arXiv:2603.00036v1 [math.RA] 8 Feb 2026

首一矩阵多项式的扰动

CONG TRINH LE、GUE MYUNG LEE、YONGDO LIM 和 TIEN SON PHAM

摘要。本文研究矩阵多项式的系数在结构化扰动下的稳定性。更确切地说，我们考虑一族矩阵多项式

$$P_u(\lambda) = A_d(u)\lambda^d + A_{d-1}(u)\lambda^{d-1} + \cdots + A_0(u),$$

其矩阵系数关于参数向量 $u \in \mathbb{C}^p$ 连续且半代数地变化。

假设该矩阵多项式是首一的，我们证明，与 $P_u(\lambda)$ 相关的谱、 ε-伪谱、数值域和联合数值域定义了关于参数 u 的 Hölder 连续集值映射。此外，参数空间 $\mathbb{C}^p$ 可分解为有限个解析半代数子流形的并，使得在每个子流形上， $P_u(\lambda)$ 的特征值和 Jordan 对关于 u 解析变化。

我们还注意到，若将首一性假设替换为首项系数矩阵$A_d(u)$的局部非奇异性，大多数结果仍然成立。不过，为了简化表述并避免额外的技术假设，本文始终采用首一情形；特别是，关于数值域的结果需要这些额外假设。

1. 引言

设 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 为所有 $n\times n$ 复矩阵构成的代数，并考虑如下形式的扰动矩阵多项式

$$P_u(\lambda) \;:=\; A_d(u)\lambda^d + A_{d-1}(u)\lambda^{d-1} + \cdots + A_0(u),$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $A_k(u) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ，对 $u \in \mathbb{C}^p$. 成立。矩阵（及算子）多项式的研究历史悠久，尤其是在谱分析和数值域方面；详情请参阅 [Gantmacher，1959年；Gohberg等，1982年；Lancaster，1966年；Markus， 1988]。

我们先给出一些形式化定义。首先，对于每个参数 $u \in \mathbb{C}^p$，集合

$$\sigma(u) \;:=\; \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det P_u(\lambda) = 0\}$$

称为矩阵多项式 $P_u(\lambda)$的谱。给定一个非负实数 ϵ， ϵ-伪谱定义为 $P_u(\lambda)$

$$\Lambda_\epsilon(u) \;:=\; \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det P_v(\lambda) = 0 \text{ for some } v \in \mathbb{C}^p \text{ with } \|v-u\| \le \epsilon\}.$$

日期：2026年3月3日。2000 数学学科分类。15A18; 15A22; 65F15; 65F35; 14P10; 32B20。关键词和短语。矩阵多项式；结构化扰动；谱； ϵ- 伪谱；数值域；Jordan 对；稳定性；半代数集。

我们对 ε-伪谱的定义对应于由参数向量 u的扰动所诱导的结构化伪谱。经典伪谱考虑范数有界的任意扰动，而我们的定义将扰动限制为由允许的参数变化所产生的扰动。这一框架与控制和多项式特征值问题中研究的结构化伪谱相一致 [Tisseur 和 Higham，2001，Higham 和 Tisseur， 2003]。

回顾一下，对于矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其数值域定义为 $W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$. $P_u(\lambda)$ 的数值域定义为

$$W(u) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x^*P_u(\lambda)x = 0 \text{ for some } x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\},$$

其包含 $\sigma(u)$。此处及下文中，符号 x^* 表示 $x.$的共轭转置。经典数值域的一个重要推广是矩阵 $A_0(u) \ldots, A_d(u)$ 组成的 $(d + 1)$ 元组的联合数值域，其定义为

$$JW(u) := \{(x^*A_0(u)x, \ldots, x^*A_d(u)x) \mid x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

矩阵多项式的谱、 ϵ-伪谱、数值域和联合数值域在研究各种纯理论和应用领域时都很有用；例如参见 [Armentia 等人, 2017, Binding 和 Li, 1991, Boulton 等人, 2008, Doyle, 1982年, Duffin, 1955, Fan 和 Tits, 1988年, Gau 等人, 2011, Gohberg 等人, 1982年, Gustafson 和 Rao, 1997, Gutkin 等人, 2004, Higham 和 Tisseur, 2002, Higham 和 Tisseur, 2003, Horn 和 Johnson, 2013, Jonckheere等人, 1998, Lancaster, 1966年, Lancaster 和 Psarrakos, 2001, Lancaster 等人, 2003, Lancaster 和 Psarrakos, 2005, Li 和 Rodman, 1994, Li 和 Poon, 1999, Li 和 Poon, 2009, Maroulas与Psarrakos, 1997, Mosier, 1986年, Poon, 1997, Psarrakos 和 Tsatsomeros, 2000, Tisseur 和 Higham, 2001, Tisseur 和 Meerbergen, 2001, Trefethen, 1992, Trefethen, 1999a, Trefethen, 1999b, Zeng 和 Su, 2014] 以及其中的参考文献。

受 [Boulton 等人，2008，Lancaster 和 Psarrakos，2005，Li 和 Rodman，1994，Tisseur 和 Higham， 2001], 等人的研究启发，本文主要关注以下在应用中十分重要的问题：矩阵多项式的谱 $\sigma(u)$、 ϵ-伪谱 $\Lambda_\epsilon(u)$、数值域 $W(u)$，以及联合数值域 $JW(u)$ 在矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 的系数 $A_k(u)$ $k = 0$，1、.....、 d，在 $u \in \mathbb{C}^p$中发生扰动时，具有多大的稳定性？换言之，以下集值映射具有多大的稳定性？

- 谱集值映射
$$\sigma\colon \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}, \quad u \mapsto \sigma(u);$$
- 伪谱集值映射
$$\Lambda_\epsilon\colon \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}, \quad u \mapsto \Lambda_\epsilon(u);$$
- 数值域集值映射
$$W\colon \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}, \quad u \mapsto W(u);$$
- 联合数值域集值映射
$$JW\colon \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}^{d+1}, \quad u \mapsto JW(u).$$

假设矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 是首一的（即 $A_d(u) \equiv I_d$-单位矩阵），其矩阵系数 $A_k(u)$ $k = 0$，1，.....， $d-1$，在参数空间 $\mathbb{C}^p$. 上是连续的半代数函数。借助半代数几何的结果，我们将证明：(i) 上述集值映射是 H¨older 连续的；(ii) 存在 $\mathbb{C}^p$ 的一个开且稠密的半代数子集，在该子集上

映射 σ、 Λ_ϵ 和 W 是 H¨older 连续的，且具有显式次数，而映射 JW 是利普希茨连续的。矩阵多项式的扰动并非任意的，而是由参数向量 $u \in \mathbb{C}^p$ 的变化所引起的。这对应于矩阵系数的结构化扰动，这种情况自然出现在系数依赖于物理、几何或设计参数的应用中。我们的分析着眼于此类结构化扰动下谱对象的稳定性。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾半代数几何中的一些基本概念和结果。第 3 节讨论集值映射 $\sigma, \Lambda_\epsilon, W,\ \partial W$和 JW 以及谱半径的 H¨older 连续性

$$\mathfrak{r}(u) := \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(u)\}.$$

此外，本节还给出了 ϵ-伪谱及其边界的一些几何性质。最后，第 4 节证明，参数空间 $\mathbb{C}^p$ 可以分解为有限个解析半代数子流形的并，使得单位首项系数矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 的特征值和 Jordan 对在每个子流形上的限制都是解析的。

注 1.1. 一般而言，可以放宽矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 为首一的假设。本文的大多数结果在首项系数 $A_d(u)$ 仅为局部非奇异时仍然成立，也就是说，对于每个 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$ ，都存在 $\tilde{u}$ 的一个邻域 U，使得对所有 $u \in U$， $A_d(u)$ 都是非奇异的。

尽管如此，为简化论述并避免额外的技术性假设，我们将讨论限制在首一情形 $A_d(u) \equiv I_d$ 。在某些章节中——尤其是涉及数值域的章节——为了保证相应集合的有界性与稳定性，对首项系数隐含地需要更强的条件。这些额外假设会在需要之处明确陈述。

记号。 对每个 $p \in \mathbb{N}$、 $p > 0$，空间 $\mathbb{C}^p$ 配备一个范数，记为 $\|\cdot\|$. 。对于给定的 $u \in \mathbb{C}^p$ 以及给定的 $\delta > 0$， $\mathbb{C}^p$ 中以 x 为中心、半径为 δ 的闭球记为 $\mathbb{B}(u,\ \delta)$。 对于矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$， $\|A\|$ 表示 A.的从属矩阵范数

2. 半代数几何预备知识

我们来回顾半代数几何的一些基本概念与结果（例如，参见 [Bochnak 等人, 1998]），这些是我们所需要的。

定义 2.1. (i) $\mathbb{R}^n$ 的子集称为半代数的，如果它是形如下列集合的有限并

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, i = 1, \ldots, k; f_i(x) > 0, i = k+1, \ldots, p\},$$

其中所有 f_i 均为多项式。

(ii) 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 与 $B \subset \mathbb{R}^m$ 为半代数集。映射 F： $A \to B$ 称为半代数的，如果其图

$$\{(x, y) \in A \times B \mid y = F(x)\}$$

是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. 中的一个半代数子集

半代数集类在有限次交、有限次并和补集运算下封闭；半代数集的笛卡尔积仍是半代数集。此外，半代数集类的一个重要性质是其在线性投影下的稳定性（例如，参见 [Bochnak 等人， 1998]）。

定理 2.2 (Tarski–Seidenberg定理)。 半代数集在半代数映射下的像是半代数集。

根据 Tarski–Seidenberg定理，不难看出，半代数集的闭包、内部和边界都是半代数集。

定义 2.3。 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 和 $f\colon A \to \mathbb{R}^m$. 若存在 $\mathbb{R}^n$ 中的 p 的一个开邻域 U 以及一个解析映射 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$，使得其限制 $f|_{A\cap U}$等于 $f|_{A\cap U}$.，则称映射 f 在点 $p \in A$ 处解析。若映射 f在 A.中的每一点处都解析，则称其在 A 上解析。

定义 2.4。 A 的非空子集是 $\mathbb{R}^n$的解析 k维子流形，其中 $1 \le k \le n$，若对于 A 中的每个点 p ，都存在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开邻域 W ，其中包含 p ，以及 $\mathbb{R}^k$ 中的一个开集 U ，使得经过某种坐标置换后，我们有

$$A \cap W = \operatorname{graph} \phi := \{(u, \phi(u)) \mid u \in U\},$$

其中 $\phi\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ 是一个解析映射。

按照约定， $\mathbb{R}^n$ 中的一个点是 $\mathbb{R}^n$.的解析零维子流形。

根据细胞分解定理（见 [Bochnak 等人， 1998]），对于任意半代数子集 $A \subset \mathbb{R}^n$，我们可以将 A 写成有限多个不同维数的解析半代数流形的不交并。因此，非空半代数集 A 的维数$\dim A$ 可定义为其分解中维数最高的流形的维数。这个维数定义良好，且与 A. 的分解无关。按照约定，空集的维数取为负无穷。我们将用到以下结果（见[Bochnak 等人， 1998]）。

命题 2.1。 若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是非空半代数集，则 A 的边界∂A 也是半代数集，并且有

$$\dim \partial A < \dim A.$$

命题 2.2。 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是连续半代数映射。那么对于任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$，存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$ ，使得

$$\|f(x) - f(x')\| \quad \le \quad c\|x - x'\|^\alpha \quad \text{for all} \quad x, x' \in K.$$

证明。 这是 Łojasiewicz 不等式的直接推论（例如，参见 [Hà与Phạm, 2017, 定理 1.14]）。□

注2.5。 一般而言，很难得到上述命题中 Łojasiewicz 指数 α 的显式公式；关于这一主题的更多详情，请参见 [Dinh 与 Phạm, 2016, Dinh 与 Phạm, 2017, Kurdyka 与 Spodzieja, 2014, Phạm, 2012]。

通过将 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 对应起来，我们可以在 $\mathbb{C}^n$ 中定义半代数集，并定义从 $\mathbb{C}^n$ 中的半代数集到 $\mathbb{C}^m$. 的半代数映射。因此，如果将实数域 $\mathbb{R}$ 替换为复数域 $\mathbb{C}$.，本小节中的结果仍然成立。

3. 集值映射的稳定性

在本文余下部分，我们令

$$P_u(\lambda) := A_d(u)\lambda^d + A_{d-1}(u)\lambda^{d-1} + \cdots + A_0(u)$$

设为矩阵多项式，其中 λ 是复变量， $A_k(u)$ $k = 0,\ldots,d,$是复 $n \times n$ 矩阵，其元素是$u \in \mathbb{C}^p$.上的连续半代数函数

引理 3.1. 设 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$. 对于充分小的 $\delta > 0$ ，存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$ ，使得

$$\max_{k=0,\ldots,d} \|A_k(u) - A_k(u')\| \leq c\|u - u'\|^\alpha \quad \textit{for all} \quad u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

证明。 这由矩阵 $A_k(u),k = 0, \ldots, d,$的连续性和半代数性以及命题 2.2 得出。 □

引理 3.2. 设 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$. 对于充分小的 $\delta > 0$ 以及任意紧 $K \subset \mathbb{C}$，存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$ ，使得

$$\|P_u(\lambda) - P_{u'}(\lambda)\| \leq c\|u - u'\|^\alpha \quad \textit{for all} \quad \lambda \in K \textit{ and all } u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

证明。 设给定紧的 $\delta > 0$ 与 $K \subseteq \mathbb{C}$ 。对所有 $\lambda \in K$ 以及所有u，我们有 $u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$,

$$\begin{aligned}
\|P_u(\lambda) - P_{u'}(\lambda)\| &\leq \sum_{k=0}^{d} \|A_k(u) - A_k(u')\||\lambda|^k \\
&\leq \left(\max_{k=0,\ldots,d} \|A_k(u) - A_k(u')\|\right) \sum_{k=0}^{d} |\lambda|^k \\
&\leq \left(\max_{k=0,\ldots,d} \|A_k(u) - A_k(u')\|\right) \sum_{k=0}^{d} c_0^k,
\end{aligned}$$

其中 $c_0 := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in K\} < +\infty$. 于是所需结论由引理 3.1 得出。□

定义 3.3. 称集值映射[1] $\mathcal{S}\colon \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}^q$ 在 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$ 处为$H\ddot{o}lder$连续，次数为 α ，如果存在常数 $c > 0$ 以及 $\tilde{u}$ 的一个开邻域$U \subset \mathbb{C}^n$ ，使得

$$\mathcal{S}(u) \subset \mathcal{S}(u') + c\|u - u'\|^\alpha \mathbb{B} \quad \text{for all} \quad u, u' \in U,$$

其中 $\mathbb{B}$ 表示 $\mathbb{C}^q$.中的单位闭球

下文中，除非另有说明，我们假设 $P_u(\lambda)$ 是一个首一矩阵多项式（即 $A_d(u)$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的单位矩阵 I ），并研究谱（以及 ϵ-伪谱、数值域和联合数值域）集值映射的 H¨older 连续性。

[1]回顾一下， $\mathcal{S}$ 是从 X 到 Y的集值映射 或多值函数，记作 $\mathcal{S}\colon X \rightrightarrows Y$，如果对每个 $u \in X$， $\mathcal{S}(u)$是 Y.的子集

3.1. 谱集值映射的连续性。对于每个 $u \in \mathbb{C}^p$，我们回顾一下，矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 的谱定义为

$$\sigma(u) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det P_u(\lambda) = 0\}.$$

注意，$\det P_u(\lambda)$ 是关于变量 λ 的 dn 次首一多项式，因此集合$\sigma(u)$至多有 dn 个点。

引理 3.4。 设 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$. 对于充分小的 $\delta > 0$，存在一个紧集 $K \subset \mathbb{C}$，使得

$$\sigma(u) \subset K \quad \textit{for all} \quad u \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

证明。 根据定义，$\det P_u(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ 是一个首一多项式，其系数连续依赖于参数 $u \in \mathbb{C}^p$. 。因此，方程 $\det P_u(\lambda) = 0$ 的根是 u. 中的连续函数。由于闭球 $\mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$ 是紧的，故所需结论成立。 □

定理 3.5。 设 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$. 对于充分小的 $\delta > 0$，存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$\sigma(u) \subset \sigma(u') + c\|u - u'\|^{\alpha}\mathbb{B} \quad \textit{for all} \quad u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

特别地，谱集值映射

$$\sigma \colon \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}, \quad u \mapsto \sigma(u),$$

是关于 $\tilde{u}$. 的 α 阶 *H¨older* 连续

证明。 固定一个实数 $\delta > 0$. 根据引理 3.4，存在一个紧集 $K \subset \mathbb{C}$使得

$$\sigma(u) \subset K \quad \text{for all} \quad u \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

根据引理 3.2，我们可以找到常数 $c_0 > 0$ 和 $\alpha_0 > 0$，使得

$$\|P_u(\lambda) - P_{u'}(\lambda)\| \leq c_0\|u - u'\|^{\alpha_0} \tag{3.1}$$

对所有 $\lambda \in K$ 以及所有 $u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$。

此外，由于 $P_u(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式矩阵，其系数是关于 u 的连续函数，且集合 K 和 $\mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$ 是紧集，因此存在一个常数 $c_1 > 0$ 使得

$$\|P_u(\lambda)\| \leq c_1 \quad \text{for all} \quad \lambda \in K \text{ and all } u \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta). \tag{3.2}$$

任取 $u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$ 以及任意的 $\lambda \in \sigma(u)$。 由于 $\sigma(u')$ 是首一多项式 $\det P_{u'}(z) \in \mathbb{C}[z]$ 的根集，其次数为 dn，因此很容易看出[2]

$$\operatorname{dist}(z, \sigma(u'))^{dn} \leq |\det P_{u'}(z)| \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{C},$$

[2]更一般地，对于次数为 d 的多项式 $p \in \mathbb{C}[z]$，以下不等式成立

$$|a_d|\operatorname{dist}(z, p^{-1}(0))^d \leq |p(z)| \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{C},$$

其中 a_d 表示 p. 的最高次项系数。为此，我们写作 $p(z) = a_d \prod_{k=1}^{d}(z - z_k)$，其中 $z_1, \ldots\ldots, z_d$ 是 p. 的根（不一定互不相同）。那么对于任意 $z \in \mathbb{C}$，我们有

$$|p(z)| = |a_d| \prod_{k=1}^{d} |z - z_k| \geq |a_d| \prod_{k=1}^{d} \min_{j=1,\cdots,d} |z - z_j| = |a_d|\operatorname{dist}(z, p^{-1}(0))^d.$$

其中 dist(·, ·)表示到某个集合的距离函数。特别地,

$$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(u'))^{dn} \le |\det P_{u'}(\lambda)|. \tag{3.3}$$

但是，由于 $\lambda \in \sigma(u)$，$\det P_u(\lambda) = 0$ 。因此

$$\begin{aligned} |\det P_{u'}(\lambda)| &= |\det P_u(\lambda) - \det P_{u'}(\lambda)| \\ &\le n \max\{\|P_u(\lambda)\|, \|P_{u'}(\lambda)\|\}^{n-1} \cdot \|P_u(\lambda) - P_{u'}(\lambda)\|, \end{aligned}$$

其中，不等式由 [Bhatia，2007，推论 20.2]）得出。因此，由不等式 (3.1)、(3.2) 和 (3.3) 可推得

$$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(u'))^{dn} \le nc_1^{n-1}c_0\|u - u'\|^{\alpha_0},$$

于是定理很容易得证。 □

注 3.6。如果将关于矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 首一性的假设替换为其首项系数矩阵 $A_d(u)$ 的局部非奇异性假设，则定理 3.5 仍然成立，如下所示。

对于每个 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$，存在 $\delta > 0$，使得 $\det A_d(u) \neq 0$ 对所有 $u \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$ 均成立。

3.2. **伪谱集值映射的连续性 ϵ-伪谱集值映射。给定参数 以及给定的，** ϵ-伪谱定义为 $P_u(\lambda)$

$$\Lambda_\epsilon(u) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det P_v(\lambda) = 0 \text{ for some } v \in \mathbb{B}(u, \epsilon)\}.$$

根据定义， $\Lambda_\epsilon(u)$是半代数集

$$\{(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \mid \det P_v(\lambda) = 0, \|v - u\| \le \epsilon\}$$

通过投影映射 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$，$(\lambda, v) \mapsto \lambda$，得到，因此根据 Tarski–Seidenberg 定理， ϵ-伪谱 $\Lambda_\epsilon(u)$是半代数集。

定理 3.7。设 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$ 和 $\tilde{\epsilon}, \delta > 0$ 给定。则存在常数 $c > 0$和 $\alpha > 0$ 使得

$$\Lambda_\epsilon(u) \subset \Lambda_{\epsilon'}(u') + c\big(\|u - u'\|^\alpha + |\epsilon - \epsilon'|^\alpha\big)\mathbb{B}$$

对所有 $u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$ 以及所有 $\epsilon, \epsilon' \in [0, \tilde{\epsilon}]$. 。特别地， ϵ-伪谱集值映射

$$\Lambda_\epsilon \colon \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}, \quad u \mapsto \Lambda_\epsilon(u),$$

在 $\tilde{u}$. 处是 α 次 *Hölder* 连续的

证明。 根据定理 3.5，存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$\sigma(v) \subset \sigma(v') + c\|v - v'\|^\alpha \mathbb{B} \tag{3.4}$$

对所有 v， $v' \in \mathbb{B}(\tilde{u}$， $\tilde{\epsilon} + \delta)$。 任取 u， $u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}$， $\delta)$ 以及任意的 ϵ， $\epsilon' \in [0, \tilde{\epsilon}]$. 。所需结论可由下文的断言 3.8 和断言 3.9 立即推出。□

断言 3.8. 我们有

$$\Lambda_\epsilon(u) \subset \Lambda_{\epsilon'}(u) + c|\epsilon - \epsilon'|^\alpha \mathbb{B}.$$

证明。 若 $\epsilon \le \epsilon'$， 则 $\Lambda_\epsilon(u) \subset \Lambda_{\epsilon'}(u)$， 这就推出了该断言。因此我们假设$\epsilon > \epsilon'$.

任取 $\lambda \in \Lambda_\epsilon(u)$。 根据定义，存在 $v \in \mathbb{B}(u, \epsilon)$，使得 $\lambda \in \sigma(v)$。若 $v \in \mathbb{B}(u, \epsilon')$，则 $\lambda \in \Lambda_{\epsilon'}(u)$， 因此无需证明任何内容。所以我们假设 $v \notin \mathbb{B}(u, \epsilon')$。设 v' 为连接

u 与 v 的线段和以 u 为球心、半径为 ϵ'. 的球面的交点。于是 $v' \in \mathbb{B}(u, \epsilon')$，因此$\sigma(v') \subset \Lambda_{\epsilon'}(u)$。此外，显然

$$\|v - v'\| \;=\; \|v - u\| - \|u - v'\| \;=\; \|v - u\| - \epsilon' \;\le\; \epsilon - \epsilon'.$$

另一方面，由于以下不等式成立，我们有 $v,\ v' \in \mathbb{B}(\tilde{u},\ \tilde{\epsilon} + \delta)$

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{u}\| &\le \|v - u\| + \|u - \tilde{u}\| \le \epsilon + \delta \le \tilde{\epsilon} + \delta, \\ \|v' - \tilde{u}\| &\le \|v' - u\| + \|u - \tilde{u}\| \le \epsilon' + \delta \le \tilde{\epsilon} + \delta. \end{aligned}$$

因此，由 (3.4) 可得

$$\operatorname{dist}(\lambda, \Lambda_{\epsilon'}(u)) \;\le\; \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(v')) \le c\|v - v'\|^{\alpha} \le c(\epsilon - \epsilon')^{\alpha}.$$

由于 λ 在 $\Lambda_\epsilon(u)$ 中是任意的，我们得到所需的包含关系。 □

命题 3.9。以下包含关系成立

$$\Lambda_{\epsilon'}(u) \subset \Lambda_{\epsilon'}(u') + c\|u - u'\|^{\alpha}\mathbb{B}.$$

证明。任取 $\lambda \in \Lambda_{\epsilon'}(u)$。根据定义，存在 $v \in \mathbb{B}(u, \epsilon')$ 使得$\lambda \in \sigma(v)$。若 $v \in \mathbb{B}(u', \epsilon')$，则 $\sigma(v) \subset \Lambda_{\epsilon'}(u')$，这意味着 $\lambda \in \Lambda_{\epsilon'}(u')$，因此无需证明。故可假设 $v \notin \mathbb{B}(u', \epsilon')$。令 v' 为连接 v 与 u' 的线段和以u' 为球心、半径为 ϵ'. 的球面的交点。于是 $\sigma(v') \subset \Lambda_{\epsilon'}(u')$，并且我们有

$$\begin{aligned} \|v - v'\| &= \|v - u'\| - \|u' - v'\| \\ &\le (\|v - u\| + \|u - u'\|) - \epsilon' \\ &\le (\epsilon' + \|u - u'\|) - \epsilon' = \|u - u'\|. \end{aligned}$$

另一方面，我们有 $v,\ v' \in \mathbb{B}(\tilde{u},\ \tilde{\epsilon} + \delta)$，因为

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{u}\| &\le \|v - u\| + \|u - \tilde{u}\| \le \epsilon' + \delta \le \tilde{\epsilon} + \delta, \\ \|v' - \tilde{u}\| &\le \|v' - u'\| + \|u' - \tilde{u}\| \le \epsilon' + \delta \le \tilde{\epsilon} + \delta. \end{aligned}$$

因此，由 (3.4) 可得

$$\operatorname{dist}(\lambda, \Lambda_{\epsilon'}(u')) \;\le\; \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(v')) \le c\|v - v'\|^{\alpha} \le c\|u - u'\|^{\alpha}.$$

由于 λ 在 $\Lambda_{\epsilon'}(u)$，中是任意的，结论得证。 □

如果矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 是实的（即其所有系数均为实数）或厄米的（即其所有系数均为厄米矩阵），那么众所周知，$P_u(\lambda)$ 的谱关于实轴对称。对于矩阵多项式的 ϵ-伪谱，我们有类似的结果；另见 [Lancaster 和 Psarrakos，2005，命题 2.1]。该结果的证明很直接，因此 ωμυτεη省略。

命题 3.1。令 $u \in \mathbb{C}^p$ 和 $\epsilon > 0$. 假设对于所有 $v \in \mathbb{B}\,(u,\ \epsilon)$，矩阵 $A_k\,(v)$ $k = 0$、.....、d 均为实矩阵或厄米矩阵。那么 ϵ-伪谱$\Lambda_\epsilon\,(u)$ 关于实轴对称。

下一个结果是 [Lancaster 和 Psarrakos, 2005, 定理 2.3] 和 [Mosier, 1986年, 定理 2], 中相应结果在结构上的类比，这些结果是在参数相关扰动下得到的。证明沿用标准伪谱经典情形中的相同论证；例如参见 [Lancaster 和 Psarrakos, 2005, 定理 2.3]。

命题 3.2. 设 $u \in \mathbb{C}^p$ 和 $\epsilon > 0$. 则 ϵ-伪谱 $\Lambda_\epsilon(u)$ 至多有 dn 个连通分支，并且对于任意 $v \in \mathbb{B}(u, \epsilon)$ $P_v(\lambda)$ 在每个连通分支中都有一个特征值。此外， $P_u(\lambda)$ 和 $P_v(\lambda)$ 在 $\Lambda_\epsilon(u)$的每个连通分支中具有相同数目的特征值（计重数）。

下一个命题表明， ϵ-伪谱的边界由代数曲线构成。这一性质令人欣慰，因为尖点或自交点等困难点的数量是有限的。相关结果另见 [Boulton 等人，2008, Lancaster 和 Psarrakos，2005，Tisseur 和 Higham， 2001]。

命题 3.3. 对每个 $\epsilon > 0$， ϵ-伪谱$\Lambda_\epsilon(u)$的边界 $\partial\Lambda_\epsilon(u)$ 位于一条代数曲线上。特别地， $\partial\Lambda_\epsilon(u)$ 至多有有限个切线不存在的奇点，并且仅在有限个点处自交。

证明. 事实上， $\Lambda_\epsilon(u)$ 的边界是一个半代数集，这由 Tarski–Seidenberg 定理可得。此外，由命题 2.1 可知

$$\dim \partial\Lambda_\epsilon(u) < \dim \Lambda_\epsilon(u) \leq 2,$$

因此， $\partial\Lambda_\epsilon(u)$ лежа在 $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. 中的一条代数曲线上。根据 [Hà与Phạm, 2017, 定理 1, 1], 存在一个有限划分，将 $\partial\Lambda_\epsilon(u)$划分为若干点和解析半代数曲线。结论得证。□

注 3.10。 如果将关于矩阵多项式 $P_u(\lambda)$首一性的假设替换为注 3.6 中给出的首项系数矩阵 $A_d(u)$的局部非奇异性，则定理 3.7 仍然成立。

3.3. **数值域集值映射的连续性**。 对于任意 $u \in \mathbb{C}^p$，首一矩阵多项式 $P_u(\lambda)$的数值域定义如下

$$W(u) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x^* P_u(\lambda) x = 0 \text{ for some } x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

注意，如果 $\lambda \in \sigma(u)$，则存在一个单位向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得$x^* P_u(\lambda)x = 0$. 因此， $\sigma(u) \subset W(u)$。

根据定义， $W(u)$ 是半代数集

$$\{(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid x^* P_u(\lambda) x = 0 \text{ and } x^* x = 1\}$$

通过投影映射 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$，$(\lambda, x) \mapsto \lambda$，因此根据 Tarski–Seidenberg定理，它是半代数集。此外，我们可以看到数值域 $W(u)$ 是闭集。由于 $P_u(\lambda)$ 是首一矩阵多项式， $W(u)$ 有界，因此它至多有 d 个连通分支，其中 d是$P_u(\lambda)$的次数；参见 [Li 和 Rodman，1994 年，定理 2.2 和 2.3]。

引理 3.11。 令 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$. 对于充分小的 $\delta > 0$，存在一个紧$K \subset \mathbb{C}$ ，使得

$$W(u) \subset K \quad \textit{for all} \quad u \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

证明。 首一矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 的定义意味着

$$x^* P_u(\lambda) x \;=\; (x^* x)\,\lambda^d + (x^* A_{d-1}(u) x)\,\lambda^{d-1} + \cdots + (x^* A_0(u) x)$$

是关于 $\mathbb{C}[\lambda]$ 的首一多项式，其系数连续依赖于 $(x, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$. 因此，方程 $x^* P_u(\lambda)x = 0$ （其中 $x^* x = 1$ ）的根是 (x, u) 上的连续函数。 所需结果由集合 $\{x \in \mathbb{C}^n \mid x^* x = 1\} \times \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$. □的紧性得出

定理 3.12。 设 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$. 对于充分小的 $\delta > 0$，存在常数$c > 0$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$W(u) \subset W(u') + c\|u - u'\|^{\alpha}\mathbb{B} \quad \textit{for all} \quad u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

特别地，数值集值映射

$$W : \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}, \quad u \mapsto W(u),$$

在 $\tilde{u}$. 处是关于 α 次数的 *H¨older* 连续

证明。 固定 $\delta > 0$. 。那么，对于任意 $u \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$ 和任意 $\lambda \in W(u)$，根据定义，存在一个单位向量 $x \in \mathbb{C}^n$，使得 $x^* P_u(\lambda)x = 0$。对于每个 $u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$，函数

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto x^* P_{u'}(z)x,$$

是关于变量 z 的 d 次首一多项式函数，其系数为 $x^* A_k(u')x$, $k = 0, \ldots, d$，它们是 u'. 上的连续函数。我们可以写成

$$x^* P_{u'}(z)x = \prod_{k=1}^{d} (z - \lambda_k(u')),$$

其中 $\lambda_k(u') \in \mathbb{C}$。另请注意，

$$\lambda_k(u') \in W(u') \quad \text{for all} \quad k = 1, \ldots, d.$$

因此

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\lambda, W(u')) &\leq \min_{k=1,\ldots,d} |\lambda - \lambda_k(u')| \\
&\leq \left(\prod_{k=1}^{d} |\lambda - \lambda_k(u')| \right)^{\frac{1}{d}} = \left| x^* P_{u'}(\lambda)x \right|^{\frac{1}{d}} \\
&= \left| x^* P_u(\lambda)x - x^* P_{u'}(\lambda)x \right|^{\frac{1}{d}} = \left| x^* (P_u(\lambda) - P_{u'}(\lambda))x \right|^{\frac{1}{d}} \\
&\leq \left(\|P_u(\lambda) - P_{u'}(\lambda)\| \cdot \|x\|^2 \right)^{\frac{1}{d}} = \left\| P_u(\lambda) - P_{u'}(\lambda) \right\|^{\frac{1}{d}}.
\end{aligned}$$

于是，证明由引理 3.2 和 3.11 可得。 □

推论 3.13。 设 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$. 。当 $\delta > 0$ 充分小时，存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$\partial W(u) \subset \partial W(u') + c\|u - u'\|^{\alpha}\mathbb{B} \quad \textit{for all} \quad u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

特别地，集值映射

$$\partial W : \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}, \quad u \mapsto \partial W(u),$$

在 $\tilde{u}$. 处是 *H¨lder* 连续的，次数为 α

证明。 这是定理 3.12 的直接推论。 □

注 3.14。 (i) 如果矩阵多项式 $P_u(z)$ 是实的或厄米的，那么其数值域 $W(u)$ 关于实轴对称。证明与命题 3.1 的证明类似，因此我们省略细节。

(ii) 对于每个 $u \in \mathbb{C}^p$，数值域的边界 $\partial W(u)$，由于塔斯基–赛登伯格定理而构成一个半代数集。此外，由命题 2.1 可知

$$\dim \partial W(u) < \dim W(u) \leq 2,$$

因此 $\partial W(u)$ 位于一条代数曲线上。根据 [Hà与Phạm, 2017, 定理 1.1]，$\partial W(u)$ 可有限划分为若干点和解析半代数曲线。因此，$\partial W(u)$ 至多有有限个切线不存在的奇点，且仅在有限个点处与自身相交。此外，根据 [Hà与Phạm, 2017, 定理 1.4]，，存在一个整数 N，使得对于所有 u.，$\partial W(u)$ 的不可微点数不超过 N。另请参见 [Jonckheere 等人, 1998,Maroulas 和 Psarrakos, 1997]，了解矩阵多项式数值域边界上不可微点的一些代数和拓扑性质。

(iii) 若考虑满足以下条件的任意矩阵多项式 $P_u(\lambda) = A_d(u)\lambda^d + A_{d-1}(u)\lambda^{d-1} + \cdots + A_0(u)$，定理 3.12 仍然成立：

$$\inf_{\|x\|=1} |x^* A_d(u) x| \geq \gamma > 0 \quad \text{for } u \in B(\tilde{u}, \delta).$$

需要补充一项充分条件，即假设 $A_d(u)$ 厄米正定（在该邻域内一致成立）。

3.4. 联合数值域集值映射的连续性。 回顾一下，对于任意 $u \in \mathbb{C}^p$，矩阵$A_0(u)\ldots$，$A_d(u)$ 的 $(d+1)$ 元组的联合数值域 定义为

$$JW(u) := \{(x^* A_0(u)x, \ldots, x^* A_d(u)x) \mid x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

联合数值域是单位球面的连续像，因此是紧致且连通的，但不一定是凸的；参见 [Binding 和 Li, 1991]。根据 Tarski–Seidenberg定理，$JW(u)$ 是半代数集，特别是，它只有有限个连通分支。此外，从定义可观察到

$$W(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a_d\lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad (a_0, \ldots, a_d) \in JW(u)\}.$$

定理 3.15。 设 $P_u(\lambda) := A_d(u)\lambda^d + A_{d-1}(u)\lambda^{d-1} + \cdots + A_0(u)$ 为矩阵多项式。设 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$。那么，对于充分小的 $\delta > 0$，存在常数$c > 0$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$JW(u) \subset JW(u') + c\|u - u'\|^\alpha \mathbb{B} \quad \textit{for all} \quad u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

特别地，联合数值域集值映射

$$JW \colon \mathbb{C}^p \rightrightarrows \mathbb{C}, \quad u \mapsto JW(u),$$

在 $\tilde{u}.$处关于 α 次数是 ***H¨older*** 连续的

证明。 固定 $\delta > 0.$。由引理 3.1，存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$，使得对所有 $u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$，均有

$$\max_{k=0,\ldots,d} \|A_k(u) - A_k(u')\| \leq c\|u - u'\|^\alpha.$$

任取 $u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta)$，以及任意的 $y \in JW(u)$。根据定义，存在一个向量$x \in \mathbb{C}^n$，满足 $x^*x = 1$，使得

$$y = (x^* A_0(u)x, \ldots, x^* A_d(u)x).$$

Let

$$y' := (x^* A_0(u')x, \ldots, x^* A_d(u')x) \in JW(u').$$

我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(y, JW(u')) &\le \|y - y'\| \\ &\le \max_{k=0,\dots,d} \left|x^*\big(A_k(u) - A_k(u')\big)x\right| \\ &\le \max_{k=0,\dots,d} \|A_k(u) - A_k(u')\|\|x\|^2 \;\le\; c\|u - u'\|^\alpha.\end{aligned}$$

这就得到了所需的结论。 □

3.5. **谱半径的稳定性**。 矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 的谱半径 定义为

$$\mathfrak{r}(u) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(u)\}.$$

谱半径的稳定性如下所述。

定理 3.16。 设 $P_u(\lambda) := A_d(u)\lambda^d + A_{d-1}(u)\lambda^{d-1} + \cdots + A_0(u)$ 是一个矩阵多项式。设 $\tilde{u} \in \mathbb{C}^p$. 对于充分小的 $\delta > 0$ ，存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$ ，使得

$$|\mathfrak{r}(u) - \mathfrak{r}(u')| \;\le\; c\|u - u'\|^\alpha \quad \textit{for all} \quad u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

证明。 根据假设，$\det P_u(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ 是一个首一多项式，其系数关于参数 $u \in \mathbb{C}^p$. 连续变化。因此，方程的所有根

$$\det P_u(\lambda) = 0$$

关于参数 u. 连续变化。由此可知，函数 $u \mapsto \mathfrak{r}(u)$ 连续。另一方面，根据Tarski–Seidenberg定理可知，函数

$$\mathbb{C}^p \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \mathfrak{r}(u),$$

是半代数的。于是所需结论由命题 2.2 得出。 □

3.6. **集值映射的一般性**。 下一个结果表明，一般而言，集值映射 σ、Λ_ϵ、W、∂W 和 JW 均为 H¨older 连续，且其指数有明确的确定值。

定理 3.17。 存在一个开且稠密的半代数集 $U \subset \mathbb{C}^p$ ，满足以下条件：

(i) 集值映射 σ、Λ_ϵ、W 和 ∂W 在 U 上的限制分别为 *H¨older* 连续，连续阶数分别为 $\frac{1}{nd}$、$\frac{1}{nd}$、$\frac{1}{d}$ 和 $\frac{1}{d}$。(ii) 集值映射 JW 在 U 上的限制为利普希茨连续。(iii) 谱半径 $\mathfrak{r}$ 在 U 上的限制为解析。

证明。 根据Hà与Phạm, 2017, 定理1.7]，存在一个开且稠密的半代数集 $U \subset \mathbb{C}^p$ ，使得谱半径 $\mathfrak{r}$ 以及矩阵 $A_0(u) \dots, A_d(u)$在 U上的限制都是解析的。特别地，(iii)项由此得证。

任取 $\tilde{u} \in U$. 。存在 $\delta > 0$ 使得 $\mathbb{B}(\tilde{u},\ \delta) \subset U$. 。于是我们可以找到一个常数 $c > 0$ ，使得

$$\max_{k=0,\dots,d} \|A_k(u) - A_k(u')\| \;\le\; c\|u - u'\| \quad \text{for all} \quad u, u' \in \mathbb{B}(\tilde{u}, \delta).$$

换言之，我们可以在引理 3.1 和 3.2 中令 $\alpha = 1$ 。最后，(i) 和 (ii) 两项可直接由定理 3.5、3.12、3.15 以及推论 3.13 的证明得出。

□

4. 首一矩阵多项式的乔丹对的稳定性

本节中，我们将研究首一矩阵多项式的 Jordan 对的稳定性

$$P_u(\lambda) := I\lambda^d + A_{d-1}(u)\lambda^{d-1} + \cdots + A_0(u),$$

其中 $A_k(u)$ $k = 0$，……， $d-1$，是复 $n \times n$ 矩阵，其元素是 $u \in \mathbb{C}^p$. 上的连续半代数函数

4.1. 首一矩阵多项式的 Jordan 对。首先，我们回顾首一矩阵多项式的 Jordan 对的定义

$$P(z) := Iz^d + A_{d-1}z^{d-1} + \cdots + A_0,$$

其中 $A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 对所有 $k = 0$，……， $d-1$均成立。该记号可见于 Gohberg 等人所著的书[Gohberg 等人， 1982]。

设 λ_0 是 $P(z)$ 的一个特征值。

定义 4.1. 若一个 n 维向量多项式 $\varphi(\lambda)$ 满足 $\varphi(\lambda_0) \neq 0$且 $P(\lambda_0)\ \varphi(\lambda_0) = 0$，则称其为对应于 λ_0 的 $P(z)$ 的根多项式。 λ_0 作为 $P(\lambda_0)\varphi(\lambda_0)$ 的零点的阶，称为根多项式 $\varphi(\lambda)$ 的阶。

设 $\varphi_1(\lambda)$ 是对应于 λ_0 的 $P(z)$ 的根多项式，且其阶最大为 k_1。那么我们可以写成

$$\varphi_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{k_1-1} (\lambda - \lambda_0)^j \varphi_{1j},$$

并且 $\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{1k_1-1}$ 构成对应于 λ_0 的 $P(z)$ 的约当链，也就是说，对每个 $i = 0, \ldots, k_1 - 1$，都有

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\lambda_0)\varphi_{1i-j} = 0,$$

其中， $P_{(j)}(\lambda_0)$ 表示矩阵多项式 $P(z)$ 对 z 在点 λ_0 处的第 j 阶导数。

设 $\varphi_2(\lambda) = \sum_{j=0}^{k_2-1} (\lambda-\lambda_0)^j\varphi_{2j}$ 是 $P(z)$ 的一个根多项式，其阶 $k_2 \le k_1$ 在所有特征向量不是 φ_{10} 的数乘的根多项式中最大。

假设已经选定了 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$，我们可以写成

$$\varphi_i(\lambda) = \sum_{j=0}^{k_i-1} (\lambda - \lambda_0)^j \varphi_{ij},\ i = 0, \ldots, s-1,$$

我们定义

$$\varphi_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{k_s-1} (\lambda - \lambda_0)^j \varphi_{sj}$$

k_s 是 $P(z)$ 的一个根多项式，其阶数在所有特征向量不属于特征向量 $\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{s-10}$ 张成空间的根多项式中最大。

继续这一过程，直到与 λ_0 对应的特征向量集合 $\mathrm{Ker}P(\lambda_0)$ 耗尽。因此，我们已经构造了 r 个根多项式

$$\varphi_i(\lambda) = \sum_{j=0}^{k_i-1} (\lambda-\lambda_0)^j \varphi_{ij},\ i=0,\dots,r,$$

其中 $r := \dim \mathrm{Ker}P(\lambda_0)$。这些约当链

$$\varphi_{10},\dots,\varphi_{1k_1-1},\quad \varphi_{20},\dots,\varphi_{2k_2-1},\quad \dots,\quad \varphi_{r0},\dots,\varphi_{rk_r-1}$$

称为对应于特征值 λ_0 的 $P(z)$ 的约当链的规范集。

现在，设 $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ 为 $P(z)$ 的不同特征值，且设 α_i 为 λ_i, $i=1,\dots,r$ 的多重度。显然，$\sum_{i=1}\alpha_i = mn$.

定义 4.2。对于每个 λ_i，我们选取一组对应于 λ_i 的 $P(z)$ 的约当链的规范集：

$$\varphi_{j0}^{(i)},\dots,\varphi_{jk_j^{(i)}-1}^{(i)},\quad j=0,\dots,s_i.$$

s_i应当注意，$\sum_{j=1} k_j^{(i)} = \alpha_i$。

记

$$X_i := \left[\varphi_{10}^{(i)}\cdots\varphi_{1k_1^{(i)}}^{(i)},\varphi_{20}^{(i)}\cdots\varphi_{2k_2^{(i)}-1}^{(i)},\cdots,\varphi_{s_i0}^{(i)}\cdots\varphi_{s_ik_{s_i}^{(i)}-1}^{(i)}\right]$$

这是一个大小为 $n\times\left(\sum_{j=1}^{s_i} k_j^{(i)}\right)^1 = n\times\alpha_i$ 的矩阵。

对于每个 $j=1,\ldots\ldots,s_i$，记 J_{ij} 为与特征值 λ_i. 对应的大小为 $k_j^{(i)}\times k_j^{(i)}$ 的约当块。我们用 J_i 表示块对角矩阵

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & 0 \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{is_i} \end{bmatrix}.$$

那么，如上构造的对 $(X_i,\ J_i)$ 称为与 λ_i 对应的 $P(z)$***Jordan*** 对。

记

$$X := \left[X_1,\dots,X_r\right],\quad J := \left[J_1,\dots,J_r\right].$$

则称 $(X,\ J)$ 为首一矩阵多项式 $P(z)$ 的一个乔丹对。

4.2. 乔丹对的稳定性。现在我们回过头来考察首一矩阵多项式

$$P_u(\lambda) := I\lambda^d + A_{d-1}(u)\lambda^{d-1}+\cdots+A_0(u),\ u\in\mathbb{C}^p.$$

对于每个 $u\in\mathbb{C}^p$，令 $(X_u,\ J_u)$ 为 $P_u(z)$ 的一个 Jordan 对，其中

$$X_u = \left[X_u^{(1)},\dots,X_u^{(r)}\right],\quad J_u := \mathrm{diag}\left[J_u^{(1)},\dots,J_u^{(r)})\right],$$

且每个 $(X_u^{(k)},\ J_u^{(k)})$、 $k = 1,\ \ldots\ldots,\ r$ 都是与特征值 $\lambda_i(u)$ 对应的 $P_u(z)$ 的 Jordan 对，其中 $\lambda_1(u)\ \ldots\ldots,\ \lambda_r(u)$ 是 $P_u(z)$ 的互异特征值。

下述定理的灵感来源于 I. Gohberg、P. Lancaster 和 L. Rodman 的工作 [Gohberget 等人，1982年，命题 5.10 和定理 5.11]。

定理 4.3。 存在一个有限划分，将 $\mathbb{C}^p$ 划分为解析的半代数子流形 M_1、$\ldots$、M_N，使得对于每个 $t = 1$、$\ldots$、N，以下结论成立：

(i) 对于每个 $u \in M_t$ ， J_u 中的约当块数量 r 及其大小q_1、$\ldots$、q_r均与 u.无关(ii) 特征值 $\lambda_k(u)\ k = 1$、$\ldots$、r 是 M_t.上关于 u 的解析函数(iii) X_u 的块 $X_u^{(k)}$、$k = 1$、$\ldots$、r 是 M_t.上关于 u 的解析函数

证明。 通过转化为线性化（使用伴随矩阵），我们可以假设 $P_u(\lambda)$是线性的，即 $P_u(\lambda) = I\lambda - C(u)$，其中

$$C(u) \quad := \quad \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_0(u) & -A_1(u) & -A_2(u) & \cdots & -A_{d-1}(u) \end{pmatrix}$$

是 $P_u(\lambda)$的伴随矩阵。 对于给定的 $k = 1,\ \ldots\ldots,\ dn$，记

$$Z_k \quad := \quad \{u \in \mathbb{C}^p \mid \det\big(I\lambda - C(u)\big) = 0 \text{ has exactly } k \text{ different roots}\}.$$

则集合 Z_k 是半代数的（由Tarski–Seidenberg定理），并且 $\mathbb{C}^p = \bigcup_{k=1}^{dn} Z_k$.

固定 k 并假设 $Z_k \neq \emptyset$. 由 Z_k 的构造可知， $I\lambda - C(u)$的不同特征值个数对 $u \in Z_k$. 为常数 k。因此设 $\lambda_1(u)\ldots\ldots,\ \lambda_k(u)$ $u \in Z_k$，为 $I\lambda - C(u)$的全部不同特征值。 对所有$i = 1,\ \ldots\ldots,\ k$，以及所有 $j,\ l = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ dn$，这些集合

$$\{u \in Z_k \quad | \quad \operatorname{rank}\big(I\lambda_i(u) - C(u)\big)^j = l\}$$

再次由Tarski–Seidenberg定理可知是半代数的，因为秩约束可以用涉及矩阵子式的多项式等式与不等式来表示，并且显然 Z_k 是这些集合的不交并。此外，借助 [Hà与Phạm, 2017，定理1.7]，我们可以把 Z_k 分解为 $\mathbb{C}^p$ 的有限个解析半代数子流形的不交并，使得特征值函数 $\lambda_k(u)$以及分块 $X_u^{(k)}$对于 $k = 1,\ \ldots\ldots,\ r$，在每个子流形上的限制都是解析的。

总而言之，我们可以写成 $\mathbb{C}^p = \bigcup_{t=1}^{N} M_t$，其中 M_t 是非空解析半代数子流形，并满足以下条件：

(a) 对于 $t \neq s,\quad M_t \cap M_s = \emptyset$ ；(b) $I\lambda - C(u)$ 的不同特征值个数对于 $u \in M_t$ 为常数；(c) 对于 $I\lambda - C(u)$ 的每个特征值 $\lambda_0(u)$（它在 M_t 上解析），

$$r(u; j) \quad := \quad \operatorname{rank}\big(I\lambda_0(u) - C(u)\big)^j$$

对于 $u \in M_t$ 和 $j = 1$ 为常数， 2， .. . . 与 $\lambda_0(u)$ 对应的 $C(u)$ 的约当标准形中约当块的大小完全由数值 $r(u; j)$ 确定；也就是说，

$$n - r(u; j) \quad = \quad \gamma_1(u) + \cdots + \gamma_j(u) \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, dn, \tag{4.1}$$

其中， $\gamma_j(u)$ 表示与 $\lambda_0(u)$ 对应且大小不小于 j 的 Jordan 块的数量（因此， $\gamma_1(u)$ 就是 Jordan 块的数量）。对于 $C(u)$ 的约当标准形，容易看出等式 (4.1) 成立；因此，该等式显然对 $C(u)$ 本身也成立。由于 $r(u; j)$ 对于 $u \in M_t$ 而言是常数，(4.1) 保证了与 $\lambda_0(u)$ 对应的 $C(u)$ 的 Jordan 结构对于 $u \in M_t$. 也为常数

证明完毕。 □

注释 4.4。 如果将关于矩阵多项式 $P_u(\lambda)$ 首一性的假设替换为注 3.6 中所述的首项系数矩阵 $A_d(u)$ 的局部非奇异性，那么定理 4.3 仍然成立。

参考文献

[Armentia 等人， 2017] Armentia, G., Gracia, J. M. 和 Velasco, F. E.（2017）。严格伪谱边界问题。《线性代数及其应用》，525：20–32。[Bhatia， 2007] Bhatia, R.（2007）。矩阵特征值的扰动界。工业与应用数学学会，费城，第2版。[Binding 和 Li， 1991] Binding, P. 和 Li, C.-K.（1991）。厄米矩阵的联合值域与同时对角化。《线性代数及其应用》，151：157–167。[Bochnak 等人， 1998] Bochnak, J., Coste, M. 和 Roy, M.-F.（1998）。实代数几何。施普林格，柏林。[Boulton 等人， 2008] Boulton, L., Lancaster 和 Psarrakos, P.（2008）。矩阵多项式的伪谱及其边界。《数学计算》，77(261)：313–334。[Dinh 和 Phạm， 2016] Dinh, S. T. 和 Phạm, T. S.（2016）。 -实对称多项式矩阵最大特征值函数的显式指数 Łojasiewicz 型不等式。《国际数学杂志》，27(2)：1650012（27页）。[Dinh 和 Phạm， 2017] Dinh, S. T. 和 Phạm, T. S.（2017）。 -最小奇异值函数的显式指数 Łojasiewicz 不等式。《复杂性杂志》，41：58–71。[Doyle， 1982] Doyle, J.（1982）。具有结构化不确定性的反馈系统分析。《IEEE 会议录》，129(6)：242–250。[Duffin， 1955] Duffin, R.（1955）。过阻尼网络的极小极大理论。《有理力学与分析杂志》，4：221–233。[Fan 和 Tits， 1988] Fan, M. 和 Tits, A.（1988）。 m-形式数值域与结构奇异值的计算。《IEEE 自动控制汇刊》，AC，33(3)：284–289。[Gantmacher， 1959] Gantmacher, F. R.（1959）。矩阵理论。Chelsea Publishing，纽约。[Gau 等人， 2011] Gau, H. L., Li, C.-K., Poon, Y. 和 Sze, N. S.（2011）。正规矩阵的高阶数值域。《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》，32(1)：23–43。[Gohberg 等人， 1982] Gohberg, I., Lancaster 和 Rodman, L.（1982）。矩阵多项式。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州。[Gustafson 和 Rao， 1997] Gustafson, K. 和 Rao, D.（1997）。数值域：线性算子与矩阵的值域。施普林格出版社，纽约。[Gutkin 等人， 2004] Gutkin, E., Jonckheere, E. A. 和 Karow, M.（2004）。联合数值域的凸性：拓扑与微分几何观点。《线性代数及其应用》，376：143–171。[Hà 和 Phạm， 2017] Hà, H. V. 和 Phạm, T. S.（2017）。多项式优化中的一般性，第3卷。世界科学出版社。[Higham 和 Tisseur， 2002] Higham, N. J. 和 Tisseur, F.（2002）。关于多项式特征值问题的伪谱及其在控制理论中的应用。《线性代数及其应用》，351–352：435–453。线性系统与控制特刊第四辑。

[Higham 和 Tisseur, 2003] Higham, N. J. 和 Tisseur, F.（2003）。矩阵多项式特征值的界。《线性代数及其应用》，358：5–22。[Horn 和 Johnson, 2013] Horn, R. 和 Johnson, C. R.（2013）。矩阵分析。剑桥大学出版社，剑桥。第二版。[Jonckheere 等人, 1998] Jonckheere, E. A., Ahmad 和 Gutkin, E.（1998）。数值域的微分拓扑。《线性代数及其应用》，279：227–254。[Kurdyka 和 Spodzieja, 2014] Kurdyka, K. 和 Spodzieja, S.（2014）。实代数集的分离与 Łojasiewicz 指数。《美国数学会会刊》，142：3089–3102。[Lancaster, 1966] Lancaster, P.（1966）。λ 矩阵与振动系统。Pergamon，牛津。[Lancaster 等人, 2003] Lancaster, P., Markus, A. S. 和 Zhou, F.（2003）。解析矩阵函数的扰动理论：半单情形。《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》，25(3)：606–626。[Lancaster 和 Psarrakos, 2001] Lancaster, P. 和 Psarrakos, P.（2001）。自伴二次矩阵多项式的数值域。《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》，23(3)：615–631。[Lancaster 和 Psarrakos, 2005] Lancaster, P. 和 Psarrakos, P.（2005）。矩阵多项式的伪谱问题。《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》，27：115–129。[Li 和 Poon, 1999] Li, C.-K. 和 Poon, Y.（1999）。联合数值域的凸性。《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》，21：668–678。[Li 和 Poon, 2009] Li, C.-K. 和 Poon, Y.（2009）。算子的联合本质数值域：凸性及相关结果。《数学研究》，194(1)：91–10。[Li 和 Rodman, 1994] Li, C.-K. 和 Rodman, L.（1994）。矩阵多项式的数值域。《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》，15：1256–1265。[Markus, 1988] Markus, A. S.（1988）。多项式算子铅笔谱理论导论，第71卷，数学专著译丛。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。[Maroulas 和 Psarrakos, 1997] Maroulas, J. 和 Psarrakos, P.（1997）。矩阵多项式数值域的边界。《线性代数及其应用》，267：101–111。[Mosier, 1986] Mosier, R. G.（1986）。多项式的根邻域。《数学计算》，47：265–273。[Phạm, 2012] Phạm, T. S.（2012）。 实多项式 Łojasiewicz 指数的一个显式界。《小代数数学杂志》，35(2)：311–319。[Poon, 1997] Poon, Y. T.（1997）。广义数值域、联合正定性与重特征值。《美国数学会会刊》，125：1625–1634。[Psarrakos 和 Tsatsomeros, 2000] Psarrakos, P. 和 Tsatsomeros, M.（2000）。矩阵多项式数值域与联合数值域之间的关系。《电子线性代数杂志》，6：20–30。[Tisseur 和 Higham, 2001] Tisseur, F. 和 Higham, N. J.（2001）。用于多项式特征值问题的结构化伪谱及其应用。《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》，23：187–208。[Tisseur 和 Meerbergen, 2001] Tisseur, F. 和 Meerbergen, K.（2001）。二次特征值问题。《SIAM评论》，43(2)：235–286。[Trefethen, 1992] Trefethen, L. N.（1992）。矩阵的伪谱。载于 Griffiths, D. F. 和 Watson, G. A.（编），《数值分析》，第260卷，Pitman 数学研究札记丛书，第234–266页，Harlow，埃塞克斯，英国。Longman 科学技术出版社。[Trefethen, 1999a] Trefethen, L. N.（1999a）。伪谱的计算。《数值学报》，8：247–295。[Trefethen, 1999b] Trefethen, L. N.（1999b）。谱与伪谱，第217–250页。施普林格出版社，柏林。[Zeng 和 Su, 2014] Zeng, L. 和 Su, Y.（2014）。求解二次特征值问题的后向稳定算法。《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》，35(2)：499–516。电子邮箱：lecongtrinh@qnu.edu.vn

归仁大学数学与统计学系，归仁南坊，越南

电子邮箱：gmlee@pknu.ac.kr

釜庆国立大学应用数学系，韩国釜山 48513

电子邮箱:ylim@skku.edu

成均馆大学数学系，韩国水原 440–746电子邮件地址：sonpt@dlu.edu.vn

越南大叻市富东天王街1号，大叻大学数学系