arXiv:2603.00323v1 [math.CV] 27 Feb 2026

长田维数的解析与拟正则畸变

MANISHA GARG 和 JEREMY T. TYSON

Abstract. 我们研究解析函数以及更一般的拟正则映射如何改变长田维数。根据 Lang 和 Schlichenmaier 的一项结果，区域之间的拟共形映射保持紧子集的长田维数。我们证明，对于定义在一般平面区域上的解析函数，同样成立。另一方面，多项式（以及更一般的有理映射）保持其定义域任意子集的长田维数。在没有紧性假设的情况下，我们给出一些例子，说明整函数可以增大或减小定义域子集的长田维数。其中一些结果可推广到亚纯函数；此外，鉴于 Sto¨ılow 分解，这些结果也分别适用于平面拟正则映射。我们还证明，共形映射可以改变其定义域中非紧子集的孔隙性；由此可得一些平面共形映射的例子，它们将长田维数严格小于二的集合映射为长田维数为二的集合。最后，我们讨论若干开放问题，以及未来关于高维拟正则映射对长田维数的畸变研究方向。

Contents

1. 引言 1 2. 背景 5 3. 长田维数的不变性 10 4. 整函数与长田维数 13 5. 孔隙性与共形映射 21 6. 进一步讨论与未决问题 24 参考文献 26

1. Introduction

度量空间的长田维数（也称 Assouad–Nagata 维数），记为 $\dim_N X$，是一种几何不变量，与拓扑维数和渐近维数的概念相对应。拓扑维数刻画空间的局部小尺度结构，并在同胚下保持不变；渐近维数则是一种在拟等距映射下保持稳定的大尺度不变量，

Date：2026年3月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类 30D20, 54F45；次分类 30D30, 30C62。*Key words and phrases.* 长田维数，拟共形映射，多孔集，整函数。

而长田维数则同时反映度量空间精细和粗略的几何特征。

由于长田维数能够在所有尺度上对覆盖提供定量控制，因此它在群的大尺度几何中发挥着重要作用。具体而言，Buyalo-Lebedeva [9] 利用长田维数，通过边界的几何对 Gromov双曲群进行拟等距分类。一个密切相关的不变量最初称为容量维数 [7]，后来称为线性控制维数（例如参见 [6]），对应于长田维数的小尺度版本。对于有界度量空间，这两个概念相同，因此它们是几何群论和粗几何中的重要工具（例如参见 [8], [5],或 [15]）。

从映射理论的角度来看，研究维数及其在各类映射下的不变性或畸变，有助于确定哪些度量空间能够“良好地”嵌入欧几里得空间。例如，Assouad嵌入定理 [2] 指出，对于任意具有有限 Assouad维数 $\dim_A X$ 的度量空间 (X, d) 以及任意 $\varepsilon \in (0,1)$，存在一个整数 n，使得雪花化度量空间 (X, d^ε) 可以双Lipschitz嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中。对于长田维数 $\dim_{\mathrm{N}} X$，也有类似的嵌入结论：也就是说，若 (X, d) 是一个具有有限长田维数 n 的度量空间，那么对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$，空间 (X, d^ε) 都存在一个映射到 $\mathbb{R}^n$ 的 Lipschitz轻映射。详情见 [14]。事实上，Assouad维数与长田维数密切相关。[26] 证明了，对于所有度量空间 (X, d)，$\dim_{\mathrm{N}} X \leq \dim_A X$，且这两个不变量都刻画了空间在所有尺度上的覆盖性质。

除了在嵌入定理中的作用之外，Assouad维数也从映射畸变的角度得到了研究。例如，Assouad维数在拟共形或拟正则映射下的畸变已在 [36], [13]和 [11]中得到研究。拟共形映射是局部拟对称的，众所周知，诸如雪花化之类的拟对称变形可以改变空间的Assouad维数。相比之下，Lang和Schlichenmaier [25]证明了长田维数在拟对称映射下具有不变性，而Xie将这种不变性推广到更广的一类拟M¨obius映射 [40]。

人们自然会问，拟共形映射与拟正则映射是否保持长田维数；若否，这一维数概念又能在多大程度上发生畸变。由于拟共形映射是局部拟对称的，由 [25] 直接可知，此类映射保持其区域中紧子集的长田维数。然而，这种不变性在完全一般的情形下并不成立：指数映射 $f(z) = e^z$在限制到一个使其为单叶的适当域上时，将一个算术数列（长田维数为一）映射为一个几何数列（Nagata 零维）。

根据 Sto¨iłow 因子分解定理，每个平面拟正则映射都是一个解析函数与一个拟共形映射的复合。因此，长田维数在平面拟正则映射下的变化与其在解析函数下的变化直接相关。

本文研究解析映射和平面拟共形映射如何影响其定义域子集的长田维数。我们证明，解析函数的作用方式多种多样：它们可以保持、增大或减小长田维数。首先，我们证明非常数多项式保持任意集合的长田维数。事实上，多项式是唯一能保持其定义域任意子集长田维数的整映射（推论 1.3）。

定理 1.1。设 f 为非常数多项式。则对于每个 $X \subset \mathbb{C}$，维数$_{\mathrm{N}} X = $维数$_{\mathrm{N}} f(X)$。

另一方面，具有无穷远本性奇点的整函数，就其域的子集的长田维数而言，表现出截然不同的性质。

定理 1.2（整函数导致长田维数增加）。设 f 为在无穷远处具有本性奇点的非常数整函数。对于任意 $Y \subset \mathbb{C}$，存在一个长田维数为零的可数集 X，使得 $f(X)$ 在 Y 中稠密（因此 维数$_{\mathrm{N}} f(X) = $ 维数$_{\mathrm{N}} Y$）。

定理 1.1 和定理 1.2 立即得到以下推论。

推论 1.3。设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为整函数。以下各条件等价：
(1) f 是非常数多项式；(2) $\dim_N f(X) = \dim_N X$ 对每个 $X \subset \mathbb{C}$ 都成立。

在配备球面度量 q 的黎曼球面上，有理函数也满足类似的结果。

定理 1.4. 设 $r\colon (\mathbb{C}, q) \to (\mathbb{C}, q)$ 是非常数有理函数。那么，对每个 $X \subset \mathbb{C}$，都有$\dim_{\mathrm{N}} X = \dim_{\mathrm{N}} r(X)$。此外，非恒定亚纯函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 当且仅当它保持 $\mathbb{C}$ 的每个子集的长田维数时，才是有理函数。

整函数也可以降低其定义域子集的长田维数。例如，指数映射 $f(z) = e^z$ 将半格

$$A = \{k + 2\pi \mathbf{i}\ell : k \in \mathbb{N},\ \ell \in \mathbb{Z}\}$$

映到几何数列 $\{e^k : k \in \mathbb{N}\}$，且 $\dim_N A = 2$，而 $\dim_N f(A) = 0$。高维拟正则映射也可能呈现类似行为；例如，参见例 6.4 中关于佐里奇映射的讨论。下面的定理给出了长田维数降低的另一个例子。

定理 1.5（整函数使长田维数降低）。设 $A = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$是 $\mathbb{C}$中的离散集，且

$$\sum_j |\alpha_j|^{-1} < \infty, \tag{1.1}$$

设 q 为非常数多项式，并设 $m \in \mathbb{N}\{0\}$。定义

$$F(z) := z^m e^{q(z)} \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_j}\Big).$$

则存在一个集合 $X \subset \mathbb{C}$，使得 维数$_{\mathrm{N}}\, X = 1$ 且 维数$_{\mathrm{N}}\, F(X) = 0$。

定理 1.5 的证明比定理 1.2 的证明困难得多，技术性也强得多。定理 1.5 中将整函数限制为其零点集 A满足亏格一条件 (1.1)，这一限制并非本质性的；它只是简化了证明的某些方面。我们预期，对于任意亏格的整函数，类似的结论仍然成立。

自 Gehring 和 V¨ais¨al¨a 的奠基性工作 [19] 以来，拟共形映射对维数的扭曲已得到广泛研究。在平面情形下，他们证明了拟共形映射对豪斯多夫维数的扭曲是可控的，尤其是保持维数为二的集合的维数不变。如上所述，拟共形映射保持其定义域内紧子集的长田维数。

集合的孔隙性已在动力系统、映射理论和分形几何研究中得到探讨。非正式地说，若集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中满足： $\mathbb{R}^n$ 中的每个球 $B(x, r)$ 都包含一个半径与其相当且完全包含在 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 中的子球，则称 $E \subset \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是疏松的。精确定义见 § 5。本文关注的是孔隙性与长田维数之间的关系。也就是说，当且仅当 $\dim_{\mathrm{N}} E \leq n-1$ 时，集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是疏松的。参见定理 5.1。

正如 V¨ais¨al¨a 在 [39, Introduction], if f 中所指出的：若 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是拟共形的，且 E 在 $\mathbb{R}^n$ 中是多孔的，那么 $f(E)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中也多孔。在 [39, Theorem 4.2] V¨ais¨al¨a 中，他证明了一个（更难的）事实：即使只假设 f 是从 $E \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的拟对称嵌入，同样的结论仍然成立。

由前面的讨论可知，在 $\mathbb{R}^n$ 中区域之间的拟共形映射 $f : \Omega \to \Omega'$ 会保持 Ω 的紧子集的孔隙性（在 $\mathbb{R}^n$ 中）。然而，若去掉紧性限制，这一结论便不再成立。事实上，平面共形映射可以将长田维数严格小于二的集合映射为长田维数等于二的集合。用 $\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘。

定理 1.6 (共形映射可以破坏孔隙性)。 存在一个单连通域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$、一个共形映射 $f : \mathbb{D} \to \Omega$，以及一个直径 $\ell \subset \mathbb{D}$，使得 维数$_{\mathrm{N}}\, \ell = 1$ 且 维数$_{\mathrm{N}}\, f(\ell) = 2$。特别地， f 将 $\mathbb{C}$ 的一个多孔子集 ℓ 映射为一个非多孔子集 $f(\ell) \subset \mathbb{C}$。

由于复平面子集的孔隙性也可用 Assouad 维数严格小于 n [28]这一条件来刻画，因此我们还得到以下推论。

推论1.7。 存在一个共形映射 f： $\mathbb{D} \to \Omega$，它将单连通域映到$\Omega \subsetneq \mathbb{C}$，并且存在一个直径 $\ell \subset \mathbb{D}$，使得维数$_A\, \ell = 1$ 且维数$_A\, f(\ell) = 2$。

定理 1.2 在 [13]表明， $\mathbb{R}^n$中区域之间的拟共形映射会保持域内 Assouad维数为 n的紧子集的 Assouad维数。此外， $\mathbb{R}^n$ 上的全局拟共形映射会保持任意 Assouad维数为 n的集合的 Assouad维数。推论1.7表明，前一结论中的紧性假设，以及后一结论中映射在全局上有定义的假设，都是必要的。

1.1. **论文结构**。 第 2 节介绍必要的定义和背景知识。我们回顾长田维数、拟对称、拟共形和拟正则映射的定义及其基本性质。本节还通过示例说明度量空间何时具有 Nagata 零维或一维。第 3 节介绍确立长田维数不变性的结果。在 3.1 小节中，我们证明定理 1.1，该定理断言解析映射会保持其定义域内紧子集的长田维数。因此，平面拟正则映射也会保持紧子集的长田维数。3.2 小节讨论亚纯映射下长田维数的不变性，并给出定理 1.4 的证明。第 4 节给出定理 1.2 和定理 1.5 的证明，这两个定理描述了整函数作用下长田维数的增加与减少。第 5 节探讨孔隙性、长田维数与 Assouad维数以及拟共形映射之间的关系，并给出定理 1.6 的证明。最后，第 6 节以若干开放问题和由本文结果引出的后续研究方向作结。

1.2. 记号。我们用 $\#S$ 表示集合 S的基数。在度量空间 (X,d) 中，我们将 $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a,a') : a,a' \in A\}$ 记为 $A \subset X$ 的直径，并将 $\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$ 记为集合 A、$B \subset X$之间的距离。(X,d) 中以 x 为中心、半径为 $r > 0$ 的开球记为 $B(x,r)$，而相应的闭球记为$\overline{B}(x,r)$。

区间 $I \subset \mathbb{R}$ 的长度记为 $\ell(I) := \sup I - \inf I$。

包含于域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中的集合 A 称为在 Ω 中紧包含，如果其闭包 $\overline{A}$ 是 Ω 的紧子集。我们用 $A \Subset \Omega$ 表示 A 在 Ω 中紧包含。

致谢。 我们感谢 Guy C. David、Sylvester Eriksson-Bique、Urs Lang 和 Vyron Vellis，就长田维数及其畸变性质与我们进行了富有帮助的讨论。定理 1.6 中的构造由 Sylvester Eriksson-Bique 提议给作者，我们也感谢他允许我们将其收入本文。

第一作者衷心感谢豪斯多夫数学研究所（波恩）提供的支持与热情接待。本研究由德国研究联合会（DfG，德国研究联合会）通过德国卓越战略项目 EXC-2047/1 – 390685813 资助，并获得世界银行 2025 年 McNamara Grant 资助。第二作者获西蒙斯基金会 Simons Collaboration Grant #852888 资助。

2. Background

2.1. **长田维数**。 设 $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ 是度量空间 (X,d) 的一个子集族。若存在常数 $s \geq 0$，使得对所有 $i \in I$，都有 $\operatorname{diam} B_i \leq s$，则称该族 $\mathcal{B}$ 是 s-有界的 。对于 $s > 0$，$\mathcal{B}$ 的 s-重数 是满足以下条件的最小整数 $n \geq 0$： X 的每个直径为 $\leq s$ 的子集与该族至多 n 个成员相交。

定义 2.1. 对于度量空间 X，其长田维数 （或*Assouad–Nagata* 维数）$\dim_{\mathrm{N}} X$ 是满足以下性质的所有整数 n 中的最小值：

存在常数 $c > 0$，使得对于所有 $s > 0$，空间 X 都存在一个 cs-有界覆盖，其 s-重数至多为 $n + 1$。

长田维数由 Assouad 在 [1] 中首次引入并命名。

定理 2.2（有限稳定性，[25] 中的定理 2.7）。设 $X = Y \cup Z$。则$\dim_{\mathrm{N}} X = \sup\{\dim_{\mathrm{N}} Y, \dim_{\mathrm{N}} Z\}$。

然而，长田维数并非可数稳定。例如，$\dim_{\mathrm{N}} \mathbb{Z} = 1$而 $\dim_{\mathrm{N}}\{x\} = 0$ 对每个单点集 $\{x\}$。

定理 2.3（完备化不变性，[25]）。设 (X, d) 为一个不完备的度量空间，并设 $\overline{X}$ 表示 X 的度量完备化。则 $\dim_N X = \dim_N \overline{X}$。

引理 2.4（指数序列）。对于 $\lambda > 1$，设 $X = \{\lambda^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ 配备欧几里得度量。则 $\dim_{\mathrm{N}} X = 0$。特别地，对于 $c = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ 以及任意 $s > 0$，空间 X 具有一个 cs-有界覆盖，其 s-重数为 1。

证明。固定 $s > 0$。选取 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\lambda^{N-1}(\lambda - 1) \leq s < \lambda^N(\lambda - 1).$$

则对所有 $n \geq N$有 $|\lambda^{n+1} - \lambda^n| > s$，从而 $\mathbb{R}$ 的任意直径至多为 s 的子集至多包含点 $\{\lambda^n\}_{n\geq N}$中的一个。该覆盖

$$\mathcal{B}_s := \left\{\{e, e^2, \dots, e^N\}, \{e^{N+1}\}, \{e^{N+2}\}, \dots\right\}$$

是 cs-有界的，并带有 $c = \frac{\lambda}{\lambda-1}$。由于每个直径至多为 s 的子集至多与 $\mathcal{B}_s$的一个元素相交，该覆盖的 s-重数为1。因此$\dim_{\mathrm{N}} X = 0$。□

定义 2.5 (s–链与 s–链分量**).** 设(X, d)为一个度量空间，并设 $s > 0$。X中的有限点列 $x_0, x_1, \dots, x_N$称为一个 s–链，如果对每个 i有 $d(x_i, x_{i+1}) \leq s$。两点 $x, y \in X$称为 s–链连通，如果存在一个 s–链 $x = x_0, \dots, x_N = y$。s-链连通性是一个等价关系，而 X 的极大 s-链连通子集称为 X的s–分量 。

注记 2.6. 容易验证，度量空间 (X, d) 的长田维数为零，当且仅当存在常数 $C_X \geq 1$，使得对于每个$s > 0$，X 的每个 s–链分量的直径至多为 $C_X s$。

引理 2.7 (增长链**).** 设 (X, d) 是一个度量空间。假设存在 $\delta > 0$ 和一个有限 δ–链序列 $C_n = \{x_0^n, \dots, x_{N_n}^n\} \subset X$，使得直径 $C_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$。那么 维数$_{\mathrm{N}} X \geq 1$。特别地，如果 $X \subset \mathbb{R}$，那么 维数$_{\mathrm{N}} X = 1$。

证明。如果 $\dim_{\mathrm{N}} X = 0$，那么存在 $C_X \geq 1$，使得 X 的每个 s–链分量的直径均为 $\leq C_X s$。固定 $s = \delta$。每个 C_n 都是一个 δ–链，因此包含于某个 δ–链分量中。因此，对所有 n，都有 diam $C_n \leq C_X\delta$，这与关于 diam C_n的假设矛盾。因此 $\dim_{\mathrm{N}} X \geq 1$。如果 $X \subset \mathbb{R}$，那么 $\dim_{\mathrm{N}} X \leq 1$，从而 $\dim_{\mathrm{N}} X = 1$。□

推论 2.8。 设 $X \subset \mathbb{R}$。如果对于某个 $\delta > 0$，存在满足 $M_n \to \infty$的有限等差数列 $\{a_n, a_n + \delta, a_n + 2\delta, \ldots, a_n + M_n\delta\} \subset X$，那么 $\dim_{\mathrm{N}} X = 1$。

回顾一下，度量空间 (X, d) 的 *Assouad*维数 是满足以下条件的 $s > 0$ 值的下确界：存在 $C > 0$，使得对于任意 $x \in X$ 和任意 $0 < r < R$，球 $B(x, R)$ 都可以被至多 $C(R/r)^s$ 个半径为 r 的球覆盖。度量空间 (X, d) 的 Assouad 维数有限，当且仅当它是倍增的。正如引言中所指出的，

$$\dim_N X \leq \dim_A X \tag{2.1}$$

对于任意度量空间 X [26, 定理 1.1]。

2.2. **拟对称映射与超度量空间**。

定义 2.9。 设 $\eta\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是一个同胚。度量空间之间的同胚$f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 若对所有 $x, y, z \in X$, $x \neq z$，均有

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_Y(f(x), f(z))} \leq \eta\left(\frac{d_X(x, y)}{d_X(x, z)}\right).$$

同胚 $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 若对于某个同胚 η 是 η-拟对称的，则称其为拟对称映射；若度量空间 X 和 Y 之间存在拟对称映射 $f\colon X \to Y$，则称它们拟对称等价。

Tukia 和 V¨ais¨al¨a 为度量空间中拟对称映射理论奠定了基础 [35]。更多背景信息请参见 [20,第 10-12] 章。

定理 2.10 （定理 1.2, [25]）。 若 X 和 Y 拟对称等价，则维数$_{\mathrm{N}} X =$ 维数$_{\mathrm{N}} Y$。

双利普希茨映射是拟对称映射的一个特例。回顾一下，$f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是 L-双利普希茨的，$L \geq 1$，如果

$$L^{-1} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x, y)$$

对于所有 x, $y \in X$。每个 L-双利普希茨映射都是 η-拟对称的，其中 $\eta(t) = L^2 t$。

定义 2.11。 若度量空间 (X, d) 对所有 $x, y, z \in X$都满足 $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$，则称其为超度量。

定理 2.12 （ [4]中的定理 3.3）。 如果度量空间 （X, d）的长田维数为零，那么存在一个定义在 X 上的超度量 ρ，使得恒等映射$\mathrm{id} : (X, d) \to (X, \rho)$ 是双利普希茨映射。

特别是，由于双利普希茨映射是拟对称的，$\dim_{\mathrm{N}}(X, \rho) = 0$。此外，如果 X 与某个超度量空间双利普希茨等价，那么 $\dim_{\mathrm{N}} X = 0$。详情请见 [4]。

下面的引理推广了引理 2.4。这里我们给出另一种证明，该证明依赖于用超度量刻画 Nagata 零维。

引理 2.13。设(X,d)为一个度量空间，固定一个基点 $o\in X$ 和 $\lambda>1$，并令 $Z:=\{x_k:\ k\in\mathbb{N}\}\subset X$ 为一个满足以下条件的离散序列

$$d(x_{k+1},o)\ \geq\ \lambda\, d(x_k,o)$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$ 均成立。因此 维数$_{\mathrm{N}}\, Z=0$。

证明。令 $r_k:=d(x_k,o)$，于是 $r_{k+1}\geq\lambda\, r_k$，从而 (r_k) 严格递增。定义$d_U:Z\times Z\to[0,\infty)$ 为

$$d_U(x_m,x_n)\ :=\ \begin{cases}0, & m=n,\\ r_{\max\{m,n\}}, & m\neq n.\end{cases}$$

我们声称 d_U 是 Z 上的超度量。只需验证三角不等式，因此固定 m、n、p，并不失一般性地假设 $m\ \leq\ n$。若 $p\geq n$，则 $d_U(x_m,x_n)\ =r_n\leq r_p=\max\{d_U(x_m,x_p)\ d_U(x_p,x_n)\}$。若 $m\leq p<n$，则 $d_U(x_m,x_n)\ =\ r_n\ =\max\{r_p,r_n\}\ =\max\{d_U(x_m,x_p)\ d_U(x_p,x_n)\}$。最后，若 $p\leq m\leq n$，则 $d_U(x_m,x_p)\ =r_m\leq r_n=d_U(x_m,x_n)$ 且 $d_U(x_p,x_n)\ =r_n$，因此同样有 $d_U(x_m,x_n)\ \leq\max\{d_U(x_m,x_p)\ d_U(x_p,x_n)\}$。因此 d_U 是超度量。

接下来我们证明 (Z,d) 与 (Z,d_U) 双利普希茨等价。再次假设 $m<n$。则由 (X,d) 中的三角不等式，$r_n-r_m\ \leq\ d(x_m,x_n)\ \leq\ r_n+r_m$，并且由于 $r_m\leq r_n/a$，我们得出

$$\big(1-\frac{1}{\lambda}\big)r_n\ \leq\ d(x_m,x_n)\ \leq\ \big(1+\frac{1}{\lambda}\big)r_n.$$

由于 $d_U(x_m,x_n)\ =r_n$，我们得到

$$\frac{\lambda}{\lambda+1}\,d(x_m,x_n)\ \leq\ d_U(x_m,x_n)\ \leq\ \frac{\lambda}{\lambda-1}\,d(x_m,x_n).$$

因此恒等映射 $\mathrm{id}:(Z,d)\ \to(Z,d_U)$ 是双利普希茨的。由于 Z与一个超度量空间双利普希茨等价，从而 $\dim_{\mathrm{N}}Z=0$。□

2.3. **拟共形映射与拟正则映射**。

定义 2.14. 度量空间之间的同胚 $f\colon(X,d_X)\ \to(Y,d_Y)$ 对某个 $H\geq1$ 称为 H-拟共形，如果

$$\limsup_{r\to0}\frac{\sup\{d_Y(f(x),f(y)):d_X(x,y)\leq r\}}{\inf\{d_Y(f(x),f(z)):d_X(x,z)\geq r\}}\leq H \tag{2.2}$$

对每个 $x\in X$。

注 2.15. 若 $f:\Omega\to\Omega'$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中区域之间的同胚，则 f 是拟共形映射，当且仅当它是局部拟对称的。此外，若 $\Omega\ =\Omega'=\mathbb{R}^n$，则 f 是拟共形映射，当且仅当它是拟对称的。平面区域之间保向的 1-拟共形同胚，恰好就是保角映射。

一般而言，拟共形映射未必保持任意（非紧）子集的长田维数。例如，定义在 $\Omega\ =\{\,x+\mathbf{i}y\colon\ x\in\mathbb{R},\,0<y<2\pi\}$ 上的共形映射 $f(z)\ =e^z$ 将长田维数为

一的离散集 $\{e^n : n \in \mathbb{N}\}$ 映射到 Nagata 零维集合。然而，引理 2.15 和定理 2.10 立即推出以下结果。

命题 2.16. 设 $f : \Omega \to \Omega'$ 是$\mathbb{R}^n$、 $n \geq 2$中区域之间的拟共形映射。那么对于每个紧集 $E \subset \Omega$，$\dim_N E = \dim_N f(E)$ 。

证明. 由于 $\mathbb{R}^n$ 中的拟共形映射是局部拟对称的，结论可由长田维数的有限稳定性（定理 2.2）及其在拟对称映射下的不变性（定理 2.10）得出。 □

定义 2.17. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个域，且设 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是索伯列夫空间 $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 中的连续映射。若对于某个 $K \geq 1$， f满足畸变不等式，则称其为 K–拟正则，

$$|Df(x)|^n \leq K\, J_f(x) \qquad \text{for almost every } x \in \Omega, \tag{2.3}$$

其中 $|Df(x)| = \sup_{|v|=1} |Df(x)v|$表示微分的算子范数，而$J_f(x)$是 f的雅可比行列式。

拟正则映射具有类似于定义 2.14 的度量刻画；参见[31, 定理 6.2]。另一方面，欧几里得域上的拟共形映射是同胚，同时也是定义 2.17 意义下的拟正则映射。在平面情形中，拟正则映射具有特别简单的结构：每个这样的映射都可以表示为一个拟共形同胚与一个全纯函数的复合。事实上，每个解析函数都是 1-拟正则的。

定理 2.18 (斯托¨伊洛夫分解， [27])。 设$\Omega \subset \mathbb{C}$ 为一个域，且 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 为拟正则映射。则存在一个拟共形同胚 $h : \Omega \to \Omega'$到某个域$\Omega' \subset \mathbb{C}$ 的映射，以及一个解析函数 $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ ，使得 $f = g \circ h$。

2.4. 黎曼球面上的球面度量与拟M¨obius映射。 ˆ 在扩充复平面上工作较为方便，$\mathbb{C} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 配备球面度量

$$q(z, w) := \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}$$

and

$$q(z, \infty) = q(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \qquad q(\infty, \infty) = 0.$$

我们引入反演 ι： $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 由 $\iota(z) = \frac{1}{z}$ 给出，并将ˆ ˆι 延拓为映射 ι : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ，通过 $\iota(\infty) = 0$ 以及 $\iota(0) = \infty$。度量 q 在反演下不变， $q(\iota(z)\ \iota(w)) = q(z, w)$，并在ˆ黎曼球面 $\mathbb{C}$上诱导标准共形结构。

球面度量在$\mathbb{C}$的有界子集上与欧几里得度量双利普希茨等价：若 $E \subset \mathbb{C}$ 有界，则 $c_E^{-1}|z-w| \leq q(z, w) \leq |z-w|$ 对所有 $z, w \in E$成立，其中 $c_E = 1 + \sup_{z \in E} |z|^2$。

回顾保持$\mathbb{C}$中元素四元组的交比。在 [38], V¨ais¨al¨a引入了度量空间背景下拟M¨obius 映射的概念。

定义 2.19。 设 $\eta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个同胚。若同胚$f\colon (X,\ d_X) \to (Y,\ d_Y)$对所有互异点的四元组$x,\ a,\ b,\ c \in X$都满足

$$\frac{d_Y(f(x),f(a))\,d_Y(f(b),f(c))}{d_Y(f(x),f(b))\,d_Y(f(a),f(c))} \leq \eta\left(\frac{d_X(x,a)\,d_X(b,c)}{d_X(x,b)\,d_X(a,c)}\right).$$

每个拟对称映射都是拟 M¨obius 映射；反过来，在有界度量空间之间的每个拟 M¨obius 映射（或在单点扩张中保持无穷远点不变的映射，参见 [38, 定理 3.10]）都是拟对称映射。

定理 2.20 （ [40]中的定理 1.1）。 设 $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ 是拟 *M¨obius* 映射。那么 $\dim_N X = \dim_N Y$。

请注意，无论使用欧几里得度量 d_E 还是球面度量 q计算， $\mathbb{C}$ 中四个元素的交比都相同。因此，id：$(\mathbb{C},d_E) \to (\mathbb{C},q)$ 是 M¨obius 映射，并保持集合的长田维数。

在 [38], V¨ais¨al¨a 中，进一步探讨了域这一背景下拟共形性与拟对称性（或拟 M¨obius 条件）之间的关系。我们陈述 [38, 定理 5.4]的一个特例。

定理 2.21 (V¨ais¨al¨a，定理 5.4，见 [38])。 设Ω 和Ω′ 是ˆ$\mathbb{C}$中的一致域。则每个拟共形同胚 $f\colon \Omega \to \Omega'$ 都是拟莫比乌斯映射。

这里省略一致域的定义，详情请参见 [38, §4.6]。ˆ 当 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$中的若尔当区域时，域 Ω 一致，当且仅当 Ω 在 $\mathbb{C}$ 中的边界是拟圆 [29, 推论 2.33]。

3. Invariance of Nagata dimension

本节将给出若干结果，证明长田维数在不同情形下的不变性。第 3.1 小节关注长田维数在解析函数、尤其是多项式作用下的不变性；第 3.2 小节则讨论亚纯函数和有理函数的类似情形。

3.1. 长田维数与解析函数。

本节中，我们证明定理 1.1，即非恒定复多项式保持长田维数不变。为此，我们首先证明，解析函数保持其定义域内紧子集的长田维数。

引理 3.1。 设 $g(z) = z^n$ 对于 $n \in \mathbb{N}$。固定 $\theta \in (0, 2\pi/n)$ 和 $\alpha > 0$，并令

$$\Omega_{\theta,\alpha} := \{z \in \mathbb{C}:\ \alpha < \arg z < \alpha + \theta\}.$$

于是 $g\colon \overline{\Omega_{\theta,\alpha}} \to \overline{g(\Omega_{\theta,\alpha})}$ 是拟莫比乌斯映射。

ˆ证明。 扇形域 $\Omega_{\theta,\alpha}$ 是一个拟圆盘 [18, 例 1.4。2] 因此，其在 $\mathbb{C}$中的边界是一条拟圆。所以 $\Omega_{\theta,\alpha}$ 是一致域。由于 $\theta < \frac{2\pi}{n}$ 映射 g 在 $\Omega_{\theta,\alpha}$上保角，因此是~~1~~-拟共形的。根据定理 2.21， g 是拟莫比乌斯映射。□

推论 3.2. 设 $g(z) = z^n$，其中 $n \in \mathbb{N}$。那么，对每个子集 $X \subset \mathbb{C}$，都有 维数$_{\mathrm{N}} X =$ 维数$_{\mathrm{N}}\, g(X)$。

证明。 我们应用长田维数的有限稳定性定理 2.2。将平面划分为角扇区

$$P_j := \{z \in \mathbb{C} : \tfrac{j\pi}{n} < \arg z < \tfrac{(j+1)\pi}{n}\}, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

注意， P_j 等于引理 3.1 中针对适当的 α 以及针对$\theta = \frac{\pi}{n}$ 的域 $\Omega_{\theta,\ \alpha}$ 。由于 $\theta < \frac{-2\pi}{n}$ ，该引理的假设得到满足，因而 $g|_{P_j}$ 是拟 M¨obius 的，并保持 P_j的任意子集的长田维数。由于$\mathbb{C} = \bigcup_{j=0}^{2n-1} P_j$ 是有限并，长田维数的有限稳定性蕴含

$$\dim_{\mathrm{N}} X = \max_{0\le j\le n-1} \dim_{\mathrm{N}}(X \cap P_j) = \max_{0\le j\le n-1} \dim_{\mathrm{N}} g(X \cap P_j) = \dim_{\mathrm{N}} g(X).$$

对任意 $X \subset \mathbb{C}$。证明完毕。 □

定理 3.3. 设 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 为解析映射，其中Ω 是一个域。若 $E \subset \Omega$是紧的，则$\dim_{\mathrm{N}} E = \dim_{\mathrm{N}} f(E)$。

证明. 由于 f 是解析的，其在 E 中的临界点集是有限的。若 f 在 E中没有临界点，则 f 在 E上是保角的，因而由引理2.16，在此情形下 $\dim_{\mathrm{N}} E = \dim_{\mathrm{N}} f(E)$。

现在假设 f在 E中有临界点 c_1、. . . 、 c_m。由于 f是解析的，对每个 c_j ，都存在一个半径 $\varepsilon_j > 0$ 以及共形映射 ϕ_j， ψ_j ，使得

$$\psi_j \circ f \circ \phi_j^{-1}(z) = z^{k_j}$$

对所有 $z \in B_{c_j}$ ，其中 B_{c_j} 是以 c_j 为中心、半径为 ϵ_j 的球，而 k_j 是 f 在 c_j处的重数。

由于长田维数在度量完备化下保持不变，$\dim_{\mathrm{N}} B_{c_j} \cap E = \dim_{\mathrm{N}} B_{c_j} \cap E.$。每个 $\overline{\phi_j}$和 $\overline{\psi_j^{-1}}$在其域的紧子集上都是保角的，因而也是拟共形的；根据引理2.16，它们都保持长田维数不变。

由推论 3.2， z^{k_j} 对每个 j 都保持长田维数不变；又由于在 B_{c_j}上 $f = \psi_j^{-1} \circ z^{k_j} \circ \phi_j$ ，我们得出

$$\dim_{\mathrm{N}} B_{c_j} \cap E = \dim_{\mathrm{N}} f(B_{c_j} \cap E), \qquad j = 1, \ldots, m.$$

在临界邻域之外，也就是说，在

$$E' := E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_{c_j},$$

f 是保角的（因而也是拟共形的）。因此， f 在有限个集合 E' 和 $B_{c_j} \cap E$、 $j = 1$、. . . 、 m 上分别保持长田维数不变。由定理 2.2 可得结论。□

推论3.4. 设 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 是一个解析映射，其中 Ω 是一个域。如果 $A \Subset \Omega$，那么 维数$_{\mathrm{N}} A =$ 维数$_{\mathrm{N}} f(A)$。

根据 Sto¨ılow 的因式分解定理 2.18，我们立即得到以下结果。

推论 3.5。 令 $g :\ \Omega \to \mathbb{C}$ 为拟正则。若 $A \Subset \Omega$ 则 维数$_{\mathrm{N}} A =$ 维数$_{\mathrm{N}} g$（A）。

我们以定理 1.1 的证明结束本节。

定理 *1.1* 的证明。令 $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 并定义

$$r(z) := \iota \circ p \circ \iota(z) = \frac{1}{p(1/z)} = \frac{z^n}{1 + a_{n-1}z + \cdots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n}.$$

由于 p 是多项式， r 在 0 处解析。因此，存在 $\rho > 0$ ，使得r 在闭圆盘 $B(0,\rho)$ 上解析。由定理 3.3， r 保持 $B(0,\rho)$子集的长田维数。此外， ι 是拟 M¨obius 映射，因此根据定理 2.20 保持长田维数。令 $X_o = X \cap \{z\colon |z| > 1/\rho\}$，则 $\dim_{\mathrm{N}} X_o = \dim_{\mathrm{N}} r \circ \iota(X_o) = \dim_{\mathrm{N}} \iota \circ r \circ \iota(X_o)$。再次对 $X_i := X \setminus X_o$应用定理 3.3，得到 $\dim_{\mathrm{N}} X_i = \dim_{\mathrm{N}} p(X_i)$。根据有限稳定性，我们有

$$\begin{aligned} \dim_{\mathrm{N}} X &= \max\{\dim_{\mathrm{N}} X_o, \dim_{\mathrm{N}} X_i\} \\ &= \max\{\dim_{\mathrm{N}} p(X_o), \dim_{\mathrm{N}} p(X_i)\} = \dim_{\mathrm{N}} p(X) \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

3.2. **长田维数与有理函数**。 本小节讨论长田维数在非常值亚纯函数作用下的不变性，尤其是在有理函数作用下的不变性。

引理 3.6。 设 $f(z)$ 是定义在域 $\Omega \subset \mathbb{C}$上的亚纯函数。对每个极点 f ，都存在一个邻域 U ，使得 U 的任意子集的长田维数在 f作用下保持不变。

证明。 设 p 是 $f(z)$的一个有限极点。由于极点是孤立的，存在 p 的一个预紧邻域 U，使得 $1/f(z) = (z-p)^n h(z)$，其中 $n \geq 1$，且 $h(z)$在 U上不为零且全纯。令 $K = U \subset \Omega$ 表示 U的紧闭包。由于 $f(z) = \iota(f^{-1}(z))$，定理 2.20 和推论 3.4表明， f保持长田维数不变。

若 $p = \infty$，选取局部坐标 $w = 1/z$ 并在 $w = 0$ 的去心邻域上定义 $g(w) := f(1/w)$。由于 f 在 ∞处是亚纯函数， g 在 0 处也是亚纯函数。将有限极点情形应用于 $w = 0$ 处的 g ，存在一个以 0 为中心的圆盘 V，使得对于所有 $B \subset V$，$\dim_{\mathrm{N}} B = \dim_{\mathrm{N}} g(B)$。令 $U := \{z \in \Omega\colon 1/z \in V\}$。对于任意$A \subset U$，令 $B := \{1/z\colon z \in A\}$ ，得到

$$\dim_{\mathrm{N}} A = \dim_{\mathrm{N}} B = \dim_{\mathrm{N}} g(B) = \dim_{\mathrm{N}} f(A),$$

由定理 2.20 可知，因为 ι是准 M¨obius。 □

引理 3.7。 设 $f(z)$ 是在 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的非恒定亚纯函数，且$A \Subset \Omega$。则 维数$_{\mathrm{N}} A =$ 维数$_{\mathrm{N}} f(A)$。

证明。 由于长田维数在取闭包下保持不变，只需假设A是紧的。

如果 f 在 A 中没有极点，那么 f 在 A 的某个邻域内全纯，因此结论可由定理 3.3 得出。

否则，由于亚纯函数的极点是孤立的，且 A 是紧的， A只包含有限个极点。设这些极点为 p_1、...、 p_k（允许

$p_j = \infty$ 若 $\infty \in \Omega$）。根据引理 3.6，对每个 p_j，都存在一个邻域 U_j，使得 $f(z)$ 保持 U_j 的任意子集的长田维数不变。我们记

$$A = \bigcup_{j=1}^{k} (A \cap U_j) \cup \Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_j \Big).$$

根据引理 3.6，对于每个 j，f 保持 $A \cap U_j$ 的长田维数。在 $A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_j$ 上，函数 f 是解析的，而定理 3.3 蕴含 f 在那里也保持长田维数。将定理 2.2 应用于上述 A 的分解，可得 $\dim_{\mathrm{N}} A = \dim_{\mathrm{N}} f(A)$。□

定理 *1.4* 的证明。令 X 为 $\mathbb{C}$ 的任意子集。若 X 有界，则根据引理 3.7，$\dim_{\mathrm{N}} X = \dim_{\mathrm{N}} r(X)$。

假设 X 无界。定义 $g(w) := r(1/w) = (r \circ \iota)(w)$，它仍然是有理的（因此在 $\mathbb{C}$ 上亚纯）。取 $\mathbb{C}$ 中包含 0 的一个有界邻域 U。根据引理 3.7，g 保持 U 的任意子集的长田维数。令

$$U' := \iota(U) = \{z \in \mathbb{C} : 1/z \in U\}.$$

根据定理 2.20，

$$\dim_{\mathrm{N}} A' = \dim_{\mathrm{N}} \iota(A') = \dim_{\mathrm{N}} g(\iota(A')) = \dim_{\mathrm{N}} r(A')$$

对每个子集 $A' \subset U'$。因此，r 保持了 $X \cap U'$ 中子集的长田维数。ˆ 补集 $V := \mathbb{C} \setminus U'$ 在 $\mathbb{C}$ 中有界，因此由引理 3.7 可得 $\dim_{\mathrm{N}}(X \cap V) = \dim_{\mathrm{N}}(r(X \cap V))$。由于 $X = (X \cap U') \cup (X \cap V)$，长田维数的有限稳定性（定理 2.2）意味着 $\dim_{\mathrm{N}}(r(X)) = \dim_{\mathrm{N}}(X)$。□

4. Entire functions and Nagata dimension

鉴于定理 1.1，自然会问，是否还存在其他类别的整函数，能够保持 $\mathbb{C}$ 任意子集的长田维数。本节将通过确立整函数的若干维数畸变结果，说明并非如此。

4.1. 整函数和亚纯函数导致长田维数增加。本节简要给出定理 1.2 和推论 1.3 的证明。我们还将讨论这些结果向亚纯函数的推广。

根据皮卡大定理 [30, 第 10 章，§4], 在 ∞ 的每个邻域内，f 会无穷多次取到每个复数值，至多只有一个例外。令 $W = \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$，并注意到 $\#W \leq 1$。

令 $Y \subset \mathbb{C}$，并令 $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus W$ 为 Y 中的一个稠密可数集。选取一个严格递增的半径序列 $(R_i)_{i \geq 1}$，使得 $R_1 = 1$ 且 $R_{i+1} > 2R_i$，再选取一组值 (x_i)，使得 $\frac{1}{2} R_{i+1} > |x_i| > R_i$ 且 $f(x_i) = y_i$。于是可数集 $X = \{x_i\} \subset \Omega$ 满足 $|x_{i+1}| > R_{i+1} > 2|x_i| > |x_i| > R_i$。根据引理 2.13，$\dim_{\mathrm{N}}(X) = 0$。此外，$f(X) = \{y_n\}$ 在 Y 中稠密。

至此即完成定理 1.2 的证明。推论 1.3 是定理 1.1 与定理 1.2 的直接推论。

注 4.1. 同样的结论对函数 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 成立，这些函数在 ∞ 处为亚纯且具有本性奇点；换言之，对任意 $Y\subset\mathbb{C}$，存在 $X\subset\mathbb{C}$，使得 $\dim_N X = 0$，且 $f(X)$ 在 Y 中稠密。此处使用皮卡大定理的亚纯版本 [23, 第十六章，前言评注与习题 2.2],，该版本指出：穿孔圆盘 $B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ 中的亚纯函数 g 若在 z_0 处具有本性奇点，则除两个例外值外，它无穷多次取到 $\mathbb{C}$ 的所有值。证明如前进行，将皮卡大定理的这一版本应用于函数 $g(z) = f(\frac{1}{z})$。由此结论与定理 1.4，可再次迅速导出如下

推论 4.2. 设 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为亚纯函数。那么，对于每个 $X\subset\mathbb{C}$，f 是非恒定有理函数，当且仅当 $\dim_N X = \dim_N f(X)$。

4.2. **两个预备引理**。我们陈述几个将在定理 1.5 的证明中用到的引理。

引理 4.3 (径向增长). 设 $q(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0$ 为次数为 $d\geq 1$ 的非恒定多项式，其中 $a_d > 0$。那么存在常数 $R_0, c_0 > 0$（仅取决于 q），使得对所有 $r\geq R_0$ 和所有 $h>0$,

$$\Re\big(q(r+h)-q(r)\big) \;\geq\; c_0\; r^{\,d-1}\; h.$$

证明。写作

$$q'(z) = da_d z^{d-1} + \sum_{m=0}^{d-2} c_m z^m.$$

对于实数 $t\geq 1$,

$$\Re q'(t) \;\geq da_d\; t^{d-1} - \sum_{m=0}^{d-2} |c_m|\; t^m \;\geq da_d\; t^{d-1} - C\; t^{d-2},$$

其中 $C := \sum_{m=0}^{d-2} |c_m|$。取

$$R_0 \;\geq \max\left\{1,\; \frac{2C}{da_d}\right\}$$

并设 $c_0 := \frac{1}{2} da_d$。那么对于所有 $t\geq R_0$,

$$\Re q'(t) \;\geq \tfrac{1}{2} da_d\; t^{d-1} \;=\; c_0\; t^{d-1}.$$

对实数 t，定义 $g(t) := \Re q(t)$。根据中值定理，对于任意 $r\geq R_0$ 和 $h>0$，存在 $\xi\in(r, r+h)$，使得

$$\Re\big(q(r+h)-q(r)\big) = g(r+h)-g(r) = g'(\xi)\; h = \Re q'(\xi)\; h \geq c_0\; \xi^{\,d-1}\; h \geq c_0\; r^{\,d-1}\; h,$$

因为 $\xi\geq r$。这就证明了该断言。 □

引理 4.4 (次线性增长)。 设 $A\subset\mathbb{C}$ 是一个满足 $\sum_{\alpha\in A} |\alpha|^{-1} < \infty$ 的离散集。设 $m_R(A) := \#\{\alpha\in A\colon\ \alpha\in B(0,\ R)\}$。那么 $\lim_{R\to\infty} m_R(A)/R = 0$。

证明。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{A}_n := \{z \in \mathbb{C} : 2^n \le |z| < 2^{n+1}\}$，并设 $M_n := \#A \cap \mathcal{A}_n$。对于每个 $\alpha \in A \cap \mathcal{A}_n$，我们有 $|\alpha| < 2^{n+1}$，因此

$$\sum_{\alpha \in A \cap \mathcal{A}_n} \frac{1}{|\alpha|} \ge \frac{M_n}{2^{n+1}}.$$

对 n 求和，得到

$$\infty > \sum_{\alpha \in A} \frac{1}{|\alpha|} \ge \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in A \cap \mathcal{A}_n} \frac{1}{|\alpha|} \ge \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{2^{n+1}},$$

因此级数 $\sum_{n \ge 0} M_n / 2^n$ 收敛。特别地，

$$2^{-n} M_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{4.1}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，有 $m_{2^{n+1}}(A) = \sum_{k=0}^{n} M_k$。固定 $\varepsilon > 0$。由 (4.1)，存在 K，使得对所有 $k \ge K$，都有 $M_k \le \varepsilon 2^k$。因此，对于 $n \ge K$，

$$m_{2^{n+1}}(A) = \sum_{k=0}^{K-1} m_k + \sum_{k=K}^{n} M_k \le C + \varepsilon \sum_{k=K}^{n} 2^k \le C + \varepsilon\,(2^{n+1} - 2^K),$$

其中 $C = \sum_{k=0}^{K-1} M_k$。两边除以 2^{n+1} 并令 $n \to \infty$，得到

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{m_{2^{n+1}}(A)}{2^{n+1}} \le \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m_{2^{n+1}}(A)}{2^{n+1}} = 0.$$

最后，对于一般的 $R > 0$，选取满足 $2^n \le R < 2^{n+1}$ 的 n。则

$$0 \le \frac{m_R(A)}{R} \le \frac{m_{2^{n+1}}(A)}{2^n} = 2\frac{m_{2^{n+1}}(A)}{2^{n+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

因此 $\lim_{R \to \infty} m_R(A)/R = 0$。 □

4.3. 整函数作用下长田维数的下降。 本节专门证明定理 1.5。由于证明较长，我们先给出一个概要。

证明思路：我们在二进制环域中迭代构造序列 $X = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$，这些环域记为 D_n，其宽度根据零点集 A 的长田常数 c_A 来选取。我们还选取一个由 c_A 确定的递增尺度序列 $\{s_n\}$。根据 A 的长田维数定义，在每个 D_n 中，实轴上都存在一个较长的区间，它与 A 至少相距 εs_n。固定 $\delta > 0$ 后，我们在每个这样的区间内插入一个间距为 δ 的等差点集。由此在 X 中得到任意长的等差链，从而 $\dim_{\mathrm{N}}(X) = 1$。接下来，我们证明沿着一种合适的枚举，比例 $|f(z_{k+1})/f(z_k)|$ 最终会成为 $\ge \Lambda > 1$；这可由 $e^{q(z)}$ 的径向增长以及对零点无穷乘积的控制推出。这保证了 $\dim_{\mathrm{N}}(f(X)) = 0$。注意，我们先构造一个初步的 ˜序列 X，然后将其删减，只保留满足所需增长性质的点；所得子序列就是论证中使用的集合 X。

至此，我们完成了证明思路的概述，现在给出更详细的论证。首先注意，若定理 1.5 中的集合 A 的长田维数为一，则我们可以选取 $X = A$，并注意到 $\dim_N F(X) = 0 \neq \dim_N X$（因为 $F(X) = \{0\}$）。因此，不失一般性，我们可以假设 $\dim_N(A) = 0$。

我们先构造相关集合 X。令 $q(z) = a_d z^d + \cdots + a_0$ with $a_d \neq 0$。如有必要，进行一次旋转后，我们可以假设 $a_d > 0$。

由于 $\dim_N(A) = 0$，存在 $c_A \geq 1$，使得对于任意 $s > 0$，都存在一个 $c_A s$- 有界且 s–两两不交的集族 $\mathcal{B}(s) = \{B_i\}_{i\in I}$，其覆盖 A。更准确地说，每个这样的集合 B_i 都是 A 的子集，且 $\operatorname{diam}(B_i) \leq c_A s$，并且当 $i, j \in I, i \neq j$ 时，$\operatorname{dist}(B_i, B_j) \geq s$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$D_n := \left\{ z : \tfrac{4}{c_A - 1} c_A^{n+2} \leq |z| < \tfrac{4}{c_A - 1} c_A^{n+3} \right\} \subset \mathbb{C}, \tag{4.2}$$

并设

$$D_{\leq n} := \bigcup_{1\leq i\leq n} D_i$$

and

$$D_{\geq n} := \bigcup_{i\geq n} D_i.$$

最后，令 $s_n := c_A^n$，并令 $\mathcal{B}_n = \{B_{i,n}\}_{i\in I_n}$ 表示如上所述的 $c_A s_n$-有界且 s_n 两两不交的 A 覆盖。

固定 $0 < \varepsilon < 10^{-2}$。对于集合 $E \in \mathbb{C}$ 和 $\rho > 0$，用 $N_\rho(E) := \{z \in \mathbb{C} : \exists w \in E$ 表示开 ρ–邻域，使得 $|z - w| \leq \rho\}$。定义（加厚后的）集合

$$B_{i,n}^\varepsilon := N_{\varepsilon s_n}(B_{i,n}), \qquad \mathcal{B}_n^\varepsilon := \{B_{i,n}^{(\varepsilon)}\}_{i\in I_n},$$

并设

$$\Omega_n^\varepsilon := \left(\bigcup_{i\in I} B_{i,n}^\varepsilon \right)^c \subset \mathbb{C}.$$

示意图见图 1。

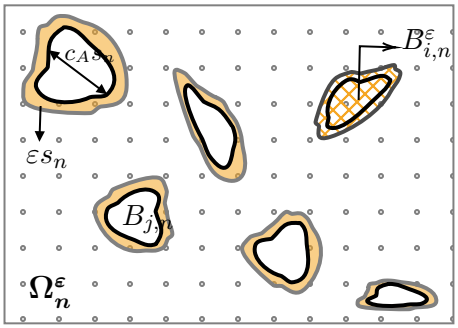


FIGURE 1. εs_n 元素 $B_{i,n}$的加厚

我们注意到

$$\bigcup_{i\in I_n} B^{\varepsilon}_{i,n} \subset \bigcup_{i\in I_{n+1}} B^{\varepsilon}_{i,n+1}$$

and

$$\left(\bigcup_{i\in I_{n+1}} B^{\varepsilon}_{i,n+1}\right)^c = \Omega^{\varepsilon}_{n+1} \subset \Omega^{\varepsilon}_n = \left(\bigcup_{i\in I_n} B^{\varepsilon}_{i,n}\right)^c.$$

对于固定的 n，集合

$$\Omega^{\varepsilon}_n \cap D_n \cap \mathbb{R} = \bigcup \{I : I \in \widetilde{\mathcal{I}}_n\}$$

是有限个闭区间的并。事实上，集合 $A \cap D_n$ 是有限的，因此 $\{B^{\varepsilon}_{i,n} : B^{\varepsilon}_{i,n} \cap D_n \neq \emptyset\}$ 是有限个开球的并，而 $\bigcup_{i\in I_n} B^{\varepsilon}_{i,n} \cap D_n \cap \mathbb{R}$ 是有限个开区间的并。此外，由于 D_n 的宽度为 $4c_A^{n+2} = 4c_A^2 s_n$，且其中存在一个长度至少为 $s_n(1-2\varepsilon)$ 的区间 $I \in \mathcal{I}_n$，这个并集非空。对于每个 $x \in \Omega^{\varepsilon}_n \cap D_n \cap \mathbb{R}$ 和 $\alpha \in A$，我们有

$$|\alpha - x| \geq \varepsilon s_n \tag{4.3}$$

现在定义 $\mathcal{I}_n$ 的一个可容许子族 $\mathcal{I}_n$：

$$\mathcal{I}_n := \left\{ I \in \widetilde{\mathcal{I}}_n : \begin{array}{c} \forall\, B^{\varepsilon} \in \mathcal{B}^{\varepsilon}_n,\ B^{\varepsilon} \text{ is disjoint from the} \\ \text{closure of one of the components of } I^c \end{array} \right\}.$$

对于每个 $I \in \mathcal{I}_n$，我们有 $\ell(I) \geq s_n - 2\varepsilon s_n$。

有关族 $\mathcal{I}_n$ 的示意图，请参见图2。

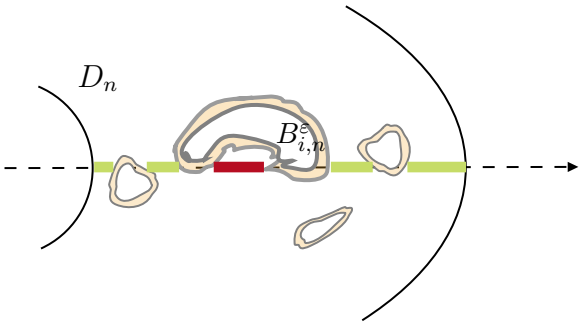


FIGURE 2. 可容许子族的元素 $\mathcal{I}_n$ 以绿色显示。

现在假设零点集 A 已经枚举，$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ 使得 $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq |\alpha_3| \leq \cdots$。

引理 4.5. 对于上述的 A、c_A、ε、a_d、d，存在 $J_A \in \mathbb{N}$，使得

$$\sum_{j>J_A+1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|} \leq \frac{\varepsilon d a_d}{16} \cdot \frac{c_A - 1}{c_A^2(c_A^2 + \varepsilon)}. \tag{4.4}$$

此外，存在 $N_A \in \mathbb{N}$，使得若 $\alpha_j \in D_{\geq N_A}$，则 $j > J_A + 1$。

证明。由于 $\sum_j |\alpha_j|^{-1}$ 收敛，存在 J_A，使得（4.4）成立。根据数值 α_j 的枚举方式，存在 N_A，使得当 $\alpha_j \in D_{\geq N_A}$ 时，$j > J_A + 1$。□

集合 X 的构造。固定

$$0 < \delta < c_A. \tag{4.5}$$

设 R_0 如引理 4.3 中所述，N_A 如引理 4.5 中所述。固定 $n_q \geq 1$，使得 $R_0 \in D_{n_q}$。我们首先按如下方式构造集合 $X \subset \mathbb{C}$：

$$\tilde{X} \subset \bigcup_{n>\max\{n_q,N_A\}} \bigcup_{I\in\mathcal{I}_n} I \subset \Omega_n^{\varepsilon}$$

and

$$\tilde{X} \cap D_n := \left\{(\inf I) + \varepsilon s_n + m\delta : I \in \mathcal{I}_n, m = 1, \ldots, \left\lfloor \tfrac{\ell(I)-\varepsilon s_n}{\delta} \right\rfloor \right\}$$

对于 $n < \max\{n_q, N_A\}$。

枚举 $\tilde{X} = \{z_1 < z_2 < z_3 < \cdots\}$ 按递增顺序。

命题 4.6。存在 $K \in \mathbb{N}$ 和 $\Lambda > 1$，使得对所有 $k \geq K$，都有

$$\left|\frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}\right| \geq \Lambda\,.$$

我们暂且推迟命题 4.6 的证明。定义

$$X = \tilde{X} \cap D_{\geq K} \tag{4.6}$$

并证明该集合 X 满足定理 1.5 的结论。

定理 1.5 的证明。 设 X 如 (4.6) 所示，其中 K 如命题 4.6 所示。由推论 2.8，$\dim_N(X) = 1$。另一方面，命题 4.6 和引理 2.13 一起推出 $\dim_N(f(X)) = 0$。证明完毕。□

尚需证明命题 4.6。首先，我们注意到，对于从 X 中选出的任意一对连续项 z_k、z_{k+1}，以下情况恰有一种成立：

- 如果 z_k 和 z_{k+1} 位于同一个区间 $I \in \mathcal{I}_n$ 中，那么

$$|z_{k+1} - z_k| = \delta; \tag{4.7}$$

- 若 z_k 和 z_{k+1} 位于同一环带 D_n中的不同区间内，则

$$\varepsilon s_n \leq |z_{k+1} - z_k| \leq (c_A + 2\varepsilon)s_n; \tag{4.8}$$

- 若 $z_k \in D_n$ 和 $z_{k+1} \in D_{n+1}$，则

$$\varepsilon s_n \leq |z_{k+1} - z_k| \leq (2c_A^2 + 2\varepsilon)s_n. \tag{4.9}$$

固定 $k \in \mathbb{N}$，令 $n(k) \in \mathbb{N}$ 满足 $z_k \in D_{n(k)}$。注意到

$$\left|\frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}\right| = \left|\frac{z_{k+1}^m}{z_k^m}\right| \cdot \left|\frac{e^{q(z_{k+1})}}{e^{q(z_k)}}\right| \cdot \left|\frac{P(z_{k+1})}{P(z_k)}\right| \geq E(z_k)Q(z_k)$$

其中 $E(z_k) := e^{\Re(q(z_{k+1})-q(z_k))}$ 以及 $Q(z_k) := \left|\frac{P(z_{k+1})}{P(z_k)}\right|$。

我们估计

$$Q(z_k) = \left|\frac{P(z_{k+1})}{P(z_k)}\right| = \prod_{j=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j - z_{k+1}}{\alpha_j - z_k}\right|$$

$$\geq \underbrace{\prod_{j\leq J(k)+1}\left|\frac{\alpha_j - z_{k+1}}{\alpha_j - z_k}\right|}_{Q_1(k)} \cdot \underbrace{\prod_{j>J(k)+1}\left(1 - \frac{|z_{k+1}-z_k|}{|\alpha_j - z_k|}\right)}_{Q_2(k)}. \tag{4.10}$$

其中

$$J(k) := \inf\{j \in \mathbb{N} : \alpha_j \in D_{\geq n(k)+2}\}. \tag{4.11}$$

注意，由于 $\sum_j |\alpha_j|^{-1} < \infty$，$J(k)$ 是有限的。此外，根据引理 4.4

$$\lim_{k\to\infty} \frac{J(k)}{s_{n(k)}} = 0. \tag{4.12}$$

现在我们证明

$$|\alpha_j - z_k| \geq (c_A^{-1} - c_A^{-2})|\alpha_j| \tag{4.13}$$

当 $j \geq J(k)$ 时。为说明 (4.13) 成立，注意到对于某个 $\ell \geq 2$，有 $\alpha_j \in D_{n(k)+\ell}$，而 $z_k \in D_{n(k)}$。令 $\eta = {}^{4}_{c_A-1}$，则有 $\eta c_A^{n(k)+\ell+2} \leq |\alpha_j| \leq \eta c_A^{n(k)+\ell+3}$ 和 $|z_k| \leq \eta c_A^{n(k)+3}$。因此

$$\begin{aligned}|\alpha_j - z_k| &\geq \eta c_A^{n(k)+\ell+2} - \eta c_A^{n(k)+3} = \eta c_A^{n(k)+\ell+3}(c_A^{-1} - c_A^{-\ell}) \\ &\geq \eta c_A^{n(k)+\ell+3}(c_A^{-1} - c_A^{-2}) \\ &\geq |\alpha_j|\,(c_A^{-1} - c_A^{-2}).\end{aligned}$$

现在固定一个指标 k，并根据 (4.7)、(4.8) 或 (4.9) 是否成立，分几种情况讨论。

情况 I。假设 (4.7) 成立。那么 $|z_k - z_{k+1}| = \delta$。由引理 4.3 以及 $\bar{X}$, $E(z_k)$ 的构造可得 $\geq e^{c_0 s_n^{d-1}{}_k{}()\delta} \geq e^{c_0\delta}$，对 $c_0 = \frac{1}{2}da_d$ 成立。回顾 (4.11) 中 $J(k)$ 的定义，我们注意到，对于所有 $j \leq J(k)$，$|\alpha_j - z_k| \geq \varepsilon s_{n(k)}$ 均成立。因此

$$\left|\frac{\alpha_j - z_{k+1}}{\alpha_j - z_k}\right| \geq 1 - \frac{|z_{k+1} - z_k|}{|z_k - \alpha_j|} \geq 1 - \frac{\delta}{|\alpha_j - z_k|} \geq 1 - \frac{\delta}{\varepsilon s_{n(k)}} = 1 - \frac{\delta'}{c_A^{n(k)}},$$

其中 $\delta' = \delta/\varepsilon$。因此

$$Q_1(k) \geq \left(1 - \frac{\delta'}{c_A^{n(k)}}\right)^{J(k)}.$$

其中 $Q_1(k)$ 如 (4.10) 所示。由 (4.12) 可知 $J(k)/c_A^{n(k)} \to 0$，因此 $Q_1(k) \longrightarrow 1$。于是，对于任意 $0 < \nu \ll 1$，都存在 $N_1 \in \mathbb{N}$，使得对所有$n(k) \geq N_1$，$Q_1(k) \geq 1 - \nu$。定义

$$K_1 := \inf\{k \in \mathbb{N} : z_k \in D_{\geq N_1}\}.$$

接下来，令 $\lambda := c_A^{-1} - c_A^{-2}$。由 (4.13) 可知，对所有 $j \geq J(k)$, $|\alpha_j - z_k| \geq \lambda\,|\alpha_j|$。因此

$$\frac{\delta}{|\alpha_j - z_k|} \leq \frac{\delta\lambda^{-1}}{|\alpha_j|}$$

其中 $\delta > 0$ 与 (4.5) 中相同。因此

$$1 - \frac{|z_{k+1} - z_k|}{|\alpha_j - z_k|} \geq 1 - \frac{\delta}{|\alpha_j - z_k|} \geq 1 - \frac{\delta\lambda^{-1}}{|\alpha_j|}.$$

因此

$$Q_2(k) \geq \prod_{j > J(k)+1} \left(1 - \frac{\delta\lambda^{-1}}{|\alpha_j|}\right)$$

其中 $Q_2(k)$与 (4.10) 中相同。由于 $\sum_j |\alpha_j|^{-1} < \infty$，右侧的乘积在 $k \to \infty$ 时趋于 1。因此，对于每个 $0 < \mu \ll 1$，都存在 $N_2 \in \mathbb{N}$，使得 $Q_2(k) \geq 1 - \mu$ 对所有 $n(k) \geq N_2$ 成立。定义

$$K_2 := \inf\{k \in \mathbb{N} : z_k \in D_{\geq N_2}\}.$$

现在我们选取足够小的参数 $0 < \mu,\ \nu \ll 1$ 和 $\Lambda_I > 1$，使得 $e^{c_0\delta}(1-\nu)(1-\mu) \geq \Lambda_I$。然后，令

$$K_I := \max\{K_1, K_2\} \in \mathbb{N}$$

由此可得，对所有 $k \geq K_I$，

$$\left|\frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}\right| = E(z_k)Q(z_k) \geq \Lambda_I > 1.$$

情形 II。现在假设 (4.8) 或 (4.9) 成立。则 $\varepsilon s_n \leq |z_k - z_{k+1}| \leq (2c_A^2 + 2\varepsilon)s_n$。仅当存在 $\alpha \in A$ 使得 $B(\alpha,\ \varepsilon)$ 与 $[z_k, z_{k+1}]$ 相交时，才会出现这种情形。后一事实意味着，对所有 $\alpha_j \in D_{\leq n(k)+1}$, $\varepsilon s_n \leq |z_k - \alpha_j| \leq (3c_A^2)s_n$。由引理 4.3,

$$E(z_k) \geq e^{c_0 s_n^{d-1}(\varepsilon s_n)} \geq e^{c_0 \varepsilon s_n}. \tag{4.14}$$

此外,

$$Q_1(k) = \prod_{j=1}^{J(k)+1} \left|\frac{\alpha_j - z_{k+1}}{\alpha_j - z_k}\right| \geq \prod_{j=1}^{J(k)+1} \frac{\varepsilon s_n}{3c_A^2 s_n} = e^{-\vartheta(J(k)+1)}, \tag{4.15}$$

其中 $\vartheta := \log((3c_A^2)/(\varepsilon)) > 0$。

接下来，再次利用 (4.13)，我们估计

$$\frac{|z_{k+1} - z_k|}{|\alpha_j - z_k|} \leq \frac{|z_{k+1} - z_k|}{\lambda|\alpha_j|} \leq \frac{(2c_A^2 + 2\varepsilon)s_n}{\lambda|\alpha_j|}$$

因此

$$\prod_{j > J(k)+1}^{\infty} 1 - \frac{|z_{k+1} - z_k|}{|\alpha_j - z_k|} \geq \prod_{j > J(k)+1}^{\infty} 1 - \frac{(2c_A^2 + 2\varepsilon)s_n}{\lambda|\alpha_j|} = \prod_{j > J(k)+1}^{\infty} 1 - \frac{\gamma s_n}{|\alpha_j|}$$

其中 $\gamma = \frac{2c_A^2+2\varepsilon}{\lambda}$。注意到

$$\frac{\gamma s_n}{|\alpha_j|} = \frac{(2c_A^2+2\varepsilon)s_n}{\lambda|\alpha_j|} = \frac{c_A^2\,(2c_A^2+2\varepsilon)s_n}{(c_A-1)|\alpha_j|} \le \frac{1}{2}$$

由于

$$\frac{s_n}{|\alpha_j|} \le \frac{c_A-1}{4c_A^4}.$$

级数 $\sum_{j>J(k)+1}\log\left(1-\frac{\gamma s_n}{|\alpha_j|}\right)$ 和 $\sum_{j>J(k)+1}\frac{\gamma s_n}{|\alpha_j|}$ 同时收敛或发散，因此我们得到

$$\prod_{j>J(k)+1}^{\infty} 1-\frac{|z_{k+1}-z_k|}{|\alpha_j-z_k|} \ge \exp\left(-2\gamma s_n \sum_{j>J(k)+1}|\alpha_j|^{-1}\right). \tag{4.16}$$

结合 (4.14)、(4.15) 和 (4.16)，我们得出

$$\left|\frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}\right| \ge \exp\left(c_0\varepsilon s_n - \vartheta(J(k)+1) - 2\gamma s_n \sum_{j>J(k)+1}|\alpha_j|^{-1}\right).$$

然而，由引理 4.5，

$$c_0\varepsilon s_n - 2\gamma s_n \sum_{j>J(k)+1}|\alpha_j|^{-1} \ge c_0\frac{\varepsilon}{2}s_n,$$

因此

$$\left|\frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}\right| \ge \exp\left(c_0\tfrac{\varepsilon}{2}s_{n(k)} - \vartheta J(k)\right).$$

由 (4.12)，

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}\right| = \infty$$

因此，存在 K_{II}和 $\Lambda_{II}>1$，使得 $\left|\frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}\right| \ge \Lambda_{II}$对所有 $k > K_{II}$都成立。

最后，令 $K{:=}\max\{K_I, K_{II}\}$且 $\Lambda{:=}\min\{\Lambda_I, \Lambda_{II}\}$，我们得出 $\left|\frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}\right| \ge \Lambda > 1$ 对所有 $k \ge K$都成立。命题 4.6 的证明至此完成。

5. Porosity and conformal mappings

沿用 [39], 的说法，若度量空间 (X,d) 的子集 E 满足以下条件，则称其在 X 中是疏松的：存在常数 $c>0$，使得对每个 $x\in X$ 及每个 $r>0$，都存在$z\in B(x,r)$，满足 $B(z,cr)\cap E=\emptyset$。以下定理将回顾孔隙性与长田维数之间的联系。

定理 5.1。对于集合 $E\subset\mathbb{R}^n$，以下条件等价：

(a) E 在.....中是疏松的

$\mathbb{R}^n$, (b) 维数$_A\,E<n$,

(c) 维数$_N\,E\le n-1$。

Luukkainen 证明了 (a) 与 (b) 等价 [28, 定理 5。2], 而蕴含关系 (b) $\Rightarrow$ (c) 则由长田维数总不超过 Assouad 维数这一事实得出 [26, 定理 1.1]。最后，蕴含关系 (c) $\Rightarrow$ (a) 归功于 Urs Lang；参见 [33,命题 2.3]。

本节旨在证明定理 1.6。域 Ω 将构造为多项式螺旋[1]的一个加厚区域。

$$S_p := \{t^{-p}e^{\mathbf{i}\pi t} : t \geq 1\}, \quad p > 0. \tag{5.1}$$

Fraser [17] 证明，对于每个$p > 0$，螺旋 S_p 的 Assouad维数都等于二。根据定理 5.1，这类集合的长田维数也等于二，并且在 $\mathbb{C}$中不是疏松的。

我们给出的论证适用于任意具有若尔当边界的单连通域 $\Omega \supset S_p$，其中 S_p 的端点位于 $\partial\Omega$内。为简单起见，我们采用以下域

$$\Omega_p := \{t^{-p}e^{\mathbf{i}\pi t}e^{\mathbf{i}\theta} : t > 1, |\theta| < \epsilon\} \tag{5.2}$$

对某个 $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$。注意，$S_p \subset \overline{\Omega_p}$，且 Ω_p 是具有若尔当边界的单连通域。见图 3。

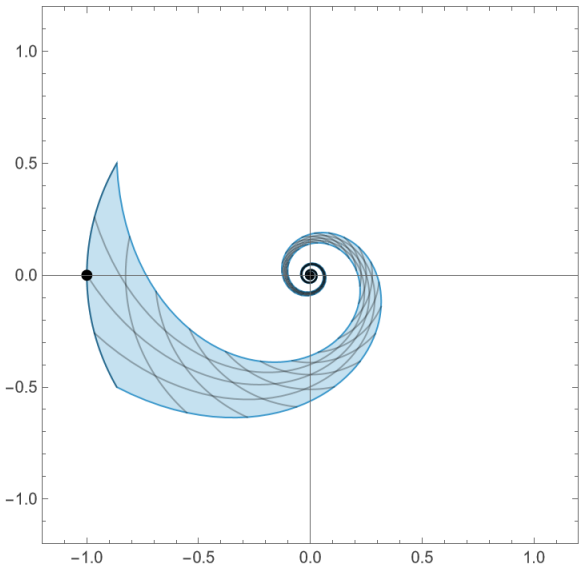


FIGURE 3. 螺旋域 Ω_p

*定理 1.6 的证明。*设 Ω_p 如 (5.2) 中所述，并设 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega_p$ 是一个黎曼映射，其连续延拓为 $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega_p}$。如有必要，通过与$\mathbb{D}$的一个自同构复合，我们可以确保 $f(-1) = -1 \in \partial\Omega_p$且 $f(1) = 0 \in \partial\Omega_p$。令

[1]在此背景下使用多项式螺旋域的想法是 Sylvester Eriksson-Bique 向作者提出的，我们感谢他允许我们在此处收录这个例子。

$E = f([-1,1])$。集合 E 是 Ω_p 的一个闭连通子集，且 $-1,\ 0 \in E$。下面的引理 5.2 表明，E 在 $\mathbb{C}$ 中不是疏松的，由此完成证明。□

引理 5.2. 设 $E \subset \Omega_p$ 是满足 -1、$0 \in E$ 的连续统。则 E 不是 $\mathbb{C}$ 的多孔子集。

引理 *5.2* 的证明。设 E 如引理所述，并假设 E 对某个 $c > 0$ 是 c-疏松的。不失一般性，我们可以假设 $c < \frac{1}{2}$。

选取 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$k_0 \geq \max\left\{\frac{3p}{4c}, 2\,\frac{(1-2c)^{1/p}}{1-(1-2c)^{1/p}}\right\}. \tag{5.3}$$

令 $r_0 = (2k_0)^{-p}$。我们将证明 $B(0, r_0)$ 不包含满足 $r = cr_0$ 且 $B(z,r) \cap E = \emptyset$ 的球 $B(z,r)$。

对 $-\pi \leq \alpha < \pi$，设 $\Gamma_\alpha := \{re^{\mathbf{i}\alpha} : r > 0\}$ 为从 0 出发、辐角为 α 的射线。注意，若如上所述的球 $B(z,r)$ 存在，则沿某条满足 $I \cap E = \emptyset$ 的射线 Γ_α 存在长度为 $2cr_0$ 的区间 I。

我们现在分析……的结构

$$\Omega_p \cap \Gamma_\alpha \cap B(0, r_0).$$

注意，$z \in \Omega_p \cap \Gamma_\alpha \cap B(0, r_0)$ 当且仅当 $z = t^{-p}e^{\mathbf{i}\pi t}e^{\mathbf{i}\theta}$，其中 $|\theta| < \epsilon$, $t > r_0^{-1/p} = 2k_0$，且对于某个整数 k 有 $t\pi + \theta = \alpha + 2k\pi$。在这种情况下，我们有

$$2k = t + \frac{\theta - \alpha}{\pi} > t - \frac{\epsilon + \pi}{\pi} > t - \frac{3}{2} \geq 2k_0 - \frac{3}{2} > 2k_0 - 2$$

因此事实上 $k \geq k_0$。于是

$$\Omega_p \cap \Gamma_\alpha \cap B(0, r_0) = \bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} (a_k, b_k)e^{\mathbf{i}\alpha} \cup \left((a_{k_0}, b_{k_0})e^{\mathbf{i}\alpha} \cap B(0, r_0)\right),$$

其中

$$a_k = (2k + \frac{\alpha + \epsilon}{\pi})^{-p} \quad \text{and} \quad b_k = (2k + \frac{\alpha - \epsilon}{\pi})^{-p}.$$

因此

$$\Gamma_\alpha \cap B(0, r_0) \setminus \Omega_p = \bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} [b_{k+1}, a_k]e^{\mathbf{i}\alpha} \cup \left(([b_{k_0+1}, a_{k_0}] \cup [b_{k_0}, a_{k_0-1}])e^{\mathbf{i}\alpha} \cap B(0, r_0)\right).$$

曲线 E 是一个连通集，在 Ω_p 中连接 -1 与 0，因此对于每个 $k \in \mathbb{N}$，E 都与 $(a_{k+1}, b_{k+1})e^{\mathbf{i}\alpha}$ 和 $(a_k, b_k)e^{\mathbf{i}\alpha}$ 相交。由此可知，包含在 $B(0, r_0)$ 中的最长区间 $\cap \Gamma_\alpha \setminus E$ 的长度至多为

$$\max\left\{\sup_{k \geq k_0+1} (b_k - a_{k+1}), r_0 - a_{k_0+1}\right\}.$$

对于 $k \geq k_0 + 1$，我们计算

$$b_k - a_{k+1} = (2k + \frac{\alpha - \epsilon}{\pi})^{-p} - (2k + 2 + \frac{\alpha + \epsilon}{\pi})^{-p}.$$

利用恒等式 $\int_A^B pw^{-p-1}\,dw = A^{-p} - B^{-p}$（适用于 $A < B$），以及 $w \mapsto w^{-p-1}$ 是递减的这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} b_k - a_{k+1} &\leq p(2k + \frac{\alpha-\epsilon}{\pi})^{-p-1}(2k+2+\frac{\alpha+\epsilon}{\pi} - 2k - \frac{\alpha-\epsilon}{\pi}) \\ &= 2p(1+\frac{\epsilon}{\pi})(2k+\frac{\alpha-\epsilon}{\pi})^{-p-1} \\ &\leq 3p(2k-\frac{3}{2})^{-p-1} \\ &\leq 3p(2k_0+2-\frac{3}{2})^{-p-1} < 2cr_0 \end{aligned}$$

根据 (5.3)，此外，

$$(1-2c)r_0 = (1-2c)(2k_0)^{-p} < (2k_0+2+\frac{\alpha+\epsilon}{\pi})^{-p}$$

根据 (5.3)，因此

$$r_0 - a_{k_0+1} < 2cr_0$$

同样。

由于 α 是任意的，可知 $B(0,\ r_0) \setminus E$ 不可能包含长度为 $2cr_0$ 的径向线段。这与先前由假设的 c-孔隙性 E 得出的结论矛盾。我们得出结论：E 不是 $\mathbb{C}$ 的多孔子集。□

6. Further Discussion and Open Questions

回顾一下，若拟正则映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n \geq 2$, 满足当 $|x| \to \infty$ 时 $|f(x)| \to \infty$，则称其为多项式型；若该极限不存在，则称其为超越型。这与多项式和超越整函数之间的二分法直接类似。更多详情请参见 [16]。

多项式型拟正则映射的一个典型例子是幂映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$；关于当 $n = 3$时该映射的构造，参见例如 [31, 例 I.3.2] 。此映射保持复平面 $\mathbb{R}^n$ 中任意子集的长田维数。证明思路与推论 3.2 的证明相同，利用长田维数的有限稳定性，以及对于足够良好的子集 $B \subset \mathbb{S}^{n-1}$，圆锥扇区 $\Omega(B) := \{ry\colon\ 0 < r < \infty,\ \ y \in B\}$是一致域这一事实。

问题 6.1. 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ 为多项式型拟正则映射。f 是否必须保持 $\mathbb{R}^n$ 的任意子集的长田维数?

问题 6.2. 设 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$为拟正则映射。是否对每个 $A \Subset \Omega$ 都有 $\dim_N A = \dim_N f(A)$?

我们在第 3.1 节中对维数为 $n = 2$ 的相应结果的证明，很大程度上依赖于解析函数的分支集（临界集）是离散的这一性质，以及映射在临界点附近的局部行为已得到充分理解这一事实。理解高维拟正则映射的行为时，一个重要的复杂之处在于分支集的结构更加复杂。回顾一下，拟正则映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 的分支集 B_f 是

$$B_f := \{x \in \Omega : f \text{ is not locally homeomorphic at } x\}.$$

在至少三维的情形下，拟正则映射的分支集并非离散集。根据 ˇCernavskiˇi [10] 和 V¨ais¨al¨a [37],的结果，我们有

$$\dim B_f = \dim f(B_f) \le n-2. \tag{6.1}$$

这里的‘dim’表示拓扑维数。目前尚不清楚（例如，参见 [22, 问题 29] 或 [34]），当f 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个非常值拟正则映射且满足 $B_f \neq \emptyset$时，$\dim B_f$ 是否必然等于 $n-2$。

自然会想知道，类似于 (6.1) 的关系是否也适用于长田维数。然而，正如下列例子所示，情况大不相同。

例 6.3. 设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 由 $f(z) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi z)$给出。则 f是整函数，因此是 1-拟正则的。分支集为 $B_f = \mathbb{Z}$，而 $f(B_f) = \{\pm\frac{1}{\pi}\}$。因此 $\dim_N B_f = 1 > 0 = n-2$，并且 $\dim_N B_f = 1 > \dim_N f(B_f) = 0$。

例 6.4. 设 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 是佐里奇的指数型拟正则映射。参见例如 [31, 例 I.3.3]。对于此映射，

$$B_f = \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}$$

而

$$f(B_f) = \{(re^{\mathrm{i}\theta}, 0) : r > 0, \theta \in \{0, \tfrac{\pi}{2}, \pi, \tfrac{3\pi}{2}\}\},$$

由此可得 $\dim_N B_f = 3 > \dim_N f(B_f) = 1$。

问题 6.5. 设 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$ 是一个拟正则映射。是否必有 $\dim_N f(B_f) \le n-2$?

问题 6.6. 对于 $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$ 中区域上的拟正则映射 f，$\dim_N B_f$ 和 $\dim_N f(B_f)$ 可能取哪些值?

注意，由 (2.1) 可知，例 6.4 也给出了一个拟正则映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得 B_f 的 Assouad维数为 n。与此相反，[32, 定理 5.13] 和 [3, 定理 1.3] 已证明，B_f 和 $f(B_f)$ 的豪斯多夫维数均被常数 $c = c(n, K) < n$ 所界，其中 f 是 $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$ 中的一个 K-拟正则映射。

存在 $\mathbb{R}^n$、$n \ge 3$上的拟正则映射 f，使得$\dim_H B_f$与$\dim_H f(B_f)$可取 $[n-2, n)$中任意预先指定的值。Gehring与V¨ais¨al¨a [19, 推论 22]在其关于豪斯多夫维数的拟共形畸变估计的相关工作中给出了这样一个例子。在低维情形下，由 [3] 与 [24] 中的构造可以推出，存在分支集具有更强性质的拟正则映射。具体而言，当 $n \in \{3, 4\}$ 时，对任意给定的 α、$\beta \in [n-2, n)$，存在 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为拟正则映射，且$\dim_H B_f = \dim_A B_f = \alpha$，以及$\dim_H f(B_f) = \dim_A f(B_f) = \beta$。事实上，前述所有例子中的 B_f与 $f(B_f)$都是拟平面：存在拟共形映射 g、$h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得$f = h \circ W_d \circ g^{-1}$，其中 $W_d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 表示次数为 d 的卷绕映射 [31, 例I.3.1]。因此 $B_f = g(\mathbb{R}^{n-2})$与 $f(B_f) = h(\mathbb{R}^{n-2})$, 其中 $B_{W_d} = W_d(B_{W_d}) = \mathbb{R}^{n-2}$。注意，尽管在这一类例子中 $f(B_f)$的豪斯多夫维数与阿苏阿德维数都很大，但这与问题6.5中的猜想并不矛盾。

事实上， B_f与 $f(B_f)$都拟对称等价于 $\mathbb{R}^{n-2}$，因此恒等式$\dim_N B_f = \dim_N f(B_f) = n-2$可由定理 2.10得出。

关于高维拟正则映射分支集的结构与复杂性的详尽综述，请参阅 [21]。

关于高维拟共形映射，我们预期可以构造一个类似于定理 1.6 中的例子。换言之，我们预期以下问题的答案是肯定的。

问题 6.7。 设 $n \geq 3$。是否存在拟共形映射 $f : \Omega \to \Omega'$ 是复平面中的区域，以及一个集合 $E \subset \Omega$，使得 $\dim_{\mathrm{N}} E \leq n-1$ 且 $\dim_{\mathrm{N}} f(E) = n$?

可以构造多项式螺旋域 Ω_p 的高维类似物，参见 [12], 中的多项式螺旋壳示例；我们预期，要证明这些域中适当子集的非孔隙性并不困难，这些子集沿螺旋穿过所有层级。更具挑战性的任务是证明，这类螺旋域可以通过拟共形映射映到一致域，甚至映到复平面中的单位球。

References

[1] Assouad, P.关于长田距离。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294*, 1（1982）, 31–34。[2] Assouad, P. 到R^{n}中的Lipschitz嵌入。 *Bull. Soc. Math. France 111*, 4（1983）, 429–448。[3] Bonk, M., and Heinonen, J. 带分支的光滑拟正则映射。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 100（2004）, 153–170。[4] Brodskiy, N., Dydak Higes and Mitra *Topology* , J., , *Appl. 154* 14 2007 2729 2740 J., , A. 所有尺度上的零维。, （）, –。[5] Brodskiy, N., Dydak, J., Levin, M., and Mitra, A. Assouad-Nagata 维数的Hurewicz 定理。 *J. Lond. Math. Soc. (2) 77*, 3（2008）, 741–756。[6] Buyalo, S., and Schroeder, V. *Elements of asymptotic geometry*。EMS 数学专著丛书。欧洲数学会（EMS）, Z¨urich, 2007。[7] Buyalo, S. V. 双曲空间的渐近维数及其无穷远边界的容量维数。 *Algebra i Analiz 17*, 2（2005）, 70–95。[8] Buyalo, S. V. 容量维数与双曲空间到树的乘积的嵌入。 *Algebra i Analiz 17*, 4（2005）, 42–58。[9] Buyalo, S. V., and Lebedeva, N. D. 局部与渐近自相似空间的维数。 *Algebra i Analiz 19*, 1（2007）, 60–92。[10] Černavskiĭ, A. V. 流形的有限对一开映射。 *Mat. Sb. (N.S.) 65(107)* （1964）, 357–369。[11] Chrontsios-Garitsis, E. K. 拟正则维数畸变。 *Conform. Geom. Dyn. 28* （2024）, 165–175。[12] Chrontsios-Garitsis, E.-K. 论同心分形球面与螺旋壳。 *Nonlinearity 38*, 3 2025 035019, 21（）, 论文编号 。[13] Chrontsios-Garitsis, E. K., and Tyson, J. T. Assouad 谱的拟共形畸变与多项式螺旋分类。 *Bull. Lond. Math. Soc. 55*, 1（2023）, 282–307。[14] David, G. C. *J. Geom. Anal.* 具有 *34* 2 2024 45, 19 尖锐维数的非单射 Assouad 型定理。, （）, 论文编号 。[15] Dydak, J. and Higes J. *Proc. Amer.* , , *Math. Soc. 136* 6 2008 2225 2233 渐近锥与Assouad-Nagata 维数。, （）, –。

[16] Fletcher, A. N.,
and Nicks n *Ergodic Theory* , D. A. -球面上的拟正
Dynam. Systems 31 1 2011 23 31
则动力学。， （），–。[17] Fraser, J. M. 关于螺旋绕线问题的H¨older解。 *Nonlinearity 34*, 5（2021）, 3251–3270。[18] Gehring, F. W.,
and Hag 184 *Mathematical Surveys* ,
and Monographs 2012
K. *The ubiquitous quasidisk*, 《》第 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，。[19] Gehring,
F. W. and Väisälä J. *J.* , ，豪斯多夫维数与
London Math. Soc. (2) 6 1973 504 512
拟共形映射。（），–。[20] Heinonen, J. *Lectures on analysis on metric spaces*。Universitext丛书。施普林格出版社，纽约，2001。[21] Heinonen, J. 拟正则映射的分支集。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. II* 2002 691 700 ，（），高等教育出版社，北京，第–页。[22] Heinonen, J., and Semmes, S. 关于映射、测度与度量的三十三个是非问题。 *Conform. Geom. Dyn. 1* （1997），1–12（电子版）。[23] Heins, M. *Complex function theory*。纯粹与应用数学，第28卷。学术出版社，纽约-伦敦，1968。[24] Kaufman, R., Tyson, J. T., and Wu, J.-M. R^{n}中带分支的光滑拟正则映射。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 101（2005），209–241。[25] Lang, U., and Schlichenmaier, T. 长田维数、拟对称嵌入与Lipschitz延拓。 *Internat. Math. Research Notices 2005*, 58（01 2005），3625–3655。[26] Le Donne, E., and Rajala, T. Assouad维数、长田维数与一致接近的度量切空间。 *Indiana University Mathematics Journal 64*, 1（2015），21–54。[27] Lehto, O., and Virtanen, K. I. *Quasiconformal mappings in the plane*, 第2版， *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*第126卷。施普林格出版社，纽约-海德堡，1973。[28] Luukkainen, J. Assouad维数：反分形度量化、多孔集与齐次测度。 *J. Korean Math. Soc. 35*, 1（1998），23–76。[29] Martio,
O. and Sarvas J. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* , ，平面与空间中的
Ser. A I Math. 4 2 1979 383 401
单射定理。， （），–。[30] Remmert, R. *Classical topics in complex function theory*, 第
172 *Graduate Texts in Math-* 卷。施普林格出版社，
cmatics 1998
纽约，。[31] Rickman, S. *Quasiregular mappings*, 第
26 *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzge-* 卷。施普林格出版社，
biete (3) 1993
柏林，。[32] Sarvas, J. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1* 2 1975 297 307
拟正则映射分支集的豪斯多夫维数。， （），–。[33] Sormani,
C. and Wenger S. *Calc. Var.* , ，流的弱收敛与消
Partial Differential Equations 38 1 2 2010 183 206
去。，-（），–。[34] Srebro, U. 拟正则映射的拓扑性质。载于 *Quasiconformal space mappings* 1508 *Lecture Notes in Math.* 1992, 104 118 ，施普林格第 卷，柏林，第–页。[35] Tukia,
P. and Väisälä J. *Ann. Acad. Sci.* , ，度量空间的拟对
Fenn. Ser. A I Math. 5 1 1980 97 114
称嵌入。， （），–。[36] Tyson,
J. T. *Illinois J. Math.* 通过拟对称映射降低
45 2 2001 641 656
Assouad维数。， （），–。[37] Väisälä, J. 流形上的离散开映射。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 392* （1966），10。[38] Väisälä, J. Quasi-M¨obius映射。 *J. Analyse Math. 44* （1984/85），218–234。[39] Väisälä, J. 多孔集与拟对称映射。 *Trans. Amer. Math. Soc. 299*, 2（1987），525–533。[40] Xie, X.长田维数与quasi-M¨obius映射。 *Conform. Geom. Dyn. 12* （2008），1–9。

Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana,Illinois, USA*Email address*: manisha8@illinois.eduDepartment of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana,Illinois, USA*Email address*: tyson@illinois.edu