arXiv:2603.00034v1 [math.MG] 5 Feb 2026

关于角谷–斐波那契方向序列的施泰纳对称化

Ingrid Carbone 和 Aljoˇsa Volˇciˇc大学`卡拉布里亚

谨以此文献给我们亲爱的朋友 Paolo Gronchi。

摘要

本文将证明，对于任意有限测度为 M 的平面可测集，依照角谷–斐波那契方向序列进行的连续施泰纳对称化，将收敛于以原点为中心且测度相同的球M^* 。

1 引言

本文受到 [BBGV] 猜想 5.2 的启发。该猜想探讨具有低偏差的方向序列是否会生成收敛的施泰纳过程。

为尝试解决这个历史悠久的等周问题，Jakob Steiner [S] 提出了一种优美的几何构造，并以他的名字命名：施泰纳对称化。

尽管这一构造极具巧思，但他的解答并不完整，因为他没有证明解的存在性。

后来，施泰纳的结果得到了修正，并推广至更高维度以及更一般的集合类。Weierstrass 运用解析方法给出了第一个完整证明。由于等周问题的重要性（以及其优美之处），多年来一直受到广泛研究。

De Giorgi [DG] 的开创性论文通过证明球在有限测度且具有有限 Caccioppoli-De Giorgi 周长的可测集类中的等周性质，树立了一个里程碑。

许多关于施泰纳对称化的论文都有一个共同特点：从某一类集合 E （称为种子）出发

（凸体、紧集、具有有限测度的可测集），通过巧妙地选择一个方向 u_1 进行第一次对称化，得到集合 $S_{u_1}E$，称为其施泰纳对称化，它“更加圆”。再巧妙地选择第二个方向 u_2，得到 $S_{u_2}S_{u_1}E$，它就更加圆了。如此继续选取方向 u_3，u_4，..... u_n，.....，得到一列集合 $\{S_{u_n}\dots S_{u_1}E\}$，称为 ***Steiner*过程**。如果该过程（在适当的距离意义下）收敛到球 E^*，且该球与 E具有相同的体积并以原点 o为中心，那么就能得出所需结论。方向表示为 $S^1_+ = \{u$ 中的元素：$u = e^{i\vartheta},\ \vartheta \in [0,\pi]\}$。

第 n 个方向的选择是逐步进行的，并根据第 $(n-1)$ 个集合的形状以及周长、转动惯量或其他适当泛函的增减来确定。选择公理的使用不可避免，因此该证明不是构造性的。

据作者所知，Eggleston [E] 首次在任意维度构造出了一个收敛的 Steiner 过程算法。在二维情况下，该算法选取两个方向 u 和 v，使它们之间的角为 π 的无理倍数，并交替沿这两个方向进行对称化。他证明了，对于任意凸体 C，$(S_uS_v)^nC$ 趋于 C^*。

还有其他非构造性结果。Peter Mani-Levitska [M] 首先提出了概率方法：他证明，几乎必然地，任意凸体都可以通过一个 Steiner 过程变换为球面；在该过程中，方向是相对于球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上的均匀分布概率随机选取的。该结果已推广到紧种子 [vS] 的情形，之后又推广到 L_p ($1 \le p < \infty$) 和连续函数 [V2], 的情形（根据 A. Burchard 的建议，对 S^{n-1} 上概率的假设有所放宽）。

Paolo Gronchi 构造了一个简单却微妙的例子，相关讨论见 [BBGV]。他给出了一个无限的方向序列族，使得相应的 Steiner过程即使以椭圆 E 为种子也不收敛！

这一令人惊讶的结果使人们开始关注稠密方向集。在[BKLYZ] 中，研究者证明，如果 $U \subset S^{n-1}$ 是稠密且可数的，而C 是一个凸体，那么可以对 U 进行适当排序，使相应的 Steiner过程收敛到 C^*。后来，这一结果得到改进：研究者证明存在一种与种子无关的通用重排；更一般地，种子可以是一个紧集 [V3]。然而，这些证明都不是构造性的，人们也不清楚这些重排具体是什么样的。

为了寻找其他能使Steiner过程收敛的算法，

自然会想到去考察一类著名的均匀分布序列。这类序列已有一个多世纪的历史，却从未在这一背景下被考虑过。

论文 [BBGV] 包含了这一类型的首个结果，证明经典克罗内克序列 $\{n\alpha\}$（其中 α 是 π的一个无理倍数）使得对任意紧种子 K，Steiner 过程都收敛。

另一方面，Gronchi 序列的一个子类可用于证明，序列的一致分布不足以保证 Steiner过程收敛。

这一观察引出了猜想 5.2，该猜想询问特殊的低偏差 序列类是否总能产生收敛的 Steiner过程。

该猜想仍未解决，但与此同时，R. Asad 和 A. Burhard 的一项结果（尚未发表，但可在 Archive [AB]上查阅）表明，著名的低偏差范德科普特二进制序列能够产生收敛的 Steiner过程，因此并不反驳该猜想。

本文将通过考察 Kakutani-斐波那契数列，证明一个类似的结果。

2 基本定义

2.1 施泰纳对称化

设 M 是一个勒贝格测度有限的可测平面集（本文中无论维数如何，均以 λ表示）。我们将这类集合称为 L_1-集。在 L_1-集的族中，我们考虑通常的等价关系 $M_1 \sim M_2$，当且仅当 $\lambda(M_1 \triangle M_2) = 0$。商空间是一个度量空间，其距离为 $d_1(M_1, M_2) = \lambda(M_1 \triangle M_2)$。

若 $u \in S^1$ 是一个单位向量，记 l_u 为平行于 u且过原点的直线。记 $l_{u^\perp}$ 为过原点且垂直于 u 的直线。对任意 $x \in l_{u^\perp}$，考虑直线 $x+l_u$ 并将其与 M 相交。现在考虑所有线段（可以退化，也可以无限长）的并集：这些线段位于 $x + l_u$上，以 x 为中心，长度等于外测度 $\lambda^*(M \cap (x + l_u))$。我们将此集合记为 $S_u M$，并称其为 M 沿 u方向的***Steiner***对称体 。

施泰纳对称化具有若干有趣的性质。

1. 若 E 分别为凸集、紧集或可测集，则 $S_u E$ 也是凸集、紧集或可测集。

2. S_u 保持面积不变，且不会增加周长（若周长存在）。有关此主题的最新进展，请参阅 [CCF]。
3. 若 $M_1 \subset M_2$，则 $S_u M_1 \subset S_u M_2$。 4. $d_1(S_u M_1,\ S_u M_2) \le d_1(M_1,\ M_2)$。
5. 若 $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$，则对任意 L_1-集，$\lim_{n\to\infty} S_{u_n} M = S_{u_0} M$ （[V2] 的引理 2.3）。

我们在这些性质之外再补充一个命题。这个命题或许已为人所知，但作者未能找到相关参考文献。

2.1.1 定义

若存在一个 L_1-集 $M_0 \subset \mathbb{R}_+$，使得 $M = \{(x,\ y) :\ \sqrt{x^2+y^2} \in M_0\}$（除去一个零测集），则称 L_1-集 $M \subset \mathbb{R}^2$ 为以 o 为中心的圆环 。

用 $R_\alpha E$ 表示集合 E 沿逆时针方向旋转 α 角后的集合。

2.1.2 命题

假设 $u, v \in S^1_+$ 构成的角 α 是 π的无理倍数，并且 M 是一个关于 u和 v 对称的 L_1 集，允许相差一个零测集。那么 M 是一个以原点为中心的圆环。

证明:
设 z 是 M的一个勒贝格密度为 1 的点。这意味着，对于任意$\varepsilon > 0$，都存在一个正的 r_ε，使得

$$\frac{\lambda(B(z, r_\varepsilon) \cap M)}{B(z, r_\varepsilon)} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

关于 u 和 v 的对称性意味着，对每个$n \ge 1$，$R_{2n\alpha} M = M$ 几乎处处成立。点 $R_{2n\alpha} z$ 在圆 $x^2 + y^2 = \|z\|^2$上稠密。对于满足 $\|w\| = \|z\|$ 的每个 w，都存在一个整数 n_ε，使得 $R_{2n_\varepsilon\alpha} B(z, r_\varepsilon)$ 与$B(w, r_\varepsilon)$彼此足够接近，以至于

$$\frac{\lambda(B(w, r_\varepsilon) \cap M)}{B(w, r_\varepsilon)} > 1 - \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，w 相对于 M也具有密度 1。
类似的论证表明，如果 z 对 M的密度为0，则所有具有相同范数的点的密度也为0。
由此证明，M_1，即对 M具有密度 1的所有点的集合，是以 o为中心的圆的并。因此，M 是一个圆环。

2.2 转动惯量

有界可测集 M 的转动惯量定义为

$$\mu(M) = \int_{\mathbb{R}^s} (x^2 + y^2)) \, dxdxy \, .$$

我们将使用以下性质。

1. 施泰纳对称化不会增加转动惯量，即

$$\mu(S_u M) \leq \mu(M) \, ,$$

当且仅当 M 除去一个零测集后关于 $u^{\perp}$ 对称时，等号成立。

2. 如果 $\mathcal{F}$是一个有界可测集族，则定义在 (S^1_+) 上的泛函 $(u, M) \longmapsto \mu($ $S_u M)$ 是一致连续的。

2.3 均匀分布点列与差异度

$[0,1]$ 中的点序列 $\{x_n\}$ 称为均匀分布，如果对于 $[0,1]$上的任意实值连续函数 f

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(t) \, dt \, . \tag{1}$$

标准参考文献为 [KN] 和 [DT]。

$[0,1]$ 中序列 $\{x_n\}$ 的差异度 定义为

$$D_N = \sup_{I \subset [0,1]} \left| \frac{|\{n \leq N, x_n \in I\}|}{N} - \lambda(I) \right| \, ,$$

上确界取遍 $[0,1]$的所有子区间 I。 $|\cdot|$ 表示基数。

H. Weyl [W] 证明，一个序列是均匀分布的，当且仅当$\lim_{N\to\infty} D_N = 0$。

若当 $N \to \infty$时 D_N 的行为类似于$\log_N{}^N$，则称 $[0,1]$ 中的序列 $\{x_n\}$ 具有低偏差。此类序列在(1)中给出最佳逼近。

已知的最佳低偏差序列包括克罗内克序列 $x_n = \lfloor n\alpha \rfloor$，其中 α 是连分数系数有界的无理数

（[KN], 第 122 页）、底数为 b 的 van der Corput 序列（[KN], 第 127 页），其中 b 为正整数；以及满足 L 和 S 为非负整数、且 $L \geq S$ 和 $L + S \geq 2$ [C1] 的 LS 序列。此类序列包含对应于取值 $L = b$ 和 $S = 0$ 的 van der Corput序列。当且仅当 $L \geq S$ 时，它们是低偏差的。有关最新进展，请参阅 [We]。

Kakutani-Fibonacci 序列是针对 $L = S = 1$得到的。

一致分布和差异度的定义可通过映射 $x \longmapsto \vartheta = \pi x$自然地扩展到 $[0, \pi]$ 上的序列。还可通过映射 $\vartheta \longmapsto e^{i\vartheta}$进一步扩展到半圆 S^1_+ （表示平面方向）。

2.4 BV集。

在第 4 节中，我们将讨论一类由 Caccioppoli [Ca1], [Ca2] 引入、并由 De Giorgi [DG] 在其关于等周问题的奠基性论文中使用的集合：BV集。这是能够定义周长且使等周问题有意义的最大集合类。

定义

有界集合 C 是 BV 集，如果其 De Giorgi-Caccioppoli周长

$$p(C) = \inf\{\liminf_{k\to\infty} p(A_k)\}$$

是有限的，下确界取遍所有光滑集合的序列 $\{A_n\}$，使得 $d_1(C, A_n)$ 趋于零，并且 A_n 的周长按通常意义理解。

BV集族 $\mathcal{C}$ 特别满足以下性质。

1. BV 集的 Steiner对称体是一个 BV 集。2. 施泰纳对称化不会增加 BV 集的周长。3. 包含在球 $B(o, R)$ 中且周长一致有界的 BV 集族是相对紧的（关于 d_1）。

4. BV 集族在 L_1 中稠密。

关于BV集的出色论述见 [T]。

3 Kakutani-Fibonacci 序列

在本节中，我们将介绍片山-斐波那契点序列，并研究其若干有用性质。该序列已在 [C1]中引入。计算其点的更显式算法可见于 [C2]。该序列也曾从动力系统的角度得到研究[CIV]。

在 [K] Kakutani 提出了一种优雅而有趣的方法，用来得到 $[0,1]$ 的一系列划分。

固定 $0<\alpha<1$，并考虑 $[0,1]$ 的任意划分 δ。按照比例 $\alpha/(1-\alpha)$ 将 δ 中最长的区间划分，得到一个更细的划分，记作$\alpha\delta$（称为 δ的 α-细分）。我们用 $\alpha^n\delta$ 表示 $\alpha^{n-1}\delta$ 的 α-细分。若$\delta=\omega$，则称 $[0,1]$, 的平凡划分所形成的序列 $\{\alpha^n\omega\}$ 为 Kakutani 的α-划分序列。

他证明了以下定理。

3.1 定理

对于任意 $\alpha\in]0,\ 1[$，序列 $\{\alpha^n\omega\}$ 都是均匀分布的。

这意味着，给定任意区间 $I\subset[0,1]$，并用 t_n 表示 $\alpha^n\omega$ 的区间个数，用 $t_n(I)$表示其中包含在 I内的区间个数，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_n(I)}{t_n}=\lambda(I)\,.$$

一般而言，追踪 $\alpha^n\omega$的区间个数及其长度并不简单。有两个有趣的例外：情形 $\alpha=\frac{1}{2}$ 和$\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$，即黄金比例的倒数，文献中通常记为$^-\gamma$。在第一种情形中，第 n个序列的所有区间都具有相同的长度 $\frac{1}{2^n}$。在第二种情形中，第 n个划分的区间仅有两种长度： γ^n 和 γ^{n+1}。这一事实由恒等式$1-\gamma=\gamma^2$ 推出，该恒等式表明，在任意 γ-加细中，一个长区间按比例 γ/γ^2被分割。

在 [C1] 中，已证明若分别用 t_n、 l_n 和 s_n 表示 $\gamma^n\omega$ 中区间、长区间和短区间的数量，那么这些序列满足相同的差分方程 $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$，初始条件为 $t_0=1$ 和 $t_1=2$、 $l_0=1$ 和 $l_1=1$、 $s_0=0$ 和 $s_1=1$。因此，这三个序列都可以用斐波那契数列表示： $t_n=F_{n+2}$，

$l_n = F_{n+1}$ 和 $s_n = F_n$。这就是该序列被称为 Kakutani-斐波那契数列的原因。

均匀分布点列比均匀分布的划分序列有趣得多，因此值得指出，可以将上文考虑的两个划分序列高效地关联到点序列。

情形 $\alpha = \frac{1}{2}$ 众所周知（[KN], 第 127 页）。二进制分数可以按经典的二进制范德科普特序列 $\{c_n\}$ 排列，该序列借助基数逆函数 Φ构造。

Φ 定义在所有正整数的集合 $\mathbb{N}$上。若 $\sum_{k=0}^{M} a_k(n)2^k$ 是 n 的二进制表示（其中 $M = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ 且 $a_k(n) \in \{0, 1\}$），则

$$c_n = \Phi(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k(n) 2^{-k-1}\,.$$

类似地，Kakutani-Fibonacci点序列 $\{f_n\}$可以通过排列划分 $\gamma^n\omega$中的点显式地构造出来。

我们使用 [C2]的公式 (13) 的一个特殊情形。

这个公式与 R`eny 关于非整数进制 [R] 下实数表示的理论有关。我们不会使用这一深奥理论的结果。

我们只需注意，方程 $1 - \gamma = \gamma^2$ 表明这种表示存在歧义，因此必须限制我们将要定义的 γ-基数逆函数的定义域。

记 $\mathbb{N}_\gamma$ 为具有如下性质的正整数集合：其二进制表示中，$a_{k+1}(n)a_k(n) = 0$ 对每个 $k \geq 0$都成立。γ-基数逆函数 定义在 $\mathbb{N}_\gamma$ 上，形式如下：

$$\Phi_\gamma(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k(n) \gamma^{k+1}\,. \tag{2}$$

Kakutani-Fibonacci 序列 $\{f_k\}$的前 12 个点对应于 $n \in \mathbb{N}_\gamma \cap \{n : n < 2^5\}$，按顺序排列为：

$$\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^3 + \gamma, \gamma^4, \gamma^4 + \gamma, \gamma^4 + \gamma^2, \gamma^5, \gamma^5 + \gamma, \gamma^5 + \gamma^2, \gamma^5 + \gamma^3, \gamma^5 + \gamma^3 + \gamma.$$

为简化记号，我们将用 T_k 表示复合 $S_{f_k} S_{f_{k-1}} \dots S_{f_1}$。让我们更仔细地看一下 [12]的公式(12)。

由(2)可知，由于 2^{n-1} 的二进制表示为100...0（$n-1$ 个零），$\Phi_\gamma(2^{n-1}) = \gamma^n$ 是序列 $\{f_k\}$ 中作为 $\gamma^n\omega$的端点的第一个元素。

我们还有 $\Phi_\gamma(2^{n-1}+1) = \gamma^n+\gamma$，因为 $2^{n-1}+1$在二进制中表示为 100 ...1（带有 $n-2$ 个零）。

由这些观察我们可以推 deduce 出，$\mathbb{N}_\gamma$ 包含 F_n 个整数 i，使得 $2^{n-1} \le i < 2^n - 1$。

这两个等式将在下一节中使用。让我们对它们重新表述。

令 $G_k = \sum_{i=1}^{k} F_i$。让我们回顾一下 $G_k = F_{k+2} - 2$。我们有 $T_{G_k} = S_{\gamma^k} T_{G_k-1}$，以及 $T_{G_k+1} = S_{\gamma+\gamma^k} T_{G_k}$。

在接下来的计算中，我们将使用 G_k'来简化记号。

4 Kakutani-FibonacciSteiner过程。

我们现在将证明本文的主要结果，表明与角谷–斐波那契方向序列 $\{\vartheta_n = e^{i\pi f_n}\}$ 相关联的Steiner过程在种子为 L_1-集时关于 d_1 距离收敛。

让我们从一个简单的引理开始。

4.1 引理。

设(X,d)为一个紧致度量空间，φ 为定义在 X 上的实值连续函数，且 $x_0 \in X$ 满足对任意 $x \neq x_0$有 $\varphi(x) > \varphi(x_0)$。若序列 $\{x_n\}$使得 $\{\varphi(x_n)\}$趋于 $\varphi(x_0)$，则 $\{x_n\}$ 趋于 x_0。

假设相反。则存在 $\varepsilon > 0$ 以及子序列$\{x_{n_k}\}$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$有 $x_{n_k} \notin B(x_0, \varepsilon)$。由紧致性，它包含一个收敛子序列，仍记为 $\{x_{n_k}\}$。设 y_0 为其极限。由构造，$d(y_0, x_0) \ge \varepsilon$，从而 $y_0 \neq x_0$。另一方面，$\varphi(y_0) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(x_0)$，矛盾。

4.2 定理。

如果 M 是一个 L_1-集，并且 $\{T_n\}$ 是 Kakutani-Fibonacci 施泰纳过程，那么

$$\lim_{n\to\infty} T_n M = M^*$$

关于 d_1。

我们首先在假设 $M = C$ 是一个有界BV集的情况下证明该结果。

考虑子序列 $\{T_{G_k+1}C\}$。我们知道，如果 $C \subset B(o,r)$，那么 $T_{G_k+1}C \subset B(o,r)$。此外，该子序列中各集合的周长均不超过 C的周长。因此，紧性判据适用，存在一个收敛子序列 $\{T_{G_{k_j}+1}C\}$。将其极限记为 K。

由于 $T_{G_{k_j}+1}C = S_{G_{k_j}+1}T_{G_{k_j}}C$，第 j 项关于 $(e^{i\gamma^{k_j}})^\perp$ 对称。由施泰纳对称化的连续性可知，K 关于 $(e^0)^\perp = (0,\ 1)$ 对称。

另一方面，对每个 j，$S_{G_{k_j}+2}C$ 关于 $(e^{\gamma^{k_j}+\gamma})^\perp$ 对称。由恒等式

$$T_{G_{k_j}+2}C = S_{G_{k_j}+2}T_{G_{k_j+1}}C\,,$$

其中 $S_{G_{k_j}+2} = S_{\gamma^{k_j}+\gamma}$，可知 $T_{G_{k_j}+2}C$ 趋于 $S_\gamma K$。

整个序列 $\mu(T_nC)$ 趋于 $\mu(K)$，因此

$$\mu(S_\gamma K) = \mu(K)\,.$$

这个恒等式意味着 K 关于 $\gamma^\perp$ 对称。但 γ 是 π 的无理倍数，$\gamma^\perp$也同样如此。

根据命题 2.1，1 K 除去一个零测集后是一个圆环。但$S_\gamma K = K$，因此 $S_\gamma K$ 与垂直于 $e^{i\gamma}$ 的每条直线的交集都是一条线段，所以 K 不是空心的，因而必定是一个球。

总之，$K = C^*$ 除去一个零测集。

如前所述，序列 $\{\mu(T_nC)\}$是递减的，并收敛到 $\mu(C^*)$，后者是集合族 $\mathcal{F}$中满足测度等于 $\lambda(C)$且包含于 $B(o,\ r)$的集合上，μ 的唯一极小值点。由引理 4.1，整个序列 $\{T_nC\}$趋于 C^*。

现在令 M 为任意 L_1集。任取一个 $\varepsilon > 0$。存在有限个矩形的并（一个有界BV集！），记为 R，使得$d_1(M,\ R) < \frac{\varepsilon}{2}$。我们可以假设 $\lambda(M) = \lambda(R)$。

我们有

$$d_1(T_nM, M^*) \le d_1(T_nM, T_nR) + d_1(T_nR, R^*) + d_1(R^*, M^*)\,.$$

最后一项为零。第一项以 $\frac{\varepsilon}{2}$ 为界。第二项趋于零，因此存在 n_ε，使其对每个 $n > n_\varepsilon$ 都以 $\frac{\varepsilon}{2}$ 为界。这证明了 $\lim_{n\to\infty} T_nM = M^*$ 在由 d_1 生成的拓扑中成立。

5 最后 remarks。

在上一节中，我们选择研究 Kakutani-Fibonacci Steiner过程在 L_1-集类中的行为，其中拓扑由对称差距离 d_1定义。

其他作者研究了不同对象类别中 Steiner 过程的收敛问题。

在 [AB], 这篇与我们目标最为相似的论文中，证明了 van der Corput 施泰纳过程在具有紧支撑的连续函数类上（一致地收敛到对称递减重排）。

在 [BBGV], 这篇促成本论文的文章中，研究了赋予 Hausdorff距离的紧集空间中 Steiner过程的收敛性。

在 [Kl] 中，研究了赋予 Hausdorff距离的凸体空间中的 Steiner过程。

一个自然的问题是，这些结果之间有何关联?

几乎完整的答案已为人所知 [V2]。在[V2] 的第 4 节（定理 4.3）中，证明了在 L_1集空间中 Steiner过程的收敛，意味着在 L_p 函数空间中（对 $p \geq 1$）收敛到 $\|.\|_p$ 范数下的对称递减重排。一个几乎立即得到的推论是定理 4.4：如果对 L_1中的每个函数，Steiner过程都在 $\|.\cdot\|_1$ 范数下收敛到对称递减重排，那么当种子是具有紧支撑的连续函数时，该过程将一致收敛到对称递减重排。

最后，第 5 节中的定理 5.1 断言，对于具有紧支撑的连续函数，Steiner过程一致收敛到对称递减重排，意味着对每个紧种子 K，它都在 Hausdorff距离下收敛到 K^* 。

为了补全这一论证，我们只需证明：将Steiner过程应用于紧集 K 后，若其在Hausdorff距离下收敛到 K^* ，则对任意 L_1集 M，它都收敛到 M^*。

我们需要下面这个引理。它虽已为人所知，但我们将给出证明，以展示施泰纳对称化这一工具的强大之处。

引理 5.1

如果 $A, B \subset \mathbb{R}^m$ 是两个 L_1-集，且 A^* 和 B^* 是以 o为中心的球

其测度分别与 A 和 B 相同，则

$$d_1(A^*, B^*) \leq d_1(A, B)\,.$$

令 $\{T_n = S_n S_{n-1} \dots S_1\}$ 为任意一个 Steiner过程，它对每个 L_1-集 M 都收敛到 M^*。根据施泰纳对称化的某个性质

$$d_1(T_n A, T_n B) \leq d_1(A, B)$$

对每个 n 都成立。令 $n \to \infty$，即可得到结论。

引理5.2

若 $K \subset \mathbb{R}^m$ 是一个紧集，且 $\{T_n\}$ 是一个 Steiner过程，使得序列 $\{T_n K\}$ 在 Hausdorff距离意义下收敛到紧集 L，那么

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n K \triangle L) = 0\,.$$

这是 [BBGV] 中的引理3.1的断言（ii）。

命题5.3

假设一个施泰纳对称化对任意紧种子都收敛（在豪斯多夫距离意义下）。则它对任意L_1-种子 M都收敛（关于 d_1）。

设 M 是一个 L_1-集。则对每个 $\varepsilon > 0$，存在紧集$K_\varepsilon \subset M$ 使得 $\lambda(M \setminus K_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$。我们知道对每个$n \geq 1$都有 $T_n K_\varepsilon \subset T_n M$。我们有

$$d_1(T_n M, M^*) \leq d_1(T_n M, T_n K_\varepsilon) + d_1(T_n K_\varepsilon, K_\varepsilon^*) + d_1(K_\varepsilon^*, M^*)\,.$$

第一项以 $d_1(M, K_\varepsilon)$为界，因而以 $\frac{\varepsilon}{3}$为界。由引理 5.1，第三项也有同样的界。由引理5.2，中间项趋于零。因此存在 n_ε，使得当 $n \geq n_\varepsilon$ 时它小于$\frac{\varepsilon}{3}$，从而得到所需结论。

Steiner过程最初是在凸体族中研究的。由于凸体是紧集，上述任一设定中证明的任何结果对凸体同样成立。

BBGV 的开放问题6.3 [提出了如下问题：] 假设方向序列 $\{u_n\}$ 满足：对每个凸体 C，$\{S_{u_n} \dots S_1 C\}$ 都收敛到 C^*。那么，对每个紧集 K，$\{S_{u_n} \dots S_1 K\}$ 是否都收敛到 K^*？

作者不知道有什么关于凸体上的 Steiner 过程收敛性的结果，不适用于紧种子。但至少到目前为止，还没有一种普遍而简洁的方法，能将适用于凸体的结果推广到紧集类。

作为问题 6.3 所涉及困难的一个例子，我们提一下 Mani-Levitska问题 [M], ，它提出于 1986 年。他证明了种子为凸体时结论成立，并提出该结论是否也适用于紧种子。肯定答案仅在 2006 [vS] 中得到证明。另一种解法见于 2013 [V2]。这两篇论文采用了完全不同的方法，在经历漫长迂回后都得出了所需结果。

问题 5.2 仍未得到解答。本文部分证实了这一问题，并增添了另一个低差异方向序列的例子，该序列使施泰纳过程收敛。

参考文献

[AB] R. Asad，A. Burchard，A.：沿某个等分布方向序列进行施泰纳对称化，发表于 arXiv:2005.13597，2020 年 5 月。

[BBGV]G. Bianchi，A. Burchard，P. Gronchi，A. Volˇciˇc，施泰纳对称化的形状收敛，《Indiana Univ. Math. J.》61，第 4 期（2012），1695–1710

[Ca1] R. Caccioppoli，《定向维数集合上的测度与积分 *I*》，《Rend. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.》，12(1952), 3-11

[Ca2] R. Caccioppoli，《定向维数集合上的测度与积分 *II*》，《Rend. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.》，12(1952), 137-146

[C1] I.Carbone，《划分与点的 *LS*序列的差异度》，《Annali di Matematica Pura e Applicata》，(4)，191(4) (2012), 819-844

[C2] I. Carbone，《van der Corput算法向LS序列的推广》，《应用数学与计算》，255（2015），207-2013

[CCF] A. Cianchi、M. Chleb´ík、N. Fusco, 《Steiner 对称化下的周长不等式：等号成立的情形》, 《数学年刊》, **162**（2005）, 525-555

[CIV]I. Carbone, M.R. Iac`o, A. Vol˘ci˘c, 《关于 Kakutani-Fibonacci 序列的动力系统方法》, 《遍历理论与动力系统》, **34(6)(2014)**, 1794-1806,

[DG] E. De Giorgi, 关于 $r-1)$ 维空间中 r 维度的测度一般理论, 《纯粹与应用数学年刊》（第 **4** 辑）**36**(1954),191-213

[DT]M. Drmota, R.F. Tichy, 《序列、偏差及其应用》, **(1997)** 施普林格数学讲义 **1651**

[E] F.Edler：对 ***Steiner*** 基本几何证明的补充，论圆的面积大于任何周长相同的其他平面图形, 《哥廷根科学学会新闻》¨（1882）, 73-80

[K] S. Kakutani，S. 单位区间上的均匀分布问题 $[0,1]$。测度论（会议论文集, 奥伯沃尔法赫，1975）, 369-375。施普林格数学讲义，**541** （1976）

[Kl] D. Klein，使用有限方向集进行施泰纳对称化, 《应用数学进展》**48** （2012）, 1322-1338

[KN] L. Kuipers，H. Niederreiter，序列的均匀分布，Wiley（1974）

[M]P. Mani-Levitska，随机 ***Steiner*** 对称化, 《匈牙利数学科学研究》**21(3-4)**, （1986）, 373-378

[R] A. R´enyi，实数的表示及其遍历性质, 《匈牙利科学院数学学报》, **8 (3-4)**（1957）, 477- 493

[T] G. Talenti, 标准等周定理。载于：Gruber, P.M., Wills, J.M.（编）《凸几何手册》, 73-123页，北荷兰出版社, （1993）

[V1] A. Volčič, *Kakutani*分割过程的一种推广，Ann. Mat. Pura e Appl. (4)190 第1期，（2011），45-54页[V2]A. Volčič, 集合与函数的随机 *Steiner* 对称化，Calc. Var. Partial Differential Equations 46，第3-4期，（2013），555-569页，[V3]A. Volčič, 随机对称化的迭代, Annali di Mat. Pura e Appl.，195第5期，（2016），1685-1692页[We]C. Weiß, 关于*LS*序列的分类，Unif. Distrib. Theory13，第2期，（2018），83-92页.[W] H. Weyl, 关于丢番图逼近领域中的一个问题, Nach. Ges. Wiss. G¨ottingen, Math.-phys. Kl.（1914），234-244