 W_2 与相对熵。经典版本最初由 Talagrand 提出 [39] 于 1996年。后来，Biane 和 Voiculescu 引入了一维情形的自由类比 [8]，，随后 Hiai 和 Ueda 将其推广至多变量情形 [21]。接下来，我们介绍一维情形下这类不等式的布尔版本。

T定理 1.13 （布尔塔拉格朗日输运不等式）。对于任意 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们有

$$W_2^2(\mu,\mathrm{b}) \leq 2\Gamma(\mu|\mathrm{b}). \tag{1.25}$$

证明。由于目标测度有两个原子，最优耦合可归结为质量分解：任意在 $\mathbb{R}^2$ 上、边缘分布为 μ 和 b 的联合分布 π，都可分解为 $\mu_+\otimes\delta_1 + \mu_-\otimes\delta_{-1}$，其中 μ_-，μ_+ 是正测度，满足 $\mu_- + \mu_+ = \mu$ 和 $\mu_-(\mathbb{R}) = \mu_+(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}$。特别地，当 μ_+ 支撑于 $[0,+\infty)$ 且 μ_- 支撑于 $(-\infty,\ 0]$ 时，耦合为最优，此时

$$W_2^2(\mu,\mathrm{b}) = \int_{\mathbb{R}_+} |x-1|^2\,d\mu_+(x) + \int_{\mathbb{R}_-} |x+1|^2\,d\mu_-(x) = \int (|x|-1)^2\,d\mu(x).$$

因此，利用不等式 $-2|x| \leq -2\log|x| - 2$，得到

$$\begin{aligned}W_2^2(\mu,\mathrm{b}) &= \int (|x|-1)^2\,d\mu(x) \\ &\leq \int (x^2 - 2\log|x| - 1)\,d\mu(x) = 2\Gamma(\mu|\mathrm{b}).\end{aligned}$$

□

让我们回到 Ornstein-Uhlenbeck 过程。从一个非交换概率空间 $(\mathcal{M},\tau)$ 中的自伴算子 X出发，其分布是对称的，我们考虑变量$X_t := e^{-t}X+\sqrt{1-e^{-2t}}B$，其中 $B\in\mathcal{M}$ 与 X 布尔独立，且服从拉德马赫分布 b。我们用 μ_{X_t} 表示 X_t的分布。我们有

$$\tau(X_t^2)=e^{-2t}\tau(X^2)+1-e^{-2t}.$$

我们通过对 t 关于$-\Gamma(X_t|B)$求导来定义相对布尔 Fisher 信息。利用方程（1.6），可得

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\Gamma(X_t|\mathrm{b}) &= \frac{d}{dt}\left(\Gamma(X_t)-\frac{1}{2}\tau\left(X_t^2\right)\right)\\ &= \iint \frac{\log x^2-\log y^2}{x^2-y^2}\,d\mu_{X_t}(x)d\mu_{X_t}(y)-1+e^{-2t}\int x^2\,d\mu_{X_0}(x)-e^{-2t}\\ &= \Psi(X_t)+\tau(X_t^2)-2 \end{aligned}\tag{1.26}$$

这启发了以下定义。

定义 1.14。设 X 是非交换概率空间 $(\mathcal{M},\ \tau)$ 中的一个自伴算子，其分布为 $\mu\in\mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$。定义 X 关于 B 的布尔费舍尔信息 $\Psi(X|\mathrm{b})$为

$$\Psi(X|\mathrm{b}) := \iint \frac{\log x^2-\log y^2}{x^2-y^2}\,d\mu(x)d\mu(y)+\int x^2\,d\mu(x)-2\in[0,+\infty].\tag{1.27}$$

更一般地，对于任意 $\mu\in\mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们将 μ关于 b 的布尔费舍尔信息 $\Psi(\mu|\mathrm{b})$ 定义为

$$\Psi(\mu|\mathrm{b}) := \iint \frac{\log x^2-\log y^2}{x^2-y^2}\,d\mu(x)d\mu(y)+\int x^2\,d\mu(x)-2\in[0,+\infty].$$

先验来看，这个表达式非负并非显而易见。尽管如此，以下结果表明，布尔费舍尔信息保留了经典情形和自由情形中已知的基本正性。

命题 1.15。相对布尔 *Fisher* 信息 $\Psi(\mu|\mathrm{b})$ 对所有 $\mu\in\mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$ 和 $\Psi(\mu|\mathrm{b})=0$ 均非负，当且仅当 $\mu=\mathrm{b}$。

证明。根据上面的显式表达式，

$$\Psi(\mu|\mathrm{b}) = \iint\left(\frac{\log x^2-\log y^2}{x^2-y^2}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-2\right)d\mu(x)d\mu(y).\tag{1.28}$$

为证明 $\Psi(\mu|\mathrm{b})\geq 0$ 对所有对称概率测度 μ，我们打算证明被积函数几乎处处非负。由不等式（1.16），结合不等式$a^2+b^2\geq 2ab$ 可得

$$\Psi(\mu|\mathrm{b})\geq\iint\left(\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{1}{2}(x^2+y^2)-2\right)d\mu(x)d\mu(y)\geq 0.$$

这就完成了证明的第一部分。根据前面的论证，显然等式成立当且仅当 $\mu=\mathrm{b}$

. □

对数 Sobolev 不等式（LSI）是分析和概率论中的一项基本工具，可用于研究趋于平衡和集中现象，即相对熵由相对费舍尔信息所界定。我们的目标是建立其布尔对应形式，它与 Gross 著名的经典对数 Sobolev 不等式相对应 [19], ，而自由类比最早由 Voiculescu 发现 [41]，后由 Biane 和 Speicher 重新得到 [7]。

定理 1.16 (对数 Sobolev 不等式)。对于任意具有有限方差的 $\mu\in\mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们有

$$\Gamma(\mu|\mathrm{b})\leq\frac{1}{2}\Psi(\mu|\mathrm{b}).\tag{1.29}$$

证明。如果 $\Psi(\mu|\mathfrak{b}) = +\infty$，则不等式显然成立。现在假设 $\Psi(\mu|\mathfrak{b}) < +\infty$，并且由于 μ 具有有限方差，根据 $\Gamma(\mu|\mathfrak{b})$ 和 $\Psi(\mu|\mathfrak{b})$ 的表达式，我们可以将不等式归结为以下形式：

$$\int \log|x|\, d\mu(x) + \frac{1}{2}\left(\iint \frac{\log x^2 - \log y^2}{x^2 - y^2}\, d\mu(x)d\mu(y) - 1\right) \geq 0.$$

首先，注意到映射 $x \mapsto x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上的对称概率测度与 $\mathbb{R}_+$上的概率测度之间构成一个双射。因此，上述问题等价于证明：对于任意 $\mu^{(2)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$,

$$\int \log x\, d\mu^{(2)}(x) + \iint \frac{\log x - \log y}{x - y}\, d\mu^{(2)}(x)d\mu^{(2)}(y) - 1 \geq 0.$$

我们可以将左侧改写为以下泛函：

$$F(X) := \mathbb{E}[\log X] + \mathbb{E}\left[\frac{\log X - \log \tilde{X}}{X - \tilde{X}}\right] - 1,$$

其中 $X, \tilde{X}$ 是服从分布 $\mu^{(2)}$的经典独立同分布随机变量。对于任意 $\lambda > 0$，考虑伸缩函数

$$f_X(\lambda) := F(\lambda X) = \log\lambda + \mathbb{E}[\log X] + \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[\frac{\log X - \log \tilde{X}}{X - \tilde{X}}\right] - 1.$$

为确保对所有 $X > 0$都有 $f_X(\lambda) \geq 0$，只需验证 $f_X(\cdot)$ 的全局最小值非负。对 λ 求导并令导数等于零，得到 $\lambda = \mathbb{E}\left[\frac{\log X - \log \tilde{X}}{X - \tilde{X}}\right]$，这就是 f_X的唯一极小点。在该点计算 $f_X(\cdot)$，问题遂归结为证明：对于任意正随机变量 $X \sim \mu^{(2)}$ 及其经典独立同分布副本 $\tilde{X}$,

$$\mathbb{E}[\log X] + \log\left\{\mathbb{E}\left[\frac{\log X - \log \tilde{X}}{X - \tilde{X}}\right]\right\} \geq 0. \tag{1.30}$$

利用（1.13）中的下界，只需证明

$$\mathbb{E}[\log X] + \log\left\{\mathbb{E}\left[\frac{2}{X + \tilde{X}}\right]\right\} \geq 0,$$

为继续论证，假设 $\mu^{(2)}$ 是形如 $\mu^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, 的离散对象，其中 $x_i > 0$ 对所有 $i = 1, \ldots\ldots, n.$ 都固定。我们的目标是证明上述不等式对这样的离散 $\mu^{(2)}$ 成立。将其代入上述不等式的左侧可得

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{1}{n}\log(x_1 \cdots x_n) + \log\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{2}{x_i + x_j}\right) \\ &= \log\left\{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{2}{x_i + x_j}\right)\right\}. \end{aligned}$$

因此，只需证明对所有 $x_i > 0,\quad i = 1, \ldots\ldots, n,$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{2}{x_i + x_j}\right) \geq 1.$$

由齐次性，不妨设 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$。在此假设下，该不等式由下面陈述的引理推出，我们将在稍后证明该引理。

引理 1.17。固定 $x_i > 0$、 $i = 1$、……、 n，使得 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1.$。那么对于任意整数 $n \geq 1$，有

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{2}{x_i + x_j} \geq 1,$$

且等式成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1.$

利用上述引理，我们已证明不等式（1.30）对集合 $\mathcal{D}$：
$= \{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i} \mid x_i > 0,\ \forall i = 1,..\bar{},n,\ n \geq 1\}$. 中的所有离散概率测度均成立。由于 $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$（$\mathbb{R}_+$）关于弱拓扑是稠密的，利用控制收敛定理，我们推出该不等式对所有支撑为 $[\epsilon, \epsilon^{-1}]$ 的概率测度成立，对任意 $0 < \epsilon \leq 1$。此外，对于一般的概率测度 ν，其支撑于 $\mathbb{R}_+$，我们定义

$$\nu_\epsilon(A) := \frac{1}{\nu([\epsilon,\epsilon^{-1}])}\nu(A \cap [\epsilon,\epsilon^{-1}]) \text{ for any } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

作为 ν 的截断测度。显然，我们有 $\nu([\epsilon,\epsilon^{-1}]) \to 1$ as $\epsilon \to 0$. 。此外，由于函数 $\log(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上单调，因此 $(\log x - \log y)/(x-y)$ 非负。根据单调收敛定理，我们得到

$$\mathbb{E}[\log X \cdot \mathbf{1}_{[\epsilon,\epsilon^{-1}]}] \xrightarrow{\epsilon\to 0} \mathbb{E}[\log X],$$
$$\mathbb{E}\left[\frac{\log X - \log \tilde{X}}{X-\tilde{X}} \cdot \mathbf{1}_{[\epsilon,\epsilon^{-1}]^2}\right] \xrightarrow{\epsilon\to 0} \mathbb{E}\left[\frac{\log X - \log \tilde{X}}{X-\tilde{X}}\right].$$

因此，这些结果给出

$$\int \log x \, d\nu_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon\to 0} \int \log x \, d\nu(x),$$
$$\iint \frac{\log x - \log y}{x-y}\, d\nu_\epsilon(x) d\nu_\epsilon(y) \xrightarrow{\epsilon\to 0} \iint \frac{\log x - \log y}{x-y}\, d\nu(x) d\nu(y),$$

由此完成证明。 □

证明。 (引理的证明概要 1.17) 这是一个带约束的最小化问题。因此，我们只需应用拉格朗日乘数法，并在定义域$\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}$ 中定义以下函数：

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda) := \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + 2\cdot\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{2}{x_i+x_j} + \lambda(x_1x_2\cdots x_n - 1).$$

令所有偏导数均等于零，可得以下方程组：

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{1}{x_i^2} - 2\cdot\sum_{j\neq i}\frac{2}{(x_i+x_j)^2} + \lambda\prod_{j\neq i}x_j = 0 \ i = 1,\ldots,n;$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1x_2\cdots x_n - 1 = 0.$$

由对称性可知，所有的 x_i 必须相等。施加约束 $x_1x_2\cdots x_n = 1$，得到唯一解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$。显然，这个临界点确实是一个最小值。□

注 1.18. 事实上，若 μ 是紧支撑的，并令 $X \in (\mathcal{M},\tau)$ 满足 $X \sim \mu$，则证明中出现的不等式（1.30）等价于 $\Gamma(X) \geq -\frac{1}{2}\log(\Psi(X))$，而这可由熵功率不等式（1.23）推出。事实上，若我们选取 $Y = B \sim \mathrm{bin}(\mathcal{M},\tau)$，使其与 X布尔独立，则由熵的缩放性质 Γ，可得

$$\exp(2\Gamma(X+\sqrt{t}B)) \geq \exp(2\Gamma(X)) + t\exp(2\Gamma(B)) = \exp(2\Gamma(X)) + t.$$

因此，可以推得

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(2\Gamma(X+\sqrt{t}B)) \geq 1.$$

由德布鲁因等式（1.3），我们知道

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(2\Gamma(X+\sqrt{t}B)) = \exp(2\Gamma(X))\Psi(X).$$

因此，我们刚刚证明了

$$\exp(2\Gamma(X))\Psi(X) \geq 1. \tag{1.31}$$

特别地，我们推得 $\Psi(X) < +\infty \Rightarrow \Gamma(X) > -\infty$。无论如何，我们认为定理1.16 的证明既优雅又简洁，因此决定保留它。

与经典情形和自由情形一样，对数 Sobolev 不等式还存在以下等价表述。

命题 1.19. 设 $X \in (\mathcal{M}, \tau)$ 是一个具有对称分布的自伴随机变量，则沿 *Ornstein-Uhlenbeck* 过程 X_t, $\Gamma(\cdot|B)$ 呈指数衰减：

$$\Gamma(X_t|\mathrm{b}) \leq e^{-2t}\Gamma(X|\mathrm{b}). \tag{1.32}$$

注意，当 $t = 0$时，(1.32) 的左右两边相等。因此我们推得

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Gamma(X_t|\mathrm{b}) \leq \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}e^{-2t}\Gamma(X|\mathrm{b}),$$

这就得到了对数 Sobolev 不等式。

证明。 由德布鲁因恒等式 (1.26) 及对数 Sobolev 不等式可得

$$\frac{d}{dt}\Gamma(X_t|\mathrm{b}) = -\Psi(X_t|\mathrm{b}) \leq -2\Gamma(X_t|\mathrm{b}).$$

于是，Gronwall 引理给出了指数衰减。 □

我们强调，定理 1.16 中的对称性假设可以去掉，因为所涉及的量仅取决于推前测度 $\mu^{(2)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$。然而，在这种推广下，上述等价关系不再成立，因为论证依赖于德布鲁因恒等式。以下结果直接由定理 1.13 和定理 1.16得出。

推论 1.20. 对于任意 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们有界 $W_2^2(\mu, \mathrm{b}) \leq \Psi(\mu|\mathrm{b})$。

2. The Non-microstates approach

2.1. 布尔 Schwinger-Dyson 方程。 我们非正式地回顾经典费舍尔信息与自由 Fisher 信息的概念，以便引出即将给出的定义。特别地，我们不会探讨使这些方程成立所需的测试函数 f 的最低正则性。在经典情形中，我们有分部积分公式

$$\int x \cdot f(x)\, d\gamma(x) = \int f'(x)\, d\gamma(x)$$

由标准高斯分布 γ 所满足。任意测度 μ 的费舍尔信息（若存在）由其得分函数 ξ 的范数 $\|\xi\|^2_{L^2(\mu)}$ 给出；该函数使我们能够写出如下分部积分公式的变形：

$$\int \xi(x) \cdot f(x)\, d\mu(x) = \int f'(x)\, d\mu(x).$$

类似地，在自由 情形中，我们有如下 Schwinger-Dyson fo 式

$$\int x \cdot f(x)\, d\sigma(x) = \iint \partial f(x,y)\, d\sigma(x) d\sigma(y)$$

由标准半圆分布 σ所满足，其中 ∂f 是非交换导数 $\partial f(x,\ y) = (f(x) - f(y))/(x - y)$。任意测度 μ的自由 Fisher 信息（若存在）由$\|\xi\|^2_{L^2(\mu)}$ 给出，其中共轭变量是一个函数，它使得我们可以写出施温格-戴森公式的如下变形：

$$\int \xi(x) \cdot f(x)\, d\mu(x) = \iint \partial f(x,y)\, d\mu(x) d\mu(y).$$

如果我们想在布尔情形中沿同样的路径进行，第一步是找到由拉ademacher变量 $\mathrm{b} = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$所满足的类似公式。我们定义 $D^{\downarrow}f(x) := {}^{f(x)-f(0)}{}_{x}$，适用于在 0 处可微的函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。~~对于 b~~ $= \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$，我们有

$$\int x \cdot f(x)\, d\mathrm{b}(x) = \int D^{\downarrow}f(x)\, d\mathrm{b}(x)$$

因为 $x = 1/x$ 在 b 的支撑上。算子 $D^{\downarrow}$ 将在第3.1 节中发挥作用，以便在布尔情形下使用 Stein 方法。对于对称测度 μ，我们可以说 $x \mapsto 1/x$在布尔情形中起着得分函数或共轭变量的作用。事实上，如果$\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，对于所有在 0 处可微的可测函数 f，我们有

$$\int \frac{1}{x} \cdot f(x)\, d\mu(x) = \int D^{\downarrow}f(x)\, d\mu(x)$$

只要等式两边均可积。

2.2. **布尔熵与费舍尔信息**。 由于函数 $x \mapsto 1/x$在布尔薛温格–戴森恒等式中扮演布尔得分函数的角色，我们将$\|1/x\|^2_{L^2(\mu)}$ 定义为非微观态布尔费舍尔信息。

定义 2.1。 设 X是非交换概率空间（$\mathcal{M}$，τ）中的一个自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}$（$\mathbb{R}$）。 X 的（非微观态）布尔费舍尔信息 Ψ^*（X）定义为

$$\Psi^*(X) := \int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) \in (0, +\infty]. \tag{2.1}$$

更一般地，对于任意 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}$（$\mathbb{R}$），我们将 μ的（非微观态）布尔费舍尔信息Ψ^*（μ）定义为

$$\Psi^*(\mu) := \int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) \in (0, +\infty].$$

若要定义非微观态布尔熵，就需要沿布尔热半群对该费舍尔信息 Ψ^* 进行积分：从非交换概率空间（ X 中的一个自伴算子$\mathcal{M}$，τ）出发，其分布是对称的，我们考虑变量$X + \sqrt{t}B$，其中 $B \in \mathcal{M}$ 与 X 布尔独立，并且服从 b分布。 对 Ψ^*（$X + \sqrt{t}B$）求导将产生以下量（见定理2.3）。

定义 2.2。 设 X是非交换概率空间 $(\mathcal{M}, \tau)$ 上的一个自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$。 X 的（非微观态）布尔熵 $\Gamma^*(X)$ 定义为

$$\Gamma^*(X) := -\frac{1}{2}\log \int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) \in]-\infty, +\infty]. \tag{2.2}$$

Mor一般而言，对于任意 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们定义（非微观态）布尔熵 $\Gamma^*(\mu)$ of μ as

$$\Gamma^*(\mu) := -\frac{1}{2}\log \int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) \in]-\infty, +\infty].$$

与微观态框架不同，布尔热流对 Ψ^* 有闭式演化表达式；因此，下面的德布鲁因恒等式可直接计算得出，而非一个变分命题。

定理 2.3。 设 X 是非交换概率空间 $(\mathcal{M}, \tau)$ 上的一个自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，并且 $B \in \mathcal{M}$ 与 X 布尔独立，且服从分布 b。固定 $t \geq 0$，使得 $\Gamma^*(X + \sqrt{s}B) < \infty$, $\Psi^*(X + \sqrt{s}B) < \infty$ 对任意 $s \in [0, t]$. 均成立。则有

$$\Gamma^*(X + \sqrt{t}B) - \Gamma^*(X) = \int_0^t \frac{1}{2}\Psi^*(X + \sqrt{s}B)\, ds. \tag{2.3}$$

证明。 由（1.4），我们知道

$$\begin{aligned}
\Psi^*(X + \sqrt{t}B) &= -G_{(X+\sqrt{t}B)^2}(0) \\
&= -\frac{G_{X^2}(0)}{1 - tG_{X^2}(0)} \\
&= \frac{\Psi^*(X)}{1 + t\Psi^*(X)}.
\end{aligned}$$

特别地，我们可以计算

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{2}\Psi^*(X + \sqrt{s}B)\, ds &= \frac{1}{2}\log(1 + t\Psi^*(X)) - \frac{1}{2}\log(1) \\
&= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\Psi^*(X)}{1 + t\Psi^*(X)}\right) + \frac{1}{2}\log(\Psi^*(X)) \\
&= \Gamma^*(X + \sqrt{t}B) - \Gamma^*(X).
\end{aligned}$$

□

根据 $\Gamma^*(X)$ 和 $\Psi^*(X)$ 的定义，我们得到其预期的缩放性质。

命题 2.4. 设 X 是非交换概率空间 $(\mathcal{M},\tau)$中的一个自伴算子，其分布为 $\mu\in\mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，并设 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。

我们有 $\Gamma^*(X)=-\frac{1}{2}\log(\Psi^*(X))$; $\Psi^*(\lambda X)=\lambda^{-2}\Psi^*(X)$ 以及 $\Gamma^*(\lambda X)=\Gamma^*(X)+\log|\lambda|$。

沿用上一节对 $\Gamma(X)$ 和 $\Psi(X)$ 的计算，我们还可得到如下结果。

推论 2.5。我们有

$$\Gamma^*(X)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\Psi^*(X+\sqrt{s}B)\right)ds \tag{2.4}$$

2.3. **信息论性质**。 在非微观状态情形中，上一节的许多不等式都变成了等式。

命题 2.6 （布尔斯坦等式）。 设 X、Y 是一个非交换概率空间 （$\mathcal{M}$、 τ） 中的自伴算子，具有对称分布，并且彼此布尔独立。我们有

$$\frac{1}{\Psi^*(X+Y)}=\frac{1}{\Psi^*(X)}+\frac{1}{\Psi^*(Y)}. \tag{2.5}$$

证明。 对于所有 $z\in\mathbb{H}_+$，我们有

$$G_{X^2+Y^2}(z)=\frac{1}{z-K_{X^2+Y^2}(z)}=\frac{1}{1/G_{X^2}(z)+1/G_{Y^2}(z)-z}$$

它可扩展到 z 负实数，并得出：对于 $\varepsilon>0$，我们有

$$\tau\left(\frac{1}{-\varepsilon-X^2-Y^2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{\tau\left(\frac{1}{-\varepsilon-X^2}\right)}+\frac{1}{\tau\left(\frac{1}{-\varepsilon-Y^2}\right)}+\varepsilon},$$

或者等价地

$$\tau\left(\frac{1}{\varepsilon+X^2+Y^2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{\tau\left(\frac{1}{\varepsilon+X^2}\right)}+\frac{1}{\tau\left(\frac{1}{\varepsilon+Y^2}\right)}-\varepsilon}.$$

利用单调收敛，我们得出:

$$\Psi^*(X+Y)=\lim_{\varepsilon\to0}\tau\left(\frac{1}{\varepsilon+X^2+Y^2}\right),\ \Psi^*(X)=\lim_{\varepsilon\to0}\tau\left(\frac{1}{\varepsilon+X^2}\right)\ \text{ and }\ \Psi^*(Y)=\lim_{\varepsilon\to0}\tau\left(\frac{1}{\varepsilon+Y^2}\right).$$

□

因此，微观态方法中的许多信息论不等式在这里都化为精确恒等式，这反映了非微观态量在布尔卷积下的线性行为。由于 $\Gamma^*(X)=-\frac{1}{2}\log\Psi^*(X)$，我们得到如下结果。

推论 2.7 (熵功率等式)。 设 X,Y 是非交换概率空间 $(\mathcal{M},\tau)$ 中的自伴算子，它们具有对称分布且布尔独立。我们有

$$\exp(2\Gamma^*(X+Y))=\exp(2\Gamma^*(X))+\exp(2\Gamma^*(Y)), \tag{2.6}$$

证明。 根据布尔斯坦等式，我们有

$$\exp(2\Gamma^*(X+Y))=\frac{1}{\Psi^*(X+Y)}=\frac{1}{\Psi^*(X)}+\frac{1}{\Psi^*(Y)}=\exp(2\Gamma^*(X))+\exp(2\Gamma^*(Y)).$$

□

除了布拉赫曼-斯塔姆不等式的证明和 Cramér-Rao 不等式的证明之外，以下所有性质均完全按照上一节针对 $\Gamma(X)$ 和 $\Psi(X)$ 的计算过程证明。

命题 2.8。 布尔熵 Γ^* 和费舍尔信息 Ψ^* 满足以下性质（其中假设所有出现的变量在某个非交换概率空间中都是自伴的，且具有对称概率测度）：

(1) 我们有如下关于 Ψ^* 的界:

$$\Psi(X)\le\Psi^*(X). \tag{2.7}$$

(2) Γ^* 关于具有紧支撑的概率测度的弱拓扑上半连续，而 Ψ^* 下半连续。

(3) 如果 X 和 Y 布尔独立，那么对于任意 $\theta \in [0,1]$ ，都有相应的香农–斯塔姆不等式和布拉赫曼–斯塔姆不等式：

$$\Gamma^*(\sqrt{\theta}X + \sqrt{1-\theta}Y) \geq \theta\Gamma^*(X) + (1-\theta)\Gamma^*(Y); \tag{2.8}$$

$$\Psi^*(\sqrt{\theta}X + \sqrt{1-\theta}Y) \leq \theta\Psi^*(X) + (1-\theta)\Psi^*(Y). \tag{2.9}$$

证明。 我们只需说明布拉赫曼–斯塔姆不等式的证明，因为其他证明与 Ψ 和 Γ 的证明完全类似。我们使用沃伊库列斯库–斯塔姆等式、 Ψ^* 的缩放性质，以及应用于反函数的詹森不等式：

$$\Psi^*(\sqrt{\theta}X+\sqrt{1-\theta}Y) = \frac{1}{\frac{1}{\Psi^*(\sqrt{\theta}X)} + \frac{1}{\Psi^*(\sqrt{1-\theta}Y)}} = \frac{1}{\theta\frac{1}{\Psi^*(X)} + (1-\theta)\frac{1}{\Psi^*(Y)}} \leq \theta\Psi^*(X)+(1-\theta)\Psi^*(Y).$$

□

推论 2.9 （克拉默–拉奥不等式）。 设 X 是非交换概率空间（$\mathcal{M}$, τ）中的自伴算子，其分布是对称分布。我们有

$$\Psi^*(X) \geq \frac{1}{\tau(X^2)}. \tag{2.10}$$

证明。 由于 $\Psi^*(X) \geq \Psi(X)$ ，由适用于 $\Psi(X)$ 的克拉默–拉奥不等式可得。 □

我们已经看到，与微观态框架不同，非微观态量在布尔卷积下呈线性变化。这引出了以下结果。

定理 2.10 （中心极限定理中的恒定性）。 设 $\{X_i\}_{i\geq 1} \subset (\mathcal{M}, \tau)$ 是一列独立同分布的随机变量（在布尔意义下），其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$。定义

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

于是，对任意 $n \geq 1$，有

$$\Gamma^*(S_n) = \Gamma^*(X_1) \qquad and \qquad \Psi^*(S_n) = \Psi^*(X_1).$$

证明。 由于 $\Gamma^*(X) = -\frac{1}{2}\log(\Psi^*(X))$，我们只需对费舍尔信息验证这一点：它是沃伊库列斯库–斯塔姆等式与 Ψ^* 的缩放性质相结合的结果。□

总体而言，非微观态框架呈现出显著的刚性：许多在微观态设定中真正具有分析性质的泛函不等式，变成了显式的代数恒等式或初等界。

2.4. **泛函不等式**。 在经典概率论与自由概率中，费舍尔信息相对于二次势等于 $\|\xi(x)-x\|^2_{L^2(\mu)}$ 其中 ξ 是经典情形中的得分函数， ξ 是自由情形中的共轭变量。沿用同样的想法，并且由于 $x \mapsto 1/x$是布尔框架中的得分函数，我们现在将相对于拉ademacher变量的布尔费舍尔信息定义为 $\|1/x - x\|^2_{L^2(\mu)} = \|1/x\|^2_{L^2(\mu)} + \|x\|^2_{L^2(\mu)} - 2$。

定义 2.11。 设 X 是非交换概率空间 $(\mathcal{M}, \tau)$ 上的一个自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$。 X 相对于 b 的（非微观态）布尔费舍尔信息 $\Psi^*(X|\mathrm{b})$ 定义为

$$\Psi^*(X|\mathrm{b}) := \int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) + \int x^2\, d\mu(x) - 2 \in [0, +\infty]. \tag{2.11}$$

更一般地，对于任意 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们将 μ 相对于 b 的（非微观态）布尔费舍尔信息$\Psi^*(\mu|\mathrm{b})$ 定义为

$$\Psi^*(\mu|\mathrm{b}) := \int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) + \int x^2\, d\mu(x) - 2 \in [0, +\infty].$$

我们希望像微状态情形那样，通过 $\Gamma^*(X|\mathrm{b}) = -\Gamma^*(X) + \frac{1}{2}\tau\left(X^2\right) - 1/2$ 来定义相对布尔熵，使其沿奥恩斯坦–乌伦贝克流的导数等于相对费舍尔信息的相反数。下面来看看它在 Ornstein-Uhlenbeck 过程下的表现。从一个非交换概率空间 $(\mathcal{M}, \tau)$ 中的自伴算子 X 出发，假设它的分布是对称的，我们考虑变量 $X_t := e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}B$ ，其中 $B \in \mathcal{M}$ 是

与 X 布尔独立，并服从拉德马赫分布 b。我们用 μ_{X_t} 表示 X_t 的分布。根据 Γ 的缩放性质，我们知道

$$\Gamma^*(X_t) = \Gamma^*\left(X + \sqrt{e^{2t}-1}B\right) - t.$$

因此，利用 Ψ^* 的缩放性质，我们有

$$\frac{d}{dt}\Gamma^*(X_t) = e^{2t}\Psi^*\left(X + \sqrt{e^{2t}-1}B\right) - 1 = \Psi^*(X_t) - 1. \tag{2.12}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(-\Gamma^*(X_t) + \frac{1}{2}\tau\left(X_t^2\right) - 1/2\right) \\
&= -\Psi^*(X_t) + 1 - e^{-2t}\int x^2 d\mu(x) + e^{-2t} \\
&= -\Psi^*(X_t|\mathrm{b}).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

这为以下定义提供了依据。

定义 2.12. 设 X 是非交换概率空间 $(\mathcal{M},\tau)$ 上的一个自伴算子，其分布为 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$。$X$ 相对于 b 的（非微观态）布尔熵 $\Gamma^*(X|\mathrm{b})$ 定义为

$$\Gamma^*(X|\mathrm{b}) := \frac{1}{2}\int x^2\, d\mu(x) + \frac{1}{2}\log\int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) - \frac{1}{2} \in [0,+\infty]. \tag{2.14}$$

更一般地，对于任意 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们定义 μ 相对于 b 的（非微观态）布尔熵 $\Gamma^*(\mu|\mathrm{b})$

$$\Gamma^*(\mu|\mathrm{b}) := \frac{1}{2}\int x^2\, d\mu(x) + \frac{1}{2}\log\int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) - \frac{1}{2} \in [0,+\infty].$$

让我们比较相对微观态熵与非微观态熵，证明 $\Gamma^*(X|\mathrm{b})$ 的正性。

命题 2.13 (微观态与非微观态)**.** 对于任意 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们有

$$\Gamma(X|\mathrm{b}) \le \Gamma^*(X|\mathrm{b}) \quad \textit{and} \quad \Psi(X|\mathrm{b}) \le \Psi^*(X|\mathrm{b}).$$

特别地，$\Gamma^*(\mu|\mathrm{b})$ 为微观态相对熵提供了一个普适上界，因此一旦已知微观态泛函为正，非微观态泛函也自动为正。

证明。第一个不等式由詹森不等式得出：

$$-\int \log x^2\, d\mu(x) = \int \log 1/x^2\, d\mu(x) \le \log\int 1/x^2\, d\mu(x).$$

对于第二个，这是 $\Psi(X) \le \Psi^*(X)$ 的推论。 □

我们已经在微观态框架中证明了对数 Sobolev 不等式（LSI）。现在我们证明同一原理在非微观态情形中同样成立。

定理 2.14 (对数 Sobolev 不等式)。对于任意 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们有

$$\Gamma^*(X|\mathrm{b}) \le \frac{1}{2}\Psi^*(X|\mathrm{b})$$

注意，这个不等式是尖锐的，在拉德马赫分布处取等号。与微状态情形一样，沿用相同的证明可直接推出，相对熵沿 Ornstein-Uhlenbeck 过程 X_t 指数衰减：

$$\Gamma^*(X_t|\mathrm{b}) \le e^{-2t}\Gamma^*(X|\mathrm{b}).$$

证明。与微状态情形不同，这里的对数 Sobolev 不等式归结为一个初等的凸性不等式。它就是不等式

$$\frac{1}{2}\log\int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\, d\mu(x) - 1.$$

□

结合前面的两个结果，我们得到一个对数Sobolev不等式，它将微观态熵 Γ与非微观态费舍尔信息 Ψ^*联系起来：

$$\Gamma(X|\mathrm{b}) \le \frac{1}{2}\Psi^*(X|\mathrm{b})$$

可以通过在熵、输运与费舍尔信息之间进行插值来改进这一对数Sobolev不等式。由此得到一个布尔 HWI 不等式，其精神与 Otto–Villani 一致，而上述对数Sobolev不等式可由此立即推出。在经典 [29] 与自由情形 [31], 中，HWI 不等式具有完全相同的形式（采用相应的熵与费舍尔信息）。它们在将泛函不等式与输运估计联系起来方面起着核心作用。

定理 2.15 （HWI 不等式）。 设 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$ 为满足$m_2(\mu) < \infty$的对称概率测度。则有如下 *HWI* 不等式：

$$\Gamma(\mu|\mathrm{b}) \le W_2(\mu,\mathrm{b})\sqrt{\Psi^*(\mu|\mathrm{b})} - \frac{1}{2}W_2(\mu,\mathrm{b})^2. \tag{2.15}$$

由初等不等式 $ab - \frac{1}{2}a^2 \le \frac{1}{2}b^2$，HWI 不等式蕴含

$$\Gamma(\mu|\mathrm{b}) \le \frac{1}{2}\Psi^*(\mu|\mathrm{b}).$$

证明。 若 $\int x^{-2}\,d\mu(x) = +\infty$，则 $\Psi^*(\mu|\mathrm{b}) = +\infty$，从而无需证明。因此我们可以假设 $\int x^{-2}\,d\mu(x) < +\infty$，这同时蕴含 $\Gamma(\mu|\mathrm{b}) < +\infty$ 以及 $\Psi^*(\mu|\mathrm{b}) < +\infty$。

由于 μ 是对称的，与 b 的最优耦合给出

$$W_2(\mu,\mathrm{b})^2 = \int \big(|x|-1\big)^2\,d\mu(x).$$

(2.15) 中出现的另外两个量是

$$\Gamma(\mu|\mathrm{b}) = \frac{1}{2}\int x^2\,d\mu(x) - \int \log|x|\,d\mu(x) - \frac{1}{2},$$

$$\Psi^*(\mu|\mathrm{b}) = \int \big(x^2 + x^{-2} - 2\big)\,d\mu(x).$$

对于 $r>0$，定义势函数

$$V(r) := \frac{1}{2}r^2 - \log r - \frac{1}{2}.$$

于是，令 $r=|x|$,

$$\Gamma(\mu|\mathrm{b}) = \int V(|x|)\,d\mu(x).$$

不难验证逐点不等式

$$V(r) \le \Big(r - \frac{1}{r}\Big)(r-1) - \frac{1}{2}(r-1)^2, \qquad r>0,$$

因为

$$\Big(r - \frac{1}{r}\Big)(r-1) - \frac{1}{2}(r-1)^2 - V(r) = \log r + \frac{1}{r} - 1 \ge 0$$

对 μ 积分，

$$\Gamma(\mu|\mathrm{b}) \le \int \Big(|x| - \frac{1}{|x|}\Big)\big(|x|-1\big)\,d\mu(x) - \frac{1}{2}W_2(\mu,\mathrm{b})^2.$$

根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\int \Big(|x| - \frac{1}{|x|}\Big)\big(|x|-1\big)\,d\mu(x) \le \Big(\int \big(|x|-1\big)^2\,d\mu(x)\Big)^{1/2}\Big(\int \Big(|x| - \frac{1}{|x|}\Big)^2\,d\mu(x)\Big)^{1/2}.$$

右侧的第一项恰好是 $W_2(\mu,\mathrm{b})$。对于第二项，

$$\int \Big(|x| - \frac{1}{|x|}\Big)^2\,d\mu(x) = \int \big(x^2 + x^{-2} - 2\big)\,d\mu(x) = \Psi^*(\mu|\mathrm{b}).$$

因此，该积分至多为

$$W_2(\mu,\mathrm{b})\sqrt{\Psi^*(\mu|\mathrm{b})}.$$

代回即可得到所需的 HWI 不等式（2.15）。 □

3. Stein's method for Boolean independence

在本节中，我们不在非交换概率空间内进行讨论。相反，我们将在经典概率空间（Ω $\mathcal{A}$， $\mathbb{P}$）上针对拉德马赫分布发展一种 Stein 型方法，稍后将其应用于布尔卷积。

3.1. **Stein 方法**。 首先，我们简要回顾一下 Stein 方法 [11, 18, 32], 它可以用于界定如下形式的距离

$$\sup_{\varphi} |\mathbb{E}[\varphi(X)] - \mathbb{E}[\varphi(B)]|$$

其中 B 是一个参考变量。步骤如下:

- 找到一个算子 $\mathcal{D}$ ，使得 $\mathbb{E}[\mathcal{D}f(B)] = 0$。它称为 B 的 *Stein* 算子。
- 对固定的 φ，求解 Stein 方程 $\mathcal{D}f(x) = \varphi(x)$。记 f_φ $\mathcal{D}f(x) = \varphi(x) - \mathbb{E}[\varphi(B)]$, 的解为，我们有

$$\sup_{\varphi} |\mathbb{E}[\varphi(X)] - \mathbb{E}[\varphi(B)]| = \sup_{\varphi} |\mathbb{E}[\mathcal{D}f_\varphi(X)]|$$

其中，上确界取遍某一类函数。

- 接下来需要对这些量 $|\mathbb{E}[\mathcal{D}f_\varphi(X)]|$ 进行界定。

现在我们将 Stein 方法专门应用于拉德马赫分布。

步骤 1. 令 B 为服从参数为 b 的拉德马赫分布的随机变量。由于 $B^2 = 1$，我们几乎必然有$B = 1/B$。因此，若对在 0 处可测且可微的函数f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$定义 $D^{\downarrow}f(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$（其连续延拓满足 $D^{\downarrow}f(0) = f'(0)$），则有

$$\mathbb{E}[B \cdot f(B)] = \mathbb{E}[D^{\downarrow}f(B)]$$

只要所有项都可积。我们将定义在可测函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ （在 0 处可微）上的 Stein 算子 $\mathcal{D}$ 定义为

$$\mathcal{D}f(x) = D^{\downarrow}f(x) - xf(x),$$

使得 $\mathbb{E}[\mathcal{D}f(B)] = 0$。

步骤 2. 我们在下述命题中求解 Stein 方程。

命题 3.1. 对于任意可测函数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，若其在0 处连续，且满足$\varphi(1) = \varphi(-1) = 0$，则存在可测函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $f(0) = 0$ ，并且

$$\varphi = \mathcal{D}f.$$

此外，当 φ 是1-利普希茨函数时，有 $\|D^{\downarrow}f\|_\infty \leq 1.$

证明。 只需令 $f(1) = f(-1) = 0$，并令 $f(x) = x\frac{\varphi(x)}{1-x^2}$，若 $x \neq \pm 1$。假设 φ 在 0 处连续，这保证了 f 在 0 处可微。 $D^{\downarrow}f$ 的界是因为

$$|D^{\downarrow}f(x)| = \left|\frac{1}{1+x}\right| \left|\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1}\right| \leq 1$$

若 $x \geq 0$ 且

$$|D^{\downarrow}f(x)| = \left|\frac{1}{1-x}\right| \left|\frac{\varphi(x) - \varphi(-1)}{x - (-1)}\right| \leq 1$$

如果 $x < 0$。 □

步骤 3。现在，我们应用 Stein 方程来控制随机变量 $X \in L^1$ 与 B之间的 1-Wasserstein 距离 W_1 。根据 Kantorovich 对偶，我们有

$$W_1(X, B) = \sup_{\varphi \ 1-\text{Lipschitz}} |\mathbb{E}[\varphi(X)] - \mathbb{E}[\varphi(B)]|.$$

假设 $\mathbb{E}[X] = 0$。由于 B 是中心化的，我们可以写成

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] - \mathbb{E}[\varphi(B)] = \mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X)] - \mathbb{E}[\tilde{\varphi}(B)]$$

对于任意满足 $\varphi-\tilde{\varphi}$ 为仿射函数的 $\tilde{\varphi}$。特别地，我们可以选择 φ，使得 $\varphi(1)=\varphi(-1)=0$，并写成

$$W_1(X,B)=\sup_{\substack{\varphi\ 1-\text{Lipschitz}\\ \varphi(1)=\varphi(-1)=0}}|\mathbb{E}[\varphi(X)]-\mathbb{E}[\varphi(B)]|.$$

利用 Stein 方程的解可得以下引理。

引理 3.2。对于任意满足 $\mathbb{E}[X]=0$ 的变量 $X\in L^1$，我们有

$$W_1(X,B)\le\sup_f|\mathbb{E}[\mathcal{D}f(X)]|$$

其中，上确界取遍在 0 处可微的可测函数 f，且满足$f(0)=0$，并且满足 $\|D^{\downarrow}f\|_\infty\le 1$.

我们得到 Wasserstein 距离的以下界。

命题 3.3。对于任意变量 $X\in L^2$，我们有

$$W_1(X,B)\le|\mathbb{E}[X]|+\mathbb{E}\left[\left|(X-\mathbb{E}[X])^2-1\right|\right].$$

特别地，若 $\mathbb{E}[X]=0$,

$$W_1(X,B)\le\mathbb{E}\left[\left|X^2-1\right|\right].$$

证明。由于 $W_1(X,B)\le W_1(X,X-\mathbb{E}[X])+W_1(X-\mathbb{E}[X],B)=|\mathbb{E}[X]|+W_1(X-\mathbb{E}[X],B)$，只需在 X 已中心化的情形下证明该不等式。

每当 $\mathbb{E}[X]=0$ 时，我们有

$$W_1(X,B)\le\sup_f|\mathbb{E}[\mathcal{D}f(X)]|$$

其中上确界取遍在 0 处可微的可测函数 f，使得$f(0)=0$，并且使得 $\|D^{\downarrow}f\|_\infty\le 1$.对于这样的函数 f，我们有

$$\mathcal{D}f(X)=(1-X^2)\,D^{\downarrow}f(X),$$

由此可以写成

$$|\mathbb{E}[\mathcal{D}f(X)]|=|\mathbb{E}[(1-X^2)\cdot D^{\downarrow}f(X)]|\le\|1-X^2\|_{L^1}\cdot\|D^{\downarrow}f\|_\infty\le\mathbb{E}\left[\left|X^2-1\right|\right]$$

由此可得 $W_1(X,B)\le\mathbb{E}\left[\left|X^2-1\right|\right]$。 □

现在，我们可以将前面的界改写为分布层面的形式，并得到一个定量版本 of the 布尔四阶矩定理中的 [1, 引理 3.1]。

推论 3.4（定量四阶矩定理）。设 $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 满足 $m_1(\mu)=0$，$m_2(\mu)=1$，且 $m_4(\mu)<+\infty$。我们有

$$W_1(\mu,\mathrm{b})\le\sqrt{m_4(\mu)-1}.$$

证明。设 B 是一个服从拉德马赫分布 b 的随机变量，且 X 是一个服从分布 μ的随机变量。我们有

$$W_1(\mu,\mathrm{b})=W_1(X,B)\le\mathbb{E}\left[\left|X^2-1\right|\right]\le\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(X^2-1\right)^2\right]}=\sqrt{\mathbb{E}[X^4]-1}.$$

□

利用 (0.2)，我们得到以下 Berry-Esseen界。

推论 3.5 (Berry-Esseen界)。设 $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 使得 $m_1(\mu)=0$, $m_2(\mu)=1$，且$m_4(\mu)<+\infty$。我们将 μ_n 定义为 $\mu^{\uplus n}$ 经 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 伸缩后的结果，即 $\mu_n(B)=\overline{\mu}^{\uplus n}(\{x:\ \frac{1}{\sqrt{n}}x\in B\})$。我们有

$$W_1(\mu_n,\mathrm{b})\le\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{m_4(\mu)-1}.$$

3.2. **Stein偏差。** 斯坦核的概念在经典概率论和自由概率中发挥着核心作用。现在我们介绍它的布尔类比。在经典情形下，相对于高斯分布的斯坦核 [25]是一个函数 $A \in L^2(\mu)$，满足

$$\int x \cdot f(x) d\mu(x) = \int A(x) \cdot f'(x) d\mu(x).$$

换言之，得分函数是通过在分部积分（见第 x节）的左侧将 ξ 替换为2.1而得到的，而斯坦核则是通过在等式右侧将 1 替换为 $A(x)$ 而得到的。同样，相对于半圆分布的自由斯坦核 [16] 是任何满足以下施温格-戴森公式变形的 $A \in L^2(\mu \otimes \mu)$：

$$\int x \cdot f(x)\, d\mu(x) = \iint A(x,y) \cdot \partial f(x,y)\, d\mu(x) d\mu(y).$$

秉持同样的理念，自然可以将映射 $x \to x^2$ 理解为任意中心化测度 μ, 关于 b 的布尔斯坦核。事实上，对于任何在 0 处可微的函数，我们都有布尔施温格-戴森恒等式的变形

$$\int x \cdot f(x)\, d\mu(x) = \int x^2 \cdot D^{\downarrow} f(x)\, d\mu(x).$$

这引出了布尔 Stein 偏差的定义，与经典斯坦差异 $\|T-1\|_{L^2(\mu)}$ 平行（另见自由情形）。

定义3.6。 设 X 是一个分布为 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$的实随机变量。 X 相对于 b 的布尔 *Stein* 偏差 $D^*(X|\mathrm{b})$定义为

$$D^*(X|\mathrm{b}) := \left(\int (x^2-1)^2\, d\mu(x) \right)^{1/2} \in [0, +\infty].$$

类似地，对于任意 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$，我们将 μ 相对于 b 的布尔 *Stein* 偏差 $D^*(\mu|\mathrm{b})$定义为

$$D^*(\mu|\mathrm{b}) := \left(\int (x^2-1)^2\, d\mu(x) \right)^{1/2} \in [0, +\infty].$$

上一节3.1中已经出现过 Stein 偏差，其中我们证明了只要 μ 是中心化的，就有

$$W_1(\mu, \mathrm{b}) \le D^*(\mu|\mathrm{b}).$$

我们可以将这一结果加强到 2-Wasserstein 距离，如下所示。这分别是 [25, 9]中经典和自由 WS 不等式的布尔类比。

命题3.7 （WS不等式）。 对于任意测度 $\mu \in \mathcal{M}$（$\mathbb{R}$），有

$$\left(\int (|x|-1)^2\, d\mu(x) \right)^{1/2} \le D^*(\mu|\mathrm{b}).$$

特别地，如果 μ 是对称的，

$$W_2(\mu, \mathrm{b}) \le D^*(\mu|\mathrm{b}).$$

证明。 对所有 $x \in \mathbb{R}$，我们有

$$(|x|-1)^2 \le (|x|-1)^2(|x|+1)^2 = (|x|^2-1)^2.$$

因此，

$$\left(\int (|x|-1)^2\, d\mu(x) \right)^{1/2} \le \left(\int (|x|^2-1)^2\, d\mu(x) \right)^{1/2} = D^*(\mu|\mathrm{b}).$$

对于 μ 对称的情形，等式 $W_2(\mu,\mathrm{b}) = \left(\int (|x|-1)^2 d\mu(x)\right)^{1/2}$ 已在前面各节中确立。 □

因此，涉及布尔 Stein 不一致度的不等式可以利用（0.2）转化为 Berry-Esseen 结果。

命题3.8 （Berry-Esseen界）。 设 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$ 满足 $m_1(\mu) = 0, m_2(\mu) = 1$，且$m_4(\mu) < +\infty$。我们将 μ_n 定义为 $\mu^{\uplus n}$ 按 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 伸缩所得的结果，即 $\mu_n(B) = \mu^{\uplus n}(\{x : \frac{1}{\sqrt{n}}x \in B\})$。我们有

$$W_2(\mu_n, \mathrm{b}) \le D^*(\mu_n|\mathrm{b}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{m_4(\mu) - 1}.$$

证明。 只需注意到 $m_2(\mu_n) = 1$，因此我们可以计算

$$\begin{aligned} D^*(\mu_n|\mathrm{b})^2 &= \int (|x|^2 - 1)^2 d\mu_n(x) \\ &= m_4(\mu_n) - 2m_2(\mu_n) + 1 \\ &= r_4(\mu_n) \\ &= \frac{1}{n} r_4(\mu) \\ &= \frac{1}{n}(m_4(\mu) - 1), \end{aligned}$$

其中我们使用了 (0.2)。 □

3.3. **熵中心极限定理**。 为了将 Stein 偏差的收敛转化为布尔中心极限定理中的熵收敛，我们建立了一个布尔 HSI 不等式。该不等式在泛函形式层面上，恰好对应于经典情形和自由情形中的 HSI 不等式 [25, 16]。

定理 3.9 (HSI 不等式)。 对于任意测度 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$，我们有

$$\Gamma(\mu|\mathrm{b}) \le \frac{1}{2} D^*(\mu|\mathrm{b})^2 \cdot \log\left(1 + \frac{\Psi^*(\mu|\mathrm{b})}{D^*(\mu|\mathrm{b})^2}\right).$$

利用 $\log(1 + x) \le x$，我们得到不等式 $2\Gamma(\mu|\mathrm{b}) \le \Psi^*(\mu|b)$，这就是 Γ与 Ψ^*之间的对数 Sobolev不等式。

证明。证明依赖于如下逐点不等式

$$u - \log u - 1 \le \delta\left(u + \frac{1}{u} - 2\right) + (-\log\delta + \delta - 1)(u - 1)^2$$

对所有 $u > 0$ 和 $\delta \in (0, 1],$ ，然后积分并对 δ进行优化。

Let

$$F(u, \delta) = \log u - u + 1 + \delta\left(u + \frac{1}{u} - 2\right) + (-\log\delta + \delta - 1)(u - 1)^2.$$

注意， $F \ge 0$ 等价于所需的不等式。固定 $u > 0$ ，并关于 $\delta \in (0, 1]$取最小值。求导得

$$\partial_\delta F(u, \delta) = \left(u + \frac{1}{u} - 2\right) + \left(-\frac{1}{\delta} + 1\right)(u - 1)^2.$$

利用 $u + 1/u - 2 = (u - 1)^2/u$，可得

$$\partial_\delta F(u, \delta) = (u - 1)^2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\delta} + 1\right).$$

当 $u \ne 1$ 时，临界点为 $\delta_*(u) = u/(u + 1) \in (0, 1)$。二阶导数

$$\partial_\delta^2 F(u, \delta) = (u - 1)^2/\delta^2 > 0$$

表明它是一个最小值。对于 $u = 1$， $F(1, \delta) = 0$ 对所有 δ均成立。代入 $\delta = u/(u + 1)$ 得

$$\min_{\delta \in (0,1]} F(u, \delta) = H(u) := \log u - u + 1 + (u - 1)^2 \log\frac{u + 1}{u}.$$

尚需证明对于所有 $u > 0$， $H(u) \ge 0$。显然， $H(1) = 0$。直接计算可得

$$H'(u) = 2(u - 1)\left(\log\frac{u + 1}{u} - \frac{1}{u + 1}\right).$$

函数 $\phi(u) = \log((u+1)/u) - 1/(u+1)$ 满足：对于所有 $u > 0$， $\phi(u) > 0$（因为 $\phi(1) > 0$，当 $u \to \infty$ 时，$\phi(u) \to 0^+$，且 $\phi'(u) < 0$）。因此， $H'(u) < 0$ 在 $(0,1)$ 上成立，而 $H'(u) > 0$ 在 $(1,\infty)$ 上成立，所以 H 在 $u = 1$ 处取得全局最小值，此时 $H(1) = 0$。因此， $H(u) \geq 0$。

因此，对所有 $u > 0$ 和 $\delta \in (0, 1],$，可整理得到所需的逐点不等式。对 μ 积分可得 $F(u, \delta) \geq 0$

$$2\Gamma(\mu|\mathrm{b}) \leq \delta\Psi^*(\mu|\mathrm{b}) + (-\log\delta + \delta - 1)D^*(\mu|\mathrm{b})^2.$$

将右端视为 δ 的函数，其最小值在

$$\delta = \frac{D^*(\mu|\mathrm{b})^2}{D^*(\mu|\mathrm{b})^2 + \Psi^*(\mu|\mathrm{b})}.$$

代入这个最优值，恰好得到

$$2\Gamma(\mu|\mathrm{b}) \leq D^*(\mu|\mathrm{b})^2 \cdot \log\left(1 + \frac{\Psi^*(\mu|\mathrm{b})}{D^*(\mu|\mathrm{b})^2}\right),$$

由此证明得证。 □

特别地，由 HSI 不等式以及 Stein 偏差的收敛性可知，布尔中心极限定理在熵层面成立。

推论3.10. 设 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$ 满足 $m_1(\mu) = 0$, $m_2(\mu) = 1$，且 $m_4(\mu) < +\infty$。我们定义 μ_n 为将 $\mu^{\uplus n}$ 伸缩 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍所得的量，即 $\mu_n(B) = \mu^{\uplus n}(\{x : \frac{1}{\sqrt{n}}x \in B\})$。当 $n \to \infty$ 时，我们有，

$$\Gamma(\mu_n|\mathrm{b}) = O\left(\frac{\log(n)}{n}\right).$$

证明。 根据定理 2.10，量 $\Psi^*(\mu_n|\mathrm{b})$ 是常数，而命题3.8 给出了速率$D^*(\mu_n|\mathrm{b})^2 = O(1/n)$。因此

$$D^*(\mu_n|\mathrm{b})^2 \cdot \log\left(1 + \frac{\Psi^*(\mu_n|\mathrm{b})}{D^*(\mu_n|\mathrm{b})^2}\right) = O\left(\frac{\log(n)}{n}\right),$$

并且 HSI不等式使我们可以得出结论。 □

我们还可以在布尔中心极限定理下，推导出布尔费舍尔信息的一个定量界。我们预计下面的收敛速率并非最优。

命题3.11. 设 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 满足 $m_1(\mu) = 0$, $m_2(\mu) = 1$ 且 $m_4(\mu) < +\infty$。设 μ_n 为将 $\mu^{\uplus n}$ 伸缩 $1/\sqrt{n}$倍所得的量，即 $\mu_n(B) = \mu^{\uplus n}(\{x : \frac{1}{\sqrt{n}}x \in B\})$。那么

$$\Psi(\mu_n|\mathrm{b}) \leq \Psi^*(\mu_n)\, D^*(\mu_n|\mathrm{b}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, m_{-2}(\mu)\sqrt{m_4(\mu) - 1}.$$

证明。 我们首先证明一般界

$$|\Psi(\mu) - 1| \leq \Psi^*(\mu)\, D^*(\mu|\mathrm{b}).$$

利用（1.17），我们可写成

$$\Psi(\mu) = \iiint \frac{1}{tx^2 + (1-t)y^2}\, dt\, d\mu(x) d\mu(y).$$

因此

$$|\Psi(\mu) - 1| = \left|\iiint \frac{1 - (tx^2 + (1-t)y^2)}{tx^2 + (1-t)y^2}\, dt\, d\mu(x) d\mu(y)\right|.$$

关于乘积测度 $dt\, d\mu(x) d\mu(y)$应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$|\Psi(\mu) - 1| \leq \left(\iiint \frac{1}{(tx^2 + (1-t)y^2)^2}\right)^{1/2} \left(\iiint (1 - (tx^2 + (1-t)y^2))^2\right)^{1/2}.$$

对于第二个因子，

$$\iiint (1 - W_t)^2\, dt\, d\mu\, d\mu = \int_0^1 \mathrm{Var}(W_t)\, dt,$$

其中 $W_t = tX^2 + (1-t)Y^2$。由于 $\mathrm{Var}(W_t) = [t^2 + (1-t)^2] D^*(\mu|\mathrm{b})^2$ 且 $t^2 + (1-t)^2 \le 1$，我们得到

$$\int_0^1 \mathrm{Var}(W_t)\, dt \le D^*(\mu|\mathrm{b})^2,$$

因此，第二个因子至多为 $D^*(\mu|\mathrm{b})$。

第一个因子等于 $\Psi^*(\mu)$，因为

$$\iiint \frac{1}{(tx^2 + (1-t)y^2)^2} = \iint \frac{1}{x^2 - y^2}\left(\frac{-1}{x^2} - \frac{-1}{y^2}\right) d\mu(x) d\mu(y) = \Psi^*(\mu)^2.$$

Thus

$$|\Psi(\mu) - 1| \le \Psi^*(\mu)\, D^*(\mu|\mathrm{b}).$$

由于

$$\Psi(\mu|\mathrm{b}) = \Psi(\mu) + m_2(\mu) - 2,$$

我们得到

$$\Psi(\mu|\mathrm{b}) \le \Psi^*(\mu)\, D^*(\mu|\mathrm{b}) + |m_2(\mu) - 1|.$$

将此应用于 μ_n，我们有 $m_2(\mu_n) = 1$，而 $\Psi^*(\mu_n) = \Psi^*(\mu)$ 根据定理 2.10 以及 $D^*(\mu_n|\mathrm{b}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{m_4(\mu) - 1}$ 根据命题 3.8。由此得到所要求的界。□

除了在熵中心极限定理中的作用外，上述HSI不等式还属于一个更广泛的插值不等式族，该不等式族联系了输运、熵和费舍尔信息。在经典和自由情形中，HSI不等式蕴含WSH不等式 [25, 9]，，后者细化了Talagrand不等式。现在我们建立相应的布尔WSH不等式，从而补全经典、自由和布尔框架之间的对应关系。

定理 3.12 (WSH不等式)。设 $\mu \in \mathcal{M}^{sym}(\mathbb{R})$ 且 $m_2(\mu) < +\infty$。则

$$W_2(\mu, \mathrm{b}) \le D^*(\mu|\mathrm{b})\, \arccos\left(\exp\left\{-\frac{\Gamma(\mu|\mathrm{b})}{D^*(\mu|\mathrm{b})^2}\right\}\right). \tag{3.1}$$

注意，对于 $x \ge 0$，有 $\arccos(e^{-x}) \le \sqrt{2x}$. 将此结果用于 $x = \Gamma(\mu|\mathrm{b})/D^*(\mu|\mathrm{b})^2$式（3.1）中，我们得到布尔Talagrand不等式 $W_2(\mu,\ \mathrm{b})^2 \le 2\,\Gamma(\mu|\mathrm{b})$。

证明。设 X 为一个分布为 μ 的随机变量，并且对于 $t \ge 0$，设 X_t 为一个对称随机变量，使得

$$X_t^2 = e^{-2t}X^2 + (1 - e^{-2t}).$$

提醒读者，半群 $(X_t)_t$ 并非前几节所讨论的布尔 Ornstein-Uhlenbeck 半群。不过，令 $Y_t = X_t^2$，我们有$Y_t \to 1$，因为 $t \to +\infty$，因此 $X_t \to B$ 在分布上。

由于 X_t 是对称的，

$$W_2(\mu_t, \mathrm{b})^2 = \mathbb{E}\big[(|X_t| - 1)^2\big].$$

对 t 求导可得

$$\frac{d}{dt} W_2(\mu_t, \mathrm{b})^2 = 2\,\mathbb{E}\left[(|X_t| - 1)\frac{d}{dt}|X_t|\right].$$

因为 $|x| = \sqrt{x^2}$ 和 $X_t^2 = e^{-2t}X^2 + 1 - e^{-2t}$，

$$\frac{d}{dt}|X_t| = \frac{1}{2|X_t|}\frac{d}{dt}X_t^2 = -\frac{X_t^2 - 1}{|X_t|}.$$

因此

$$\frac{d}{dt} W_2(\mu_t, \mathrm{b})^2 = -2\,\mathbb{E}\left[(|X_t| - 1)\frac{X_t^2 - 1}{|X_t|}\right].$$

由于

$$\frac{X_t^2 - 1}{|X_t|} = |X_t| - \frac{1}{|X_t|},$$

我们得到

$$\frac{d}{dt} W_2(\mu_t, \mathrm{b})^2 = -2\,\mathbb{E}\left[(|X_t| - 1)\left(|X_t| - \frac{1}{|X_t|}\right)\right].$$

由柯西–施瓦茨不等式，

$$-\frac{d}{dt}W_2(\mu_t,\mathrm{b}) \le \left(\mathbb{E}\left[\left(|X_t|-\frac{1}{|X_t|}\right)^2\right]\right)^{1/2}.$$

由于

$$\mathbb{E}\left[\left(|X_t|-\frac{1}{|X_t|}\right)^2\right] = \Psi^*(\mu_t|\mathrm{b}),$$

由此可得

$$\frac{d^+}{dt}W_2(\mu_t,\mathrm{b}) \le \sqrt{\Psi^*(\mu_t|\mathrm{b})}. \tag{3.2}$$

我们现在计算熵沿同一流的演化。根据定义，

$$\frac{d}{dt}\Gamma(\mu_t|\mathrm{b}) = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\frac{d}{dt}Y_t - \frac{1}{Y_t}\frac{d}{dt}Y_t\right] = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\left(1-\frac{1}{Y_t}\right)\frac{d}{dt}Y_t\right].$$

由于 $\frac{d}{dt}Y_t = -2(Y_t-1)$，

$$\frac{d}{dt}\Gamma(\mu_t|\mathrm{b}) = -\,\mathbb{E}\left[\left(1-\frac{1}{Y_t}\right)(Y_t-1)\right].$$

But

$$\left(1-\frac{1}{Y_t}\right)(Y_t-1) = \frac{(Y_t-1)^2}{Y_t} = Y_t + \frac{1}{Y_t} - 2.$$

因此

$$-\frac{d}{dt}\Gamma(\mu_t|\mathrm{b}) = \mathbb{E}\left[Y_t + \frac{1}{Y_t} - 2\right] = \mathbb{E}\left[X_t^2 + \frac{1}{X_t^2} - 2\right] = \Psi^*(\mu_t|\mathrm{b}).$$

应用定理 3.9 于 μ_t 并使用 $D^*(\mu_t|\mathrm{b}) \le D^*(\mu|\mathrm{b})$，我们得到

$$\sqrt{\Psi^*(\mu_t|\mathrm{b})} \le -\frac{d}{dt}\left[D^*(\mu|\mathrm{b})\arccos\left(\exp\left\{-\frac{\Gamma(\mu_t|\mathrm{b})}{D^*(\mu|\mathrm{b})^2}\right\}\right)\right].$$

C将此结果与 (3.2) 结合，并在 $[0,+\infty)$ 上积分，得到 (3.1)，因为 $\mu_t \to \mathrm{b}$ 且 $\Gamma(\mathrm{b}|\mathrm{b}) = 0$. □

Conclusion and outlook

本文通过引入微观态和非微观态布尔费舍尔信息，并借助 de Bruijn 型恒等式将其与布尔熵联系起来，构建了一个与经典和自由情形相对应的布尔信息论框架。我们建立了主要泛函不等式的布尔类比物，包括对数 Sobolev、HWI、HSI、Tala- grand 和 WSH 型不等式，并以布尔 Stein 方法补充这一思路，从而得到定量的 Berry–Esseen 界和熵收敛速率。综上，这些结果完善了布尔情形下的输运–熵–信息图景，并凸显了它与经典及自由框架的相似之处。我们还注意到，近期的工作 [17] 为非交换概率的另一个分支——有限自由概率——构建了一个信息论框架。

仍有若干自然问题尚未解决。我们将研究范围限于对称测度，并将非对称理论和多变量扩展留待未来工作。此外，我们预期，联系微态布尔熵 $\Gamma(\mu|\mathrm{b})$ 与微态布尔 Fisher $\Psi(\mu|\mathrm{b})$ 信息的真正 HWI 型不等式应当成立。我们将在后续工作中研究这些方向。

References

[1] Octavio Arizmendi. 四阶矩的收敛与无限可分性. *Statistics* 33 06 2013 *Probability and Mathematical* , , .[2] Octavio Arizmendi and Mauricio Salazar. 布尔卷积的 Berry–Esseen 型极限定理. *der Mathematik* 111 1 101 *Archiv* , ( ): –111, 2018. [3] G Ben Arous and Alice Guionnet. Wigner 定律与 Voiculescu 非交换熵的大偏差. *Probability theory and related fields*, 108(4):517–542, 1997. [4] Shiri Artstein, Keith Ball, Franck Barthe, and Assaf Naor. Shannon问题的解：熵的单调性. *Journal of the American Mathematical Society*, 17(4):975–982, 2004. [5] Shiri Artstein, Keith MBall, Franck Barthe, andAssafNaor. 熵中心极限定理的收敛速率. *Probability theory and related fields*, 129(3):381–390, 2004.

[6] Andrew C Berry. 独立随机变量之和的高斯近似精度. *Transactions of the american mathematical society* 49 1 122 136, 1941 , ( ): – . [7] Philippe Biane and Roland Speicher. 自由扩散、自由熵与自由 Fisher 信息. *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics* 37 5 581 606, 2001 , ( ): – . [8] Philippe Biane and Dan Voiculescu. 迹态空间上 Wasserstein 度量的自由概率类比. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 11(6):1125–1138, 2001. [9] Guillaume C´ebron. 自由概率论中的定量四阶矩定理. *Advances in Mathematics*, 380:107579, 2021. [10] Guillaume C ´ebron *Random Matrices: Theory and Applications* 13 01 2350014, 2024 and Nicolas Gilliers. 随机矩阵的渐近循环条件自由性. , ( ): . [11] Louis HY Chen, Larry Goldstein, and Qi-Man Shao. *Normal approximation by Stein's method*. 施普林格科学与商业媒体, 2010. [12] Gennadii P Chistyakov and Friedrich G¨otze. 自由概率论中的极限定理 I. *Ann.Probab*, 36(1):54– 90, 2008. [13] Gennadiy P Chistyakov and Friedrich G ¨otze. 自由 *Probability Theory and Related Fields* 157 1 107 156, 2013 概率中中心极限定理的渐近展开. , ( ): – . [14] Benjamin Dadoun and Pierre Youssef. 最大相关以及自由熵和 Stein偏差的单调性. *Electron. Commun. Probab*, 26:1–10, 2021. [15] Carl-Gustav Esseen. 分布函数的傅里叶分析：对拉普拉斯-高斯分布的数学研究. *Acta Mathematica*, 77, 1945. [16] Max Fathi and Brent Nelson. 自由斯坦核与自由对数 Sobolev 不等式的改进. *Advances in Mathematics*, 317:193–223, 2017. [17] Jorge Garza-Vargas, Nikhil Srivastava, and Zachary Stier. 有限自由信息不等式. *arXiv preprint arXiv:2602.15822* 2026 , . [18] Christina Goldschmidt. 用于分布收敛的 Chen-Stein方法. *Masters-level essay University of Cambridge UK* 2000 , , , . [19] Leonard Gross. 对数 Sobolev 不等式. *American Journal of Mathematics*, 97(4):1061–1083, 1975. [20] Jad Hamdan. 非交换中心极限定理的不动点方法. *arXiv preprint arXiv:2305.06960* 2023 , . [21] Fumio Hiai and Yoshimichi Ueda. 非交换多变量的自由运输代价不等式. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 9(03):391–412, 2006. [22] David Jekel and Weihua Liu. 由树定义的非交换独立性 *Dissertationes* 歌剧代数. *Mathematicae* 553 1 , : –100, 2020. [23] Oliver Johnson and Andrew Barron. 费希尔信息不等式与中心极限定理 . *Probability Theory and Related Fields* 129 3 391 409, 2004 , ( ): – . [24] Vladislav Kargin. 自由随机变量的 Berry–Esseen 定理. *Journal of Theoretical Probability* 20 2 381 395, , ( ): – . [25] 2007 Michel Ledoux, Ivan Nourdin, and Giovanni Peccati. Stein 方法、对数 Sobolev 不等式与输运不等式. *Geometric and Functional Analysis*, 25(1):256–306, 2015. [26] Romuald Lenczewski. 随机矩阵的极限分布. *Advances in Mathematics*, 263:253–320, 2014. [27] Elliott H Lieb. Wehrl熵猜想的证明. *Communications in Mathematical Physics* 62 1 35 41, , ( ): – . [28] 1978 Wojciech M-lotkowski and Noriyoshi Sakuma. 概率测度的对称化、二阶推前与布尔卷积. *Banach Center Publications*, 96:271–276, 2011. [29] Felix Otto and C´edric Villani. Talagrand不等式的推广及其与对数 Sobolev 不等式的联系. *Journal of Functional Analysis*, 173(2):361–400, 2000. [30] Kewei Pan. 一种布尔独立熵. *arXiv preprint arXiv:2505.07907*, 2025. [31] Ionel Popescu. 一维自由概率中的局部泛函不等式 . *Journal of Functional Analysis*, 264 6 1456 1479, 2013 ( ): – . [32] Nathan Ross. Stein 方法基础. *Probab.Surveys*, 8:210–293, 2011. [33] Mauricio Salazar. 关于布尔卷积的 Berry–Esseen 型极限定理. *Electronic Communications in Probability* 27 1 10, 2022 , : – . [34] Claude Elwood Shannon. 通信的数学理论. *The Bell system technical journal*, 27 3 379 423, 1948 ( ): – . [35] Dimitri Shlyakhtenko. Shannon熵单调性问题的自由概率类比. *Advances in Mathematics* 208 2 824 833, 2007 , ( ): – . [36] Roland Speicher. 关于泛性质积. *Free probability theory*, pages 257–266, 1996. [37] Roland Speicher and Reza Woroudi. 布尔卷积. *Free Probability Theory*, pages 267–279, 1996. [38] Aart J Stam. Fisher和Shannon信息量满足的一些不等式. *Information and Control* 2 2 101 , ( ): – 112, 1959. [39] Michel Talagrand. 高斯及其他乘积测度的运输代价. *Geometric & Functional Analysis GAFA* 6 3 587 600, 1996 , ( ): – . [40] Dan Voiculescu. 自由概率论中熵与Fisher信息量的类比 I. *Communications in mathematical physics*, 155(1):71–92, 1993. [41] Dan Voiculescu. 自由概率论中熵与Fisher信息量的类比 V。非交换希尔伯特变换：V. 非交换希尔伯特变换. *Inventiones mathematicae*, 132(1):189–227, 1998.