arXiv:2603.00796v1 [math.MG] 28 Feb 2026

度量空间的 l^p-乘积之间的 Gromov–Hausdorff 距离

Emin Abdullaev

2026年3月3日

摘要

本文研究度量空间的 l^p-乘积，并给出它们之间 Gromov–Hausdorff 距离的估计。线性乘积的情形被单独考虑，并给出估计可达性的充分条件。文中给出了计算平坦环面之间 Gromov–Hausdorff 距离的例子。证明了：对任意稠密度为 $d(X)$ 的度量空间 X，它与其 l^∞-乘积（其中因子个数对应于 $d(X)$）之间的 Gromov–Hausdorff 距离等于其直径的一半。

目录

1 基本定义与预备结果 3

2 积之间距离的一般估计 42.1 关于定理的注记：连续 Gromov–Hausdorff 距离的情形 8

3 线性积的距离估计 10
3.1 若干引理.10 3.2 主要定理.14

4 l^∞-乘积上界的可达性 17 5 格罗莫夫–豪斯多夫拓扑距离 18

引言

Gromov–Hausdorff空间 $\mathcal{M}$ 由所有非空紧度量集合在等距同构意义下构成，是现代度量几何的核心对象之一。

这一方法的基础由 F. Hausdorff 在其著作中奠定 [12], ，他为度量空间的闭有界子集提出了一种度量。后来，D. Edwards [13]和 M. Gromov [14]通过等距嵌入将这一思想扩展到所有度量空间的集合，从而促成了 Gromov–Hausdorff 距离的诞生。

尽管在一般情况下该函数可能取无穷值，但它是集合$\mathcal{M}$上的一个度量。已有证明表明，由此得到的 Gromov–Hausdorff空间是道路连通的、完备的、可分的，并且是测地的 [14, 1, 15]。

然而，直接计算 Gromov–Hausdorff 距离是一个 NP-困难的 [16, 17] 问题，因为这需要在空间之间所有可能的对应关系中使畸变最小化。因此，为特定类别的度量空间寻找双侧估计具有 fundamental importance。

许多论文详细研究了各种类别度量空间的 Gromov–Hausdorff 距离的计算与估计问题。例如，G. Adams [10]和 F. Memoli [2] 获得了球面的估计；在文献 [4, 6] 中，研究者发展出一种技术，使得能够计算包括单纯形和超度量空间在内的广泛对象类别的距离。在文献 [5], 中，利用 Borsuk数给出了上界可达性的充分条件（即两个度量空间之间的 Gromov–Hausdorff 距离等于它们直径最大值的一半时）。其他例子包括计算线段与圆之间的 Gromov–Hausdorff 距离 [8] ，以及计算 $\mathbb{Z}^2$ 与 $\mathbb{R}^2$ 在欧几里得度量下的 Gromov–Hausdorff 距离 [7]。

连续 Gromov–Hausdorff 距离这一概念在 [2]的工作中得到了现代发展。该理论发展的一个重要阶段是 S. A. Bogaty 与 A. A. Tuzhilin [3] 对连续 Gromov–Hausdorff 距离性质的研究。连续 Gromov–Hausdorff 距离的另一种形式也在 [9]的工作中被考虑，其背景是比较动力系统。在这项工作中，作者使用了一种不具有三角不等式性质的构造，这决定了其方法的特殊性。

本文致力于获得度量空间的 l^p-积之间的 Gromov–Hausdorff 距离的估计。第2节得到了一般情形下 l^p-积的双边估计，并将其中部分结果推广到连续 Gromov–Hausdorff 距离。第3节改进了线性 l^p-积的上界，并给出了该上界为精确值的充分条件。特别地，给出了 l^1-积与平坦环面的例子，并得到了计算该距离的公式。第4节考虑度量空间与其自身的 l^∞-积之间的 Gromov–Hausdorff 距离，并证明：对任意稠密度为 $d(X)$的度量空间 X ，它与其 l^∞-积（其中因子个数对应于 $d(X)$）之间的 Gromov–Hausdorff 距离等于其直径的一半。特别地，若 X 可分，则它与其可数 l^∞-积之间的 Gromov–Hausdorff 距离等于其直径的一半。第5节给出了将这些结果应用于 Gromov-Hausdorff拓扑距离的一个例子。

致谢

作者谨向其导师、物理和数学科学博士、教授 A.A.Tuzhilin，以及物理和数学科学博士、教授 A.O. Ivanov 致以谢意，

感谢他们提出问题，并持续关注这项工作。

1 基本定义与预备结果

Gromov–Hausdorff 距离是非空紧度量空间的等距类集合上的标准度量。

令 $\mathcal{GH}$ 为所有非空度量空间的类， $\mathcal{M} \subset \mathcal{GH}$ 为所有紧致度量空间的类。对于任意 X, $Y \in \mathcal{GH}$, 令 d_X 和 d_Y 表示它们的度量，并令 $\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,\ y\in X} d_X(x,\ y)$ 表示该空间的直径。 X 与 Y 之间的一个 对应 是一个子集 $R \subset X \times Y$，其在 X 和 Y 上的投影均为满射。X 与 Y 之间所有对应关系的集合记为 $\mathcal{R}(X,\ Y)$。

对应关系 $R \in \mathcal{R}(X,\ Y)$ 的畸变为

$$\operatorname{dis} R = \sup\big\{|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| : (x,y),(x',y') \in R\big\}.$$

接下来，Gromov–Hausdorff 距离定义为

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\}.$$

接下来，按照 [2], [3], 的做法，我们定义连续 Gromov–Hausdorff 距离 d_{GH}^{c}。对于一对连续映射 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to X$，我们定义它们的畸变和余畸变：

- $\operatorname{dis}(f) = \sup_{x,x'\in X} |d_X(x,x') - d_Y(f(x)\ f(x'))|$;
- 不相交$(g) =$ 上确界$_{y,y'\in Y} |d_Y(y,y') - d_X(g(y)\ g(y'))|$;
- 余维 $(f,\ g) =$ 上确界$_{x\in X,\ y\in Y} |d_X\ (x,\ g\ (y)\ ) - d_Y\ (f\ (x)\ \ y)\ |$。

距离 $d_{GH}^{c}(X,\ Y)$ 定义为

$$d_{GH}^{c}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf_{f,g}\max\{\operatorname{dis} f, \operatorname{dis} g, \operatorname{codis}(f,g)\},$$

其中，下确界取遍所有连续映射 $f\colon\ X \to Y$ 和 $g\colon\ Y \to X$。我
n wha们在讨论 Gromov–Hausdorff 距离的性质时遵循 [1]
和 [3]。

对于任意度量空间 $(X,\ d_X)$，我们定义其直径

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,\tilde{x}\in X} d(x,\tilde{x}).$$

对于任意有界度量空间 $X,\ Y$，以下估计成立：

$$\frac{1}{2}|\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(Y)| \le d_{GH}(X,Y) \le d_{GH}^{c}(X,Y) \le \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\}.$$

将 $\{pt\}$ 记为由单点组成的度量空间。那么对于任意度量空间 X，以下等式成立：

$$d_{GH}(X,\{pt\}) = d_{GH}^{c}(X,\{pt\}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(X).$$

对于任意 $X,\ Y \in \mathcal{GH}$ 以及任意映射 $f\colon\ X \to Y$和 $g\colon\ Y \to X$，记作 $R_{f,\ g} =\{(x,\ f(x))$ $|\ x \in X)\} \cup \{(g(y)\ y)\ |\ y \in Y\}$，则有 $R_{f,\ g} \in \mathcal{R}(X,\ Y)$。

命题 1.1 （[3]）。 对于任意 $X, Y \in \mathcal{GH}$ 以及任意映射 $f\colon\ X \to Y$和 $g\colon\ Y \to X$，有

$$\operatorname{dis}(R_{f,g}) = \max\{\operatorname{dis}(f), \operatorname{dis}(g), \operatorname{codis}(f,g)\}.$$

定义 1.2. 设 $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个度量空间序列，满足 $\sum_{n=1}^{\infty}$(直径(X_n))^p <∞，其中 $1 \le p < \infty$。则在笛卡尔积 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 上，我们引入度量

$$d\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\big) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \big(d_n(x_n, y_n)\big)^p\right)^{1/p}$$

而由此得到的度量空间 $(l^p)\prod_n X_n$ 将称为这些空间 X_n 的 l^p-积

a .

注 1.3 设 $\{(X_{n,m}, d_{X_{n,m}})\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ 是一个度量空间族，满足$\sum_{n}^{\infty}{}_{,m=1}$直径$(X_{n,m})^p < \infty$, 其中 $1 \le p < \infty$。则下列空间是等距的:

$$(l^p)\prod_{n=1}^{\infty}\left((l^p)\prod_{m=1}^{\infty}(X_{n,m}, d_{X_{n,m}})\right) = (l^p)\prod_{n,m=1}^{\infty}(X_{n,m}, d_{X_{n,m}}).$$

定义 1.4. 设 $\{(X_\alpha, d_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是任意度量空间族，满足 $\sup_{\alpha\in A}$ 直径$(X_\alpha) < \infty$。则在笛卡尔积 $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ 上，我们引入度量

$$d\big(\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{y_\alpha\}_{\alpha\in A}\big) = \sup_{\alpha\in A} d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$$

并将所得的度量空间称为各空间 X_α 的 l^∞-乘积（l^∞） $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$。

记号 1.5. 对于任意集合 A，用 $\#A$ 表示其基数。

记号 1.6. 对于任意基数 κ，令 Δ_κ 表示基数为 $\#\Delta_\kappa = \kappa$ 且所有非零距离均等于 1 的度量空间。

2 乘积间距离的一般估计

我们从一个简单的观察开始。

引理 2.1. 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ 为实直线子集的一个序列。令 $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n :=$ $\big\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mid a_n \in A_n\big\}$。那么 上确界$A = \sum_{n=1}^{\infty}$上确界 A_n 且 下确界 $A = \sum_{n=1}^{\infty}$下确界 A_n。

下面的引理根据各组成部分之间的距离，估计度量空间乘积之间的 Gromov–Hausdorff 距离。

引理 2.2。 设 $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$和 $\{(Y_n, \varrho_n)\}_{n=1}^{\infty}$是度量空间序列，满足$\sum_{n=1}^{\infty}\big($直径$(X_n)\big)^p < \infty$和 $\sum_{n=1}^{\infty}\big($直径$(Y_n)\big)^p < \infty$，其中 $1 \le p < \infty$。对于任意 $R_n \in \mathcal{R}(X_n, Y_n)$，我们可以将笛卡尔积 $R = \prod_n R_n$ 视为 $\mathcal{R}\big((l^p)\prod_n X_n, (l^p)\prod_n Y_n\big)$之间的一个对应。于是

$$\operatorname{dis}(R) \le \left(\sum_n \big(\operatorname{dis}(R_n)\big)^p\right)^{1/p}.$$

令 $(X, d_X) = (l^p)\prod_n (X_n, d_n)$，且 $(Y, d_Y) = (l^p)\prod_n (Y_n, d_n)$。于是我们得到

证明。 t

$$\begin{aligned}\operatorname{dis}(R) = \operatorname{dis}\left(\prod_n R_n\right) &= \sup_{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R}\left|d_X(x,\tilde{x}) - d_Y(y,\tilde{y})\right| = \\ &= \sup_{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R}\left|\|\{d_n(x_n,\tilde{x}_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^p} - \|\{\varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^p}\right| \le \\ &\le \sup_{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R}\|\{d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^p},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是针对 l^p-范数和向量$a_n = d_n(x_n,\ \tilde{x}_n)$ $b_n = \varrho_n(y_n,\ \tilde{y}_n)$的 $\big|\|a\| - \|b\|\big| \le \|a - b\|$ 不等式。

令

$$A_n = \left\{\left|d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\right|^p \;\middle|\; (x_n,y_n),(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)\in R_n\right\},$$

$$A = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\right|^p \;\middle|\; (x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R\right\}.$$

应用引理 2.1，可得

$$\begin{aligned}\operatorname{dis}(R) &\le \sup_{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)|^p\right)^{1/p} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sup_{(x_n,y_n),(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)\in R_n}\left|d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\right|\right)^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\big(\operatorname{dis}(R_n)\big)^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

□

引理 2.3。设 $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$和 $\{(Y_n, \varrho_n)\}_{n=1}^{\infty}$是度量空间序列，满足$\sum_{n=1}^{\infty}\big($直径$(X_n)\big)^p < \infty$和 $\sum_{n=1}^{\infty}\big($直径$(Y_n)\big)^p < \infty$，其中 $1 \le p < \infty$。则

$$d_{GH}\left((l^p)\prod_n X_n,\ (l^p)\prod_n Y_n\right) \le \left(\sum_n \big(d_{GH}\left(X_n, Y_n\right)\big)^p\right)^{1/p}.$$

证明。令 $(X,\ d_X) = (l^p)\prod_n (X_n,\ d_n)$ 且 $(Y,\ d_Y) = (l^p)\prod_n (Y_n,\ d_n)$。对任意 $\varepsilon > 0$，考虑满足以下条件的$R_n \in \mathcal{R}(X_n,\ Y_n)$

$$\left\|\{\operatorname{dis}(R_n)\}_{n=1}^{\infty}\right\|_{l^p} \le 2\left\|\{d_{GH}(X_n,Y_n)\}_{n=1}^{\infty}\right\|_{l^p} + \varepsilon.$$

设 $R = \prod_{n=1}^{\infty} R_n \in \mathcal{R}(X,\ Y)$。于是，根据 Gromov–Hausdorff 距离的定义和引理 2.2，我们得到

$$2d_{GH}(X,Y) \le \operatorname{dis}(R) \le \left\|\{\operatorname{dis}(R_n)\}_{n=1}^{\infty}\right\|_{l^p} \le 2\left\|\{d_{GH}(X_n,Y_n)\}_{n=1}^{\infty}\right\|_{l^p} + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 取极限，即得所需结果。 □

例 2.4. 考虑欧几里得平面上的两个矩形：$X = (l^2)[0,A]\times[0,B]$ 与 $Y = (l^2)[0,C]\times[0,D]$。则 $2d_{GH}([0,A],[0,C]) = |A-C|$ 且 $2d_{GH}([0,B],[0,D]) = |B-D|$。由前述引理，我们得到 $2d_{GH}(X,Y) \le \sqrt{(A-C)^2 + (B-D)^2}$。

现在我们得到逆估计。

引理 2.5. 设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为度量空间序列，使得 $\sum_{n=1}^{\infty}(\text{直径}(X_n))^p<\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\text{直径}(Y_n)\big)^p<\infty$，其中 $1\le p<\infty$。则

$$\sup_n\left(d_{GH}(X_n,Y_n)-\frac{1}{2}\Big(\sum_{m\neq n}\big(\operatorname{diam}(X_m)\big)^p\Big)^{1/p}-\frac{1}{2}\Big(\sum_{m\neq n}\big(\operatorname{diam}(Y_m)\big)^p\Big)^{1/p}\right)\le$$
$$\le d_{GH}\Big((l^p)\prod_n X_n,\ (l^p)\prod_n Y_n\Big).$$

证明。设 $X=(l^p)\prod_n X_n$ 和 $Y=(l^p)\prod_n Y_n$。注意，任意对应 $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ 都可以投影到 $X_n\times Y_n$ 上，从而得到一个对应 $P_n^R\in\mathcal{R}(X_n,Y_n)$。换言之，一对 $(\hat{}x_n,\hat{}y_n)$ 属于 P_n^R，当且仅当存在一对 $(x,y)\in R$，使得 $x_n=\hat{}x_n$ 且 $y_n=\hat{}y_n$。此外，我们将分别用 d_{X_n}、d_{Y_n}、d_X 和 d_Y 表示空间 X_n、Y_n、X 和 Y 中的度量。于是

$$d_{GH}(X_n,Y_n)=\frac{1}{2}\inf_{R\in\mathcal{R}(X_n,Y_n)}\operatorname{dis}(R)=\frac{1}{2}\inf_{R\in\mathcal{R}(X,Y)}\operatorname{dis}(P_n^R)=$$
$$=\frac{1}{2}\inf_{R\in\mathcal{R}(X,Y)}\sup_{\substack{(x,y)\in R\\(\tilde{x},\tilde{y})\in R}}\big|d_{X_n}(x_n,\tilde{x}_n)-d_{Y_n}(y_n,\tilde{y}_n)\big|=$$
$$=\frac{1}{2}\inf_{R\in\mathcal{R}(X,Y)}\sup_{\substack{(x,y)\in R\\(\tilde{x},\tilde{y})\in R}}\Big|\big(d_X(x,\tilde{x})-d_Y(y,\tilde{y})\big)+\big(d_{X_n}(x_n,\tilde{x}_n)-d_X(x,\tilde{x})\big)+\big(d_Y(y,\tilde{y})-d_{Y_n}(y_n,\tilde{y}_n)\big)\Big|.$$

首先，我们利用三角不等式对所得表达式进行估计。然后我们写出不等式 $\big|\|a\|_{l^p}-\|b\|_{l^p}\big|\le\|a-b\|_{l^p}$，先针对 $a_m=d_{Y_m}(x_m,\tilde{x}_m)$ 与 $b_m=d_n(x_n,\tilde{x}_n)$ 在 $m=n$ 以及 $b_m=0$ 在 $m\neq n$ 的情形写出，再针对 $a_m=d_{Y_m}(y_m,\tilde{y}_m)$ 与 $b_m=d_n(y_n,\tilde{y}_n)$ 在 $m=n$ 以及 $b_m=0$ 在 $m\neq n$ 的情形写出。由此，我们得到

$$d_{GH}(X_n,Y_n)\le\frac{1}{2}\inf_{R\in\mathcal{R}(X,Y)}\sup_{\substack{(x,y)\in R\\(\tilde{x},\tilde{y})\in R}}\big|d_X(x,\tilde{x})-d_Y(y,\tilde{y})\big|+$$
$$+\frac{1}{2}\sup_{\substack{x,\tilde{x}\in X\\y,\tilde{y}\in Y}}\left(\left|\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\big(d_{X_m}(x_m,\tilde{x}_m)\big)^p\Big)^{1/p}-d_{X_n}(x_n,\tilde{x}_n)\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\big(d_{Y_m}(y_m,\tilde{y}_m)\big)^p\Big)^{1/p}-d_{Y_n}(y_n,\tilde{y}_n)\right|\right)\le$$
$$\le d_{GH}(X,Y)+\frac{1}{2}\sup_{\substack{x,\tilde{x}\in X\\y,\tilde{y}\in Y}}\left(\sum_{m\neq n}\big(d_{X_m}(x_m,\tilde{x}_m)\big)^p\right)^{1/p}+\sup_{\substack{x,\tilde{x}\in X\\y,\tilde{y}\in Y}}\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\big(d_{Y_m}(y_m,\tilde{y}_m)\big)^p\right)^{1/p}\le$$
$$\le d_{GH}(X,Y)+\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\big(\operatorname{diam}(X_m)\big)^p\right)^{1/p}+\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\big(\operatorname{diam}(Y_m)\big)^p\right)^{1/p}.$$

因此，对每个 n，我们得到

$$d_{GH}(X_n,Y_n)-\frac{1}{2}\Big(\sum_{m\neq n}\big(\operatorname{diam}(X_m)\big)^p\Big)^{1/p}-\frac{1}{2}\Big(\sum_{m\neq n}\big(\operatorname{diam}(Y_m)\big)^p\Big)^{1/p}\le d_{GH}(X,Y),$$

这就证明了该引理。 □

例 2.6. 设 X,Y为具有相同直径的度量空间，直径$(X)=$直径$(Y)=\alpha<1/2$，并设 $\kappa\neq\kappa'$ 为两个不同的基数。我们记 $\Delta=\Delta_\kappa$ 和 $\Delta'=\Delta_{\kappa'}$。众所周知，$2d_{GH}(\Delta,\Delta')=1$。我们令 $X_1=\Delta$, $X_2=X$, $Y_1=\Delta'$, $Y_2=Y$。于是，由引理 2.5 可得

$$2d_{GH}\big((l^p)\ X\times\Delta,(l^p)\ Y\times\Delta'\big)=2d_{GH}((l^p)X_1\times X_2,(l^p)Y_1\times Y_2)\ge$$
$$\ge 2d_{GH}(X_1,Y_1)-\operatorname{diam}(X_2)-\operatorname{diam}(Y_2)>1-2\alpha.$$

注意，在这种情况下，简单估计 $0=\big|$直径$((l^p)\ X\times\Delta)-$直径$((l^p)\ Y\times\Delta')\big|\le 2d_{GH}\big((l^p)\ X\times\Delta,(l^p)\ Y\times\Delta'\big)$ 并不能推出任何结论（也就是说，该估计是平凡的）。

上述两个引理得出以下定理。

定理 2.7. 设 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ 是度量空间序列，满足 $\sum_{n=1}^\infty\big($直径$(X_n)\big)^p<\infty$ 和 $\sum_{n=1}^\infty\big($直径$(Y_n)\big)^p<\infty$，其中 $1\le p<\infty$。则

$$\sup_n\left(d_{GH}(X_n,Y_n)-\frac{1}{2}\Big(\sum_{m\neq n}\big(\operatorname{diam}(X_m)\big)^p\Big)^{1/p}-\frac{1}{2}\Big(\sum_{m\neq n}\big(\operatorname{diam}(Y_m)\big)^p\Big)^{1/p}\right)\le$$
$$\le d_{GH}\left((l^p)\prod_n X_n,\ (l^p)\prod_n Y_n\right)\le\left(\sum_{n=1}^\infty\big(d_{GH}\big(X_n,Y_n\big)\big)^p\right)^{1/p}.$$

以下定理的证明方法类似。

定理 2.8. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是任意的度量空间族，满足上确界$_{\alpha\in A}$直径$(X_\alpha)<\infty$ 且 上确界$_{\alpha\in A}$直径$(Y_\alpha)<\infty$。则

$$\sup_{\alpha\in A}\Big(d_{GH}(X_\alpha,Y_\alpha)-\frac{1}{2}\sup_{\beta\neq\alpha}\operatorname{diam}(X_\beta)-\frac{1}{2}\sup_{\beta\neq\alpha}\operatorname{diam}(Y_\beta)\Big)\le$$
$$\le d_{GH}\left((l^\infty)\prod_{\alpha\in A}X_\alpha,\ (l^\infty)\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha\right)\le\sup_{\alpha\in A}d_{GH}(X_\alpha,Y_a).$$

注 2.9. 注意，在定理 2.8 中，上界适用于任意（甚至无界的）度量空间，这从证明中显而易见。

定义 2.10 ([1])。设 X,Y为度量空间。若存在 $C\ge 0$使得对所有 $x_1,x_2\in X$，都有 $d_Y(f(x_1)\ f(x_2))\le Cd_X(x_1,x_2)$，则称映射 $f\colon X\to Y$ 为利普希茨 映射。C 的任何一个适用取值都称为映射 f 的利普希茨映射常数。最小利普希茨常数称为 f 的延拓，记作 dil(f)。

注 2.11。 (1) 考虑映射 $\mathcal{T}_p$，它将每个紧致度量空间 X 映射到其平方 $\mathcal{T}_p\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M},\ X\mapsto (l^p)X\times X$。那么，该映射的膨胀系数 $\mathcal{T}_p=2^{1/p}$ 是利普希茨连续的，特别是连续的。此外，膨胀系数 $\operatorname{dil}(\mathcal{T}_p)=2^{1/p}$。

(2) 该映射

$$\mathcal{T}_\infty\colon X\mapsto (l^\infty)\prod_{\alpha\in A}X$$

是 1-利普希茨连续的，特别地，是连续的。此外，膨胀系数 $\operatorname{dil}(\mathcal{T}_\infty)=1$。

证明。 我们来论证第一点（第二点可类似得到）。由于根据 2.3，$d_{GH}((l^p)X\times X,\ (l^p)Y\times Y)\le 2^{1/p}d_{GH}(X,\ Y)$，映射 $\mathcal{T}_p$是以常数 $C\ge 2^{1/p}$ 利普希茨连续的。剩下只需给出紧度量空间 X，Y，使得 $d_{GH}((l^p)X\times X,\ (l^p)Y\times Y)=2^{1/p}d_{GH}(X,\ Y)$。例如，若 $X=\{pt\}$，且 Y是任意紧致度量空间，则这当然成立。 □

2.1 关于该定理的注记：连续 Gromov–Hausdorff 距离的情形

我们将所得的部分结果推广到连续 Gromov–Hausdorff 距离 d^c_{GH} 的情形。在此情形下，下述命题对 d^c_{GH} 确实逐字成立。

命题 2.12. 设$(X_1,d_{X_1})\dots,(X_N,d_{X_N})$和$(Y_1,d_{Y_1})\dots,(Y_N,d_{Y_N})$为有限个度量空间组成的序列。设 $1\le p<\infty$ 表示 $X=(l^p)X_1\times\cdots\times X_N$，$Y=(l^p)Y_1\times\cdots\times Y_N$。则

$$d^c_{GH}(X,Y)\le\left(\sum_n\big(d^c_{GH}\big(X_n,Y_n\big)\big)^p\right)^{1/p}.$$

证明. 我们将采用与引理 2.3 的证明类似的方法。对于任意 $\varepsilon>0$，考虑连续映射 $f_n\colon X_n\to Y_n,\gamma_n\colon Y_n\to X_n$，使得

$$\big\|\{\max\{\operatorname{dis}(f_n),\operatorname{dis}(g_n),\operatorname{codis}(f_n,g_n)\}\}_{n=1}^N\big\|_{l^p}\le 2\big\|\{d^c_{GH}(X_n,Y_n)\}_{n=1}^N\big\|_{l^p}+\varepsilon.$$

令 $R=R_{f_1,g_1}\times\cdots\times R_{f_N,g_N}\in\mathcal{R}(X,Y)$。定义连续映射 $f\colon X\to Y,(x_1,\dots,x_N)\mapsto(f_1(x_1)\dots,f_n(x_n))$ 以及 $g\colon Y\to X,(y_1,\dots,y_n)\mapsto(g_1(y_1)\dots g_n(y_n))$。于是，根据 Gromov–Hausdorff 距离的定义和引理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}2d^c_{GH}(X,Y)&\le\max\{\operatorname{dis}(f),\operatorname{dis}(g),\operatorname{codis}(f,g)\}\le\operatorname{dis}(R)\le\big\|\{\operatorname{dis}(R_{f_n,g_n})\}_{n=1}^N\big\|_{l^p}=\\&=\big\|\{\max\{\operatorname{dis}(f_n),\operatorname{dis}(g_n),\operatorname{codis}(f_n,g_n)\}\}_{n=1}^N\big\|_{l^p}\le 2\big\|\{d^c_{GH}(X_n,Y_n)\}_{n=1}^N\big\|_{l^p}+\varepsilon.\end{aligned}$$

在 $\varepsilon\to 0$ 处取极限，即可得到我们所需的结果。 □

现在让我们将其推广到任意序列。

引理 2.13。 设 $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^\infty$ 是一个度量空间序列，满足 $\sum_{n=1}^\infty\big(\text{直径}(X_n)\big)^p<\infty$，其中 $1\le p<\infty$。则

$$d^c_{GH}\left((l^p)\prod_{n=1}^\infty X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^N X_n\right)\le\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=N+1}^\infty\big(\operatorname{diam}(X_n)\big)^p\Big)^{1/p}.$$

特别地，

$$\lim_{N\to\infty} d_{GH}^{c}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{N} X_n\right)=0.$$

证明。令 $\tilde{X}_1=\tilde{Y}_1=(l^p)\prod_{n=1}^{N} X_n$, $\tilde{X}_2=(l^p)\prod_{n=N+1}^{\infty} X_n$, $\tilde{Y}_2=\{pt\}$。由于 $d_{GH}^{c}(\tilde{X}_1,\tilde{Y}_1)=0$, 因此由命题 2.12 和注 1.3 可得

$$d_{GH}^{c}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{N} X_n\right)=d_{GH}^{c}\big((l^p)\tilde{X}_1\times\tilde{X}_2,(l^p)\tilde{Y}_1\times\tilde{Y}_2\big)\le d_{GH}^{c}(\tilde{X}_2,\tilde{Y}_2)=$$
$$=d_{GH}^{c}\left((l^p)\prod_{n=N+1}^{\infty} X_n,\{pt\}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{diam}\left((l^p)\prod_{n=N+1}^{\infty} X_n\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\big(\mathrm{diam}(X_n)\big)^p\right)^{1/p}.$$

□

定理 2.14。设 $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{(Y_n,\varrho_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是度量空间序列，满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\text{直径}(X_n)\big)^p<\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\text{直径}(Y_n)\big)^p<\infty$，其中 $1\le p<\infty$。那么

$$d_{GH}^{c}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{\infty} Y_n\right)\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\big(d_{GH}^{c}(X_n,Y_n)\big)^p\right)^{1/p}.$$

证明。由于有限乘积的情形已在引理 2.13 中证明，由三角不等式可得，对于 $N\to\infty$，有

$$d_{GH}^{c}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{\infty} Y_n\right)\le d_{GH}^{c}\left((l^p)\prod_{n=1}^{N} X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{N} Y_n\right)+$$
$$d_{GH}^{c}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{N} X_n\right)+d_{GH}^{c}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} Y_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{N} Y_n\right)\le$$
$$\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\big(d_{GH}^{c}(X_n,Y_n)\big)^p\right)^{1/p}+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\big(\mathrm{diam}(X_n)\big)^p\right)^{1/p}+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\big(\mathrm{diam}(Y_n)\big)^p\right)^{1/p},$$

其中最后两项趋于零。 □

注 2.15。对于 l^∞ 乘积，情况要稍微复杂一些。显然，对于有限的度量空间序列

$$(X_1,d_{X_1}),\dots,(X_N,d_{X_N});\ (Y_1,d_{Y_1}),\dots,(Y_N,d_{Y_N})$$

将成立

$$d_{GH}^{c}((l^\infty)X_1\times\cdots\times X_N,(l^\infty)Y_1\times\cdots\times Y_N)\le\max\{d_{GH}^{c}(X_1,Y_1),\dots d_{GH}^{c}(X_N,Y_N)\},$$

然而，对于无限 l^∞-积，前一个命题的证明无法原样照搬（问题在于，最后两项将不再趋于零）。如果我们添加条件 $\mathrm{diam}(X_n)\to 0$ 和 $\mathrm{diam}(Y_n)\to 0$，那么估计

$$d_{GH}^{c}\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ \prod_{n=1}^{\infty} Y_n\right)\le\sup_{n\in\mathbb{N}} d_{GH}^{c}(X_n,Y_n).$$

猜想 2.16. 假设对于任意度量空间序列 $\{(X_n, d_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$,$\{(Y_n, d_{Y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(X_n) < \infty$ 和 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(Y_n) < \infty$。那么该估计

$$d_{GH}^{c}\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ \prod_{n=1}^{\infty} Y_n\right) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} d_{GH}^{c}(X_n, Y_n)$$

l^∞乘积在一般情况下是否成立?

3 线性乘积的距离估计

本节讨论一个更特殊的情形，并改进引理 2.3 中对此情形所得的估计。

3.1 若干引理

注 3.1。 设给定连续函数 $f\colon K \times A \to \mathbb{R}$ 和 $g\colon K \times A \to \mathbb{R}$，其中 K, A 是任意非空的度量紧集。我们将它们视为定义在连续函数空间 $\mathcal{C}(K)$ 上的连续映射族$\{f_a\}_{a\in A}$ 和 $\{g_a\}_{a\in A}$，其中在 $\mathcal{C}(K)$ 上定义了上确界范数。我们还考虑连续映射 $F, G\colon \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$。假设等式 $F(f_a) = G(g_a)$ 对处处稠密的参数集 $a \in B \subset A$ 中的参数成立。那么，该等式对所有 $a \in A$ 都成立。

证明。 事实上，函数 f 在紧集 $K \times A$ 上连续，因此一致连续。由于 f 和 g 一致连续，映射 $a \mapsto F(f_a)$ 和 $a \mapsto G(g_a)$ 连续；又根据假设，它们在稠密集 B上相等，因此所需等式对所有 $a \in A$ 都成立。 □

引理 3.2。 考虑如下定义的函数 $\xi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$:

$$\xi(x) = \left|(x+1)^p - (\alpha x + \beta)^p\right|,$$

其中 α、$\beta > 0$ 为正参数，且 $0 < p \le 1$。那么，对于每个 $T > 0$,

$$\sup_{x\in[0,T]} \xi(x) = \max\{\xi(0), \xi(T)\}.$$

Proof。 不妨设 $\beta \le 1$。事实上，如果 $\beta \ge 1$，那么我们有 e

$$\xi(x) = \beta^p \left|\left(\frac{x}{\beta} + \frac{1}{\beta}\right)^p - \left(\frac{\alpha x}{\beta} + 1\right)^p\right|$$

并作代换 $t = \alpha x/\beta$，得到

$$\xi(t) = \beta^p \left|(t+1)^p - \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^p\right|,$$

其中此时 $1/\beta \le 1$。我们还假设 $p < 1$，因为 $p = 1$ 的情形是平凡的。

记 $\eta(x)$ 为 $=(x+1)^p-(\alpha x+\beta)^p$，则 $\xi(x)$ 为 $=|\eta(x)|$。注意，导数

$$\eta'(x_0)=p(x_0+1)^{p-1}-p\alpha(\alpha x_0+\beta)^{p-1}=0 \iff x_0=\frac{\beta-\alpha^{\frac{1}{1-p}}}{\alpha^{\frac{1}{1-p}}-\alpha}.$$

根据注 3.1，只需证明该引理在参数的一个处处稠密集 (α,β,p,T) 上成立，因此我们可以假设计算过程中所有分母都不为零。现在考虑两种情形:

(1) 假设点 x_0 不存在或 $x_0\leq 0$。由于我们假设 $\beta\leq 1$，这一情形对应于 $\alpha\geq 1$ 或 $\beta\geq\alpha^{\frac{1}{1-p}}$。

(2) 现在假设点 x_0 存在且 $x_0>0$。于是可得

$$0<\alpha<1,\ 0<\beta<\alpha^{\frac{1}{1-p}}.$$

因此，

$$\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha^{\frac{1}{1-p}}-\alpha}\right)^{p-2}>0.$$

注意，函数 $\eta(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不为零。事实上，

$$\eta(x)=0 \iff x=\frac{\beta-1}{1-\alpha}<0.$$

由于 $\eta(0)=1-\beta^p>0$，因此对所有 $x\in[0,+\infty)$，都有 $\xi(x)=\eta(x)>0$.
为完成证明，只需验证 $\eta''(x_0)>0$。因此，

$$\eta''(x)=p(p-1)(x+1)^{p-2}-\alpha^2p(p-1)(\alpha x+\beta)^{p-2}$$

And

$$\eta''(x_0)=p(p-1)\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha^{\frac{1}{1-p}}-\alpha}\right)^{p-2}\left(1-\alpha^{\frac{1}{1-p}}\right)<0,$$

也就是说，在点 x_0 处将存在一个局部极小值。

□

推论 3.3. 考虑函数 ξ: $[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 定义如下:

$$\xi(x)=\left|(x+1)^{1/p}-(\alpha x+\beta)^{1/p}\right|,$$

其中 α、$\beta>0$ 为正参数，且 $1\leq p<\infty$。则对每一个 $T>0$,

$$\sup_{x\in[0,T]}\xi(x)=\max\{\xi(0),\xi(T)\}.$$

证明。将 p 替换为 $1/p$，即可由 3.2 立即得出。 □

引理 3.4。 考虑函数 $\xi\colon [0,T_1]\times\cdots\times[0,T_N]\to\mathbb{R}$，其定义如下 :

$$\xi(\varkappa)=\xi(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_N)=\left|\left(A+\sum_{n=1}^{N}|a_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}-\left(B+\sum_{n=1}^{N}|b_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}\right|,$$

其中 $a_1,\ldots,a_N\geq 0$, $b_1,\ldots,b_N\geq 0$ 是任意集合， $A,B\geq 0$ 和 $1\leq p<\infty$。于是

$$\sup_{\varkappa\in[0,T_1]\times\cdots\times[0,T_N]}\xi(\varkappa)=\max_{\varkappa\in\{0,T_1\}\times\cdots\times\{0,T_N\}}\xi(\varkappa)=$$

$$=\max_{S\subset\{1,\ldots,N\}}\left|\left(A+\sum_{n\in S}|T_na_n|^p\right)^{1/p}-\left(B+\sum_{n\in S}|T_nb_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

证明。 只需证明第一个等式，因为第二个等式显然成立。与引理 3.2 一样，根据注 3.1，不失一般性地假设 $a_1,\ldots,a_N>0, b_1,\ldots,b_N>0$, $A,B>0$。

令 $N=1$，则

$$\xi(\varkappa)=\left|(a^p\varkappa^p+A)^{1/p}-(b^p\varkappa^p+B)^{1/p}\right|=A^{1/p}\left|\left(\frac{a^p\varkappa^p}{A}+1\right)^{1/p}-\left(\frac{b^p\varkappa^p}{A}+\frac{B}{A}\right)^{1/p}\right|,$$

并作如下替换

$$x=\frac{a^p\varkappa^p}{A},\ \alpha=\frac{b^p}{a^p},\ \beta=\frac{B}{A},$$

我们将此情形归结为推论 3.3。

现在令 $N>1$。我们对 N 作归纳证明，假设当 $N-1$ 时结论成立。因此，对每个固定的 $\varkappa_N=\varkappa_N^*\in[0,\ T_N]$，应用~关于函数 $\xi(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{N-1}):=\xi(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{N-1},\varkappa_N^*)$ 的归纳假设，可得

$$\sup_{\varkappa\in[0,\ T_1]\times\cdots\times[0,\ T_{N-1}]}\xi(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{N-1},\varkappa_N^*)=\max_{(\varkappa_1,\ldots\varkappa_{N-1})\in\{0,\ T_1\}\times\cdots\times\{0,\ T_{N-1}\}}\xi(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{N-1},\varkappa_N^*).$$

对 $N=1$ 以及固定的 $\varkappa_1^*$、 $\ldots\varkappa_{N-1}^*$ 所对应的函数 $\xi^*(\varkappa_N)=\xi(\varkappa_1^*,\ldots\varkappa_{N-1}^*,\varkappa_N)$ 应用归纳假设，我们得到

$$\sup_{\varkappa_N\in[0,T_N]}\xi^*(\varkappa_1^*,\ldots,\varkappa_{N-1}^*,\varkappa_N)=\max\{\xi(\varkappa_1^*,\ldots,\varkappa_{N-1}^*,0),\ \xi(\varkappa_1^*,\ldots,\varkappa_{N-1}^*,T_N)\}.$$

因此,

$$\sup_{\varkappa\in[0,T_1]\times\cdots\times[0,T_N]}\xi(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_N)=\sup_{\varkappa_N^*\in[0,T_N]}\ \sup_{\varkappa\in[0,T_1]\times\cdots\times[0,T_{N-1}]}\xi(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{N-1},\varkappa_N^*)=$$

$$=\sup_{\varkappa_N^*\in[0,T_N]}\ \max_{\varkappa\in\{0,T_1\}\times\cdots\times\{0,T_{N-1}\}}\xi(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{N-1},\varkappa_N^*)=$$

$$=\max_{\varkappa^*\in\{0,T_1\}\times\cdots\times\{0,T_{N-1}\}}\ \sup_{\varkappa_N\in[0,T_N]}\xi(\varkappa_1^*,\ldots,\varkappa_{N-1}^*,\varkappa_N)=$$

$$=\max_{\varkappa^*\in\{0,T_1\}\times\cdots\times\{0,T_{N-1}\}}\max\{\xi(\varkappa_1^*,\ldots,\varkappa_{N-1}^*,0),\ \xi(\varkappa_1^*,\ldots,\varkappa_{N-1}^*,T_N)\}=$$

$$=\max_{\varkappa\in\{0,T_1\}\times\cdots\times\{0,T_N\}}\xi(\varkappa).$$

□

命题 3.5. (1) 设 $a=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in l^p$, $b=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in l^p$ — 两个序列， $1\le p<\infty$。我们定义函数 $\xi_p\colon [0,1]^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$，如下所示：

$$\xi_p(\varkappa)=\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}-\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

Then

$$\sup_{\varkappa\in[0,1]^{\mathbb{N}}}\xi_p(\varkappa)=\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}\xi_p(\varkappa)=\sup_{S\subset\mathbb{N}}\left|\left(\sum_{n\in S}|a_n|^p\right)^{1/p}-\left(\sum_{n\in S}|b_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

(2) 设 $a=\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $b=\{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一个数族，使得 $\sup_{\alpha\in A}a_\alpha<\infty$ 且 $\sup_{\alpha\in A}b_\alpha<\infty$。我们定义函数 $\xi_\infty\colon [0,1]^A\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\xi_\infty(\varkappa)=\left|\sup_{\alpha\in A}|a_\alpha\varkappa_\alpha|-\sup_{\alpha\in A}|b_\alpha\varkappa_\alpha|\right|.$$

Then

$$\sup_{\varkappa\in[0,1]^A}\xi_\infty(\varkappa)=\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^A}\xi_\infty(\varkappa)=\sup_{S\subset A}\left|\sup_{\alpha\in S}|a_\alpha|-\sup_{\alpha\in S}|b_\alpha|\right|.$$

证明。 **(1)** 记

$$\xi_p^{(N)}(\varkappa)=\left|\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}-\left(\sum_{n=1}^{N}|b_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

设 $\varkappa=\{\varkappa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个固定元素。那么，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $|\xi_p(\varkappa)-\xi_p^{(N)}(\varkappa)|<\varepsilon$。由引理 3.4 可得

$$\xi_p(\varkappa)\le\varepsilon+\xi_p^{(N)}(\varkappa)\le\varepsilon+\sup_{\varkappa\in[0,1]^N}\xi_p^{(N)}(\varkappa)=\varepsilon+\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^N}\xi_p^{(N)}(\varkappa)\le\varepsilon+\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}\xi_p(\varkappa).$$

令 $\varepsilon\to 0$，即可得到所需结果。

(2) 设 $\varkappa=\{\varkappa_\alpha^*\}_{\alpha\in A}$ 是一个固定元素。那么，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 α,β 使得

$$\xi_\infty(\varkappa^*)\le\big||a_\alpha||\varkappa_a^*|-|b_\beta||\varkappa_\beta^*|\big|+\varepsilon.$$

考虑两种情形。

(a) 设 $\alpha\ne\beta$。不失一般性，我们假设 $|a_\alpha||\varkappa_\alpha^*|\ge|b_\beta||\varkappa_\beta^*|$。接下来考虑 $\varkappa'=\{\varkappa'_\gamma\}_{\gamma\in A}\in\{0,1\}^A$，使得对于 $\gamma=\alpha$，有 $\varkappa'_\gamma=1$；对于 $\gamma\ne\alpha$，有 $\varkappa'_\gamma=0$。于是

$$\begin{aligned}\xi_\infty(\varkappa^*)\le\big||a_\alpha||\varkappa_a^*|-|b_\beta||\varkappa_\beta^*|\big|+\varepsilon\le\\ \le\big||a_\alpha||\varkappa'_a|-|b_\beta||\varkappa'_\beta|\big|+\varepsilon\le\xi_\infty(\varkappa')+\varepsilon\le\sup_{\varkappa\in\{0.1\}^A}\xi_\infty(\varkappa)+\varepsilon.\end{aligned}$$

(b) 令 $\alpha=\beta$。考虑满足 $\varkappa'_\gamma=1$（当 $\gamma=\alpha$ 时）且满足 $\varkappa'_\gamma=0$（当 $\gamma\ne\alpha$ 时）的 $\varkappa'=\{\varkappa'_\gamma\}_{\gamma\in A}\in\{0,1\}^A$。于是

$$\xi_\infty(\varkappa^*)\le|\varkappa_\alpha^*|\big||a_\alpha|-|b_\alpha|\big|+\varepsilon\le|\varkappa'_\alpha|\big||a_\alpha|-|b_\alpha|\big|+\varepsilon\le\xi_\infty(\varkappa')+\varepsilon\le\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^A}\xi_\infty(\varkappa)+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 趋于极限，我们得到

$$\xi_\infty(\varkappa^*) \leq \sup_{\varkappa \in \{0,1\}^A} \xi_\infty(\varkappa).$$

□

3.2 主要定理

记号 3.6. 回顾一下，对于任意度量空间 (X,d) 以及任意 $\lambda > 0$，我们用 $\lambda(X,d)$ 表示度量空间 $(X,\lambda d)$，其中度量由等式 $(\lambda d)(x,y) := \lambda d(x,y)$ 定义。为简洁起见，今后我们用 X 代替 (X,d)，用 λX 代替 $\lambda(X,d)$。

记号 3.7. 对于任意 $1 \leq p \leq \infty$，我们令

$$l^p_+ = \big\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p \big|\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (x_n \geq 0)\big\}.$$

定义 3.8. 设 $(X_n, d_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个直径为 $\operatorname{diam}(X_n) = 1$ 的度量空间序列。令 $1 \leq p < \infty$。对于任意 $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p_+$，我们定义 线性积 $(X, d_X) = (l^p)\prod_{n=1}^\infty a_n(X_n, d_{X_n})$。

命题 3.9。(1) 设 $1 \leq p < \infty$。考虑 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ——一个固定的度量空间序列，令 直径$(W_n) = 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。令 $a, b \in l^p_+$。

记为

$$X = (l^p)\prod_{n=1}^\infty a_n W_n,\ Y = (l^p)\prod_{n=1}^\infty b_n W_n.$$

考虑映射 $f\colon\ X \to Y$，它由规则 $f\colon\ \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$定义。

Then

$$\operatorname{dis}(f) = \sup_{S\subset\mathbb{N}} \left| \left(\sum_{n\in S} |a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S} |b_n|^p\right)^{1/p} \right|.$$

(2) 考虑 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ——任意一个满足 直径$(W_\alpha) = 1$ 对所有 $\alpha \in A$成立的度量空间族。令 $a = \{a_\alpha\}_{\alpha\in A}, a_\alpha \geq 0$和 $b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in A}, b_\alpha \geq 0$满足 上确界$_{\alpha\in A}\, a_\alpha < \infty$，上确界$_{\alpha\in A}\, b_\alpha < \infty$。记为

$$X = (l^\infty)\prod_{\beta\in A} a_\beta W_\beta,\ Y = (l^\infty)\prod_{\beta\in A} b_\beta W_\beta.$$

考虑由规则 $f\colon\ \{w_\alpha\}_{\alpha\in A} \mapsto \{w_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 给出的映射 $f\colon\ X \to Y$。于是

$$dis(f) = \sup_{S\subset A} \big|\sup_{\beta\in S} a_\beta - \sup_{\beta\in S} b_\beta\big|.$$

证明。我们只证明第 1 点；第 2 点可用类似方法得到。根据映射畸变的定义和命题 3.5，并记 $\varkappa_n = d_{W_n}(w_n,\ \tilde{w}_n)$，可得

$$\begin{aligned}\operatorname{dis}(f) &= \sup_{x,\tilde{x}\in X}\left|d_X(x,\tilde{x}) - d_Y(f(x),f(\tilde{x}))\right| = \\ &= \sup_{\substack{w=\{w_n\}_{n=1}^{\infty}\in X\\ \tilde{w}=\{\tilde{w}_n\}_{n=1}^{\infty}\in X}}\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\ d_{W_n}(w_n,\tilde{w}_n)\right)^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\ d_{W_n}(w_n,\tilde{w}_n)\right)^p\right)^{1/p}\right| \le \\ &\le \sup_{\varkappa\in[0,1]^{\mathbb{N}}}\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}\right| = \sup_{S\subset\mathbb{N}}\left|\left(\sum_{n\in S}|a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S}|b_n|^p\right)^{1/p}\right|.\end{aligned}$$

注意，在前面的不等式链中，不等式实际上变成了等式。事实上，考虑某个固定的子集 $S^*\subset\mathbb{N}$ 并固定任意一个 $\varepsilon>0$。考虑一组有限的数$0\le D_1$，.....，$D_N<1$，使得 $\left|\left(\sum_{n\in S^*}|a_n|^p\right)^{1/p} - \|\{a_nD_n\}_{n=1}^N\|_{l^p}\right| < \varepsilon/2$ 且 $\left|\left(\sum_{n\in S^*}|b_n|^p\right)^{1/p} - \|\{b_nD_n\}_{n=1}^N\|_{l^p}\right| < \varepsilon/2$。于是

$$\left|\left(\sum_{n\in S^*}|a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S^*}|b_n|^p\right)^{1/p}\right| \le \left|\left(\sum_{n=1}^{N}|a_nD_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{N}|b_nD_n|^p\right)^{1/p}\right| + \varepsilon.$$

注意，我们可以选取 $D_1,\ \ldots D_N$，使得对于每个 n，都存在某个 $w_n^*,\ \tilde{w}_n^*\in W_n$，满足 $D_n = d_{W_n}(w_n^*,\ \tilde{w}_n^*)$。于是，按照构造可得

$$\begin{aligned}&\left|\left(\sum_{n\in S^*}|a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S^*}|b_n|^p\right)^{1/p}\right| \le \\ &\qquad\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\ d_{W_n}(w_n^*,\tilde{w}_n^*)\right)^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\ d_{W_n}(w_n^*,\tilde{w}_n^*)\right)^p\right)^{1/p}\right| + \varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了所需的等式，并证明了该命题。 □

该命题推出以下定理。

定理 3.10。(1) 设 $1\le p<\infty$。考虑 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ——一个固定的度量空间序列，对所有 $n\in\mathbb{N}$，均有 直径$(W_n)=1$。设 $a, b\in l_+^p$。

记

$$X = (l^p)\prod_{n=1}^{\infty}a_nW_n,\ Y = (l^p)\prod_{n=1}^{\infty}b_nW_n.$$

Then

$$2d_{GH}(X,Y)\le\sup_{S\subset\mathbb{N}}\left|\left(\sum_{n\in S}|a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S}|b_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

(2) 设 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是任意一个度量空间族，使得对于所有 $\alpha\in A$，直径$(W_\alpha)=1$。设 $a=\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$、$a_\alpha\ge 0$ 和 $b=\{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$、$b_\alpha\ge 0$ 满足 $\sup_{\alpha\in A}a_\alpha<\infty$、$\sup_{\alpha\in A}b_\alpha<\infty$。

记

$$X = (l^\infty)\prod_{\beta\in A} a_\beta W_\beta,\ Y = (l^\infty)\prod_{\beta\in A} b_\beta W_\beta.$$

Then

$$2d_{GH}(X,Y) \le \sup_{S\subset A}\big|\sup_{\beta\in S} a_\beta - \sup_{\beta\in S} b_\beta\big|.$$

证明。 事实上，根据记号 3.9， $2d_{GH}(X,\ Y) \le \mathrm{dis}(f)$ 成立。 □

定理 3.11。 (1) 设 $1 \le p < \infty$。考虑 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ——一个固定的度量空间序列，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$，直径$(W_n) = 1$ 。设 $a, b \in l^p_+$ 满足

$$\sup_{S\subset\mathbb{N}}\left|\left(\sum_{n\in S}|a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S}|b_n|^p\right)^{1/p}\right| \le \big|\|a\|_{l^p} - \|b\|_{l^p}\big|.$$

Then

$$2d_{GH}\left((l^p)\prod_{n=1}^\infty a_n W_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^\infty b_n W_n\right) = \big|\|a\|_{l^p} - \|b\|_{l^p}\big|.$$

(2) 设 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是任意一个度量空间族，使得对所有 $\alpha\in A$，直径$(W_\alpha) = 1$ 。设 $a = \{a_\alpha\}_{\alpha\in A}, a_\alpha \ge 0,\ b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in A}, b_\alpha \ge 0$ 满足 $\sup_{\alpha\in A} a_\alpha < \infty$、$\sup_{\alpha\in A} b_\alpha < \infty$。假设

$$\sup_{S\subset A}\big|\sup_{\beta\in S} a_\beta - \sup_{\beta\in S} b_\beta\big| \le \big|\sup_{\beta\in A} a_\beta - \sup_{\beta\in A} b_\beta\big|.$$

Then

$$2d_{GH}\left((l^\infty)\prod_{\beta\in A} a_\beta W_\beta,\ (l^\infty)\prod_{\beta\in A} b_\beta W_\beta\right) = \big|\sup_{\beta\in A} a_\beta - \sup_{\beta\in A} b_\beta\big|.$$

证明。 先证明第一点，第二点的证明类似。因此，记 $X = (l^p)\prod_{n=1}^\infty a_n W_n$,$Y = (l^p)\prod_{n=1}^\infty b_n W_n$, 并注意到 $\mathrm{diam}(X) = \|a\|_{l^p}$ ，且 $\mathrm{diam}(Y) = \|b\|_{l^p}$。根据定理 3.10，并基于估计

$$\big|\mathrm{diam}(X) - \mathrm{diam}(Y)\big| \le 2d_{GH}(X,Y),$$

我们得到 $2d_{GH}(X,\ Y) = \big|\|a\|_{l^p} - \|b\|_{l^p}\big|$。 □

注 3.12。 请注意，定理 3.10 和 3.11 对任意有限乘积都成立，因为剩余因子总可以按如下方式形式化定义： $X_n = Y_n = \{pt\}$ 或 $X_\alpha = Y_\alpha = \{pt\}$。

推论 3.13。 设 W_n 为任意度量空间序列，满足 直径$(W_n) = 1$。设 $a, b \in l^1_+$满足对每个 $n\in\mathbb{N}$, $a_n \le b_n$。那么

$$2d_{GH}\left((l^1)\prod_{n=1}^\infty a_n W_n,\ (l^1)\prod_{n=1}^\infty b_n W_n\right) = \sum_{n=1}^\infty (b_n - a_n).$$

证明。 条件 $a_n \le b_n$ 自动保证满足定理 3.11 的条件。

□

记号 3.14。用 S^1 表示一个带有内在度量的圆形度量空间，其中直径$(S^1) = 1$。

例 3.15. 我们来估计环面 $X = (l^2)aS^1 \times bS^1$与 $Y = (l^2)cS^1 \times dS^1$之间的 Gromov–Hausdorff 距离。由定理 3.11 可知，若

$$\max\{|a-c|, |b-d|\} \le \left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right|,$$

then

$$2d_{GH}(X,Y) = \left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right|.$$

F例如，对于 $a=1,\ b=3,\ c=2,\ d=5$，该条件成立，因此

$$2d_{GH}((l^2)S^1 \times 3S^1,\ (l^2)2S^1 \times 5S^1) = \sqrt{29} - \sqrt{10}.$$

4 l^∞-积上界的可达性

在定理 3.11 中，我们得到了不等式中下界可达的充分条件

$$\left|\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(Y)\right| \le 2d_{GH}(X,Y) \le \max\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\}.$$

现在我们给出上界可达的一个充分条件。首先来看下面的命题。

命题 4.1. (1) 设 X 和 Y 是满足 直径$(X) \le$ 直径$(Y) < \infty$的度量空间。假设对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个子集 $Q_\varepsilon \subset Y$，使得 $\#Q_\varepsilon > \#X$，且对于所有x、$y \in Q_\varepsilon$，均有 $d(x,y) \ge$直径$(Y) - \varepsilon$。那么 $2d_{GH}(X, Y) =$直径(Y)。

(2) 设 X 和 Y 是度量空间，且 直径$(Y) = \infty$。假设对于任意 $C > 0$，都存在一个子集 $Q_C \subset Y$，使得 $\#Q_C > \#X$，并且对于所有 x、$y \in Q_C$，有 $d(x,y) \ge C$。那么 $d_{GH}(X,Y) = \infty$。

证明。我们只证明第一个结论，因为第二个类似。显然，$2d_{GH}(X,Y) \le$max{直径(X), 直径(Y)} = 直径(Y)，因此只需证明 $2d_{GH}(X,Y) \ge$直径(Y)。于是，

$$\begin{aligned} 2d_{GH}(X,Y) = \inf_{R\in\mathcal{R}(X,Y)} \operatorname{dis}(R) = \inf_{f\colon X\to Y}\inf_{g\colon Y\to X} \max\{\operatorname{dis}(f), \operatorname{dis}(g), \operatorname{codis}(f,g)\} \ge \\ \inf_{g\colon Y\to X} \operatorname{dis}(g) \ge \inf_{g\colon Y\to X} \operatorname{dis}(g|_{Q_\varepsilon}) = \inf_{g\colon Q_\varepsilon\to X} \operatorname{dis}(g) = \\ = \inf_{g\colon Q_\varepsilon\to X} \sup_{x,y\in Q_\varepsilon} \Big|d_Y(x,y) - d_X\big(g(x), g(y)\big)\Big| \ge \operatorname{diam}(Y) - \varepsilon. \end{aligned}$$

最后一个不等式源于以下事实：映射 $g\colon Q_\varepsilon \to X$ 不可能是单射，因此存在 $x, y \in Q_\varepsilon$，使得 $x \ne y$ 且 $g(x) = g(y)$。因此，对于这些 x, y，我们有

$$\Big|d_Y(x,y) - d_X\big(g(x), g(y)\big)\Big| \ge \operatorname{diam}(Y) - \varepsilon.$$

取极限（当 $\varepsilon \to 0$ 时），我们得到 $2d_{GH}(X,Y) \ge$直径(Y)。 □

推论 4.2. 设 X、Y 为度量空间，直径$(X) \leq$直径(Y)，且 直径$(Y)\Delta_\kappa \subset Y$，其中$\#X < \kappa$。则 $2d_{GH}(X,Y) =$直径(Y)。

证明。 对于 Q_ε，我们可以取 $\mathrm{diam}(Y)\Delta_\kappa$。 □

记号 4.3 ([11])。 对于任意拓扑空间 X，令 $d(X)$ 表示其稠密度 ——即其稠密子集的最小基数。

定理 4.4。 (1) 设 X 是稠密度为 $d(X)$ 的有界度量空间。那么，对于任意基数为 $\#A \geq d(X)$ 的集合 A ，有

$$2d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X\Big) = \mathrm{diam}(X).$$

(2) 设 X 是稠密度为 $d(X)$ 的无界度量空间。那么，对于任意基数为$\#A \geq d(X)$ 的集合 A ，有

$$d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X\Big) = \infty.$$

证明。 我们只证明第一点，因为第二点类似。令 $Y \subset X$ 为基数 $\#Y = d(X)$ 的处处稠密子集。众所周知，$\mathrm{diam}(Y) = \mathrm{diam}(X)$ 且 $d_{GH}(X,Y) = 0$。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，取 $x, y \in Y$ 使得 $d_X(x,y) \geq \mathrm{diam}(X) - \varepsilon$。记

$$Q_\varepsilon = (l^\infty)\prod_{\alpha\in A}\{x,y\} \subset (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X$$

并考虑到 $\#Q_\varepsilon = \exp(\#A) > \#A \geq d(X) = \#Y$，由命题 4.1 可得

$$2d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X\Big) = 2d_{GH}\Big(Y, (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X\Big) = \mathrm{diam}(X).$$

□

推论 4.5. 设 X 是一个度量空间。则

$$2d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{y\in X} X\Big) = \mathrm{diam}(X).$$

推论 4.6. 设 X 是一个可分度量空间。则

$$2d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{n=1}^{\infty} X\Big) = \mathrm{diam}(X).$$

5 格罗莫夫–豪斯多夫拓扑距离

定义 5.1. 设 R 是度量空间 (X,d) 上的一个等价关系。商空间的半度量 d_R定义为

$$d_R(x,y) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{k} d(p_i,q_i)\colon p_0 = x, q_k = y, k \in \mathbb{N}\Big\},$$

其中，下确界取遍所有满足如下条件的集合 $\{p_i\}$ 和 $\{q_i\}$：对于所有 $i = 1$、.....、$k-1$，点 q_i 与点 p_{i+1} 关于 R 等价。

问题随之而来：能否将任意可度量化空间之间的 Gromov–Hausdorff 距离定义为一种拓扑特征？如果考虑由此在同胚类 $\mathcal{GH}$ 上诱导的半度量，很容易验证该半度量是平凡的（恒等于零）。事实上，对于任意可度量化空间 X，我们总能引入一个生成该拓扑的度量 d_ε，使得对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，$\operatorname{diam}(X) < \varepsilon$。由于空间 $\{pt\}$ 到 X 的距离不会超过 $\frac{1}{2}\operatorname{diam}(X)$，根据三角不等式可知，该距离是平凡的。

自然会认为，这种平凡性源于直径可以无限缩小的可能性。我们将尝试通过把分解限制在直径固定的紧空间的子集上（例如，$\operatorname{diam}(X) = 1$），来消除这一影响。看起来，在这一类空间中，诱导的半度量将使我们能够区分不同胚的空间。然而，如下文所示，即使施加这一限制，也无法阻止距离退化。

回顾，$\mathcal{M}$ 表示所有度量紧空间构成的空间。用 $\mathcal{S}$ 表示球面

$$\mathcal{S} = \big\{X \in \mathcal{M} \colon \operatorname{diam}(X) = 1\big\}.$$

我们引入如下等价关系 R：度量空间 X，$Y \in \mathcal{S}$ 若同胚，则它们是 R-等价的，并将所得的半度量，即商空间上的度量，记为D。

引理 5.2. 设 X、$Y \in \mathcal{S}$。记 $X \times Y = (l^\infty)X \times Y$。则 $D(X,\ X \times Y) = 0$。

证明. 固定 $0 < \lambda < 1$。注意到，由于空间 $X \times Y$ 与 $X \times \lambda Y$ 同胚，故由定理 2.8，我们有 $D(X,\ X \times Y) = D(X \times \{pt\},\ X \times \lambda Y) \le d_{GH}(X \times \{pt\},\ X \times \lambda Y) \le \max\{d_{GH}(X,\ X)\ d_{GH}(\{pt\},\ \lambda Y)\} = \text{直径}(\lambda Y)/2 = \lambda/2$。令 $\lambda \to 0$，即得所需结果。 □

定理 5.3。等价关系 R 下商空间 $\mathcal{S}$ 的半度量 D 恒等于零。

证明。采用引理 5.2 中的记号，对于任意度量空间 X，$Y \in \mathcal{S}$，我们有

$$D(X, Y) \le D(X, X \times Y) + D(X \times Y, Y) = 0.$$

□

参考文献

[1] D. Burago、Yu. Burago、S. Ivanov，《度量几何教程》，《数学研究生教材》33，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。

[2] S. Lim、F. Memoli、Z. Smith，《球面之间的 Gromov–Hausdorff 距离》，《几何与拓扑》，2023年，卷27，第9期，3733–3800页。

[3] S. A Bogaty, A. A. Tuzhilin，连续 *Gromov–Hausdorff* 距离理论基础，2025年，arXiv:2512.02611。

[4] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin，单形的格罗莫夫-豪斯多夫距离及其在离散优化中的若干应用，《切比雪夫文集》，第 21 卷，第 2 期，第 169–189 页，2020年。[5] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin，利用 *Borsuk*数计算格罗莫夫–豪斯多夫距离，《莫斯科大学数学通报》，78:1（2023 年），37–43[6] D. S. Grigor’ev, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin，单形的格罗莫夫–豪斯多夫距离，arXiv 预印本 arXiv:1906.09644，2019年。[7] I. N. Mikhailov，利用渐近维数计算格罗莫夫–豪斯多夫距离，arXiv 预印本 arXiv:2505.18158，2025。[8] Y. Ji, A. A. Tuzhilin，区间与圆之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离，《拓扑学及其应用》，爱思唯尔 BV，2022年，第307卷。[9] J. Lee, C. Morales，动力系统的格罗莫夫–豪斯多夫稳定性及其在偏微分方程中的应用，Birkhäuser/施普林格，2022年。[10]H. Adams, J. Bush, F. Frick，格罗莫夫-豪斯多夫距离、博苏克-乌拉姆定理与维托里斯-里普斯复形，《度量几何》，2023年。[11] R. Engelking，一般拓扑学，华沙，PWN，1985年。[12] F. Hausdorff，集合论基础，莱比锡，Veit， 1914 [由 Chelsea 再版，见 1949]。[13] D. Edwards，超空间的结构，《拓扑学研究》，N.M. Stavrakas 和 K.R. Allen 编，学术出版社公司，纽约、伦敦、旧金山，1975年[14] M. Gromov，多项式增长群与扩张映射，《I.H.E.S. 数学出版物》，第 53 期，1981年。[15] A. O. Ivanov, N. K. Nikolaeva, 和 A. A. Tuzhilin，紧度量空间空间上的格罗莫夫-豪斯多夫度量是严格内蕴的，《数学札记》，2016年，第100卷，第6期，第883–885页。[16]F. Memoli, Z. T. Smith，用于估计格罗莫夫-豪斯多夫距离的嵌入-投影对应，2024年，arXiv 预印本 arXiv:2407.03295 [math.MG]。[17] F. Schmiedl，格罗莫夫–豪斯多夫距离的计算方面及其在非刚性形状匹配中的应用，《离散与计算几何》，2017年，第57卷，第4期，第854–880页。