arXiv:2603.00299v1 [math.SP] 27 Feb 2026

向量值离散薛定谔算子的 Remling 定理

KESHAV RAJ ACHARYA

数学系，安柏瑞德航空大学，美国佛罗里达州代托纳海滩市 *Aerospace Blvd. 1*号，邮编*32114*。电子邮箱：*acharyak@erau.edu*

Abstract. 本文将 Remling 定理推广到向量值离散薛定谔算子，证明在移位映射下，矩阵势的 ω 极限点在具有全重数的绝对连续谱上是无反射的。

关键词： 离散薛定谔算子、绝对连续谱、ω 极限集、无反射矩阵势。

1. Introduction

我们考虑具有矩阵值势的离散薛定谔方程，其形式为

$$y(n+1)+y(n-1)+B(n)y(n)=zy(n),\quad z\in\mathbb{C} \tag{1.1}$$

其中 $y:I\to\mathbb{C}^d$ 是定义在指标集 $I\subseteq\mathbb{Z}$ 上的向量值序列，通常取 $\mathbb{Z}$（整个格点）或 $\mathbb{N}$（半直线）。每个 $y:I\to\mathbb{C}^d$：$y(n)=(y_1(n)\,y_2(n)\,\dots\,y_d(n))^\top$（$\top$ 表示转置)都是一个向量值序列，而 $B(n)\in\mathbb{C}^{d\times d}$ 是一个厄米矩阵，称为矩阵值势。方程 (1.1) 的解可通过指定序列在两个连续格点上的值来确定。也就是说，对于任意 $c_1,\ c_2\in\mathbb{C}^d$，定义 $y(n)=c_1$、$y(n+1)=c_2$，其余序列项则通过 (1.1) 递归确定。由于每个向量有 d个分量，解空间的总维数为$2d$。

矩阵值序列 $F(n)\in\mathbb{C}^{d\times 2d}$ 若其每一列都满足方程 (1.1)，则称为方程 (1.1) 的 矩阵解。等价地，$F(n)$ 按分量满足递推关系。方程 (1.1) 在希尔伯特空间 $\ell^2(I,\mathbb{C}^d)$ 上诱导出一个线性算子，该空间由平方可和的向量值序列组成。此空间上的内积定义为

$$\langle u,v\rangle=\sum_{n\in I}u(n)^*v(n),$$

其中 $u(n)^*$ 表示 $u(n)$的厄米转置（共轭转置）。在 $\ell^2(I,\mathbb{C}^d)$上定义算子 J 如下

$$(Jy)(n)=y(n+1)+y(n-1)+B(n)y(n). \tag{1.2}$$

当 I 为半无限时，例如 $I = \mathbb{N}$，必须在边界处修改该定义。例如，令

$$(Jy)(1) = y(2) + B(1)y(1),$$

通过施加 $y(0) = 0$ 作为 0 处的边界条件。假设势$B(n)$ 对所有 n 均一致有界且为厄米，则算子 J 是自伴的。根据谱定理，其谱是 $\mathbb{R}$ 的一个闭子集，并可分解为绝对连续、奇异连续和纯点部分。

这种矩阵值推广在分析具有内部自由度的物理系统时尤为重要，例如耦合波导、自旋链或多通道量子模型；在这些系统中，标量方程无法充分刻画其复杂的谱结构。

Remling 定理最初针对一维标量 Schr¨odinger 算子和 Jacobi算子 [13, 14], 提出，用谱性质描述势的渐近结构。具体而言，该定理断言，势序列在移位映射下的所有 ω-极限点，在绝对连续谱的本质支撑上都是无反射的。

本文将 Remling 定理推广至向量值离散 Schr¨odinger 算子。我们考虑定义在 $\mathbb{N}$ 上的有界、实、对称矩阵值势 $B(n)$，并证明相应算子 J 具有类似的无反射性质：序列 $B(n)$在移位映射下的每个 ω-极限点，都会在绝对连续谱上（且具有全重数）对应一个无反射算子。典范系统和 CMV 矩阵中的类似推广可参见 [1, 5]。这一推广不仅拓宽了 Remling 原始结果的适用范围，也彰显了无反射性质在高维和矩阵值情形下的稳定性。它证实，即使存在内部自由度，绝对连续谱仍保有鲜明的结构特征。

2. Titchmarsh-Weyl m function

Titchmarsh-Weyl 理论为研究相关算子 J 的谱测度及其对应的谱提供了优雅的方法。这里给出的部分结果也可见于 [2, 4], ，不过我们在此呈现这些结果，以使本文内容完整自足。在 [2], 中证明，对于任意有界厄米矩阵值势 $B(n)$ 以及任意 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，方程 (1.1) 存在线性无关解的精确数量为 d，且这些解属于空间 $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^d)$。将这些解按列排列，即可构造一个矩阵解 $F(n)$，它属于空间$\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{d\times d})$, 即所有 $d \times d$ 平方可和矩阵值序列 $U(n)$ 所构成的空间。也就是说,

$$\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{d\times d}) = \Big\{U(n) : \sum_{n=1}^{\infty} \|U(n)^* U(n)\| < \infty\Big\}.$$

任意两个向量值序列 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 的朗斯基行列式定义为

$$W_n(x(n), y(n)) = x(n+1)^\top y(n) - x(n)^\top y(n+1). \tag{2.1}$$

该定义推广至矩阵值序列 $d \times d$ $(n)\}$ 和$\{G(n)\}$ ，如下所示:

$$W_n(F(n), G(n)) = F(n+1)^\top G(n) - F(n)^\top G(n+1). \tag{2.2}$$

文献 [4], 中证明，若 $\{F(n)\}$ 和 $\{G(n)\}$ 是方程 (1.1) 的矩阵解，则朗斯基行列式 $W_n(F(n)\ G(n))$ 与 $n.$ 无关。
定义差分表达式

$$\tau(u(n)) = u(n+1) + u(n-1) + B(n)u(n),$$

它类似于算子 J，但作用于一般的向量值序列。

引理 2.1（格林恒等式）。 设 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$。对于 $F(n,z)\ G(n,z) \in \ell^2(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^{d\times d})$，下列恒等式成立：

$$\sum_{j=1}^{n} [F(j,z)^*\,(\tau G)(j,z) - (\tau F)(j,z)^*\,G(j,z)] = W_0(\overline{F}, G) - W_n(\overline{F}, G).$$

证明。 根据 τ 的定义，我们展开：

$$\begin{aligned} F(j)^*(\tau G)(j) - (\tau F)(j)^* G(j) = {} & [F(j)^* G(j+1) - F(j+1)^* G(j)] \\ & + [F(j)^* G(j-1) - F(j-1)^* G(j)] \\ & + F(j)^*(B(j) - B(j)^*)G(j). \end{aligned}$$

右侧的最后一项为零，因为 $B(j)$是厄米矩阵。对两边从 $j = 1$ 求和至 n，得到：

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} [F(j,z)^*\,(\tau G)(j,z) - (\tau F)(j,z)^*\,G(j,z)] \\ &\qquad = F(1)^* G(0) - F(0)^* G(1) + F(n)^* G(n+1) - F(n+1)^* G(n)) \\ &\qquad = W_0(\overline{F}, G) - W_n(\overline{F}, G). \end{aligned}$$

□

如上所述，方程 (1.1) 的解空间是一个 $2d$维向量空间。设该空间的一组基为 $\{u_1, u_2, \ldots, u_d, v_1, v_2, \ldots, v_d\}$。利用这组基，我们构造矩阵解，即对于 $z \in$C， 令

$$U(n,z) = (u_1(n,z), u_2(n,z), \ldots, u_d(n,z)),\quad V(n,z) = (v_1(n,z), v_2(n,z), \ldots, v_d(n,z)). \tag{2.3}$$

此外，我们规定初始条件

$$U(0,z) = -I, \qquad V(0,z) = 0, \qquad U(1,z) = 0, \qquad V(1,z) = I. \tag{2.4}$$

我们可以在不同位置选取这些条件。更具体地说，当我们在半直线上定义 Titchmarsh-Weyl m函数时，这些条件可以指定在任意点 $n.$ 。通过迭代差分方程 (1.1)，我们看到，对于固定的 $n \in$N $U(n,\ z)$ $V(n,\ z)$是 z的多项式，其次数为 $n-2$，系数属于 C$^{d\times d}$。此外，如果 $B(n)$是实数，那么谱参数 z 对应的矩阵解的复共轭，与复共轭参数 $\bar{z}.$ 对应的矩阵解相同。也就是说，

$$\overline{U(n,z)} = U(n,\bar{z})\ ,\quad \overline{V(n,z)} = V(n,\bar{z}).$$

与方程（1.1）相关的向量值离散薛定谔算子的 Titchmarsh-Weyl m 函数，定义如下：

定义 2.1. 设 $z \in \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. *Titchmarsh-Weyl* m函数定义为满足下式的唯一复矩阵 $M(z) \in \mathbb{C}^{d\times d}$

$$F(n,z) = U(n,z) + M(z)V(n,z) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{d\times d}), \tag{2.5}$$

其中 $U(n, z)$ $V(n, z)$ 是具有初始值 *(2.4)* 的矩阵解。

注意，矩阵解 $F(n,\ z)$ 是 (1.1) 的一组 d线性无关向量解，且属于 $l^2(\mathsf{N},\ \mathsf{C}^d)$。该定义是良定义的。正如上文所述， $l^2(\mathsf{N},\ \mathsf{C}^d)$ 中只有 d 个线性无关解；若存在另一个满足上述条件的 $M(z)$，则解 v_j 来自$V(n,\ z)$，并属于 $l^2(\mathsf{N},\ \mathsf{C}^d)$。解 $V(n,\ z)$ 满足 $V(0,\ z) = 0$，这意味着 $V(n,\ z)$ 是自伴算子 J. 的特征函数。这与 J 的谱为实数集相矛盾。定义在 (2.5) 上的 Titchmarsh-Weyl$m$ 函数，可用矩阵解和预解算子表示，如 [2]的以下定理所示。

定理2.1。 设 $z \in \mathbb{C}^+$. 若 $(\tau - z)F = 0$ 且 F是一个 $d\times d$矩阵值解，其 d 列是方程 *(1.1)* 的线性无关解，并且属于 $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}^d)$。则

$$M(z) = -F(1,z)F(0,z)^{-1}. \tag{2.6}$$

此外，

$$M(z) = (m_{ij}(z))_{d\times d} \in \mathbb{C}^{d\times d}, \quad m_{ij}(z) = \langle \delta_j, (J-z)^{-1}\delta_i\rangle. \tag{2.7}$$

(2.6) 中的 $M(z)$ 是将 $n = 0$ 和 $n = 1$ 代入 (2.5) 得到的，其形式旨在与 (4.1) 和 (4.7) 中 m- 函数的定义保持一致。在 (2.7) 中，Dirac δ 型向量值序列 $\delta_j(n)$ 定义如下:

$$\delta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right\}, \delta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right\}, \dots, \delta_d = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right\}.$$

根据函数演算，对每个 $i,\ j$ ，存在正Borel测度 μ_{ij} 使得

$$m_{ij}(z) = \langle \delta_j, (J-z)^{-1}\delta_i\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu_{ij}. \tag{2.8}$$

设 $\mu = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \cdots & \mu_{1d} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \cdots & \mu_{2d} \\ & \cdots \cdots \cdots & \\ \mu_{d1} & \mu_{d2} \cdots & \mu_{dd} \end{pmatrix}$. 则 μ是一个矩阵值测度，并且

Weyl m 函数具有以下积分表示

$$M(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu\ . \tag{2.9}$$

矩阵值测度 μ是算子 J. 的谱测度 。 $M(z)$ 的虚部 Im $M(z) = \frac{1}{2i}(M(z) - M(z)^*)$ 满足以下命题所示的重要性质。

命题 2.1. [2] 对于 $z \in \mathbb{C}^+$，由(2.5) 给出的 *Weyl* m 函数 $M(z)$ 是对称的，并且具有正定虚部。也就是说，

$$M(z)^* = M(\bar{z}), \quad \operatorname{Im} M(z) > 0.$$

证明。对每个 i, j，矩阵项 $m_{i,j}(z)$ 将复上半平面映射到自身。事实上，若 $z \in \mathbb{C}^+$，由 (2.8) 得

$$\operatorname{Im} m_{ij}(z) = \frac{1}{2i}(m_{ij}(z) - m_{ij}(\bar{z})) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im} z}{|t-z|^2} d\mu_{ij} > 0.$$

设 $M(z)$ 表示 $M(z)$ 的复共轭，即对 $M(z)$ 的每个矩阵项分别取复共轭所得。于是由 (2.8)，也就是 $m_{ij}(z)$ 的积分表示，得到 $m_{ij}(z) = m_{ij}(\bar{z})$，从而 $M(z) = M(\bar{z})$。利用 J 的自伴性，对每个 i, j，可得:

$$\begin{aligned} m_{ij}(z) =& \langle \delta_j, (J-z)^{-1}\delta_i \rangle \\ =& \langle ((J-z)^{-1})^* \delta_j, \delta_i \rangle \\ =& \langle (J-\bar{z})^{-1}\delta_j, \delta_i \rangle \\ =& \overline{\langle \delta_i, (J-\bar{z})^{-1}\delta_j \rangle} \\ =& \overline{m_{ji}(\bar{z})} \\ =& m_{ji}(z). \end{aligned}$$

由此可知 $M(z)$ 是对称的。接下来，我们证明 $\operatorname{Im} M(z) > 0$. 将 (2.5) 中的 $G(n, z)$ 替换为 $F(n, z)$，并代入格林恒等式，得到:

$$\sum_{j=1}^{n} [F(j,z)^* (\tau F)(j,z) - (\tau F)(j,z)^* F(j,z)] = W_0(\overline{F}, F) - W_n(\overline{F}, F). \tag{2.10}$$

由于 $F(n, z) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{d\times d})$ 是 (1.1) 的矩阵解

$$\tau F = zF, \text{ and } \lim_{n\to\infty} W_n(\overline{F}, F) = O.$$

在 (2.10) 中对 $n \to \infty$ 取极限，可得

$$(z - \bar{z}) \sum_{j=1}^{\infty} F(j,z)^* F(j,z) = W_0(\overline{F}, F). \tag{2.11}$$

由于 $W_0(F, F) = F^*(1, z)F(0, z) - F^*(0, z)F(1, z)$，利用 $F(n, z) = U(n, z) + V(n, z)M(z)$ 的初始条件 (2.4)，我们得到 $F(1, z) = M(z)$，$F(0, z) = -I$因此

$$W_0(\overline{F}, F) = M(z) - M(z)^*$$

由此可知，(2.11) 变为

$$\operatorname{Im}(z) \sum_{j=1}^{\infty} F(j,z)^* F(j,z) = \operatorname{Im} M(z). \tag{2.12}$$

由于左端收敛于一个正定矩阵，$\operatorname{Im} M(z)$ 是正定的。

□

该命题表明， $M(z)$ 是矩阵值赫格洛茨函数。所谓矩阵值赫格洛茨函数 M : $\mathbb{C}^+ \to M_d(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{d\times d}$ ，是指 $M(z)$ 解析，且对 $z \in \mathbb{C}^+$. 有 $\mathrm{Im}(M(z)) > 0$ 。根据 Herglotz 表示定理， $M(z)$ 也可以有如下积分表示，

$$M(z) = A + Bz + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \Big) d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}^+ \tag{2.13}$$

对于某个定义在 $\mathbb{R}$ 上的正矩阵值 Borel 测度 $\mu_{i,j} < \infty$ 以及矩阵 A， $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B \geq 0$. 由 (2.9) 和 (2.13) 得到的 Borel 测度是等价的。这是对 $\overline{M}$ 的积分表示，是一个众所周知的结果；关于这些函数的更多理论，参见 [9, 10]。此外， $M(z)$ 存在有限的法向极限，即

$$M(t \pm i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} M(t \pm i\varepsilon)$$

对几乎所有 $t \in \mathbb{R}$。

回忆一下，定义在 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度 ρ 称为绝对连续，如果对于所有 Lebesgue 测度为零的 Borel 集 $B \subset \mathbb{R}$，都有 $\rho(B) = 0$。根据 Radon-Nikodym 定理， ρ 绝对连续，当且仅当存在某个密度 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$，使得 $d\rho = f(t)dt$ 。如果 ρ 支撑在一个 Lebesgue 零测集上，也就是说，存在一个 Borel 集 $B \subset \mathbb{R}$，使得 $|B| = \rho(B^c) = 0$，那么我们称 ρ 为奇异。这里， $|.|$表示 Lebesgue 测度。根据 Lebesgue 分解定理，正 Borel 测度 ρ 可以分解为绝对连续 ρ_{ac}、奇异连续 ρ_{sc}和纯点 ρ_{pp} 测度之和

$$\rho = \rho_{ac} + \rho_{sc} + \rho_{pp}. \tag{2.14}$$

集合 $S_\rho \subset \mathbb{R}$ 称为 ρ 的支集，如果 $\rho(\mathbb{R} \setminus S_\rho) = 0$ ，而支集 S_ρ 称为相对于测度 ν 的最小支集，如果 $A \subset S_\rho$ 且 $\rho(A) = 0$ 蕴含 $\nu(A) = 0$。最小支集在相差一个 ρ 和 ν 测度零集的意义下唯一。若 ρ 的支集相对于 Lebesgue 测度是最小的，我们就称其为“最小”支集。最小支集也称为本质支撑。

由 (2.13) 给出的 $\mathbb{R}$ 上的矩阵值谱测度 μ ，可按照与 (2.14) 相同的方式分解为绝对连续部分 μ_{ac}、奇异连续部分 μ_{sc}和纯点部分 μ_{pp} ，即

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}. \tag{2.15}$$

在 [10]，中，这些测度用相应的 Weyl m 函数表示，该函数是一个矩阵值赫格洛茨函数 $M(z)$，具有正定虚部，即 Im $M(z) > 0$。绝对连续部分为

$$d\mu_{ac} = \pi^{-1} \operatorname{Im} M(t + i0)dt.$$

设 Σ_μ、 Σ_{ac}、 Σ_{sc}和 Σ_{pp} 分别为 μ、 μ_{ac}、 μ_{sc}和 μ_{pp} 的支集。 [10]中的以下支集定理建立了这些支集与 $M(z)$之间的联系。由于 Im $M(z) > 0$， $M(z)$ 是可逆的，因此以下定理中的支集是最小的。我们不加证明地陈述该定理。

定理 2.2。 [10] 式(2.15) 中测度的本质（最小）支集为

$$\Sigma_{ac} = \bigcup_{r=1}^{d} \left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} M_+(t+i\varepsilon) \ \textit{exists}, \ \operatorname{rank} \operatorname{Im}(M_+(t+i0)) = r \right\}.$$

$$\Sigma_{sc} = \bigcup_{r=1}^{d} \left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Im}(\operatorname{tr} M_+(t+i\varepsilon)) = \infty, \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \operatorname{tr} M_+(t+i\varepsilon) = 0 \right\}.$$

$$\Sigma_{pp} = \bigcup_{r=1}^{d} \left\{ t \in \mathbb{R} : \operatorname{rank} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon M_+(t+i\varepsilon) = r \right\}.$$

此外， μ_{ac} 的全重数本质支撑由下式给出

$$\Sigma_{ac}^{d} = \{ t \in \mathbb{R} : \operatorname{rank}(\operatorname{Im} M(t+i0)) = d \quad a.e. \text{ in a neighborhood of } t \}.$$

由此可知， $t \in \Sigma_{ac}^{d}$ 当且仅当几乎处处有 $\operatorname{Im} M(t+i0)) > 0$。

3. Topologies on the Space of Potentials

本节中，我们在矩阵值势空间上引入一种拓扑。前几节讨论了厄米势，并建立了若干重要性质，但主定理仅对实对称一致有界势予以证明。令 $M_d(\mathbb{R})$ 表示所有 $d \times d$ 实矩阵构成的空间，并赋予由算子范数诱导的拓扑。令 $\mathfrak{B}_C$ 表示 (1.1) 中所有势 $\mathbf{B} = \{B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 的集合。势 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}_C$ 满足：对每个 n， $B(n)$ 都是实对称矩阵，且在算子范数 $\|B(n)\| = \sup_{\|x\|=1} \|B(n)x\|$. 下有界。此外，$\mathbf{B}$ 一致有界：$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|B(n)\| < \infty$. 因此，

$$\mathfrak{B}_C = \{ \mathbf{B} = B(n) : \text{ for all } n, B(n) \in M_d(\mathbb{R}), B(n)^{\top} = B(n), \ \|B(n)\| \le C \}.$$

为了在空间 $\mathfrak{B}_C$ 上构造一种拓扑，设 $\mathfrak{B}_C^i = \{B(i) : \mathbf{B} \in \mathfrak{B}_C\}$, 是 $\mathbf{B}$ 中每个矩阵序列的 i^{th} 分量矩阵的集合。那么 $\mathfrak{B}_C^i$ 是 $M_d(\mathbb{R})$ 的子空间。此外，由于 $\mathfrak{B}_C^i$ 是 $M_d(\mathbb{R})$ 中的闭有界子空间， $\mathfrak{B}_C^i$ 在子空间拓扑下是一个紧拓扑空间。我们可以将 $\mathfrak{B}_C$ 视为一个积空间

$$\mathfrak{B}_C = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{B}_C^i.$$

事实上， $\mathfrak{B}_C$ 关于积拓扑是一个紧拓扑空间。在 $\mathfrak{B}_C$ 上定义度量如下：

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} \|A(n) - B(n)\|. \tag{3.1}$$

如果矩阵序列 $B(n)$ 定义在 $\mathbb{N}$（或–$\mathbb{N}$）上，或定义在 $\mathbb{Z}$ 中的类似区间上，我们将其称为半直线序列。如果 $B(n)$ 是半直线势，我们可以通过考虑对所有 $n \notin \mathbb{N}$（或 $n \notin -\mathbb{N}$）有 $B(n) = 0$，将其延拓到整条直线。如果 $A = UBU^{-1}$，其中 U 是酉矩阵，则称两个矩阵 A与 B等价。对于势 $\mathbf{B}$，移位映射 S 定义为

$$(S^k \mathbf{B})(n)) = B(n+k).$$

定义 3.1. 假设 $B(n)$ 在 (1.1) 中是半直线势。$B(n)$在移位映射下的 ω 极限集定义为，

$$\omega(\mathbf{B}) = \{H(n) \in \mathfrak{B}_C : \exists\ n_j \to \infty\ such\ that\ d(S^{n_j}B, H) \to 0\}. \tag{3.2}$$

式 (3.2) 中的极限 $H(n)$ 是全直线势。这些 ω 极限集具有以下重要性质。

命题 3.1。 $\omega(\mathbf{B})$是 $\mathfrak{B}_C$ 的一个非空紧子集，并且移位映射S 是 $\omega(B)$上的同胚。此外，

$$d(S^n\mathbf{B}, \omega(\mathbf{B})) \to 0, n \to \infty. \tag{3.3}$$

证明。 通过考虑$B(n) = 0$ （其中 $n \leq 0.$），将半直线势 $\mathbf{B}$ 延拓为全直线势。于是，$\omega(\mathbf{B})$ 可表示为

$$\omega(\mathbf{B}) = \bigcap_{m\geq 1} \overline{\{S^n\mathbf{B} : n \geq m\}}.$$

这表明， $\omega(\mathbf{B})$ 是一列递减紧集的交集。因此， $\omega(\mathbf{B})$ 非空且紧。此外， $\omega(\mathbf{B})$ 在 S 下不变，并且S^{-1}，因此 S 是 $\omega(\mathbf{B})$ 上的同胚。

此外，如果存在某个 $\epsilon > 0$ 使得对于所有 j 以及所有$\mathbf{H} \in \omega(\mathbf{B})$， $d(S^{n_j}\mathbf{B}, \mathbf{H}) \geq \epsilon$，那么不存在子序列 n_j 使得 $d(S^{n_j}\mathbf{B}, \mathbf{H}) \to 0$，这与矛盾，因此 (3.3) 成立。□

4. Main theorems and their proofs

对于任意 $z \in \mathsf{C}^+$，在 $\mathsf{I}_- = \{\dots, n-2, n-1, n\}$ 和 $\mathsf{I}_+ = \{n+1, n+2, \dots\}$ 上定义 Weyl m 函数如下

$$\begin{aligned} M_+(n,z) &= -F_+(n+1,z)F_+(n,z)^{-1}, \\ M_-(n,z) &= -F_-(n-1,z)F_-(n,z)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $F_\pm(n,z)$ 是方程 (1.1) 的矩阵解，其列构成该方程线性无关的向量解；并且 $F_\pm(n,z) \in \ell^2(\mathsf{I}_\pm, \mathsf{C}^{d\times d})$。这些解在相差一个常数矩阵的乘法意义下唯一，并且对每个 n 都可逆。对于 $n = 0$， $M_+(0,z) = M(z)$ 在 (2.5) 中。因此， $M_+(n,z)$ 是一个满足 n 处条件 (2.4) 的、如 (2.5) 中所示的矩阵系数。因此， $M_+(n,z)$ 具有与 $M(z)$ 类似的性质。对于 $M_-(n,z)$ 也同样如此，因为它是 $M_+(n,z)$ 的镜像版本。因此，对于任意 n 和任意 $z \in \mathsf{C}^+$， $M_\pm(n,z)$ 都是对称的，且具有正定虚部。因此，作为 $z \in \mathsf{C}^+$ 的函数，它们是矩阵值 Herglotz 函数，将复上半平面映射到 Siegel 上半平面，即具有正定虚部的复对称矩阵空间：

$$\mathcal{S}_d = \{Z \in \mathbb{C}^{d\times d} : Z = X + iY,\ X^\top = X,\ Y^\top = Y,\ Y > 0\}.$$

令 H 表示所有矩阵值 Herglotz 函数的集合。对于 (1.1) 中的每一个矩阵势 $B(n)$，存在唯一的 m 函数 $M^B \in \mathsf{H}$。由于对每一个n， $M_\pm(n,\ z)$ 都是赫格洛茨函数，法向极限

$$M_\pm(n,t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} M_\pm(n, t \pm i\varepsilon)$$

对几乎每一个 t. 都存在。令 $\mathbf{B}_\pm$ 表示势 $\mathbf{B}$ 分别在 $\mathbb{Z}_+ =\{1,2,3,\dots\}$ 和 $\mathbb{Z}_- = \{\dots,-2,-1,0\}$ 上的限制。假设

$$\mathfrak{B}_C^\pm = \{\mathbf{B}_\pm : \mathbf{B} \in \mathfrak{B}_C\}.$$

因此，具有位于 $n=0$ 的初始条件的相应 m 函数，

$$\{M_\pm = M_\pm^{\mathbf{B}}(0,z)\} \subset \mathcal{S}_d.$$

令 $M_\pm(t) = M_\pm(0,\ t)$。$\mathfrak{m}$ 函数空间 $\mathbb{H}$ 配备一致收敛拓扑，或与解析函数空间相关的拓扑；在这种拓扑下，$\mathfrak{m}$ 函数的微小变化对应于矩阵底层谱性质的微小变化。类似地，子空间 $\mathfrak{B}_C^\pm$ 也是拓扑空间，其拓扑由 (3.1) 中定义的度量诱导。

命题 4.1。 [8] 映射 $\Psi_\pm : \mathfrak{B}_C^\pm \mapsto \mathcal{S}_d$, $\Psi(\mathbf{B}_\pm) = M_\pm$ 其中 $M_\pm = M_\pm^{\mathbf{B}}(0,\ z)$ 是到其像上的同胚。

证明。在 [8], 中已证明，分块雅可比矩阵（或 $B_\pm$ ）与一个厄米测度之间存在一一对应关系，并且除相差一个常数因子外，Weyl-m 函数 $M_\pm$ 唯一。此外，映射 $\Psi_\pm$ 及其逆映射均连续。□

接下来给出无反射势的定义。

定义 4.1. 设 $A \subset \mathbb{R}$ 为一个博雷尔集。若方程 *(1.1)* 中的势 $B(n)$ 定义在$\mathbb{Z}$上，且在 A 上无反射，则称

$$M_+(t) = -\overline{M_-(t)}, \tag{4.2}$$

对几乎处处的 $t \in A$成立。这里， $M_\pm(z)$ 是将方程 *(1.1)* 限制在$\mathbb{Z}_\pm$.上所对应的 *Weyl m* 函数

所有在 A 上无反射的势构成的集合记为 $\mathcal{R}(A)$。

定理 4.1. 设$\mathbf{B}$ 为一个（半直线）势，且 Σ_{ac}^d 为谱测度的绝对连续部分具有全重数的本质支撑。那么

$$\omega(\mathbf{B}) \subset \mathcal{R}(\Sigma_{ac}^d).$$

该定理是对一维空间中雅可比方程的 Remling 定理的推广，参见 [13]。该定理是 Breimesser-Pearson 定理的推论。因此，为了证明 Remling 定理，我们首先将 Breimesser-Pearson 定理推广到方程 (1.1)。

Breimesser-Pearson 定理刻画了这些算子的谱，尤其关注谱纯连续且不存在特征值的条件。请参阅关于该定理的文章[6, 7, 11] 。

首先，回顾复上半平面上的调和测度：对于任意$z \in \mathbb{C}^+$ 以及任意博雷尔集 $S \subset \mathbb{R}$,

$$\omega_z(S) = \frac{1}{\pi}\int_S \frac{1}{(t-x)^2+y^2}\,dt. \tag{4.3}$$

注意到 $\omega_z(S)$ 满足

$$\omega_z(S) = \omega_{-\overline{z}}(-S). \tag{4.4}$$

关于这些测度的更多细节，请参见 [14]。我们想要为矩阵值 Herglotz 函数定义调和测度。对于任意标量 Herglotz 函数 g 和 $t \in \mathbb{R}$，我们定义 $\omega_{g(t)}(S) = \lim_{y\to 0^+} \omega_{g(t+iy)}(S)$。

观察4.1. 设 $G(z)$ 为矩阵值赫格洛茨函数。对任意 $c \in \mathbb{C}^d$，映射 $z \mapsto c^*G(z)c$ 是标量 *Herglotz* 函数，并且

$$c^*G(t)c = \lim_{y\to 0^+} c^*G(t+iy)c.$$

因此，对任意博雷尔集 $S \subset \mathbb{R}$，我们有

$$\omega_{c^*G(t)c}(S) = \lim_{y\to 0^+} \omega_{c^*G(t+iy)c}(S).$$

设 $\mathbb{B}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的闭单位球。

定义4.2. 设 G_n、$G \in \mathbb{H}$ 为矩阵值 *Herglotz* 函数。则我们称

- G_n 在集合 $S \subset \mathbb{C}^+$ 上一致收敛于 G，如果其中 $\|.\|$ 是矩阵范数。 $\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in S} \|G_n(z) - G(z)\| = 0,$
- G_n 在值分布意义下收敛到 G，如果对于任意 $c \in \mathbb{B}(0)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \omega_{c^*G_n(t)c}(S)dt = \int_A \omega_{c^*G(t)c}(S)dt, \tag{4.5}$$

对于所有博雷尔集 A，$S \subset \mathbb{R}$ $|A| < \infty$.

下面的定理给出了关于一致收敛与值分布收敛的等价性结论。这是文献 [13] 中定理 2.1 的矩阵版本。

定理 4.2. 设 $G_n, G \in \mathbb{H}$ 为矩阵值 *Herglotz* 函数。则以下条件等价：

(1) $G_n \to G$ 在$\mathbb{C}^+$.的紧子集上一致收敛；*(2)* $G_n \to G$ 在值分布意义下收敛。

证明。 假设 $G_n \to G$在 C^+的紧子集上一致收敛。这意味着对于每个紧集 $K \subset C^+$,

$$\sup_{z\in K} \|G_n(z) - G(z)\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

我们需要证明 $G_n \to G$ 属于值分布。这需要证明，对于所有博雷尔集 A，$S \subset \mathbb{R}$, 满足 $|A| < \infty$，以及任意 $c \in \mathbb{B}(0)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \omega_{c^*G_nc}(S)\, dt = \int_A \omega_{c^*Gc}(S)\, dt.$$

其中 $\omega_z(S)$ 表示与 z 和 S 相关的调和测度。

由于 $G_n \to G$ 在 C^+的紧子集上一致收敛，测度 μ_n 弱收敛到 μ，其中 μ_n 和 μ 分别是由（2.13）得到的 G_n和 G 的积分表示中的测度。因此，根据测度弱收敛的性质，对于任意 $c \in \mathbb{B}(0)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \omega_{c^*G_nc}(S)\, dt = \int_A \omega_{c^*Gc}(S)\, dt.$$

这就证明了值分布的收敛性。

假设 $G_n \to G$ 在值分布意义下。这意味着，对于所有博雷尔集A， $S \subset \mathbb{R}$（满足 $|A| < \infty$），以及任意 $c \in \mathbb{B}(0)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \omega_{c^* G_n c}(S)\, dt = \int_A \omega_{c^* G c}(S)\, dt.$$

我们需要证明， $G_n \to G$在 C^+的紧子集上一致成立。对于任意 $c \in \mathbb{C}^d$，映射 $z \mapsto c^* G(z)c$ 是一个标量 Herglotz 函数，同样， $c^* G_n(z)c$也是如此。然后我们利用以下事实：对于标量 Herglotz 函数，值分布意义下的收敛蕴含在 C^+ 的紧子集上一致收敛。

根据标量 Herglotz 函数收敛定理，值分布意义下的收敛蕴含在 C^+的紧子集上一致收敛。因此，$G_n \to G$ 在 C^+的紧子集上一致成立。□

引理 4.1。设 $A \subset \mathbb{R}$ 是一个满足 $|A| < \infty$的博雷尔集。那么对于任意 $c \in \mathbb{B}(0)$

$$\lim_{y\to 0+} \sup_{M\in\mathbb{H},\ S\subset\mathbb{R}} \Big| \int_A \omega_{c^* M(t+iy)c}(S)dt - \int_A \omega_{c^* M(t)c}(S)dt \Big| = 0.$$

证明。这是因为对于任意 $c \in \mathbb{B}(0)$，映射 $z \mapsto c^* M(t+iy)c$是一个标量 Herglotz 函数，并且可利用 [13] 中的引理 A.1 或[7]中的定理 1 得出。□

令 $\mathbb{N}_- = \{1, \dots, n\}$，并在 $\mathbb{N}_+ = \{n+1, n+2, \dots\}$ 上取值，同时在 n处取初始条件。也就是说，矩阵解 U 和 V 满足在 n处的以下初始条件：

$$\begin{aligned} U(n) &= -I, \qquad V(n) = 0 \\ U(n+1) &= 0, \quad V(n+1) = I\,. \end{aligned}$$

对于任意 $z \in \mathbb{C}^+$，定义 $\mathbb{N}_-$ 和 $\mathbb{N}_+$ 上的 Weyl m 函数如下：

$$F_\pm(n,z) = U(n,z) \pm \tilde{M}_\pm(n,z) V(n,z), \tag{4.6}$$

其中要求 $F_+ \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{d\times d})$，并取 $F_-(0) = 0$ 作为方程 (1.1) 的矩阵解的归一化条件。注意， $F_\pm(n, z)$的列构成方程 (1.1) 解的线性无关集，因此对每个 n，$F_\pm(n)$ 都是可逆的。对于 $z \in \mathbb{C}^+$，这些半直线函数由唯一确定，且为：

$$\tilde{M}_+(n,z) = -F_+(n+1,z)F_+(n,z)^{-1}, \quad \tilde{M}_-(n,z) = F_-(n+1,z)F_-(n,z)^{-1}\,. \tag{4.7}$$

这些 m 函数与式 (4.1) 中定义的函数之间满足以下关系

$$M_+(N,z) = \tilde{M}_+(N,z), \quad M_-(N,z) = B(n) - zI + \tilde{M}_-(N,z).$$

定理 4.3。令 Σ_{ac}^d 表示半直线问题 (1.1)的谱测度中绝对连续部分的全重数本质支撑。那么，对于任意 $A \subset \Sigma_{ac}^d$、 $|A| < \infty$ 和 $S \subset \mathbb{R}$，有

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\int_A \omega_{c^* \tilde{M}_-(N,t)c}(-S)dt - \int_A \omega_{c^* \tilde{M}_+(N,t)c}(S)dt \Big) = 0,$$

对所有 $c \in \mathbb{B}(0)$。此外，收敛关于 S. 是一致的

为证明该定理，我们将采用与一维情形类似的技巧，见 [13], ；至于典范系统，见 [1]。然而， m 函数是矩阵值 Herglotz 函数，并且是 $\mathcal{S}_d$. 中的矩阵。空间 $\mathcal{S}_d$ 可视为复上半平面的推广。

我们还希望将 $\mathcal{S}_d$ 上的一种度量视为双曲度量的推广

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \tag{4.8}$$

在复双曲平面 C^+. 上。定义以下映射于 $\mathcal{S}_d$,

$$d_\infty : \mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d \to \mathbb{R}$$

via

$$d_\infty(Z_1, Z_2) = \inf_{Z(t)} \int_0^1 F_{Z(t)}(\dot{Z}(t))\, dt\,, \quad Z_1, Z_2 \in \mathcal{S}_d \tag{4.9}$$

其中

$$F_Z(W) = \|Y^{-1/2} W Y^{-1/2}\|, \tag{4.10}$$

称为芬斯勒范数，下确界取遍所有连接 Z_1 和 Z_2的可微路径 $Z(t)$。这里， Y是一个正定矩阵，且存在平方根，并且 $Y^{-1/2} = (Y^{1/2})^{-1} = (Y^{-1})^{1/2}$。公式 (4.10) 中的范数是作用于 C^d上的矩阵的算子范数。经计算可知， d_∞ 是 $\mathcal{S}_d$ 上的一种度量，称为芬斯勒度量。因此，$(\mathcal{S}_d, d_\infty)$ 是一个度量空间。当$d = 1$时，Siegel 上半空间 $\mathcal{S}_1 = \mathsf{C}^+$ ，且度量 d_∞ 与公式 (4.8) 中定义的 C^+上的双曲度量相同。欧几里得平面中曲线的长度由 $\sqrt{dx^2 + dy^2}$测量。类似地， 曲线$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$在双曲平面 C^+ 上的长度 $t \in [0, 1]$ 定义为

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

两点之间的双曲距离 $z, w \in C^+$ 定义为

$$\rho(z, w) = \inf h(\gamma)$$

其中，下确界取遍连接 z 和 w的所有分段可微曲线。因此，对于 $d = 1$，有 $d_\infty(z, w) = \rho(z, w)$。于是， $\mathcal{S}_d$上的芬斯勒度量 d_∞是 C^+上的双曲度量 ρ 的一种推广。C^+上的另一种距离概念是伪双曲距离，它与调和测度密切相关。与 [13], 中一样，C^+ 上两点 $z, w \in$ 的伪双曲距离定义为

$$\gamma(w, z) = \frac{|w - z|}{\sqrt{\mathrm{Im} w}\sqrt{\mathrm{Im} z}}.$$

双曲度量 ρ与伪双曲距离 γ 之间满足以下关系式（见 [7]）

$$\gamma(w, z) = 2 \sinh(\rho(z, w)). \tag{4.11}$$

在 [13], 中证明了双曲距离与调和测度满足以下关系:

$$|\omega_w(S) - \omega_z(S)| \leq \gamma(w, z) \tag{4.12}$$

对于任意 z，$w \in \mathbb{C}^+$ 以及任意博雷尔集 $S \subset \mathbb{R}$。由（4.12）可知，对于任意矩阵值 Herglotz 函数 M_1，$M_2 \in \mathbb{H}$，我们有

$$|\omega_{c^* M_1 c}(S) - \omega_{c^* M_2 c}(S)| \leq \gamma(c^* M_1 c, c^* M_2 c), \tag{4.13}$$

对于任意 $c \in \mathbb{B}(0)$ 和任意博雷尔集 $S \subset \mathbb{R}$。

关于这些矩阵的一个重要观察是以下不等式

$$d_\infty(c^* M_1 c, c^* M_2 c) \leq d_\infty(M_1, M_2), \tag{4.14}$$

对于任意 $c \in \mathbb{B}(0)$ 和任意 M_1，$M_2 \in \mathbb{H}$。

这里需要用到的另一个重要工具是分式线性变换。对于任意形如以下形式的 $S \in M_{2d}(\mathbb{C})$：

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中 A、B、C 和 D 均为 $d \times d$ 矩阵，矩阵值分式线性变换是一个映射 $S : M_d(\mathbb{C}) \to M_d(\mathbb{C})$，定义为

$$S(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \tag{4.15}$$

对于所有使 S 有定义的 $Z \in M_d(\mathbb{C})$。令 $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. 在 [4], 中，证明了当 S 满足$i(S^* J S - J)$时，映射 (4.15) 在 $\mathcal{S}_d$ 上的限制有定义。≥ 0. 现在，我们从 (1.1) 中提取出这样的矩阵，使其作用为矩阵值分式变换。设 $F(n)$是方程 (1.1) 的一个矩阵解。那么我们有

$$\begin{bmatrix} F(n+1) \\ \mp F(n) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} zI - B(n) & \pm I \\ \mp I & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F(n) \\ \mp F(n-1) \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

这些矩阵

$$T_\pm(n, z) = \begin{pmatrix} zI - B(n) & \pm I \\ \mp I & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

方程 (4.16) 中给出的称为传递矩阵，它们描述了演化 n 向量的

$$\begin{bmatrix} F(n+1) \\ \mp F(n) \end{bmatrix}$$

在 $T_\pm(n, z)$迭代作用下的变化。注意到

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} T_+(n, z) = T_-(n, z) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

这些传递矩阵 $T_\pm(n, z)$可以视为复矩阵值分式变换 (4.15)，它们作用于 m 函数空间的方式如下：

$$T_\pm(n, z)\tilde{M}_\pm(n, z) = \mp\Big((zI - B(n)) - \tilde{M}_\pm(n, z))^{-1}\Big).$$

若 $B(n)$是实对称的，则这些传递矩阵满足以下辛恒等式：

引理 4.2. 传递矩阵 $T_\pm(n, z)$ 满足以下辛恒等式：

$$T_\pm(n, z)^\top J T_\pm(n, z) = J.$$

证明。 我们对 $T_+(n,z)$ 进行验证

$$\begin{aligned} T_+(n,z)^\top J T_+(n,z) &= \begin{pmatrix} zI - B(n) & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI - B(n) & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} zI - B(n) & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ -zI + B(n) & -I \end{pmatrix} \\ &= J \end{aligned}$$

类似地， $T_-(n,\ z)$。 □

此外，若 $z \in \mathbb{R}$ $T_\pm(n,\ z)$ 是实辛矩阵，这意味着 $T_\pm(n,\ z) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S}_d)$，即它们是双射全纯函数；而且，相对于度量 (4.9)，该作用保持距离，见 [3]。也就是说，对于 $T = T_\pm(n,\ z) \in SL(2d,\ \mathbb{R})$ 和 $W_1,\ W_2 \in \mathcal{S}_d$，我们有

$$d_\infty\Big(T(W_1), T(W_2)\Big) = d_\infty(W_1, W_2) \tag{4.19}$$

而对于 $z \in \mathbb{C}^+,\quad T_+(n,\ z)$，一般而言不会将 $\mathcal{S}_d$ 映射到自身。在 [4], 中证明了

$$\tilde{M}_\pm(n,z) = T_\pm(n,z)\tilde{M}_\pm(n-1,z),$$

这意味着

$$\tilde{M}_+(n,z) = T_+(n,z)T_+(n-1,z)\dots T_+(1,z)\tilde{M}_+(0,z).$$

and

$$\tilde{M}_-(n,z) = T_-(n,z)T_-(n-1,z)\dots T_-(2,z)\tilde{M}_-(1,z).$$

引入

$$P_+(n,z) := T_+(n,z)T_\pm(n-1,z)\dots T_+(1,z).$$

and

$$P_-(n,z) := T_-(n,z)T_-(n-1,z)\dots T_-(2,z).$$

Thus

$$\tilde{M}_+(n,z) = P_+(n,z)\tilde{M}_+(0,z),\quad \tilde{M}_-(n,z) = P_-(n,z)\tilde{M}_-(1,z). \tag{4.20}$$

引理 4.3. 矩阵 $P_+(n,z)$ 和 $P_-(n,z)$ 满足以下关系

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} P_+(n,z) = P_-(n,z) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} T_+(1,z). \tag{4.21}$$

证明。 由 (4.18) 可得 □

注意，对于 (1.1) 中任意实对称势 $B(n)$ 和 $z \in \mathbb{C}^+$，转移矩阵 $T_-(n,\ z)$ 可写为

$$T_-(n,z) = \begin{pmatrix} I & -B(n) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & zI \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = T_B T_z T_J.$$

矩阵 $T_J, T_B \in SL(2d, \mathbb{R})$，因此 $T_J(Z)\ T_B(W) \in \mathcal{S}_d$ 对任意 $Z, W \in \mathcal{S}_d$.我们现在证明，对任意 $Z \in \mathcal{S}_d,\ \ T_z(Z) \in \mathcal{S}_d$ 。但这也显而易见，因为$T_z(Z) = Z + zI$ ，而它属于 $\mathcal{S}_d$. 。以下引理摘自 [4] ，它表明 $T_-(n,z)$ 在 $\mathcal{S}_d$ 上的作用具有距离收缩性质。为使本文完整，我们给出证明。

引理 4.4. 对任意 $n \in \mathbb{N}$ $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$ 以及 $W_1, W_2 \in \mathcal{S}_d$,

$$d_\infty(T_-(n,z)W_1, T_-(n,z)W_2) \le \frac{1}{1+y^2} d_\infty(W_1, W_2). \tag{4.22}$$

证明。设 $T_-(n,z) = T_B T_z T_J$。由于 $T_B, T_J \in SL(2d, \mathbb{R})$，由 (4.19) 得

$$\begin{aligned} d_\infty\Big(T_-(n,z)(W_1), T_-(n,z)(W_2)\Big) &= d_\infty\Big(T_B T_z T_J(W_1), T_B T_z T_J(W_2)\Big) \\ &= d_\infty\Big(T_z T_J(W_1), T_z T_J(W_2)\Big). \end{aligned} \tag{4.23}$$

设 $U_j = T_J(W_j) = JW_j$，则 $T_z(U_j) = U_j + zI$, $j = 1, 2$。设 $U(t)$ 是连接 U_1 和 U_2. 的最短路径。于是 $U(t)+zI$ 是连接 U_1+zI 和 U_2+zI 的一条路径，则 $\frac{d}{dt}(U(t) + zI) = \dot{U(t)}$。一假设 $V(t) = \operatorname{Im} U(t)$，则 $\operatorname{Im}\big(U(t) + zI\big) = V(t) + yI$.。现在

$$\begin{aligned} F_{(U(t)+zI)}(\dot{U(t)}) &= \|\Big(V(t) + yI\Big)^{-\frac{1}{2}} \dot{U(t)} \Big(V(t) + yI\Big)^{-\frac{1}{2}}\| \\ &= \|\Big(V(t) + yI\Big)^{-\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}} V(t)^{-\frac{1}{2}} \dot{U(t)} V(t)^{-\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}} \Big(V(t) + yI\Big)^{-\frac{1}{2}}\| \\ &\le \|(V(t) + yI)^{-\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}}\| \|V(t)^{-\frac{1}{2}} \dot{U(t)} V(t)^{-\frac{1}{2}}\| \|V(t)^{\frac{1}{2}} (V(t) + yI)^{-\frac{1}{2}}\| \end{aligned}$$

由于 $V(t)^{\frac{1}{2}}, (V(t) + yI)^{-\frac{1}{2}}$ 是对称的

$$\|(V(t) + yI)^{-\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}}\| = \|V(t)^{\frac{1}{2}} (V(t) + yI)^{-\frac{1}{2}}\|.$$

由此可得

$$F_{(U(t)+zI)}(\dot{U(t)}) \le \|(V(t) + yI)^{-\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}}\|^2 \|V(t)^{-\frac{1}{2}} \dot{U(t)} V(t)^{-\frac{1}{2}}\|. \tag{4.24}$$

接下来我们证明 $\|(V(t) + yI)^{-\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}}\|^2 \le \frac{1}{1+y}$. 由于 $U_j = JW_j$, $U(t)$ 必须具有 $JW(t)$ 的形式，其中 $W(t)$ 是连接 W_1 和 W_2. 的路径。再次，由于 $W_j = T_-(0, z)Z_j$, W 具有 $W = T_-(0, z)Z$ 的形式，其中 $Z(t) = X(t) + iY(t)$ 是连接 Z_1 和 Z_2. 的路径。因此

$$\begin{aligned} W(t) &= T_-(0,z)Z(t) \\ &= \begin{pmatrix} zI - B(0) & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} Z(t) \\ &= zI - B(0) - Z(t)^{-1} \\ &= zI - B(0) - \overline{Z(t)} |Z(t)|^{-1}, \quad |Z| = X^2 + Y^2. \end{aligned}$$

因此，$\operatorname{Im} W(t) = yI + Y(X^2 + Y^2)^{-1} > yI$. 取逆并应用算子理论，我们得到

$$(\operatorname{Im} W(t))^{-1} < \frac{1}{y} I.$$

由于 $U(t) = JW(t) = -W(t)^{-1}$,

$$U(t) = -W(t)^{-1} = -\overline{W(t)} |W(t)|^{-1} = -\overline{W(t)} \Big((\operatorname{Re} W(t))^2 + (\operatorname{Im} W(t))^2\Big)^{-1}.$$

因此，$\operatorname{Im} U(t) = \operatorname{Im} W(t) \Big((\operatorname{Re} W(t))^2 + (\operatorname{Im} W(t))^2\Big)^{-1}$. 由于 $\operatorname{Im} W(t) \le \Big(\operatorname{Re} W(t))^2 + (\operatorname{Im} W(t))^2\Big) \operatorname{Im} W(t)^{-1}$，取逆后可得，

$$\operatorname{Im} W(t) \Big((\operatorname{Re} W(t))^2 + (\operatorname{Im} W(t))^2\Big)^{-1} \le \operatorname{Im} W(t)^{-1} < \frac{1}{y} I.$$

这意味着 Im $U(t) < \frac{1}{y}I$，即 $V(t) < \frac{1}{y}I$。由 [3], 的引理 3.7 可得

$$\|(V+yI)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}\| < \frac{1}{1+y^2}.$$

式（4.24）变为

$$F_{(U(t)+zI)}(\dot{U(t)}) \leq \|(V(t)+yI)^{-\frac{1}{2}}V(t)^{\frac{1}{2}}\|^2\|V(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{U(t)}V(t)^{-\frac{1}{2}}\| \quad \leq \frac{1}{1+y^2}F_{(U(t))}(\dot{U(t)}). \tag{4.25}$$

积分后，式（4.25）变为

$$\int_0^1 F_{(U(t)+z)}(\dot{U(t)})dt \leq \frac{1}{1+y^2}\int_0^1 F_{(U(t))}(\dot{U(t)})dt.$$

对所有此类路径 $U(t)$ 取下确界，我们得到

$$d_\infty\Big(T_zU_1, T_zU_2\Big) \leq \frac{1}{(1+y^2)}d_\infty(U_1,U_2). \tag{4.26}$$

由于 $J \in SP(2d, \mathbb{R})$,

$$d_\infty(U_1,U_2) = d_\infty(T_JW_1, T_JW_2) = d_\infty(W_1,W_2). \tag{4.27}$$

将（4.26）和（4.27）代入（4.23），即可得到所需结果

$$d_\infty\Big(T_-(n,z)W_1, T_-(n,z)W_2\Big) \leq \frac{1}{(1+y^2)}d_\infty(W_1,W_2).$$

□

引理 4.5。 设 K 是$\mathbb{C}^+$. 的一个紧子集。那么对于任意 $W \in S_d$,

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(\tilde{M}_-(n,z), P_-(n,z)W) = 0$$

关于 $z \in K$.一致

证明。 通过写成 $M_-(n, z) = P_-(n, z)M_-(1, z)$，由（4.22）可得

$$d_\infty(\tilde{M}_-(n,z), P_-(n,z)W) \leq \frac{1}{(1+y^2)^{n-1}}d_\infty(\tilde{M}_-(1,z), W).$$

因此令 $n \to \infty$ 取极限即可得到结论。 □

引理 4.6。 那么对于任意 $M \in S_d$,

$$-\overline{P_+(n,t)M} = P_-(n,t)(-T_+(1,t)\overline{M}).$$

证明。 由引理 4.3可得。 □

定理 4.3 的证明。设 $A \subset \Sigma_{ac}^d$ 满足 $|A| < \infty$，并给定 $\epsilon > 0$。将 $A = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_N$划分为互不相交的子集，使得 $|A_0| < \epsilon$，且对于 $j \geq 1.$， A_j 有界。我们要求 $M_+(t) = \lim_{y\to 0^+} M_+(t+iy)$ 存在，并且 $M_+(t) \in \mathcal{S}_d$于 $\bigcup_{j=1}^N A_j.$。为找到具有这些性质的 A_j，首先将满足$M_+(t)$不存在或不属于 $\mathcal{S}_d$ 的 $t \in A$ 放入 $A_0.$。显然， $|A_0| \leq \epsilon.$。然后选取一个足够大的紧子集 $S \subset \mathcal{S}_d$，使其包含 $M_+ = M_+(0,t)$的值域，并选取一个紧子集 $t \in K \subset \mathbb{R}$。将 S 细分为有限个互不相交的子集S_1、S_2、.....、S_n，使得对于所有 $j = 1$、.....、n，任取 Z_1、$Z_2 \in S_j$，均有:

$$d_\infty(Z_1,Z_2) \leq \epsilon.$$

然后定义 $A_j = (A \setminus A_0) \cap \tilde{M}_+^{-1}(S_j)$，并对任意固定的 $t_j \in A_j$. 定义 $M^j = \tilde{M}_+(t_j)$。注意，对每个 j， $\tilde{M}_+(t_j)$ 都是可逆的。这些 M^j 满足以下不等式：

$$d_\infty(\tilde{M}_+(t),\ M^j) \le \epsilon \tag{4.28}$$

对所有 $t \in A_j, \quad j \ge 1.$

由引理 4.1，对于任意 $c \in$ B(0)，存在一个数 $y > 0$，使得对于任意矩阵值赫格洛茨函数 $M \in$H、任意博雷尔子集 $S \subset$R，以及所有$j = 1, 2, \ldots, n$，我们有以下估计，

$$\Big| \int_{A_j} \omega_{c^* M(N,t+iy)c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* M(N,t)c}(-S)dt \Big| \le \epsilon |A_j|. \tag{4.29}$$

对于 j 和 $c \in$B(0) 的每个取值，我们都可以定义 y；因此， y 是 j 和 c、$y = y(j,\ c)$ 的函数。然而，通过对集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 和 B(0) 取下确界，我们可以假设 y 与 j 和 c 无关。

由于 $P_+(n,\ t) \in$ Aut($\mathcal{S}_d$)，由 (4.20) 和 (4.28) 可得

$$d_\infty(\tilde{M}_+(n,t),\ P_+(n,t)M^j) \le \epsilon \tag{4.30}$$

对所有 $t \in A_j, \quad 1 \le j \le N.$

利用 (4.13) 并进行积分可得，对于任意博雷尔集 $S \subset$R 以及任意$c \in$B(0)

$$\begin{aligned} \Big| \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_+(n,t)c}(S)\ dt - & \int_{A_j} \omega_{c^* P_+(n,t) M^j c}(S)\ dt \Big| \\ & \le \int_{A_j} \Big| \omega_{c^* \tilde{M}_+(N,t)c}(S) - \omega_{c^* P_+(n,t) M^j c}(S) \Big|\ dt \\ & \le \gamma(c^* \tilde{M}_+(n,t)c,\ c^* P_+(n,t) M^j c)\ |A_j| \\ & \le d_\infty(\tilde{M}_+(n,t),\ P_+(n,t)M^j)\ |A_j|. \end{aligned}$$

因此，利用 (4.30)

$$\Big| \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_+(N,t)c}(S)\ dt - \int_{A_j} \omega_{c^* P_+(n,t) M^j c}(S)\ dt \Big| \le \epsilon |A_j|. \tag{4.31}$$

现在利用 (4.4)，我们可以得到

$$\omega_{c^* P_+(n,t) M^j c}(S) = \omega_{-\overline{c^* P_+(n,t) M^j c}}(-S). \tag{4.32}$$

令 $W^j = T_+(1, t)(-M^j)$。那么 $W^j \in \mathcal{S}_d$. 根据引理 4.5，存在 $n_0 \in$N 使得

$$d_\infty(\tilde{M}_-(n, t+iy),\ P_-(n, t+iy)(T_+(1, z)(-M^j) \le \epsilon \tag{4.33}$$

对所有 $n \ge n_0$, $t \in A_j, \quad 1 \le j \le N$. 类似地，再次由引理 4.1 并对 A_j 积分，可得估计

$$\Big| \int_{A_j} \omega_{c^* P_-(n,t+iy) W^j c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_-(n,t+iy)c}(-S)dt \Big| \le \epsilon |A_j|, \tag{4.34}$$

对于任意 $c \in \mathbb{B}(0)$ $n \geq n_0$. 现在由三角不等式可得,

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{A_j} \omega_{c^* P_-(n,t) W^j c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_-(n,t) c}(-S)dt \Big| \\
&\leq \Big| \int_{A_j} \omega_{c^* P_-(n,t) W^j c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{P}_-(n,t+iy) W^j c}(-S)dt \Big| \\
&+ \Big| \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{P}_-(n,t+iy) W^j c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_-(n,t+iy) c}(-S)dt \Big| \\
&+ \Big| \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_-(n,t+iy) c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_-(n,t) c}(-S)dt \Big|.
\end{aligned}$$

再次由 (4.29) 和 (4.34)，对于任意 $c \in \mathbb{B}(0)$ $n \geq n_0$

$$\Big| \int_{A_j} \omega_{c^* P_-(n,t) W^j c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_-(n,t) c}(-S)dt \Big| \leq 3\epsilon |A_j|. \tag{4.35}$$

利用 $P_-(n,\ t)W^j = -P_+\overline{(n,\ t)M^j}$，对于所有 $c \in \mathbb{B}(0)$，若 $n \geq n_0$，则得到

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_-(N,t) c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_+(N,t) c}(S)dt \Big| \\
&\leq \Big| \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_-(N,t) c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* P_-(n,t) W^j c}(-S)dt \Big| \\
&+ \Big| \int_{A_j} \omega_{-c^* \overline{P_+(n,t) M^j} c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_+(N,t) c}(S)dt \Big|.
\end{aligned}$$

利用 (4.32)，并将其与 (4.35)、(4.33)、(4.34)结合，我们得到,

$$\Big| \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_-(N,t) c}(-S)dt - \int_{A_j} \omega_{c^* \tilde{M}_+(N,t) c}(S)dt \Big| \leq 4\epsilon |A_j| + \epsilon.$$

现在对 $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$ 求和，并利用 $|A_0| \leq \epsilon$，得到

$$\Big| \int_{A} \omega_{c^* \tilde{M}_-(N,t) c}(-S)dt - \int_{A} \omega_{c^* \tilde{M}_+(N,t) c}(S)dt \Big| \leq 4\epsilon |A| + 2\epsilon.$$

□

定理 *4.1* 的证明。设 $\mathbf{A} \in \omega(\mathbf{B})$。则存在一个序列 $n_j \to \infty$，使得 $d(S^{n_j}\mathbf{B},\ \mathbf{A}) \to 0$. 由命题 4.1 得到

$$M_\pm(n_j, z) \to M_\pm^{\mathbf{A}}(0, z) = M_\pm(z),$$

在 $\mathbb{C}^+$ 的紧子集上一致收敛。由定理 4.2

$$M_\pm(n_j, z) \to M_\pm, \quad j \to \infty$$

在值分布意义下，也就是说，对于任意 $c \in \mathbb{B}(0)$

$$\lim_{j\to\infty} \int_A \omega_{c^* M_\pm(n_j,t) c}(S)dt = \int_A \omega_{c^* M_\pm c}(S)dt, \tag{4.36}$$

对所有博雷尔集 $A, S \subset \mathbb{R}$ $|A| < \infty$.，由定理 4.3 可知，对于任意 $A \subset \Sigma_{ac}$, $|A| < \infty$ 和 $S \subset \mathbb{R}$,，我们有

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\int_A \omega_{c^*\tilde{M}_-(n_j,t)c}(-S)dt-\int_A \omega_{c^*\tilde{M}_+(n_j,t)c}(S)dt\Big)=0,$$

对所有 $c\in$ B(0). 。于是，对于任意 $A\subset\Sigma_{ac}$, $|A|<\infty$ 和 $S\subset$ R, ，我们有

$$\Big(\int_A \omega_{c^*M_-(t)c}(-S)dt-\int_A \omega_{c^*M_+(t)c}(S)dt\Big)=0,$$

对所有 $c\in$ B(0)。现在由勒贝格微分定理可得

$$\omega_{c^*M_-(t)c}(-S)=\omega_{c^*M_+(t)c}(S),$$

对几乎所有 $t\in\Sigma_{ac}$，且对所有 $c\in$B(0)。注意

$$\omega_{c^*M_-(t)c}(-S)=\omega_{-\overline{c^*M_-(t)c}}(S),$$

对所有 $c\in$ B(0)。因此，对于任意博雷尔集 S, $\omega_{c^*M_+(t)c}(S)=\omega_{-\overline{c^*M_-(t)c}}(S)$对所有$c\in$ B(0)。由此可知， $M_+(t)=\overline{-M_-(t)}$ 对几乎所有 $t\in\Sigma_{ac}^d$. 因此， $\mathbf{A}\in\mathcal{R}(\Sigma_{ac}^d)$。证明完毕。□

致谢： 作者谨向匿名审稿人致以诚挚谢意，感谢他们提出宝贵意见和建设性建议，极大地改善了本文。

References

[1] K.R. Acharya，《关于典范系统的 Remling 定理》， *J. Math. Phys.* 57，023505（2016），https://doi.org/10.1063/1.4940048。[2] K.R. Acharya，向量值离散薛定谔算子的 Titch marsh-Weyl 理论，*Anal.Math.Phys.* **9**，1831-1847（2019），https://doi.org/10.1007/s13324-018-0277。[3] K.R. Acharya 和 M. McBride，复辛矩阵在 Siegel 上半空间上的作用， *Linear Algebra Appl.*，563，47-62，（2019），https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.10.021。[4] K.R. Acharya 和 M. McBride，向量值离散薛定谔算子的半直线 Titchmarsh-Weyl m 函数， *Ann. Funct. Anal.* **12**，53（2021）。https://doi.org/10.1007/s43034- 021-00140-x[5] J. Breuer、E. Ryckman 和 M. Zinchenko，CMV 矩阵的右极限与无反射测度， *Commun. Math. Phys.* **292**，1-28（2009），https://doi.org/10.1007/s00220-009-0839- 8[6] S. V. Breimesser 和 D.B. Pearson，薛定谔方程解的渐近值分布， *Math. Phys. Anal. Geom.*，3(4)，385-403，（2001）。[7] S. V. Breimesser 和 D. B. Pearson，Herglotz 函数谱理论与值分布的几何方面， *Math. Phys. Anal. Geom.*，6，29-57，（2003）。[8] D. Damanik、A. Pushnitski 和 B. Simon，矩阵正交多项式的解析理论， *Surveys in Approximation Theory (SAT)* 4 （2008）。[9] S.L. Clark 和 F. Gesztesy，矩阵值薛定谔算子的 Weyl-Titchmarsh M 函数渐近行为， *Proc. Lon. Math. Soc.*，82，701-720，（2001）。[10] F. Gesztesy 和 E. Tsekanovskii，关于矩阵值 Herglotz 函数， *Math. Nachr.*，218，61 2000-138，（）。[11] D.B. Pearson，微分算子的值分布与谱分析， *J. Phys. A:Math. Gen.*，26，4067-4080，（1993）[12] C. Remling，薛定谔算子与 de Branges 空间。 *Journal of Functional Analysis*，196 2 323 2002（），–394，（）。[13] C. Remling，雅可比矩阵的绝对连续谱， *Annals of Math.*，174，125 2011-171，（）。[14] C. Remling，一维薛定谔算子的绝对连续谱，*Math. Phys. Anal. Geom.*，10(4) 359 -373，（2007）。