arXiv:2603.00019v1 [math.MG] 2 Feb 2026

# 瑟斯顿几何中平移型曲面上的德萨格六边形定理与帕普斯六边形定理 *

Jen˝o Szirmai，布达佩斯科技经济大学数学研究所代数与几何系，M¨uegyetem rkp. 3., H-1111 布达佩斯，匈牙利，sirmai@math.bme.hu

2026年3月3日

摘要

在 [35] 中，我们将著名的梅涅劳斯定理和塞瓦定理推广到了每一种非恒定曲率瑟斯顿几何中的平移三角形。本文基于所述方法和结果，证明经典的笛沙格六边形定理与帕普斯六边形定理不仅在常曲率经典几何中成立，在非恒定曲率瑟斯顿几何的平移曲面上也成立。我们的研究采用了瑟斯顿几何的统一射影模型。

## 1 引言

非欧几何在自然科学中的作用日益受到认可，尤其是在物理学领域。基于这些原因，三维极大

*2010年数学主题分类：53A20、53A35、52C35、53B20。关键词和短语：瑟斯顿几何、平移曲线、平移三角形、帕普斯定理和笛沙格定理。

黎曼几何（亦称瑟斯顿几何）已逐渐成为研究焦点。对常曲率空间的研究已十分广泛，但非恒定瑟斯顿几何内部结构的描绘仍有许多未解问题。其中最重要的领域之一或许是非欧晶体学，因为无法排除在某些极端条件下，材料会结晶成“不同的几何结构´´。

E. Moln´ar 在其文章 [10]中描述了瑟斯顿几何的统一射影模型，这极大地促进了对瑟斯顿几何结构的分析。下文将采用这一模型。

许多在欧几里得几何中已得到广泛研究的经典定理，都可以推广到具有非恒定曲率的瑟斯顿几何中。它们为 $S^2\times R$、$H^2\times R$、Nil、$SL_2R$ 和 Sol 空间带来了新的视角和应用。

研究瑟斯顿空间的内部结构时，值得区分两个截然不同的方向：与平移距离或测地距离相关的研究。

我们可以自然地引入（见 [10]）将任意一点映射到另一点的平移映射。考虑原点处的一个单位切向量。平移将该向量带到其他点处的一个切向量。如果曲线 $t \to (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 在每一点处的切向量恰好是平移所得的向量，那么这条曲线就称为平移曲线。这一假设导出一个一阶微分方程组。因此，平移曲线比测地线简单，并且在 Nil、$SL_2R$ 和 Sol 几何中与测地线不同。在 $E^3, S^3, H^3, S^2\times R$ 和 $H^2\times R$ 几何中，平移曲线与测地线重合。然而，在 Nil、$SL_2R$ 和 Sol 几何中，平移曲线在许多方面比测地线更自然。因此，我们区分两种不同的距离函数：$d^g$ 是通常的测地距离函数，$d^t$ 是平移距离函数。由这两种不同的距离函数，我们得到两类曲线、三角形、平分面（以及相应的两类狄利克雷-沃罗诺伊胞）等，但本文只讨论平移情形。

一个重要的研究方向是阿波罗尼奥斯曲面，其中平分面是其一种特殊情形。由于它们对于确定狄利克雷-沃罗诺伊胞具有根本重要性，因此备受关注。[31, 32] 中研究了 $S^2\times R$、$H^2\times R$ 和 Nil 几何中的类测地线阿波罗尼奥斯曲面，而在 [7]中研究了瑟斯顿几何中的类平移阿波罗尼奥斯曲面。此外，我们还在 [28]中研究了 Sol 和 Nil 几何中的类平移等距曲面，并在 [37]中研究了类测地线平分面

$S^2 \times R$ 和 $H^2 \times R$ 空间中的类测地线平分面。

我们在论文 [3, 6, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29,30, 33, 34] 中进一步研究了与非常曲率瑟斯顿几何相关的有趣问题。

下一个重要问题也与阿波罗尼奥斯曲面密切相关，即确定给定测地三角形或平移三角形的曲面。这是阐述与三角形相关的基本几何概念和定理的必要条件。

在文献 [31], [32] 中，我们提出了 $S^2 \times R$、$H^2 \times R$ 和 Nil 几何中类测地三角曲面的一种可能定义，该定义借助阿波罗尼奥斯曲面得出，并在常曲率几何中还原为传统的三角曲面。

注 1.1 然而，在非恒定曲率的瑟斯顿几何中，定义平移三角形或测地三角形的曲面并非易事。通常的测地三角形或类平移三角形曲面定义并不可行，因为从不同顶点出发、终止于相应对边上各点的测地线或平移曲线通常会定义不同的曲面；也就是说，从不同顶点出发并终止于相应对边上各点的测地线或平移曲线通常不会相交。

在论文 [7], 中，我们将这些问题拓展到了非恒定曲率瑟斯顿几何中的平移三角形。我们提出了类平移三角形曲面的一种新定义，并确定了其方程。下文中，我们将采用这些定义来描述瑟斯顿几何中的平移三角形曲面。

在众多经典结果中，梅涅劳斯定理对于理解三角形外部性质和共线条件尤为重要。虽然它在常曲率几何中的表述已十分成熟，但其在其他几何中的表现仍需仔细研究。在常曲率瑟斯顿几何中，这些定理早已广为人知；在 [31] 和 [32]中，我们将其推广到了 $S^2 \times R$、$H^2 \times R$ 和 Nil 空间。在 [35] 中，我们继续探讨这一问题，将梅涅劳斯定理和塞瓦定理推广到 Nil、$SL_2R$ 和 Sol 空间中的平移三角形，并给出了证明。

然而，对于塞瓦定理、梅涅劳斯定理及相关射影几何定理的推论，如何将其系统地推广到其他度量空间，尚未得到充分研究。

本文旨在填补这一空白，分析常曲率不恒定的瑟斯顿几何中的帕普斯定理和德萨格定理。通过在不同的几何结构中确立这些定理，本研究为理解欧几里得几何与非欧几何之间的关系提供了新的见解。

在文章结构上，我们遵循这样的原则：对 Nil 几何的证明作完整概述；对于其他几何，由于证明结构相似，我们仅阐述各空间特有的差异。

# 2 Nil 几何中平移三角形的帕普斯定理与笛沙格定理

## 2.1 关于 Nil几何的射影模型

Nil几何可以从维尔纳·海森堡发现的著名实矩阵群 L(R) 推导而来。海森堡矩阵的左（行—列）乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+x & c+xb+z \\ 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

在 Nil $=\{(a,b,c):\ a,\ b,\ c \in \mathrm{R}\}$ 的点上定义了“平移” $\mathrm{L(R)} = \{(x,y,z):\ x,\ y,\ z \in \mathrm{R}\}$。这些平移一般不满足交换律。形如 $\mathrm{K}(z) \lhd \mathrm{L}$ 的矩阵

$$\mathbf{K}(z) \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (0,0,z) \tag{2.2}$$

构成一参数中心，即其中的每个元素都与 L 的所有元素交换。K 的元素称为纤维平移。海森堡群的 Nil几何可通过点上的“右平移”，以射影（仿射）方式解释，其矩阵公式为

$$(1;a,b,c) \to (1;a,b,c) \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1; x+a, y+b, z+bx+c) \tag{2.3}$$

根据（2.1），该公式表明了这一点。这里我们将 L 视为在齐次坐标中以右作用表示的射影共线群。我们将使用 Nil 的通常射影模型（见 [10]）。

由公式（2.3）定义的平移群 L 可以扩展为一个更大的共线变换群 G，该群保持纤维不变，并且等价于 Nil 的（保持定向的）等距变换群。

在 [12] 中，我们已证明，在原点处绕 $z$-轴旋转角度 $\omega$ 的变换作为 Nil 的等距变换处处保持黎曼度量不变，并且将是 $x$ 中的二次映射，其 $y$ 到 $z$-像 $\overline{z}$ 如下：

$$\begin{gathered}\mathcal{M}=\mathbf{r}(O,\omega):(1;x,y,z)\to(1;\overline{x},\overline{y},\overline{z});\\ \overline{x}=x\cos\omega-y\sin\omega,\ \ \overline{y}=x\sin\omega+y\cos\omega,\\ \overline{z}=z-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}(x^2-y^2)\sin 2\omega+\frac{1}{2}xy\cos 2\omega.\end{gathered}\tag{2.4}$$

然而，这个旋转公式 $\mathcal{M}$ 通过二次映射 $\alpha$ 共轭为线性旋转 Ω，如下所示

$$\begin{gathered}\alpha^{-1}:\ \ (1;x,y,z)\xrightarrow{\alpha^{-1}}(1;x',y',z')=(1;x,y,z-\frac{1}{2}xy)\ \text{ to}\\ \Omega:\ \ (1;x',y',z')\xrightarrow{\Omega}(1;x",y",z")=(1;x',y',z')\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\omega&\sin\omega&0\\0&-\sin\omega&\cos\omega&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\\ \text{with }\ \alpha:(1;x",y",z")\xrightarrow{\alpha}(1;\overline{x},\overline{y},\overline{z})=(1;x",y",z"+\frac{1}{2}x"y").\end{gathered}\tag{2.5}$$

这种二次共轭同样改变了（2.3）中的 Nil 平移。

### 2.1.1 平移曲线

我们考虑一条 Nil 曲线 (1, $x$(t) $y$(t) $z$(t))，其原点 $O=E_0=$ (1, 0, 0, 0) 处给定了一个切向量

$$u=\dot{x}(0),\ v=\dot{y}(0),\ w=\dot{z}(0).\tag{2.6}$$

对于一条平移曲线，令其在点 (1, $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$) 处的切向量由矩阵 (2.3) 定义，并满足以下方程：

$$(0,u,v,w)\begin{pmatrix}1 & x(t) & y(t) & z(t)\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & x(t)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (0,\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)). \tag{2.7}$$

因此，Nil几何中的平移曲线（见 [4], [11]）由上述一阶微分方程组 $\dot{x}(t) = u$, $\dot{y}(t) = v$, $\dot{z}(t) = v\cdot x(t) + w$定义，其解如下：

$$x(t) = ut,\ y(t) = vt,\ z(t) = \frac{1}{2}uvt^2 + wt. \tag{2.8}$$

我们假设平移曲线的起点为原点，因为通过平移（2.3）可以将曲线变换到任意起点；此外，可以用“地理”参数$\phi$和 $\theta$假设其初速度为单位速度：

$$\begin{gathered} x(0) = y(0) = z(0) = 0;\\ u = \dot{x}(0) = \cos\theta\cos\phi,\ \ v = \dot{y}(0) = \cos\theta\sin\phi,\ \ w = \dot{z}(0) = \sin\theta;\\ -\pi \le \phi \le \pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

## 2.2 平移三角形的曲面及梅涅劳斯定理的推广

我们考虑空间 $X$ （ $X \in$ {$\mathbb{E}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, Nil, $\mathbb{SL}_2\mathbb{R}$, Sol}）的射影模型中的三个点 $A_0$, $A_1$, $A_2$ 。连接点 $A_i$和 $A_j$ （$i < j$, $i, j, k \in \{0,1,2\}$, $k \neq i, j$）的平移线段 $a_k$称为顶点为 $A_0$, $A_1$, $A_2$的平移三角形的边。

我们引入了 [7]中平移三角形的曲面$\mathcal{S}_{A_0A_1A_2}$ 的一个新定义：在瑟斯顿几何 $X$ 中，平移三角形$A_0A_1A_2$ 的 $S^X_{,A_0A_1A_2}$ 类平移三角曲面是 $X$ 的所有 $P$ 点的集合，由这些点向顶点 $A_0$ $A_1$ 和 $A_2$ 所作平移曲线在 $P$ 中的切线在欧几里得意义上共面。我们还确定了这些曲面的方程并对其进行了可视化，下文将使用这一曲面定义。一个重要的问题是，如何定义穿过该曲面的曲线，此曲面属于

一个平移三角形。在$E^3, S^3, H^3$, Nil、$SL_2R$、Sol几何中，上述定义的曲面包含连接其上任意两点的平移曲线，但在$S^2 \times R$、$H^2 \times R$几何中并非如此。因此，我们在这些几何中分别讨论了其定义（见 [31], [35]）。塞瓦定理和梅涅劳斯定理在常曲率几何$E^3$,$S^3$,$H^3$中已为人所知。我们将它们推广到$S^2 \times R$、$H^2 \times R$和Nil几何中的测地三角形（见 [31],[32] ），并在 [35]中针对平移三角形将其推广到所有瑟斯顿几何。现在，我们回顾与梅涅劳斯定理相关的Nil几何中的结果。

我们在 Nil空间的射影模型中考虑一个平移三角形 $A_0A_1A_2$。不失一般性，可以假设 $A_0 = (1,0,0,0)$。包含给定三角形边 $A_0A_1$ 和 $A_0A_2$ 的平移曲线，可由相应参数 $\theta$ 和 $\phi$ 直接刻画（见（2.8）和（2.9））。

包含类平移边线段 $A_1A_2$ 的平移曲线也可由其一个端点及其参数确定；但为了确定这条平移曲线的相应参数，我们使用等距变换群中几何 Nil 的元素平移 $T^{Nil}(A_1)$，它将 $A_1 = (1, x_1, y_1, z_1)$ 映射到 $A_0 = (1,0,0,0)$。

由 Nil 平移曲线的方程（2.8）、（2.9），我们可直接得到以下结果

引理2.1 1. 设 $P_1$ 和 $P_2$ 为任意点，$g^{Nil}_{P_1,P_2}$ 是所考虑的 Nil几何模型中的相应平移曲线。沿纤维方向将平移曲线线段 $g^{Nil}_{P_1,P_2}$ 投影到 $[x, y]$ 坐标平面上，若平移曲线上的点不位于同一纤维上，则其投影在欧几里得意义下是一条线段；否则，其投影是一个点。

2. 如果点 $P_1$ 和 $P_2$ 位于 $[x, z]$ 或 $[y, z]$ 坐标平面上，那么相应的平移曲线 $g^{Nil}_{P_1,P_2}$ 在欧几里得意义下是一条直线段 $P_1P_2$。□

注2.2 换言之，如果平移曲线上的点不位于同一纤维上，那么这些点恰好位于一个欧几里得意义下与 $[x, y]$ 坐标平面正交的平面内。

我们将单比的定义扩展到 Nil空间中的平移曲线。 .

定义 2.3（**[35]**）如果 $A$、 $B$ 和 $P$ 是 Nil空间中一条平移曲线上的互异点，那么它们的单比为

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(A,P,B)=d^{\mathbf{Nil},t}(A,P)/d^{\mathbf{Nil},t}(P,B),$$

若 $P$ 位于 $A$ 和 $B$ 之间，且

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(A,P,B)=-d^{\mathbf{Nil},t}(A,P)/d^{\mathbf{Nil},t}(P,B),$$

.

引理2.4（**[35]**）1. 设 $g_{A,\ B}$ 是任意一条非纤维型平移曲线。为方便起见，不失一般性，可假设 $A=$ (1, 0, 0, 0) 与模型中心重合。此外，设 $P\in g_{A,\ B}^{\mathbf{Nil}}$，并设 $A$、 $B$ 是通过纤维投影到 $[x,y]$ 坐标平面上的像， $A^p$、 $B^p$，以及 $P^p$，则

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(A,P,B)=s_g^{\mathbf{Nil}}(A^p,P^p,B^p)=s_g^{\mathbf{E}^3}(A^p,P^p,B^p),$$

2. 若点 $A$、 $B$ 和 $P$ 位于同一条纤维上，则

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(A,P,B)=s_g^{\mathbf{E}^3}(A,P,B)$$

□

我们引入以下记号：

1. 若类平移三角形的曲面在欧几里得意义下是一个平面，则称其为纤维型三角形。

2. 在其他情况下，三角形属于一般型（见 [7]）。

定义 2.5（**[35]**）设 $\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}_{,\ A_0A_1A_2}^{\ t}$为平移三角形 $A_0A_1A_2$的曲面，且 $P_1$、$P_2\in\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}_{,\ A_0A_1A_2}^{\ t}$ 为两个给定点。连接曲线 $P_1P_2\subset\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}_{,\ A_0A_1A_2}^{\ t}$ 是 Nil空间中的一条平移曲线。

定理2.6（Nil空间中平移三角形的梅涅劳斯定理 **[35]**）若 $l$ 是一条不经过平移三角形 $A_0A_1A_2$ 任何顶点的直线，且该三角形位于曲面 $\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}_{,\ A_0A_1A_2}^{\ t}$ 上，使得 $l$ 与平移曲线 $g^X_{A_1A_2}$ 分别交于 $Q$、 $g^X_{A_0A_2}$ 与 $R$，以及 $g^{\mathbf{Nil}}_{A_0A_1}$ 与 $P$，则

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(A_0,P,A_1)s_g^{\mathbf{Nil}}(A_1,Q,A_22)s_g^{\mathbf{Nil}}(A_2,R,A_0)=-1.$$

□

注 2.7 很容易看出，上述定理的“逆命题”也成立。

## 2.3 Nil几何中的笛沙格定理

笛沙格定理是公理化发展关联几何与射影几何的基本构件。笛沙格定理是射影几何中的一条基本定理，它表明两个三角形的对应边和顶点在射影意义下相互关联。该定理的一个重要方面是，实射影几何超越了平面几何，涵盖了空间几何。笛沙格定理对于阐释透视原理至关重要，并广泛应用于射影几何的各个领域。在维数为 2 的情形下，满足该定理的平面称为笛沙格平面。

笛沙格定理是几何学中的一项数学命题，由法国数学家吉拉尔·德萨格于1639年发现，并推动了19世纪上半叶射影几何的发展。

首先，我们来考察笛沙格定理在 Nil 空间中的以下原始解释。

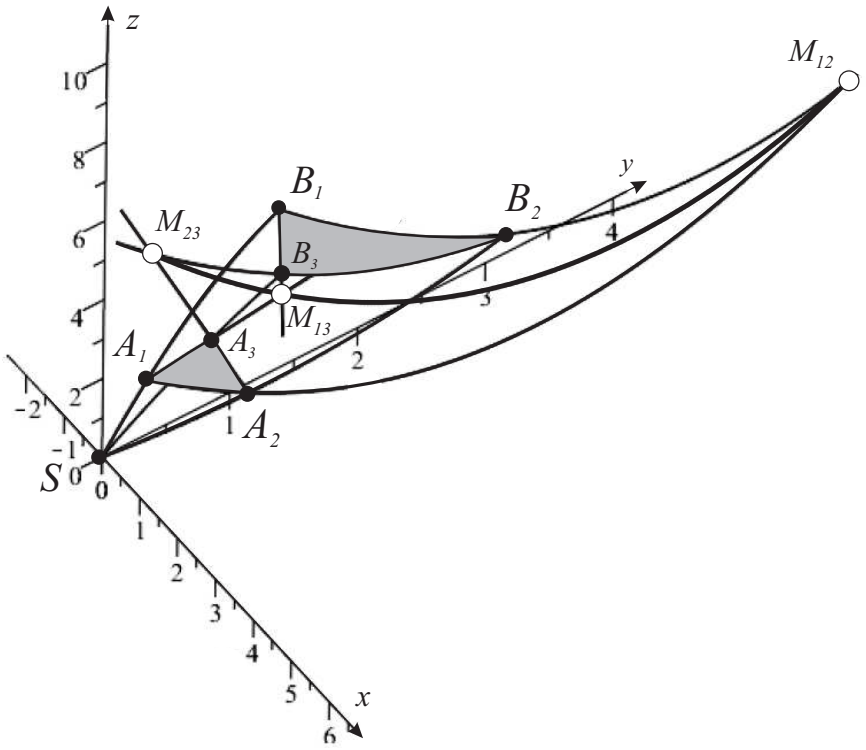



图1：Nil几何中平移型曲面上的笛沙格定理。

定义 2.1 设 $A_1A_2A_3$ 是 Nil 空间中的一个平移三角形，其在第 2.2 小节中定义的平移曲面（见 *[7]*）记为 $\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}{}_{,\ {}^{t}_{A_1A_2A_3}}$。此外，设平移三角形 $B_1B_2B_3$ 位于同一曲面上。假设上述两个三角形的平移曲线 $g^{\mathbf{Nil}}_{A_1B_1}$、$g^{\mathbf{Nil}}_{A_2B_2}$、$g^{\mathbf{Nil}}_{C_1C_2}$ 交于适当点 $S \subset \mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}{}_{,\ {}^{t}_{A_1A_2A_3}}$。那么，我们称三角形 $A_1A_2A_3$和 $B_1B_2B_3$ 关于该点透视（中心透视），此处的透视意义取 Nil 空间中的定义。此外，如果对于最初的两个三角形，$M_{12} = g^{\mathbf{Nil}}_{A_1A_2} \cap g^{\mathbf{Nil}}_{B_1B_2}$、$M_{13} = g^{\mathbf{Nil}}_{A_1A_3} \cap g^{\mathbf{Nil}}_{B_1B_3}$、$M_{23} = g^{\mathbf{Nil}}_{A_2A_3} \cap g^{\mathbf{Nil}}_{B_2B_3}$ 这些适当点存在且共线于一条平移曲线，那么称这两个三角形关于一条直线透视（轴心透视），此处的透视意义取 Nil 空间中的定义。

定理 2.8（Nil空间中的笛沙格定理）若两个三角形 $A_1A_2A_3$ 和$B_1B_2B_3$ 关于点 $S$中心透视，则这两个三角形对应边（平移曲线）的交点 $M_{12}$、$M_{13}$ 和 $M_{23}$ ——如果这些交点存在——都位于同一条平移曲线上。

证明
考虑平移三角形 $A_1A_2A_3 \subset$ Nil（见图 1）以及一个不同于其顶点的点 $S \subset \mathcal{S}^{\mathbf{Nil},{}^{t}_{A_1A_2A_3}}$。设 $B_1 \neq A_1$ 位于 $g^{\mathbf{Nil}}_{SA_1}$上，$B_2 \neq A_2$ 位于 $g^{\mathbf{Nil}}_{SA_2}$上，$B_3 \neq A_3$ 位于 $g^{\mathbf{Nil}}_{SA_3}$上。

1. 将 Nil版梅涅劳斯定理（定理2.6）应用于平移三角形 $SA_3A_1$ 和共线点 $B_1$、$B_3$、$M_{13}$:

$$s^{\mathbf{Nil}}_g(S, B_1, A_1)s^{\mathbf{Nil}}_g(A_1, M_{13}, A_3)s^{\mathbf{Nil}}_g(S, B_3, A_3) = -1. \tag{2.10}$$

2. 同理，对平移三角形 $SA_2A_3$ 及共线点 $B_2$、$B_3$、$M_{23}$应用 Nil版梅涅劳斯定理:

$$s^{\mathbf{Nil}}_g(S, B_3, A_3)s^{\mathbf{Nil}}_g(A_3, M_{23}, A_2)s^{\mathbf{Nil}}_g(S, B_2, A_2) = -1. \tag{2.11}$$

3. 与上述情况类似，根据平移三角形 $SA_1A_2$ 的 Nil版梅涅劳斯定理，对于共线点 $B_1$、$B_2$、$M_{12}$:

$$s^{\mathbf{Nil}}_g(S, B_1, A_1)s^{\mathbf{Nil}}_g(A_1, M_{12}, A_2)s^{\mathbf{Nil}}_g(S, B_2, A_2) = -1. \tag{2.12}$$

4. 将所有等式左边相乘，再将所有等式右边相乘，我们得到

$$\begin{gathered} s_g^{\mathbf{Nil}}(S,B_1,A_1)s_g^{\mathbf{Nil}}(A_1,M_{13},A_3)s_g^{\mathbf{Nil}}(S,B_3,A_3)\cdot \\ \cdot s_g^{\mathbf{Nil}}(S,B_3,A_3)s_g^{\mathbf{Nil}}(A_3,M_{23},A_2)s_g^{\mathbf{Nil}}(S,B_2,A_2)\cdot \\ \cdot s_g^{\mathbf{Nil}}(S,B_1,A_1)s_g^{\mathbf{Nil}}(A_1,M_{12},A_2)s_g^{\mathbf{Nil}}(S,B_2,A_2)= \\ \frac{A_1M_{13}}{M_{13}A_3}\cdot\frac{A_3M_{23}}{M_{23}A_2}\cdot\frac{A_2M_{12}}{M_{12}A_1}=-1= \\ =s_g^{\mathbf{Nil}}(A_1,M_{13},A_3)s_g^{\mathbf{Nil}}(A_3,M_{23},A_2)s_g^{\mathbf{Nil}}(A_2,M_{12},A_1)=-1. \end{gathered} \tag{2.13}$$

将 Nil 几何中的梅涅劳斯定理的逆定理应用于平移三角形 $A_1A_2A_3$，可得点 $M_{12}$、$M_{13}$、$M_{23}$ 共线，且位于一条平移曲线上。□

## 2.4 Nil几何中的帕普斯六边形定理

帕普斯六边形定理（归功于亚历山大的帕普斯）与笛沙格定理一样，在射影几何的公理结构中也发挥着基础性作用。定理成立的射影平面称为帕普斯平面。

考虑一个平移平面 $\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}{}_{,\,g_a}{}^{t}{}_{,\,g_b}$。给定两条平移曲线 $g_a^{\mathbf{Nil}}$和 $g_b^{\mathbf{Nil}}$，其中点 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 是平移曲线 $g_a^{\mathbf{Nil}}$上的不同点，点 $B_1$、$B_2$、$B_3$ 是平移曲线 $g_b^{\mathbf{Nil}}$上的不同点（见图 3）。

定理 2.9（Nil空间中的帕普斯六边形定理）设 $A_1$、$A_2$、$A_3\subset\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}{}_{、g_a}{}^{t}{}_{g_b、}$是平移曲线 $g_a^{\mathbf{Nil}}$上的三个点，且 $B_1$、$B_2$、$B_3\subset\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}{}_{、g_a}{}^{t}{}_{g_b、}$是另一条平移曲线 $g_b^{\mathbf{Nil}}$上的三个点。如果平移曲线 $g_{A_1B_1}^{\mathbf{Nil}}$、$g_{A_1B_1}^{\mathbf{Nil}}$、$g_{A_2B_2}^{\mathbf{Nil}}$、$g_{A_3B_3}^{\mathbf{Nil}}$分别与平移曲线 $g_{A_3B_2}^{\mathbf{Nil}}$、$g_{A_1B_3}^{\mathbf{Nil}}$、$g_{A_2B_1}^{\mathbf{Nil}}$相交，那么三个交点 $M_1=g_{A_1B_1}^{\mathbf{Nil}}\cap g_{A_3B_2}^{\mathbf{Nil}}$、$M_2=g_{A_2B_2}^{\mathbf{Nil}}\cap g_{A_1B_3}^{\mathbf{Nil}}$、$M_3=g_{A_3B_3}^{\mathbf{Nil}}\cap g_{A_2B_1}^{\mathbf{Nil}}$ ——如果这些交点存在——均位于同一条平移曲线上（见图 3）。

证明

我们引入以下记号：$C_{12}=g_{A_1B_1}^{\mathbf{Nil}}\cap g_{A_2B_2}^{\mathbf{Nil}}$、$C_{13}=g_{A_1B_1}^{\mathbf{Nil}}\cap g_{A_3B_3}^{\mathbf{Nil}}$ 和 $C_{23}=g_{A_2B_2}^{\mathbf{Nil}}\cap g_{A_3B_3}^{\mathbf{Nil}}$。

考虑平移三角形 $C_{12}C_{13}C_{23}\subset\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}{}_{,\,g_a}{}^{t}{}_{g_b。}$

1. 将 Nil版梅涅劳斯定理（定理2.6）应用于平移三角形 $C_{12}C_{13}C_{23}$ 和共线点 $A_3$、 $B_2$、 $M_1$:

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{12},B_2,C_{23})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{23},A_3,C_{13})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{13},M_1,C_{12})=-1. \quad (2.14)$$

2. 同样，对平移三角形 $C_{12}C_{13}C_{23}$ 及共线点 $A_1$、 $B_3$、 $M_2$应用 Nil 版梅涅劳斯定理:

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{12},M_2,C_{23})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{23},B_3,C_{13})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{13},A_1,C_{12})=-1. \quad (2.15)$$

3. 与上述情况类似，根据平移三角形 $C_{12}C_{13}C_{23}$ 及共线点 $B_1$、 $A_2$、 $M_3$的 Nil 版梅涅劳斯定理:

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{12},A_2,C_{23})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{23},M_3,C_{13})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{13},B_1,C_{12})=-1. \quad (2.16)$$

4. 与上述情况类似，根据平移三角形 $C_{12}C_{13}C_{23}$ 及共线点 $A_1$、 $A_2$、 $A_3$的 Nil 版梅涅劳斯定理:

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{12},A_2,C_{23})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{23},A_3,C_{13})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{13},A_1,C_{12})=-1. \quad (2.17)$$

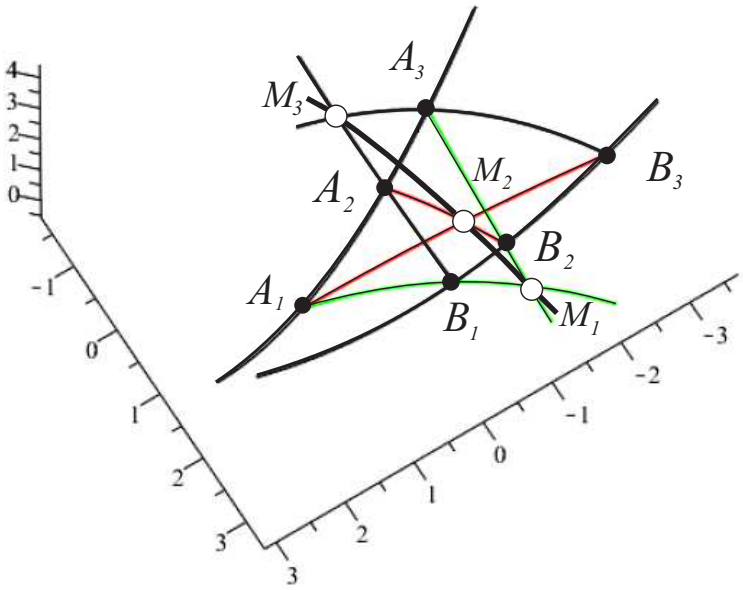
5. 与上述情况类似，根据平移三角形 $C_{12}C_{13}C_{23}$ 及共线点 $B_1$、 $B_2$、 $B_3$的 Nil 版梅涅劳斯定理:

$$s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{12},B_2,C_{23})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{23},B_3,C_{13})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{13},B_1,C_{12})=-1. \quad (2.18)$$

6. 将所有左边相乘，并将所有右边相乘，可得

$$\begin{gathered}\frac{C_{12}M_2}{M_2C_{23}}\cdot\frac{C_{23}M_3}{M_3C_{13}}\cdot\frac{C_{13}M_1}{M_1C_{12}}=-1=\\ =s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{12},M_2,C_{23})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{23},M_3,C_{13})s_g^{\mathbf{Nil}}(C_{13},M_1,C_{12})=-1.\end{gathered} \quad (2.19)$$

将 Nil 几何中的梅涅劳斯定理的逆命题应用于平移三角形 $A_1A_2A_3$，可得点 $M_{12}$、 $M_{13}$、 $M_{23}$ 位于一条在 Nil平移意义下“共线”的平移曲线上。□




Fi图2：Nil几何中平移型曲面上的帕普斯六边形定理 .

## 2.5 笛沙格与帕普斯六边形定理的推广

众所周知，欧几里得平面可以按如下方式嵌入实射影平面，或扩展为实射影平面。我们为给定的每个平行类的直线添加一个“无穷远点”。不同的平行类对应不同的无穷远点。我们规定，新生成的无穷远点都位于一条“无穷远直线”上。现在，射影平面具有这样的性质：任意两个不同的点位于唯一一条直线上，任意两条不同的直线相交于唯一一个点。

对于我们在文献 [7]中引入的给定Nil平移曲面，可以给出类似的推广。设有平移曲面 $\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}{}_{,P_1P_2P_3}^{t}$，其上有三点 $P_1$、$P_2$、$P_3$，它们不位于同一条平移曲线上，也不位于欧几里得坐标平面 $[x,z]$ 或 $[y,z]$ 中，亦不位于与它们平行的欧几里得平面中。

注2.2 如果这些点位于 $[x,z]$、$[y,z]$ 坐标平面内，或位于与它们平行的欧几里得平面内，那么我们得到欧几里得型情形，因此笛沙格六边形定理与帕普斯六边形定理自动成立（见引理2.1、2.4和定理2.6）。

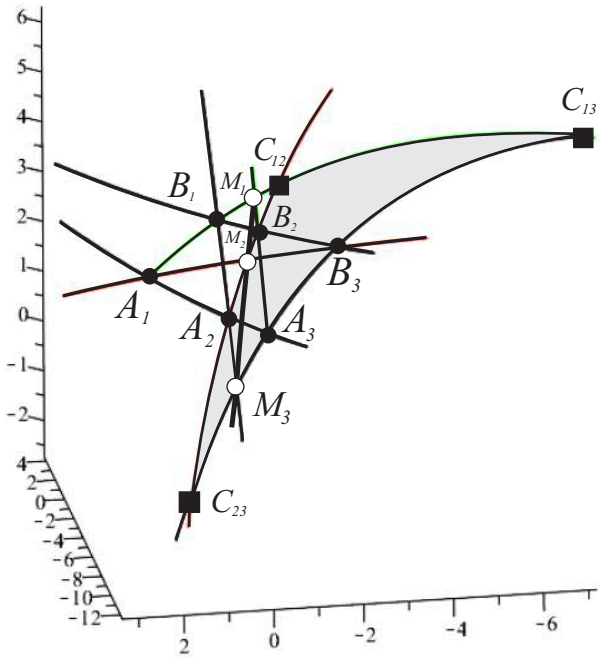



图3：在 Nil 平移型曲面上，利用梅涅劳斯定理证明帕普斯六边形定理。

在这个曲面上，如果两条平移曲线没有实交点，就称它们平行。这等价于：包含这两条平移曲线且平行于模型 $z$轴的欧几里得平面在欧几里得意义下平行。任一组两两平行的平移曲线都共有同一个无穷远点；而对于包含平行平移曲线的每一种不同方向（属于不同的“竖直欧几里得平面”），都对应一个不同的无穷远点。给定平移曲面上由平移曲线产生的所有且仅有的无穷远点，都位于一条给定的“无穷远平移曲线”上。因此，这个广义射影平移曲面 $\mathcal{SP}^{\mathbf{Nil}}_{,\ P_1P_2P_3}^{\ t}$ 由给定的平移曲面 $\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}}_{,\ P_1P_2P_3}^{\ t}$ 以及一条无穷远平移曲线$g^i_{\mathcal{S}^{\mathbf{Nil}},\ P_1P_2P_3}^{\ t}$ 组成。考虑这一扩张以及注2.2，结合欧几里得类比，便可轻易推广笛沙格六边形定理与帕普斯六边形定理。

定理2.10（Nil空间中的射影德萨格定理）如果两个三角形$A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$ 关于点

$S$中心透视（见定义2.1），那么这两个三角形对应边（平移曲线）的交点 $M_{12}$、$M_{13}$ 和 $M_{23}$ 都位于同一条平移曲线上（轴心透视，见定义2.1）（见图1）。□

定理 2.11（Nil空间中的射影帕普斯六边形定理）设 $A_1$、 $A_2$、 $A_3 \subset \mathcal{S}^{\mathbf{Nil},g_a\ g_b^{\ t},}$是平移曲线 $g_a^{\mathbf{Nil}}$上的三个点， $B_1$、 $B_2$、 $B_3 \subset \mathcal{S}^{\mathbf{Nil},g_a\ g_b^{\ t},}$是另一条平移曲线$g_b^{\mathbf{Nil}}$上的三个点。若平移曲线 $g_{A_1B_1}^{\mathbf{Nil}}$、$g_{A_1B_1}^{\mathbf{Nil}}$ $g_{A_2B_2}^{\mathbf{Nil}}$ $g_{A_3B_3}^{\mathbf{Nil}}$ $g_{A_3B_2}^{\mathbf{Nil}}$ $g_{A_1B_3}^{\mathbf{Nil}}$ $g_{A_2B_1}^{\mathbf{Nil}}$ 、.....分别与平移曲线.....、.....、.....相交，则三个交点 $M_1 = g_{A_1B_1}^{\mathbf{Nil}} \cap g_{A_3B_2}^{\mathbf{Nil}}$ $M_2 =$、.....都位于 $g_{A_2B_2}^{\mathbf{Nil}} \cap g_{A_1B_3}^{\mathbf{Nil}}$ $M_3 = g_{A_3B_3}^{\mathbf{Nil}} \cap g_{A_2B_1}^{\mathbf{Nil}}$ *2,3*
同一条平移曲线上（见图.....）。□

# 3 将帕普斯定理与笛沙格定理推广至其他瑟斯顿几何

众所周知，采用常曲率非欧几何的射影模型有诸多优点。许多射影定理可以有多种诠释，视为椭圆空间几何或双曲空间几何中的定理。同样显而易见的是，双曲空间和双曲平面中的定理可以由许多射影定理推导得出，但这也会带来一些困难。例如，在双曲几何中，直线可能超平行，即它们在模型之外相交。引入广义概念（例如通过引入极线来定义广义三角形）可以消除大部分困难，但显然，这些概念仍需进一步研究。

一些非恒定曲率的瑟斯顿几何也存在类似问题。塞瓦定理和梅涅劳斯定理的推广过程中出现的问题（见 [35]）清楚地表明了这一点；这些问题与相应瑟斯顿几何的射影模型结构有关（见 [10], [12]）。鉴于此，我们也可以表述笛沙格六边形定理与帕普斯六边形定理的经典形式。它们的推广仍需进一步研究。

在常曲率的瑟斯顿几何$\mathbf{E}^3$,$\mathbf{S}^3$,$\mathbf{H}^3$ 中，德萨格六边形定理与帕普斯六边形定理是众所周知的，并已得到讨论，例如参见 [1], [2]。在上一节中，我们看到了Nil几何中的德萨格六边形定理与帕普斯六边形定理。

现在，我们来考察这些定理在其他非恒定曲率瑟斯顿几何中的情形。我们不再详述这些定理的证明，因为它们

可以仿照 Nil几何中的证明进行（见第 2 节），因为梅涅劳斯定理在这些几何中同样成立（见 [35]）。

定义 3.1 设 $X \in \{\mathrm{S}^2\times\mathrm{R}、\mathrm{H}^2\times\mathrm{R}、\mathrm{Sol}、\mathrm{SL}_2\mathrm{R}\}$ 为一种瑟斯顿几何。考虑空间 $X$ 中的一个平移三角形 $A_1A_2A_3$，其在 *[7],* 中定义的平移曲面记为 $\mathcal{S}^{X,\ {}^{t}_{A_1A_2A_3}}$。此外，设平移三角形$B_1B_2B_3$ 位于同一曲面上。我们假定，对于上述两个三角形，平移曲线 $g^X_{A_1B_1}$、 $g^X_{A_2B_2}$、 $g^X_{C_1C_2}$交于适当的点$S \subset \mathcal{S}^{X,\ {}^{t}_{A_1A_2A_3}}$。此时，我们称三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$ 在 $X$ 意义下关于该点透视（中心透视）。此外，若对于初始三角形，存在适当的点 $M_{12} = g^X_{A_1A_2} \cap g^X_{B_1B_2}$、 $M_{13} = g^X_{A_1A_3} \cap g^X_{B_1B_3}$、$M_{23} = g^X_{A_2A_3} \cap g^X_{B_2B_3}$ 且它们位于同一条平移曲线上，则称这些三角形在 $X$中关于一条直线透视（轴心透视）。

定理 3.1（ $X$ 空间中的笛沙格定理）若两个三角形 $A_1A_2A_3$ 和$B_1B_2B_3$ 关于点 $S$中心透视，则这两个三角形对应边（平移曲线）的交点 $M_{12}$、$M_{13}$ 和 $M_{23}$ ——如果这些交点存在——都位于同一条平移曲线上。

□

定理 3.2（ $X$空间中的帕普斯六边形定理）设 $A_1$、 $A_2$、 $A_3 \subset \mathcal{S}^{X,\ g_a\ ^{t},\ g_b}$ 是平移曲线 $g^X_a$上的三个点， $B_1$、 $B_2$、 $B_3 \subset \mathcal{S}^{X,\ g_a\ ^{t},\ g_b}$是另一条平移曲线 $g^X_b$ 上的三个点。若平移曲线 $g^X_{A_1B_1}$、 $g^X_{A_1B_1}$、$g^X_{A_2B_2}$、 $g^X_{A_3B_3}$分别与平移曲线 $g^X_{A_3B_2}$、$g^X_{A_1B_3}$、 $g^X_{A_2B_1}$相交，则这三个交点 $M_1 = g^X_{A_1B_1} \cap g^X_{A_3B_2}$、 $M_2 = g^X_{A_2B_2} \cap g^X_{A_1B_3}$、$M_3 = g^X_{A_3B_3} \cap g^X_{A_2B_1}$ 如果这些交点存在——都位于同一条平移曲线上。□

注记 3.2 因此，著作 *[7]* 中所定义的瑟斯顿几何平移三角形的曲面既是帕普斯“平面”，也是笛沙格“平面”。

齐性瑟斯顿几何中的类似问题构成了一大类未解决的数学问题。对于 $\mathrm{S}^2\times\mathrm{R}$、$\mathrm{H}^2\times\mathrm{R}$、Nil、Sol、$\mathrm{SL}_2\mathrm{R}$ 几何，目前仅有极少结果为人所知（例如 [3], [5], [11], [12], [13], [20], [22], [25],[26], [28], [34] ）。详细研究是正在进行的研究的目标。

资助 作者声明，在准备本稿件期间未收到任何资金、资助或其他支持。

数据可用性声明 作者声明，本研究未使用任何外部来源或对应方的数据。

声明

利益冲突：作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

# 参考文献

[1] Andrica, D. – Barbu, C.，双曲几何庞加莱模型中的双曲笛沙格定理。Stud. Univ. Babe˛s-Bolyai Math., 58, No,4, 431-435 (2013).[2] Coxeter, H.S.M. – Greitzer, S.L.，《重温几何》。美国数学协会，(1967)。[3] Csima, G., J. Szirmai，$SL_2R$空间中平移三角形与测地三角形的内角和。Filomat, 32/14, (2018) 5023–5036.[4] Csima, G. – J. Szirmai，Nil几何中的类平移等视曲面与平移三角形的角和。Results Math., (2023) 78:194, DOI: 10.1007/s00025-023-01961-z, arXiv: 2302.07653.[5] Csima, G.，$S^2\times R$和$H^2\times R$几何中线段的等视曲面。J. Geom. (2024), doi: 10.1007/s00022-023-00699-x.[6] Csima, G. – J. Szirmai，Sol几何中测地三角形的内角和与类平移等视曲面。已提交稿件，(2024), arXiv: 2405.05266.[7] Csima, G. – J. Szirmai，非恒定曲率瑟斯顿几何中的类平移阿波罗尼斯曲面与三角曲面。已提交稿件，(2025), arXiv: 2410.22955.[8] Kurusa, A.，射影度量空间中的塞瓦定理与梅涅劳斯定理。J. Geom., 110/2, DOI: 10.1007/s00022-019-0495-x (2019).[9] Milnor, J.，李群左不变度量的曲率。Advances in Math., 21, 293–329 (1976)。

[10] Moln´ar, E.，八种三维齐性几何的射影解释。Beitr. Algebra Geom., 38 No. 2, 261–288, (1997).[11] Moln´ar, E. – J. Szirmai – Vesnin, A.，沿二桥纽结与链环奇异的锥流形的射影度量实现。J. Geom., 95, 91-133 (2009).[12] Moln´ar, E. – J. Szirmai，八种齐性三维几何中的对称。Symmetry Cult. Sci., 21/1-3, 87-117 (2010).[13] Moln´ar, E. – J. Szirmai，Sol格的分类。Geom. Dedicata, 161/1, 251-275 (2012).[14] Moln´ar E. — J. Szirmai — Vesnin A.，由SL⁀R万有覆盖的棱柱镶嵌生成的测地球与平移球堆积，Results in Math. 71) (2017) 623–642.$_2$Pallagi, J. – Schultz, B. – J. Szirmai，S[15] R空间中测地线、球面和等距曲面的可视化。KoG, 14, 35-40 (2010).[16] Pallagi, J. – Schultz B. – J. Szirmai，Nil空间中的等距曲面，Stud. Univ. Zilina, Math. Ser., 25, 31–40 (2011).[17] Pallagi, J. – Schultz, B. – J. Szirmai, $H^2\times$R空间中的等距曲面。KoG, 15, 3-6 (2011).[18] Papadopoulos, A. – Su, W.，球面几何中若干经典定理的双曲类比。(2014), hal-01064449.[19] Scott, P.，三维流形的几何。伦敦数学会通报 15, 401– 487 (1983).[20] Seo, Jin Ju.，欧几里得平面、洛伦兹平面和迷向平面中的射影几何与梅涅劳斯定理。Bulletin of the Korean Mathematical Society (2025) (即将出版).[21] J. Szirmai，某类Nil格的最密测地球堆积。Beitr. Algebra Geom. 48(2) (2007), 383–398.[22] J. Szirmai，Sol空间中由基本格构成的最密平移球堆积。Beitr. Algebra Geom., 51(2) 353–373 (2010)。

[23] J. Szirmai, 《广义考克斯特空间群在 $S^2 \times R$ 空间中的测地球堆积》。《几何代数贡献》，52，(2011)，413–430。[24] J. Szirmai, 《广义考克斯特空间群在 $H^2 \times R$ 空间中的测地球堆积》。《数学通讯》，(2012) 17/1，151–170。[25] J. Szirmai, 《瑟斯顿几何中等球最密堆积的一种候选方案》。《几何代数贡献》，55(2) (2014)，441–452。[26] J. Szirmai, 《由滑移反射生成的 $S^2 \times R$ 空间群的单传递测地球堆积》，《纯粹与应用数学年刊》，193/4 (2014)，1201–1211，DOI：10.1007/s10231-013-0324-z。[27] J. Szirmai, 《Nil测地三角形及其内角和》，《巴西数学会通报》(新系列)，49 (2018) 761–773，DOI：10.1007/s00574-018-0077-9。[28] J. Szirmai, 《Sol几何中由平移曲线导出的四面体的平分面与外接球》。《纽约数学杂志》，25，107–122 (2019)。[29] J. Szirmai, 《$S^2 \times R$ 与 $H^2 \times R$ 几何中测地三角形的内角和》。《摩尔多瓦共和国科学院数学通报》，93(2) (2020)，44–61。[30] J. Szirmai, 《Sol几何中与平移曲线相关的三角形角和》，《巴贝什-博雅伊大学数学研究》67 (2022)，621–631，doi：10.24193/subbmath.2022.3.14，arXiv：1703.06646。[31] J. Szirmai, 《$S^2 \times R$ 与 $H^2 \times R$ 几何中的阿波罗尼奥斯曲面、四面体的外接球、梅涅劳斯定理与塞瓦定理》。《数学季刊》，73，(2022)，477–494，DOI：10.1093/qmath/haab038，arXiv：2012.06155。[32] J. Szirmai, 《Nil几何中的梅涅劳斯定理与塞瓦定理》。《萨皮恩蒂亚大学学报：数学》，15/1，(2023) 123–141，DOI：10.2478/ausm-2023-0008，arXiv：2110.08877。[33] J. Szirmai, 《瑟斯顿几何中的经典概念与问题》，《国际几何电子期刊》，16 No.2 (2023)，608–643，doi：10.36890/IEJG.1221802，arXiv：2203.05209。

[34] J. Szirmai：《$SL_2R$ 空间中的纤维状圆柱体及其堆积与覆盖》，Results Math.，(2024)，doi：10.1007/s00025-024-02152-0，arXiv：2306.05721。[35] J. Szirmai：《瑟斯顿几何中平移三角形的梅涅劳斯定理与塞瓦定理》，投稿稿件，(2025)，arXiv：2506.01354。[36] W. P. Thurston（S. Levy 编），《三维几何与拓扑》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，第1卷 (1997)。[37] A. Vr´anics – J. Szirmai，《利用Nil几何中类平移平分曲面的全等平移球格覆盖》。KoG，23，6–17 (2019)。[38] J. R. Weeks，《双曲、球面与乘积几何中的实时动画》。A. Pr´ekopa 与 E. Moln´ar（编）。《非欧几何》，J´anos Bolyai 纪念文集，《数学及其应用》，施普林格 (2006)，第581卷，287–305。[39] A. Yahya – J. Szirmai，《$H^2\times R$ 空间中螺旋运动群的最优全等测地球堆积密度的新下界》。《等价数学》(2025)，doi：10.1007/s00010-025-01166-5。[40] A. Yahya – J. Szirmai，《$H^2\times R$ 空间中由旋转生成的测地球堆积及其密度的单调性行为》。Results Math.，80，123 (2025)，doi：10.1007/s00025-025-02430-5。