arXiv:2602.23818v1 [math.AP] 27 Feb 2026

薄区域上双调和 Steklov 问题的渐近行为与谱畸变

BAUYRZHAN DERBISSALY 和 PIER DOMENICO LAMBERTI

ABSTRACT. 本文研究定义在 n 维欧几里得空间中、退化为一条线段的薄区域上的双调和 Steklov 问题的特征值与特征函数的渐近行为。对于 $n = 2$ 而言，该问题描述了薄弹性板的振动，其横截面由给定区域表示，质量则集中在自由边界上。所研究的问题取决于参数 σ ，该参数在弹性板理论中表示材料的泊松比。我们的分析指出，极限问题会因 σ 和空间维数 n而发生畸变。

1. INTRODUCTION

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界、Lipschitz 连通开集（简言之，一个$C^{0,\,1}$类有界区域）Ω，且满足 $n \geq 2$ ，并设其边界 $\partial\Omega$的一个开子集为 Γ ，我们考虑以下用于双调和算子的（混合）广义 Steklov 问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, & \text{in } \Omega, \\ (1-\sigma)\, u_{\nu\nu} + \sigma \Delta u + \mu u_\nu = 0, & \text{on } \Gamma, \\ -(1-\sigma)\, \mathrm{div}_\Gamma \left(D^2 u \cdot \nu\right)_\Gamma - (\Delta u)_\nu = \lambda u, & \text{on } \Gamma, \\ u = u_\nu = 0, & \text{on } L. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里， $L = \partial\Omega \setminus \Gamma$, u是 Steklov 特征函数， λ是 Steklov 特征值， $-1/(n-1) < \sigma < 1$, $\mu > 0$ 为固定常数，而 ν 是 Ω ∂ 的单位外法向量。我们用 $\mathrm{div}_\Gamma F := \mathrm{div} F - (\nabla F \cdot \nu)\nu$ 表示向量场 F 的切向散度，而 $F_\Gamma := F - (F \cdot \nu)\nu$ 表示 F 的切向分量。正如后文将会清楚说明的那样，为简化对当前特定情形的分析，我们在 L 上施加 Dirichlet边界条件 $u = u_\nu = 0$ 。

问题 (1.1) 是二阶 Steklov 问题的自然四阶版本

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u_\nu = \lambda u, & \text{on } \Gamma, \\ u = 0, & \text{on } L. \end{cases} \tag{1.2}$$

问题 (1.2) 可视为 Dirichlet-Neumann映射的特征值问题，具有悠久的历史和广泛的应用。 $L = \emptyset$ 情形下的经典问题在研究小水盆中流体小幅振荡的晃动问题，以及电法勘探中发挥着基础作用；在电法勘探中，Dirichlet-Neumann映射代表电压-电流映射。在线性弹性理论中，

2020年 数学主题分类。主要分类 35J40；次要分类 35P15、35B25、35J35。关键词与短语。双调和算子、Steklov边界条件、薄区域、区域扰动、谱分析。

带有 $n = 2$ 的问题 (1.2) 给出了自由振动膜 Ω 的振动基模 u 及其对应的特征频率 $\sqrt{\lambda}$；该膜的边界仅在 L 处固定，且质量集中于 Γ。与问题 (1.2) 相关的 Rayleigh 商为

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Gamma u^2 d\mathcal{H}},$$

其中，$d\mathcal{H} = d\mathcal{H}^1$ 是（一维）豪斯多夫测度（弧长）。顺便提一下，在一般情形 $n \geq 2$下，我们将使用 $n-1$维豪斯多夫测度 $d\mathcal{H}^{n-1}$。关于问题 (1.2) 的应用详情，请参阅 [15] ；关于其在振动膜理论框架下的物理解释，请参阅 [23]。

类似地，带有 $n = 2$ 的问题 (1.1) 出现在 Kirchhoff-Love 模型框架下对弹性板的研究中。该模型通常用于描述薄弹性板的弯曲行为、振动和变形。具体而言，Kirchhoff-Love 板理论假设板的厚度相对于其他尺寸而言很小，且厚度方向上的法向应力可以忽略。该模型用于预测薄板在各种力和边界条件作用下的变形。更多详情请参阅 [11] 。在此背景下，Ω 表示一块薄振动板的横截面，其边界仅在 L 处固定，质量集中在 Γ处。参数 σ 是制成该板的材料的泊松比。函数 u 是振动模态，表示相对于中面的挠度。相应的势能为

$$\int_\Omega (1-\sigma)\,|D^2u|^2 + \sigma|\Delta u|^2 dx + \mu \int_\Gamma u_\nu^2 d\mathcal{H}$$

and

$$\frac{\int_\Omega (1-\sigma)\,|D^2u|^2 + \sigma|\Delta u|^2 dx + \mu \int_\Gamma u_\nu^2 d\mathcal{H}}{\int_\Gamma u^2 d\mathcal{H}} \tag{1.3}$$

是相应的瑞利商。这里 D^2u 表示 u的海森矩阵。关于问题(1.1)在 $\mu = 0$情形下的严格推导与物理解释，我们参阅 [11] 。

与二阶问题一样，问题(1.1)的特征值集合是一个可数的正实数集，可以排成一个非减序列，并发散至 $+\infty$:

$$0 < \lambda_1 \leq \ \cdots \leq \lambda_n \leq ...$$

问题(1.1)的变分表述（可作为与瑞利商(1.3)的极小化问题相关联的欧拉-拉格朗日方程得到）具有如下形式

$$\int_\Omega (1-\sigma)\, D^2u : D^2\varphi + \sigma \Delta u \Delta \varphi dx + \mu \int_\Gamma u_\nu \varphi_\nu d\mathcal{H}^{n-1} = \lambda \int_\Gamma u\varphi d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{1.4}$$

对所有 $\varphi \in H^2_L(\Omega)$，关于未知量 $u \in H^2_L(\Omega)$ $\lambda \in \mathbb{R}$，其中 $D^2u : D^2\varphi$ 表示 D^2u 与 $D^2\varphi$的弗罗贝尼乌斯内积。请注意，(1.1) 中对 Γ 施加的边界条件自然地由对 (1.4) 中的体积分进行分部积分而得到，参见例如 [3,引理 8.61] 中的“双调和格林公式”。

用 $H_L^2(\Omega)$ 表示在 $H^2(\Omega)$ 中由在 L 的某个邻域内取零的函数构成的空间的闭包； $H^2(\Omega)$ 是标准的 Sobolev 空间 $H^2(\Omega)$，由定义在 $L^2(\Omega)$ 中、取实值且具有直到二阶的 $L^2(\Omega)$ 弱导数的函数组成。

若在问题 (1.1) 中令 $\mu = +\infty$ ，则得到所谓的 (NBS)——Neumann 双调和 Steklov 问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u_\nu = 0, & \text{on } \Gamma, \\ -(1-\sigma)\,\mathrm{div}_\Gamma\left(D^2 u \cdot \nu\right)_\Gamma - (\Delta u)_\nu = \lambda u, & \text{on } \Gamma, \\ u = u_\nu = 0, & \text{on } L. \end{cases}$$

文献 [21, 24, 25] 讨论了情形 $\sigma = 1$ 下的问题 (NBS)。值得指出的是，文献 [11] 引入了满足 $\sigma = \mu = 0$ 的问题 (1.1)，将其作为经典拉普拉斯算子 Steklov 问题的一种自然四阶推广；文献 [9] 也在 $\sigma \in (-1/(n-1), 1)$ 和 $\mu = 0$ 的情形下研究了该问题。文献 [22] 引入了满足 $\mu > 0$ 的问题 (1.1)，以刻画 $H^2(\Omega)$ 中函数的迹空间，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界 Lipschitz 域。关于双调和算子的 Robin 和 Steklov 问题的进一步讨论，也可参见文献 [10] 。在所引用的论文中， $\Gamma = \partial\Omega$。

本文的主要思想受到两篇文献的启发： [2]和 [8]。在 [2], 中，作者研究了平面哑铃域上具有齐次 Neumann 边界条件的双调和算子的谱性质。该区域由两个通过狭窄通道连接的区域组成。他们重点研究了通道厚度趋于零时特征值的渐近行为。

另一方面， [8] 研究了哑铃域中经典二阶 Steklov 问题的特征值和特征函数的渐近行为。该区域由两个通过宽度趋于零的细管连接的区域组成。作者证明，在这种情况下，所有特征值都收敛于零，其收敛速率由管道宽度的某个幂次决定，而该幂次与相应一维问题的特征值相关。

薄区域上微分算子的特征值问题是一项经典研究课题，受到许多作者的关注；例如参见 [5], [6],[7], [13], [16], [20], [26], [27], [28],以及其中的参考文献。

问题 (1.1) 有如下变分刻画：

$$\lambda_k = \inf_{S_k} \sup_{\substack{u \in S_k \\ \mathrm{Tr}\, u \neq 0}} \frac{Q_{\sigma,\mu,\Omega}(u,u)}{\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}},$$

其中

$$Q_{\sigma,\mu,\Omega}(u,\varphi) = Q_{\sigma,\Omega}(u,\varphi) + \mu(u_\nu, \varphi_\nu)_{L^2(\Gamma)},$$

and

$$Q_{\sigma,\Omega}(u,\varphi) = (1-\sigma)\int_\Omega D^2 u : D^2\varphi dx + \sigma\int_\Omega \Delta u \Delta\varphi dx,$$

对所有 $u, \varphi \in H^2(\Omega)$。通常，$(\cdot,\cdot)_{L^2(\Gamma)}$ 和 $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ 分别表示 $L^2(\Gamma)$中的内积及其对应的范数。此外，$\mathrm{Tr}\, u$ 表示 u 在 Γ 上的迹，且下确界取遍 Sobolev 空间 $H_L^2(\Omega)$中所有 k维子空间 S_k 。

现在我们来描述将要据以表述 Steklov问题的特定区域类。令 Ω_ϵ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个薄区域，其定义如下:

$$\Omega_\epsilon = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n : \ -l < x_1 < l, \ |x'| < \epsilon\rho(x_1)\},$$

其中 $l > 0$ 且 $\rho \in C^0([-l,l]) \cap C^\infty(-l,l)$ 是一个正函数。这里， $x' = (x_2, ..., x_n)$。我们注意到，选择对称区间 $[-l,l]$ 符合[8] 的精神，但就我们的目的而言，我们可以选择任意区间 $[a,b]$。

我们将 Γ_ϵ 定义如下:

$$\Gamma_\epsilon = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n : \ -l \le x_1 \le l, \ |x'| = \epsilon\rho(x_1)\}.$$

我们记 $L_\epsilon = L_\epsilon^+ \cup L_\epsilon^-$，其中

$$L_\epsilon^+ = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n : \ x_1 = l, \ |x'| \le \epsilon\rho(l)\},$$
$$L_\epsilon^- = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n : \ x_1 = -l, \ |x'| \le \epsilon\rho(-l)\}.$$

在薄区域 Ω_ϵ 中，我们考虑问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u_\epsilon = 0, & \text{in } \Omega_\epsilon, \\ (1-\sigma)(u_\epsilon)_{\nu_\epsilon\nu_\epsilon} + \sigma\Delta u_\epsilon = -\mu(u_\epsilon)_{\nu_\epsilon}, & \text{on } \Gamma_\epsilon, \\ -(1-\sigma)\,\mathrm{div}_{\Gamma_\epsilon}(D^2 u_\epsilon \cdot \nu_\epsilon)_{\Gamma_\epsilon} - (\Delta u_\epsilon)_{\nu_\epsilon} = \lambda_\epsilon u_\epsilon, & \text{on } \Gamma_\epsilon, \\ u_\epsilon = (u_\epsilon)_{\nu_\epsilon} = 0, & \text{on } L_\epsilon. \end{cases} \tag{1.5}$$

问题 (1.5) 的弱形式取如下形式

$$Q_{\sigma,\mu,\Omega_\epsilon}(u_\epsilon, \varphi) = \lambda_\epsilon (u_\epsilon, \varphi)_{L^2(\Gamma_\epsilon)}, \ \text{for all } \varphi \in H^2_{L_\epsilon}(\Omega_\epsilon). \tag{1.6}$$

本文的主要目标是研究当 $\epsilon \to 0$ 时 $(\lambda_\epsilon, u_\epsilon)$ 的行为。

如上所述，我们用一个非递减序列 $\lambda_{\epsilon,k}$ 表示问题 (1.6) 的特征值，其中 $k \in \mathbb{N}$ ，每个特征值按其重数重复出现。我们用 $u_{\epsilon,k}$, $k \in \mathbb{N}$ 表示相应的特征函数序列，并假设它们关于 $L^2(\Gamma_\epsilon)$ 的内积正交归一，即 $\int_{\Gamma_\epsilon} u_{\epsilon,h} u_{\epsilon,k} d\mathcal{H}^{n-1} = \delta_{hk}$ 对所有 $h, k \in \mathbb{N}$ 均成立。事实证明，当 $\epsilon \to 0$ 时，Steklov特征值 $\lambda_{\epsilon,k}$ 和特征函数 $u_{\epsilon,k}$ 的渐近行为由定义在极限线段 $[-l,l]$ 上的四阶斯图姆-刘维尔问题 (1.7) 所支配。特别需要指出的是，该 Sturm-Liouville问题的特征函数 v_k, $k \in \mathbb{N}$ 必须在加权空间 $L^2_{n,\rho}(-l,l)$ 中归一化：$= L^2((-l,l); (n-1)w_{n-1}\rho^{n-2}dx_1)$，其中 w_{n-1} 表示$\mathbb{R}^{n-1}$ 中的单位球体积。

我们现在可以陈述本文的主要结果。注意，由于 $u_{\epsilon,k}$ 的定义域随 ϵ变化，这里通过考虑 $u_{\epsilon,k} \circ \Phi_\epsilon$，将 u_ϵ 拉回到 Ω_1 ，其中$\Phi_\epsilon : \Omega_1 \to \Omega_\epsilon$ 由 $\Phi_\epsilon(x_1, x') = (x_1, \epsilon x')$ 定义，对所有 $(x_1, x') \in \Omega_1$均成立。另一方面，仅依赖于变量 x_1的极限特征函数 u_k，在其余变量方向上作常值延拓至整个 Ω_1。

定理 1.1. 设 $n \ge 2$. 则

$$\lambda_{\epsilon,k} \sim \lambda_k \epsilon, \ \ as \ \epsilon \to 0,$$

对于一个 ll $k \in \mathbb{N}$，其中 λ_k 是四阶 *Sturm–Liouville* 问题的特征值 m

$$
\begin{cases}
(1-\sigma^2\mathcal{N})\,\frac{d^2}{dx_1^2}\left(\rho^{n-1}\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)=\lambda(n-1)\rho^{n-2}V, \quad \text{in } (-l,l),\\
V(-l)=\frac{dV}{dx_1}(-l)=0,\\
V(l)=\frac{dV}{dx_1}(l)=0,
\end{cases} \tag{1.7}
$$

以及 $\mathcal{N}=(n-1)/(1-2\sigma+\sigma n)$。此外，存在一组标准正交的特征函数基 v_k，$k\in\mathbb{N}$，它属于(1.7) 在 $L^2_{n,\rho}(-l,l)$ 上的问题；可能经过取子序列后，

$$\epsilon^{\frac{n-2}{2}}u_{\epsilon,k}\circ\Phi_\epsilon \rightharpoonup v_k \ in\ H^2(\Omega_1),$$

当 $\epsilon\to 0$时，其中 v_k 在变量 x'上作常值延拓。

注意，在极限问题中，四阶算子前出现了畸变因子 $1-\sigma^2\mathcal{N}$，且此时 $\sigma\neq 0$。在 $n=2$ 的情形下，这个因子是在 [2]中得到的。

我们还注意到，尽管为了便于比较，我们按照 [8] 的思路表述了问题，但证明方法完全不同。特别是，在这里我们按照 Vainikko 的意义 [30]，证明了（经 ϵ 缩放的） n维 Steklov问题的谱收敛到四阶斯图姆-刘维尔问题。

2. Preliminaries and notation

在区域 Ω_ϵ 中考虑双调和 Steklov 问题时，相应的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\epsilon$ 取决于 ϵ，这使得标准紧收敛概念难以直接应用。为解决这一问题，我们采用适当的连接系统，以便从定义在 Ω_ϵ 上的变动希尔伯特空间过渡到定义在 Ω_1 上的固定极限希尔伯特空间。这一方法融合了 Stummel [29] 和 Vainikko [30], 的相关著作中的多种概念与结果，并在 [1, 12] 中得到了进一步阐述。值得注意的是，我们采用了 E-紧收敛的概念。

按照 [1], 的思路，我们用 $\mathcal{H}_\epsilon$ 表示关于 $\epsilon\in[0,\epsilon_0]$ 的一族希尔伯特空间，并假设存在一族线性算子 $E_\epsilon\colon\ \mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_\epsilon$，使得

$$\|E_\epsilon f\|_{\mathcal{H}_\epsilon}\xrightarrow{\epsilon\to 0}\|f\|_{\mathcal{H}_0},\ \text{for all } f\in\mathcal{H}_0. \tag{2.1}$$

定义 2.1. 若一族 $\{f_\epsilon\}_{0<\epsilon\le\epsilon_0}$ 满足 $f_\epsilon\in\mathcal{H}_\epsilon, E$-收敛到 $f\in\mathcal{H}_0$，则称其 $\|f_\epsilon-E_\epsilon f\|_{\mathcal{H}_\epsilon}\to 0$ 当 $\epsilon\to 0$ 时成立。记作 $f_\epsilon\xrightarrow{E}f$。

定义 2.2。 设 $\{B_\epsilon\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_\epsilon)\colon\ \epsilon\in(0,\ \epsilon_0]\}$ 是一族线性连续算子。若当 $f_\epsilon\xrightarrow{E}f$ 时，总有 $B_\epsilon f_\epsilon\xrightarrow{E}B_0 f$，则称 $\{B_\epsilon\}_{0<\epsilon\le\epsilon_0}$ E 收敛到 $B_0\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$，当 $\epsilon\to 0$ 。记作 $B_\epsilon\xrightarrow{EE}B_0$。

定义 2.3。 设 $\{f_\epsilon\}_{0<\epsilon\le\epsilon_0}$ 是一族满足 $f_\epsilon\in\mathcal{H}_\epsilon$ 的对象。若对于任意序列 $\epsilon_n\to 0$，都存在子列 $\{\epsilon_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $f\in\mathcal{H}_0$，使得当 $k\to\infty$ 时 $f_{\epsilon_{n_k}}\xrightarrow{E}f$，则称 $\{f_\epsilon\}_{0<\epsilon\le\epsilon_0}$ 是预紧的。

定义 2.4. 我们称在 $B_\epsilon\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_\epsilon)$ 且 B_ϵ 紧的情况下，$\{B_\epsilon\}_{0<\epsilon\le\epsilon_0}$ 紧收敛到紧算子 $B_0\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$，如果 $B_\epsilon\xrightarrow{EE}B_0$，并且对于任意族

$\{f_\epsilon\}_{0<\epsilon\leq\epsilon_0}$ 满足 $f_\epsilon \in \mathcal{H}_\epsilon$、$\|f_\epsilon\|_{\mathcal{H}_\epsilon} = 1$，我们有 $\{B_\epsilon f_\epsilon\}_{0<\epsilon\leq\epsilon_0}$ 按定义 2.3 的意义是预紧的。我们将此记作 $B_\epsilon \xrightarrow{C} B_0$。

E紧收敛蕴含谱稳定性。具体而言，我们有如下结果，其中，与 m 特征值相关的“广义特征函数”是指与这些特征值相关的 m 特征函数的线性组合。

定理 2.5. 设 $\{B_\epsilon\}_{0\leq\epsilon\leq\epsilon_0}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\epsilon$上的一族非负紧自伴算子。假设其特征值由 $\{\lambda_k(\epsilon)\}_{k=1}^{\infty}$给出。若 $B_\epsilon \xrightarrow{C} B_0$，则当 $\epsilon \to 0$时，B_ϵ 谱收敛到 B_0。特别地，以下结论成立：

(i) 对每个 $k \in \mathbb{N}$，当 $\epsilon \to 0$时，我们有 $\lambda_k(\epsilon) \to \lambda_k(0)$。*(ii)* 若 $u_k(\epsilon)$，$k \in \mathbb{N}$ 是与特征值 $\lambda_k(\epsilon)$相关的特征函数正交归一序列，则存在特征函数正交归一序列 $u_k(0)$，$k \in \mathbb{N}$，与 $\lambda_k(0)$，$k \in \mathbb{N}$ 相关，使得在必要时取一个子列后，$u_k(\epsilon) \xrightarrow{E} u_k(0)$。*(iii)* 给定特征值 m (λ_k)$(0) \ldots, \lambda_{k+m-1}(0)$，满足 $\lambda_k(0) \neq \lambda_{k-1}(0)$且 $\lambda_{k+m-1}(0) \neq \lambda_{k+m}(0)$，以及相应的正交归一特征函数 $u_k(0) \ldots, u_{k+m-1}(0)$，则存在 m 正交归一广义特征函数 $v_k(\epsilon) \ldots, v_{k+m-1}(\epsilon)$，与 $\lambda_k(\epsilon) \ldots, \lambda_{k+m-1}(\epsilon)$相关，使得对所有 $j = 0, 1, \ldots, m-1$，$v_{k+j}(\epsilon) \xrightarrow{E} u_{k+j}(0)$。

有关谱收敛的更多细节，请参阅 [17, 定理 2.5], [30, 定理 6.3], [18, 定理 1], 另请参阅 [1,定理 4.10], [4, 定理 5.1] 和 [12, 定理 3.3] 。

本文将定理 2.5 应用于与给定问题相关的预解算子。在此之前，我们认为有必要在所考虑的方程中加入一个惩罚项。具体而言，我们设定 $\lambda_\epsilon := \lambda_\epsilon + \epsilon$ 并考虑如下问题

$$
\begin{cases}
\Delta^2 u_\epsilon = 0, & \text{in } \Omega_\epsilon, \\
(1-\sigma)\,(u_\epsilon)_{\nu_\epsilon\nu_\epsilon} + \sigma\Delta u_\epsilon = -\mu (u_\epsilon)_{\nu_\epsilon}, & \text{on } \Gamma_\epsilon, \\
-(1-\sigma)\,\mathrm{div}_{\Gamma_\epsilon}\left(D^2 u_\epsilon \cdot \nu_\epsilon\right)_{\Gamma_\epsilon} - \left(\Delta u_\epsilon\right)_{\nu_\epsilon} + \epsilon u_\epsilon = \overline{\lambda}_\epsilon u_\epsilon, & \text{on } \Gamma_\epsilon, \\
u_\epsilon = (u_\epsilon)_{\nu_\epsilon} = 0, & \text{on } L_\epsilon.
\end{cases} \tag{2.2}
$$

注意，问题 (2.2) 的变分表述可由 (1.6) 立即推出，并可表示为

$$
Q_{\sigma,\mu,\Omega_\epsilon}(u_\epsilon, \varphi) + \epsilon (u_\epsilon, \varphi)_{L^2(\Gamma_\epsilon)} = \overline{\lambda}_\epsilon (u_\epsilon, \varphi)_{L^2(\Gamma_\epsilon)}, \text{ for all } \varphi \in H^2_{L_\epsilon}(\Omega_\epsilon). \tag{2.3}
$$

显然，研究 λ_ϵ 的渐近行为等价于研究当 $\epsilon \to 0$ 时 λ_ϵ 的行为。为此，我们计划将定理 2.5 应用于与问题 (2.2) 相关的预解算子。具体而言，我们考虑以下以 $f_\epsilon \in L^2(\Gamma_\epsilon)$ 为数据的问题

$$
\begin{cases}
\Delta^2 u_\epsilon = 0, & \text{in } \Omega_\epsilon, \\
(1-\sigma)\,(u_\epsilon)_{\nu_\epsilon\nu_\epsilon} + \sigma\Delta u_\epsilon = -\mu (u_\epsilon)_{\nu_\epsilon}, & \text{on } \Gamma_\epsilon, \\
-(1-\sigma)\,\mathrm{div}_{\Gamma_\epsilon}\left(D^2 u_\epsilon \cdot \nu_\epsilon\right)_{\Gamma_\epsilon} - \left(\Delta u_\epsilon\right)_{\nu_\epsilon} + \epsilon u_\epsilon = f_\epsilon, & \text{on } \Gamma_\epsilon. \\
u_\epsilon = (u_\epsilon)_{\nu_\epsilon} = 0, & \text{on } L_\epsilon,
\end{cases} \tag{2.4}
$$

并研究解 u_ϵ 随 f_ϵ 变化时的行为。

注意，该问题的弱形式为

$$Q_{\sigma,\mu,\Omega_\epsilon}(u_\epsilon,\phi)+\epsilon(u_\epsilon,\phi)_{L^2(\Gamma_\epsilon)}=(f_\epsilon,\phi)_{L^2(\Gamma_\epsilon)},\ \text{for all}\ \phi\in H^2_{L_\epsilon}(\Omega_\epsilon). \tag{2.5}$$

相应的一维极限问题，其数据为 $f\in L^2(-l,\ l)$，结果为

$$\begin{cases}(1-\sigma^2\mathcal{N})\frac{d^2}{dx_1^2}\left(\rho^{n-1}\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)+(n-1)\rho^{n-2}V=(n-1)\rho^{n-2}f, & \text{in}\ (-l,l),\\ V(-l)=\frac{dV}{dx_1}(-l)=0,\\ V(l)=\frac{dV}{dx_1}(l)=0,\end{cases} \tag{2.6}$$

见引理 3.1。

最后，我们讨论所考察二次型在 $H^2(\Omega)$中的强制性。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个 $C^{0,\ 1}$ 类有界区域。Sobolev 空间 $H^2(\Omega)$ 自然赋予范数 $\left(\|D^2u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$。注意，在 [14] 中已证明二次型 $Q_{\sigma,\Omega}$ 在 $H^2(\Omega)$ 中具有强制性，而且，$\left(Q_{\sigma,\Omega}(u,\ u)+\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $H^2(\Omega)$ 中的标准范数等价。更确切地说，若 $-1/(n-1)<\sigma<1$，则存在正常数 $c(n,\ \sigma)$，它仅依赖于 n 和 σ，使得

$$Q_{\sigma,\Omega}(u,u)\geq c(n,\sigma)\int_\Omega|D^2u|^2dx, \tag{2.7}$$

对所有 $u\in H^2(\Omega)$。在 [22] 中指出，$\left(\|D^2u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$ 等价于 $H^2(\Omega)$ 的标准范数。因此，由 (2.7) 可推出，$\left(Q_{\sigma,\Omega}(u,u)+\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$ 也等价于 $H^2(\Omega)$ 的标准范数。

3. Proof of Theorem 1.1

本节中，我们证明定理 1.1。

3.1. 求出极限问题。 我们按照 [8] 中的方法，将问题 (2.4) 的弱形式 (2.5) 写为

$$\begin{aligned}&(1-\sigma)\int_{\Omega_\epsilon}\left(\frac{\partial^2u_\epsilon}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+2\sum_{i=2}^n\frac{\partial^2u_\epsilon}{\partial x_1\partial x_i}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_i}+\sum_{i,j=2}^n\frac{\partial^2u_\epsilon}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)dx\\&+\sigma\int_{\Omega_\epsilon}\left(\frac{\partial^2u_\epsilon}{\partial x_1^2}+\sum_{i=2}^n\frac{\partial^2u_\epsilon}{\partial x_i^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\sum_{i=2}^n\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}\right)dx\\&+\mu\int_{\Gamma_\epsilon}\left(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_1}\tilde{\nu}_{\epsilon,1}+\sum_{i=2}^n\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}\tilde{\nu}_{\epsilon,i}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\tilde{\nu}_{\epsilon,1}+\sum_{i=2}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\tilde{\nu}_{\epsilon,i}\right)d\mathcal{H}^{n-1}\\&+\epsilon\int_{\Gamma_\epsilon}u_\epsilon\phi d\mathcal{H}^{n-1}=\int_{\Gamma_\epsilon}f_\epsilon\phi d\mathcal{H}^{n-1},\ \text{for all}\ \phi\in H^2_{L_\epsilon}(\Omega_\epsilon).\end{aligned} \tag{3.1}$$

注意， Γ_ϵ 中的点可表示如下

$$(x_1, \epsilon\rho(x_1)x'(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta))$$

其中

$$x'(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta) = (x_2(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta), \dots, x_n(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta)$$

可利用 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中 $n-2$维单位球面的球坐标表示为

$$\begin{cases} x_2(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta) = \cos\varphi_1 \\ x_3(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ x_4(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta) = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta) = \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-3} \cos\theta \\ x_n(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta) = \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-3} \sin\theta \end{cases}$$

对所有（φ_1，…，φ_{n-3}，θ）$\in [0,\pi)^{n-3} \times [0, 2\pi)$。此外，可以验证，$\Gamma_\epsilon$ 上的曲面测度可用这些坐标表示为

$$d\mathcal{H}^{n-1} = \epsilon^{n-2}\rho^{n-2}\sqrt{1+\epsilon^2\rho'^2}dx_1 dS(\varphi_1, ..., \varphi_{n-3}, \theta)$$

其中

$$dS(\varphi_1, ..., \varphi_{n-3}, \theta) = \sin\varphi_1^{n-3} \sin\varphi_2^{n-4} \cdots \sin\varphi_{n-3} d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-3} d\theta$$

是 $\mathbb{R}^{n-1}$中 $n-2$维单位球面的曲面测度。

应当注意，对于 $n=3$，仅涉及参数 θ；而对于 $n=2$，Γ_ϵ 上的点表示为 $(x_1, \pm\epsilon\rho(x_1))$，因此我们只需

$$d\mathcal{H}^1 = \sqrt{1+\epsilon^2\rho'^2}dx_1,$$

$n-2$维测度即为计数测度。例如，参见 [19,第 2]章习题 65。

此外，$\tilde{\nu}_\epsilon = (\tilde{\nu}_{\epsilon,1}, \dots, \tilde{\nu}_{\epsilon,n})$ 表示边界 Γ_ϵ 的单位外法向量。注意，

$$\tilde{\nu}_\epsilon = \frac{-\epsilon\rho'\mathbf{e}_1 + \tilde{\nu}}{\sqrt{1+\epsilon^2\rho'^2}},$$

其中 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$，$\tilde{\nu}$ 是 $(n-1)$ 维球的边界的单位外法向量

$$B_\epsilon := B^{n-1}_{\epsilon\rho(x_1)}(x_1)$$

cent以 $(x_1, 0, \dots 0)$ 为中心，半径为 $\epsilon\rho(x_1)$。重要的是，$\tilde{\nu}$与 ϵ 无关 .

对于所有 $(x_1, x') \in \Omega_1$，我们在 (3.1) 中定义 $v_\epsilon(x_1, x') = \epsilon^{\frac{n-2}{2}} u_\epsilon(x_1, \epsilon x')$、$g_\epsilon(x_1, x') = \epsilon^{\frac{n-2}{2}} f_\epsilon(x_1, \epsilon x')$ 和 $\psi(x_1, x') = \epsilon^{\frac{n-2}{2}} \phi(x_1, \epsilon x')$。然后，对于函数 v_ϵ，我们推导出问题

$$
\begin{aligned}
&(1-\sigma)\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}+\frac{2}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1\partial x_i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1\partial x_i}+\frac{1}{\epsilon^4}\sum_{i,j=2}^{n}\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i\partial x_j}\right)dx\\
&\quad+\sigma\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_i^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}\right)dx\\
&\quad+\frac{\mu}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}\left(-\epsilon\rho'\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_1}+\frac{1}{\epsilon}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}\tilde{\nu}_i\right)\left(-\epsilon\rho'\frac{\partial \psi}{\partial x_1}+\frac{1}{\epsilon}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\tilde{\nu}_i\right)\frac{d\mathcal{H}_1}{1+\epsilon^2\rho'^2}\\
&\quad+\int_{\Gamma_1} v_\epsilon\psi d\mathcal{H}_1=\frac{1}{\epsilon}\int_{\Gamma_1} g_\epsilon\psi d\mathcal{H}_1,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

其中我们设

$$
d\mathcal{H}_1 := \rho^{n-2}\sqrt{1+\epsilon^2\rho'^2}dx_1 dS(\varphi_1, ..., \varphi_{n-3}, \theta). \tag{3.3}
$$

顺便指出，由 (2.7) 并通过对积分作变量替换，可得

$$
\begin{aligned}
&(1-\sigma)\int_{\Omega_1}\left(\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1^2}\right|^2+\frac{2}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1\partial x_i}\right|^2+\frac{1}{\epsilon^4}\sum_{i,j=2}^{n}\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2\right)dx\\
&\quad+\sigma\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_i^2}\right|^2 dx\\
&\quad\geq c(n,\sigma)\int_{\Omega_1}\left(\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1^2}\right|^2+\frac{2}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1\partial x_i}\right|^2+\frac{1}{\epsilon^4}\sum_{i,j=2}^{n}\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2\right)dx.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

于是我们可以证明以下引理。请注意，在本证明及本文其余部分中，我们用 C 表示一个与 ϵ 无关的正数，该数可能随行而变化。

引理 3.1。假设

$$
\sup_{\epsilon>0}\|\epsilon^{-1}g_\epsilon\|_{L^2(\Gamma_1)} \neq \infty, \tag{3.5}
$$

and

$$
\epsilon^{-1}g_\epsilon \rightharpoonup g \ in\ L^2(\Gamma_1), \tag{3.6}
$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，问题 (3.2) 的解 v_ϵ 收敛到问题的解

$$
\begin{cases}
(1-\sigma^2\mathcal{N})\frac{d^2}{dx_1^2}\left(\rho^{n-1}\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)+(n-1)\rho^{n-2}V=(n-1)\rho^{n-2}\mathcal{M}(g), \quad \text{in } (-l,l),\\
V(-l)=\frac{dV}{dx}(-l)=0,\\
V(l)=\frac{dV}{dx}(l)=0,
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，其意义为： $v_\epsilon \rightharpoonup V$ 在 $H^2(\Omega_1)$ 中弱收敛，且 $(v_\epsilon)_\nu \to V_\nu$ 在$L^2(\Gamma_1)$中强收敛。这里

$$(\mathcal{M}(g))(x_1) := \fint_{\partial B_1} g(x_1,\cdot)d\mathcal{H}^{n-2} = \frac{1}{(n-1)w_{n-1}\rho^{n-2}} \int_{\partial B_1} g(x_1,\cdot)d\mathcal{H}^{n-2},$$

其中，对于 $n=2$，约定

$$(\mathcal{M}(g))(x_1) = \frac{1}{2}\left(g(x_1,\rho(x_1)) + g(x_1,-\rho(x_1))\right).$$

特别地，如果 g 仅依赖于 x_1 变量，那么 (3.7) 中的方程为

$$\left(1-\sigma^2\mathcal{N}\right)\frac{d^2}{dx_1^2}\left(\rho^{n-1}\frac{d^2V}{dx_1^2}\right) + (n-1)\rho^{n-2}V = (n-1)\rho^{n-2}g.$$

证明。 首先，令 $\psi = v_\epsilon$，由 (3.2) 得到

$$\begin{aligned}
&(1-\sigma)\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1^2}\right|^2 + \frac{2}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^n\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1\partial x_i}\right|^2 + \frac{1}{\epsilon^4}\sum_{i,j=2}^n\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2 dx\\
&\quad + \sigma\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^n\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_i^2}\right|^2 dx\\
&\quad + \frac{\mu}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}\left|-\epsilon\rho'\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=2}^n\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}\tilde{\nu}_i\right|^2\frac{d\mathcal{H}_1}{1+\epsilon^2\rho'^2}\\
&\quad + \int_{\Gamma_1} v_\epsilon^2 d\mathcal{H}_1 = \frac{1}{\epsilon}\int_{\Gamma_1} g_\epsilon v_\epsilon d\mathcal{H}_1.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

现在估计 (3.8) 右端的项。具体而言，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon}\int_{\Gamma_1} g_\epsilon v_\epsilon d\mathcal{H}_1 &\le \frac{1}{2\epsilon^2}\int_{\Gamma_1} g_\epsilon^2 d\mathcal{H}_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} v_\epsilon^2 d\mathcal{H}_1\\
&\le \frac{C}{\epsilon^2}\int_{\Gamma_1} g_\epsilon^2 d\mathcal{H}^{n-1} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} v_\epsilon^2 d\mathcal{H}_1.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

由于对于来自 $H^2_{L_1}(\Omega_1)$ 的函数，$\left(Q_{\sigma,\Omega_1}(u,u) + \|u\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$ 等价于 $H^2(\Omega_1)$ 的标准范数，结合 (3.5)、(3.8) 和 (3.9)，可推出 $\|v_\epsilon\|_{H^2(\Omega_1)} \le C$ 对所有 $\epsilon > 0$ 都成立，另见 (3.4)；因此，由迹算子的紧性，存在 $V \in H^2_{L_1}(\Omega_1)$，使得取一个子列后， $v_\epsilon \rightharpoonup V$ 在 $H^2(\Omega_1)$ 中弱收敛，并且 $\nabla v_\epsilon \to \nabla V$ 在 $L^2(\Gamma_1)$ 中强收敛。现在证明 V 满足陈述中的条件。

注意到，(3.5)、(3.8) 和 (3.9) 表明存在 $\tilde{v}_i$ 和 $v_{i,\ j}$ 属于 $L^2(\Omega_1)$，使得

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_1\partial x_i} \rightharpoonup \tilde{v}_i \text{ in } L^2(\Omega_1), \text{ for all } i = 2,..,n \tag{3.10}$$

and

$$\frac{1}{\epsilon^2}\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_i\partial x_j} \rightharpoonup \overline{v}_{i,j} \text{ in } L^2(\Omega_1), \text{ for all } i,j = 2,..,n. \tag{3.11}$$

特别地，令 $v=\sum_{i=2}^{n} v_{i,\ i}$ 可得 $\quad -$

$$\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x_i^2} \rightharpoonup v \text{ in } L^2(\Omega_1). \tag{3.12}$$

T收敛关系 (3.10)-(3.12) 表明，极限函数 V 具有如下形式

$$V(x_1,x') = a_1(x_1) + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \tag{3.13}$$

其中 $a_1 \in H^2(-l,\ l)$ 和 $a_2,\ \ldots\ldots a_n \in \mathbb{R}$。

我们将加权 L^2-空间记为$L^2_{\epsilon,\ \rho}(\Gamma_1)$

$$L^2\left(\Gamma_1; \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{\sqrt{1+\epsilon^2\rho'^2}\sqrt{1+\rho'^2}}\right),$$

并注意到

$$\frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{\sqrt{1+\epsilon^2\rho'^2}\sqrt{1+\rho'^2}} = \frac{d\mathcal{H}_1}{1+\epsilon^2\rho'^2}.$$

于是，由 (3.8) 可得

$$\frac{\mu}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}\left|-\epsilon\rho'\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}\tilde{\nu}_i\right|^2 \frac{d\mathcal{H}_1}{1+\epsilon^2\rho'^2} \le C,$$

因此

$$\left\|\frac{1}{\epsilon}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}\tilde{\nu}_i - \epsilon\rho'\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_1}\right\|_{L^2_{\epsilon,\rho}(\Gamma_1)} \le C\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

这意味着

(3.14)

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\epsilon}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}\tilde{\nu}_i\right\|_{L^2_{\epsilon,\rho}(\Gamma_1)} &\le C\epsilon^{\frac{1}{2}} + \left\|\epsilon\rho'\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_1}\right\|_{L^2_{\epsilon,\rho}(\Gamma_1)} \le C\epsilon^{\frac{1}{2}} + C\epsilon\left\|\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_1}\right)\right\|_{L^2(\Gamma_1)}\\ &\le C\epsilon^{\frac{1}{2}} + C\epsilon\|v_\epsilon\|_{H^2(\Omega_1)} \to 0,\end{aligned}$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，其中我们利用了 $\|v_\epsilon\|_{H^2(\Omega_1)}$ 的有界性、 ρ' 与 $(\sqrt{1+\epsilon^2\rho'^2})^{-1}$ 的有界性，以及经典的迹定理。

因此，(3.14) 与 $\nabla v_\epsilon \to \nabla V$ 在 $L^2(\Gamma_1)$ 中的强收敛相结合，意味着

$$\left\|\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\tilde{\nu}_i\right\|_{L^2(\Gamma_1)} = 0.$$

最后一个等式与 (3.13) 相结合，给出 $a_2\tilde{\nu}_2 + \cdots + a_n\tilde{\nu}_n = 0$ 在 Γ_1 上。由于 $\tilde{\nu}$ 是 $(n-1)$ 维球 $B^{n-1}_{\rho\ x_1\ ()}(x_1)$ 的单位外法向量，且最后一个等式对 $\tilde{\nu}$ 的所有取值都成立，我们得到 $a_2 \equiv \cdots \equiv a_n \equiv 0$ 以及 $V(x_1,x') = a_1(x_1)$，对所有 $(x_1,x') \in \Omega_1$ 成立。这意味着 V 与变量 x' 无关。

接下来，我们确定（3.12）中的函数 v。为此，我们在（3.2）中选取一个特定的测试函数ψ。考虑

$$\psi(x_1,x') = \theta(x_1)\sum_{i=2}^{n}x_i^2,$$

其中 $\theta \in C_c^\infty(-l,\ l)$。将其代入（3.2），并将（3.2）乘以 ϵ^2，令 $\epsilon \to 0$ 趋于极限，利用（3.10）–（3.12）和（3.14），可得

$$(1-\sigma)\int_{\Omega_1} v\theta dx + (n-1)\sigma \int_{\Omega_1}\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}+v\right)\theta dx = 0.$$

因此，

$$\int_{\Omega_1}\left(v+\sigma\mathcal{N}\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)\theta dx = 0.$$

由于最后一个等式对所有 $\theta \in C_c^\infty(-l,l)$ 都成立，根据 Fubini-Tonelli定理，我们可得

$$\int_{B_1}\left(v+\sigma\mathcal{N}\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)dx' = 0,$$

或者等价地

$$\int_{B_1} v dx' = -w_{n-1}\rho^{n-1}\sigma\mathcal{N}\frac{d^2V}{dx_1^2}. \tag{3.15}$$

最后，回到问题 (3.2)，选取测试函数 $\psi \in H_0^2(-l,l)$（仅依赖于变量 x_1），利用 Fubini-Tonelli定理以及 (3.10)、(3.12)、(3.14) 和 (3.15)，令 $\epsilon \to 0$ 趋于极限，我们得到

$$\left(1-\sigma^2\mathcal{N}\right)\int_{-l}^{l}\rho^{n-1}\frac{d^2V}{dx_1^2}\frac{d^2\psi}{dx_1^2}dx_1 + (n-1)\int_{-l}^{l}\rho^{n-2}V\psi dx_1 = (n-1)\int_{-l}^{l}\rho^{n-2}\mathcal{M}(g)\psi dx_1. \tag{3.16}$$

由于等式 (3.16) 对所有 $\psi \in H_0^2(-l,l)$ 都成立，因此它表示边值问题 (3.7) 的弱形式。

□

3.2. 谱收敛结果。 在本小节中，我们证明问题(1.5)的特征值与特征函数向一维问题(1.7)的相应特征值与特征函数的谱收敛。

首先，我们引入希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_\epsilon = L^2(\Gamma_\epsilon;\epsilon^{-2}d\mathcal{H}^{n-1}),\ \text{and}\ \mathcal{H}_0 = L^2_{n,\rho}(-l,l).$$

回顾$L^2_{n,\rho}(-l,l) = L^2((-l,l);(n-1)w_{n-1}\rho^{n-2}dx_1)$。我们定义算子

$$\mathcal{E}_\epsilon :\ \mathcal{H}_0 \to L^2(\Gamma_\epsilon;\epsilon^{-2}d\mathcal{H}^{n-1}),$$

通过设定

$$\mathcal{E}_\epsilon u = \epsilon^{2-\frac{n}{2}}u,\ \text{for all}\ u \in \mathcal{H}_0.$$

容易看出 $\mathcal{E}_\epsilon$ 满足条件(2.1)。

现在我们按第2节的要求定义算子 B_ϵ 与 B_0 。算子 B_ϵ将是与问题(2.5)相关联、并按 ϵ重新缩放的预解算子。具体而言，我们考虑算子

$$B_\epsilon :\ L^2(\Gamma_\epsilon;\epsilon^{-2}d\mathcal{H}^{n-1}) \to L^2(\Gamma_\epsilon;\epsilon^{-2}d\mathcal{H}^{n-1}),$$

定义为

$$B_\epsilon f_\epsilon = \epsilon u_\epsilon,\ \text{for all}\ f_\epsilon \in L^2(\Gamma_\epsilon;\epsilon^{-2}d\mathcal{H}^{n-1}),$$

其中 u_ϵ 是问题 (2.5) 的解。注意，实数 $\lambda(B_\epsilon) \neq 0$ 是 B_ϵ 的特征值，当且仅当 $\lambda_\epsilon = {}^{\epsilon}{}_{(1-\lambda(B_\epsilon))\ \lambda(B_\epsilon)}$ 是问题 (1.5) 的特征值，且对应同一个特征函数。等价地，$\lambda(B_\epsilon) \neq 0$ 是 B_ϵ 的特征值，当且仅当 $\lambda_\epsilon = {}_{\lambda}{}^{\epsilon}{}_{(B_\epsilon)}$ 是问题 (2.3) 的特征值。由于迹算子是紧的，B_ϵ是紧算子。

算子 B_0 是与问题 (2.6) 相关的预解算子。也就是说，

$$B_0 :\ \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0,$$

使得

$$B_0 f = V,\ \ \text{for all } f \in \mathcal{H}_0,$$

其中，V是问题 (2.6) 的一个解。注意，实数 $\lambda(B_0) \neq 0$ 是 B_0 的一个特征值，当且仅当 $\lambda = {}^{1-\lambda}{}_{(B_0)\ \lambda\ (B_0)}$ 是问题 (1.7) 的一个特征值，且具有相同的特征函数。算子 B_0 是紧的，因为

$$B_0\left(\mathcal{H}_0\right) \subset H^2\left(-l, l\right)$$

并且嵌入

$$H^2\left(-l, l\right) \hookrightarrow \mathcal{H}_0$$

是紧的。

引理 3.2. 以下紧收敛成立：

$$B_\epsilon \xrightarrow{C} B_0 \ \ as\ \epsilon \to 0,$$

其意义见定义 *2.4*。

证明. 设 $f_\epsilon \in L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})$ 满足

$$\|f_\epsilon\|_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} = 1. \tag{3.17}$$

设 $g_\epsilon \in L^2(\Gamma_1)$ 定义为：对所有 $(x_1, x') \in \Gamma_1$，有 $g_\epsilon(x_1, x') = \epsilon^{\frac{n-2}{2}} f_\epsilon(x_1, \epsilon x')$。于是由条件 (3.17) 可得

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Gamma_1} g_\epsilon^2 d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{C}{\epsilon^2} \int_{\Gamma_1} g_\epsilon^2 d\mathcal{H}_1 = C \|f_\epsilon\|^2_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} = C.$$

因此，假设 (3.5) 成立，并且经过适当选取子列后，条件 (3.6) 也对某个 $g \in L^2(\Gamma_1)$ 成立。于是由引理 3.1 可知，存在与变量 x' 无关的 $V \in H^2(\Omega_1)$，使得经过选取子列后，$v_\epsilon \rightharpoonup V$在 $H^2(\Omega_1)$ 中收敛，且 V 是问题 (3.7) 的解。回顾 $B_\epsilon f_\epsilon = \epsilon u_\epsilon$，其中 u_ϵ 是问题 (2.5) 的解。设对所有 $(x_1, x') \in \Omega_1$，有 $v_\epsilon(x_1, x') = \epsilon^{\frac{n-2}{2}} u_\epsilon(x_1, \epsilon x')$。回顾 (3.3)，可得

$$\|B_\epsilon f_\epsilon\|^2_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1}))} = \|\epsilon u_\epsilon\|^2_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1}))} = \int_{\Gamma_1} v_\epsilon^2 d\mathcal{H}_1,$$

$$< \epsilon u_\epsilon, \mathcal{E}_\epsilon V >_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} = \int_{\Gamma_1} v_\epsilon V d\mathcal{H}_1,$$

并利用算子 $\mathcal{E}_\epsilon$ 的定义以及迹映射的紧性，我们得到

$$\begin{aligned} \|\epsilon u_\epsilon - \mathcal{E}_\epsilon V\|^2_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} &= \|\epsilon u_\epsilon\|^2_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} \\ &\quad - 2 < \epsilon u_\epsilon, \mathcal{E}_\epsilon V >_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} + \|\mathcal{E}_\epsilon V\|^2_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} \to 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

当 $\epsilon \to 0$ 时。

设 $f_\epsilon \in L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})$ 和 $f \in L^2_{n,\rho}(-l, l)$ 满足

$$\|f_\epsilon - \mathcal{E}_\epsilon f\|_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} \to 0 \text{ as } \epsilon \to 0. \tag{3.19}$$

令 $g \in L^2(\Gamma_1)$ 由 $g = \mathcal{E}_1 f$ 定义，并令 $g_\epsilon \in L^2(\Gamma_1)$ 由 $g_\epsilon(x_1, x') = \epsilon^{\frac{n-2}{2}} f_\epsilon(x_1, \epsilon x')$ 定义，对所有 $(x_1, x') \in \Gamma_1$ 均成立。然后，利用

$$\begin{aligned} g((x_1, \rho(x_1)x'(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta))) &= f(x_1) \\ &= \epsilon^{\frac{n-2}{2}} \epsilon^{-1} (\mathcal{E}_\epsilon f)((x_1, \epsilon\rho(x_1)x'(\varphi_1, \dots \varphi_{n-3}, \theta))), \end{aligned}$$

和 (3.19)，我们得到

$$\|\epsilon^{-1} g_\epsilon - g\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \le C \int_{\Gamma_1} \left(\epsilon^{-1} g_\epsilon - g\right)^2 d\mathcal{H}_1 = \frac{C}{\epsilon^2} \int_{\Gamma_\epsilon} \left(f_\epsilon - \mathcal{E}_\epsilon f\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \to 0$$

因为 $\epsilon \to 0$。于是，假设 (3.5) 和 (3.6) 成立，可以应用引理 3.1。因此，我们得出存在 $V \in H^2(\Omega_1)$，使得在取一个子列后，$v_\epsilon \rightharpoonup V$ 在 $H^2(\Omega_1)$ 中，且 V 是问题 (3.7) 的解。此外，通过与 (3.18) 中相同的计算，我们得出

$$\|\epsilon u_\epsilon - \mathcal{E}_\epsilon V\|_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} \to 0,$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，从而完成引理 3.2 的证明。 □

定理 1.1 的证明。由引理 3.2 和定理 2.5 可知，随着 $\epsilon \to 0$， B_ϵ 到 B_0 谱收敛。特别地，对于每个 $k \in \mathbb{N}$， $\lambda_k(B_\epsilon) \to \lambda_k(B_0)$，当 $\epsilon \to 0$ 时。因此，

$$\frac{\lambda_{\epsilon,k}}{\epsilon} = \frac{1 - \lambda_k(B_\epsilon)}{\lambda_k(B_\epsilon)} \sim \frac{1 - \lambda_k(B_0)}{\lambda_k(B_0)} = \lambda_k \tag{3.20}$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，其中 $\lambda_{\epsilon,\, k}$ 是问题 (1.5) 的第 k 个特征值，而 λ_k 是问题 (1.7) 的第 k 个特征值。剩下的任务是证明定理 1.1 的第二部分。

我们首先注意到，若特征函数 $u_{\epsilon,\, k}$ 在 $L^2(\Gamma_\epsilon)$ 中归一化，则 $\tilde{u}_{\epsilon,\, k} := \epsilon u_{\epsilon,\, k}$ 在 $L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})$ 中归一化。因此，由定理 2.5 可知，存在 (1.7) 的特征函数标准正交基 v_k, $k \in \mathbb{N}$ ，其位于 $L^2_{n,\, \rho}(-l,\ l)$ 中，并且在必要时取一个子列，

$$\|\tilde{u}_{\epsilon,k} - \mathcal{E}_\epsilon v_k\|_{L^2(\Gamma_\epsilon; \epsilon^{-2} d\mathcal{H}^{n-1})} \to 0 \text{ as } \epsilon \to 0. \tag{3.21}$$

为了证明在 Ω_1, 中的收敛性，我们采用与之前相同的论证。对于所有 $(x_1, x') \in \Omega_1$, ，我们在 (1.6) 中令 $v_{\epsilon,k}(x_1, x') = \epsilon^{\frac{n-2}{2}} u_{\epsilon,k}(x_1, \epsilon x')$，且 $\psi(x_1, x') = \epsilon^{\frac{n-2}{2}} \varphi(x_1, \epsilon x')$。然后，对于

函数 $v_{\epsilon,k}$，我们得到问题 (3.22
)

$$
\begin{aligned}
&(1-\sigma)\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial^2 v_{\epsilon,k}}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{2}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 v_{\epsilon,k}}{\partial x_1\partial x_i}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_i}+\frac{1}{\epsilon^4}\sum_{i,j=2}^{n}\frac{\partial^2 v_{\epsilon,k}}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}\right)dx\\
&\quad+\sigma\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial^2 v_{\epsilon,k}}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 v_{\epsilon,k}}{\partial x_i^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}\right)dx\\
&\quad+\frac{\mu}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}\left(-\epsilon\rho'\frac{\partial v_{\epsilon,k}}{\partial x_1}+\frac{1}{\epsilon}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial v_{\epsilon,k}}{\partial x_i}\tilde{\nu}_i\right)\left(-\epsilon\rho'\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\frac{1}{\epsilon}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\tilde{\nu}_i\right)\frac{d\mathcal{H}_1}{1+\epsilon^2\rho'^2}\\
&=\frac{\lambda_{\epsilon,k}}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}v_{\epsilon,k}\psi d\mathcal{H}_1,
\end{aligned}
$$

另见 (3.2)。若在 (3.22) 中令 $\psi(x_1,x')=v_{\epsilon,k}(x_1,x')$ 对所有 $(x_1,x')\in\Omega_1$, 成立，那么考虑到 (3.20) 和归一化条件 $\|u_{\epsilon,k}\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)}=1$，我们很容易得到，对于所有 $\epsilon>0$, $\|v_{\epsilon,k}\|_{H^2(\Omega_1)}\le C$；因此，取一个子列后，$v_{\epsilon,k}\rightharpoonup V_k$ 在 $H^2(\Omega_1)$ 中弱收敛，且 $v_{\epsilon,k}\to V_k$, $(v_{\epsilon,k})_\nu\to(V_k)_\nu$ 在 $L^2(\Gamma_1)$ 中强收敛。与引理 3.1 中一样，函数 V_k 与变量 x'无关。

在方程 (3.22) 中，选取测试函数 $\psi\in H_0^2(-l,\ l)$ 并考虑 (3.20)，按照引理 3.1 中相同的步骤，在 $\epsilon\to0$ 时取极限，我们得到

$$
\left(1-\sigma^2\mathcal{N}\right)\int_{-l}^{l}\rho^{n-1}\frac{d^2V_k}{dx_1^2}\frac{d^2\psi}{dx_1^2}dx_1=\lambda_k(n-1)\int_{-l}^{l}\rho^{n-2}V_k\psi dx_1. \tag{3.23}
$$

由于等式 (3.23) 对所有 $\psi\in H_0^2(-l,l)$ 都成立，因此它表示问题 (1.7) 的弱形式，且 V_k 是 (1.7) 的一个特征函数。

将 (3.21) 改写为关于$u_{\epsilon,k}$的形式，可以很容易地推出，可能需要取一个子列，$v_{\epsilon,k}\to v_k$ 在 $L^2(\Gamma_1)$ 中当 $\epsilon\to0$ 时成立，因此 $V_k=v_k$，证明完毕。

Acknowledgments

本研究由哈萨克斯坦共和国科学和高等教育部科学委员会资助（项目编号: AP26194963）。

第二位署名作者是意大利国家高等数学研究所（INdAM）数学分析、概率论及其应用国家研究组（GNAMPA）的成员，并感谢“椭圆型微分方程的扰动问题与渐近分析：变分方法与位势论方法”项目提供的支持。该项目由欧盟下一代计划和大学与研究部（MUR）国家重大科研项目（PRIN）2022年度公告资助，项目编号为 2022SENJZ3。

References

[1] Arrieta, J.M., Carvalho, A.N., Losada-Cruz, G.: 哑铃形区域中的动力学 I：平衡集的连续性。《微分方程杂志》**231**，551–597（2006）

[2] Arrieta, J.M., Ferraresso, F., Lamberti, P.D.: 哑铃形区域上满足 Neumann 边界条件的双调和算子的谱分析。Integr. Equ. Oper. Theory 89，377–408（2017）[3] Arrieta, J.M., Lamberti, P.D, 变区域上的高阶椭圆算子：中间问题的稳定性结果与边界振荡，《微分方程杂志》263，4222–4266（2017）[4] Arrieta, J.M., L´opez-Fern´andez, M., Zuazua, E.: 用非局部方程的平衡解逼近行波。Asymptot. Anal. 78(3)，145–186（2012）[5] Arrieta, J.M., Nakasato, J.M., Pereira, M.C.: 薄区域中的 p-拉普拉斯方程：展开方法。《微分方程杂志》274，1–34（2021）[6] Arrieta, J.M., Villanueva-Pesqueira, M.: 具有双重弱振荡边界的薄区域中的椭圆与抛物问题。Commun. Pure Appl. Anal. 19(4)，1891–1914（2020）[7] Borisov, D., Freitas, P.: $\mathbb{R}^d$中薄区域上拉普拉斯算子的狄利克雷特征值与特征函数的渐近性质。J. Funct. Anal. 258(3)，893–912（2010）[8] Bucur, D., Henrot A., Michetti, M.: 哑铃形区域上斯特克洛夫谱的渐近行为。Commun. Partial Differ. Equ. 46(2)，362–393（2021）[9] Buoso, D.: 双调和算子特征值的解析性与临界性结果，载于《抛物与椭圆偏微分方程的几何性质》，Springer Proc. Math. Stat.，176，65–85，Springer，2016。[10] Buoso, D., Kennedy, J.B.: 带罗宾边界条件的双拉普拉斯算子。SIAM J. Math. Anal. 54(1)，36–78（2022）[11] Buoso, D., Provenzano, L.: 双调和 Steklov 问题的若干形状优化结果。《微分方程杂志》259(5)，1778–1818（2015）[12] Carvalho, A., Piskarev, S.: 抽象抛物问题吸引子的一般逼近方案。Numer. Funct. Anal. Optim. 27(7–8)，785–829（2006）[13] Casado-Diaz, J., Luna-Laynez, M., Suarez-Grau, F.J.: 薄区域中流体压力的分解结果及其在弹性问题中的推广。SIAM J. Math. Anal. 52(3)，2201–2236（2020）[14] Chasman, L.M.: 非零泊松比自由板基频的等周不等式。Appl. Anal. 95(8)，1700–1735（2016）[15] Ferraresso, F., Lamberti P.D. and Stratis I.G., 关于电磁学中的一种斯特克洛夫谱，载于《当代电磁理论探索》，Mackay, Tom G. 和 Lakhtakia, Akhlesh 编，Springer, Cham，2023，195–228。[16] Ferraresso, F., Provenzano, L.: 薄集上满足 Neumann 边界条件的双调和算子的特征值。Bull. Lond. Math. Soc. 55(3)，1154–1177（2023）[17] Ferrero, A., Lamberti, P.D.: Steklov问题的谱稳定性。《非线性分析》222(2)，112989（2022）[18] Ferrero, A., Lamberti, P.D.: 一类四阶 Steklov 问题在区域扰动下的谱稳定性。Calc. Var. 58(33)，1–57（2019）[19] Folland, G.B.,《实分析》，Pure and Applied Mathematics（New York），《现代方法及其应用》，A Wiley-Interscience Publication，John Wiley & Sons, Inc.，New York，1984。[20] Gaudiello, A., Gomez, D., Perez-Martinez, M.-E.: 薄 T形结构中拉普拉斯算子高频的渐近分析。《纯粹与应用数学杂志》134(9)，299–327（2020）[21] Kuttler, J.R., Sigillito, V.G.: 利用后验/先验不等式估计特征值，数学研究札记第135卷。Pitman（Advanced Publishing Program），Boston, MA，（1985）[22] Lamberti, P.D., Provenzano, L.: 关于 Lipschitz 域上迹空间 $H^{\frac{3}{2}}$ 以及双参数 Steklov 问题所对应双调和狄利克雷问题解的显式表示。Rev. Math. Complut. 35，53–88（2022）

[23] Lamberti, P.D., Provenzano, L.：将拉普拉斯算子的 Steklov 特征值视为临界诺伊曼特征值，当前分析及其应用趋势，《数学趋势》，171–178，Birkh¨auser/Springer，Cham，2015年。[24] Liu, G.：黎曼流形上双调和斯特克洛夫特征值的魏尔型渐近公式。《Adv. Math.》**228(4)**，2162–2217（2011年）[25] Liu, G.：双调和斯特克洛夫特征值的渐近性质。《微分方程杂志》**261** 4729– 4757（2016年）[26] Nakasato, J.C., Pazanin, I., Pereira, M.C.：具有振荡边界和变化阶厚度的薄区域中的反应扩散问题。《Z. Angew. Math. Phys.》**72(1)**，文章编号：5，（2021年）[27] Nazarov, S.A., Perez, E., Taskinen, J.：薄非光滑区域中狄利克雷特征函数的局域化效应。《Trans. Amer. Math. Soc.》**368(7)** 4787–4829（2016年）[28] Pereira, M.C., Rossi, J.D., Saintier, N.：薄区域中的分数阶问题。《Nonlinear Anal.》**193**，文章编号：111471，（2020年）[29] Stummel, F.：椭圆边值问题中的区域扰动。《数学讲义》，Springer，柏林**503**，110–136（1976年）[30] Vainikko, G.M.：算子的正则收敛与方程的近似解。《Math. Anal.》**16**，5–53（1979年）

Bauyrzhan Derbissaly:
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
Department of Differential Equations,
Pushkin 125 - 050010 Almaty, Kazakhstan电子邮箱地址
derbissaly@math.kz

Pier Domenico Lamberti:Università degli Studi di Padova,
Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali,
Stradella S. Nicola 3 - 36100 Vicenza, Italy电子邮箱地址
lamberti@math.unipd.it