arXiv:2603.00843v1 [math.NA] 1 Mar 2026

利用具有维数无关收敛速率的重要性抽样拟蒙特卡罗进行不确定性量化 *

Zexin Pan† Du Ouyang‡ Zhijian He§

2026年3月3日

摘要

无界区域上的拟蒙特卡罗（QMC）积分 $\mathbb{R}^s$ 仍然具有挑战性，这源于采样空间的高维性以及被积函数的边界增长。在不确定性量化（UQ）等应用中，维数s 可达数百甚至数千。为了恢复求积规则在高维下的效率，格点规则等构造性准蒙特卡罗方法已在加权函数空间的框架内成功发展。与设计针对具体问题的求积点不同，本文提出变换底层被积函数，从而借助边界阻尼重要性抽样（BDIS）来适配现成的扰动网（一种无需构造的随机化拟蒙特卡罗方法），该方法由 [37]提出。我们对基于 BDIS 的扰乱网的维数无关收敛速率给出了严格分析，同时覆盖了比 [37]中更广的一类无界函数。通过利用参数化输入随机场的维数结构，所提出的 n点求积规则达到了维数无关的均方误差收敛率 $O(n^{-1-\alpha^*+\varepsilon})$，适用于椭圆型偏微分方程（PDE）中的标准不确定性量化问题，其中 $\varepsilon > 0$ 可任意小，并且 $\alpha^* \in (0, 1)$反映了关于参数变量的正则性。针对具有高维参数的椭圆型偏微分方程的数值实验进一步证明了该方法的有效性。

关键词： 拟蒙特卡罗、重要性抽样、不确定性量化、参数偏微分方程

MSC 分类号： 41A63, 65D30, 97N40

*第三位作者的研究工作获广东省基础与应用基础研究基金项目资助，项目编号为 2024A1515011876 和 2025A1515011888。

†浙江大学基础与跨学科研究所，中华人民共和国浙江省310058（zep002@zju.edu.cn）。

‡清华大学数学科学系，中华人民共和国北京市100084（oyd21@mails.tsinghua.edu.cn）。§通讯作者。华南理工大学数学学院，中华人民共和国广州市510641（hezhijian@scut.edu.cn）。

1 引言

本文研究用于计算无界域 $\mathbb{R}^s$ 上如下形式积分的拟蒙特卡罗（QMC）求积规则

$$\mu = \int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x}) \prod_{j=1}^{s} \varphi(x_j)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{1.1}$$

其中 $f\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ 是实值被积函数，且 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是概率密度函数。这一基本问题源于许多领域，例如金融工程 [11, 23, 48]和不确定性量化（UQ） [13, 17, 20, 39]。尽管准蒙特卡罗（QMC）有潜力加快蒙特卡罗（MC）的收敛率，但由于经常出现的维数灾难，将其应用于高维函数仍然是一项具有挑战性的任务。近几十年来，研究人员付出了巨大努力，以理解准蒙特卡罗方法如何能够成功地应对高维性。一方面，“低有效维数”这一概念在解释准蒙特卡罗于高维应用中取得成功方面发挥着重要作用，这意味着高维函数实际上可能主要依赖于少数几个主导变量，或少量变量之间的相互作用 [3, 35, 46]。另一方面，加权函数空间由 [41] 提出，用于处理高维问题；其中一组参数（即“权重”）被纳入函数空间范数，以刻画不同变量子集之间的相对重要性。在关于权重的某些条件下，一类采用逐分量（CBC）构造的格点规则这一构造性准蒙特卡罗方法达到了与维数无关的误差界 [25] ，并已在许多不确定性量化应用中被证明是成功的，包括具有随机扩散系数的椭圆型偏微分方程（PDE） [13, 14, 20]以及椭圆型反问题 [15, 38]。这些应用背后的思想是，根据底层被积函数的维数结构选择权重，然后通过CBC [40] 或快速逐分量构造 [29] 来构造适用于高维问题的格点规则。了解所处理问题的维数结构至关重要。我们的策略不是通过CBC构造求积点，而是借助基于维数信息的重要性抽样（IS）变换底层被积函数，从而可以很容易地用现成的准蒙特卡罗方法（如扰动网）加以处理 [30, 31]。本文以本文作者最近提出的边界阻尼重要性抽样为基础 [37]。我们首先建立扰动网积分在 $\mathbb{R}^s$ 上于边界阻尼重要性抽样下的维数无关收敛率的改进界，然后将结果推广到具有一般随机扩散系数的椭圆型偏微分方程和加权函数空间。

本文中，我们用 $\boldsymbol{x}$ 表示 $\mathbb{R}^s$ 中的坐标，用 $\boldsymbol{u}$ 表示 $\mathbb{I}^s$中的坐标，其中$\mathbb{I} = (0,\mathbf{1})$。为估计 μ（1.1）中的量，我们考虑如下形式的重要性抽样

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} w(\boldsymbol{u}_i) f \circ T(\boldsymbol{u}_i), \tag{1.2}$$

其中，$T(\boldsymbol{u})\colon \mathbb{I}^s \to \mathbb{R}^s$ 称为传输映射，$\{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}\} \subseteq \mathbb{I}^s$ 是一组求积点，而 $w(\cdot)$称为似然比或权函数。传输映射使我们能够根据为 QMC 求积量身定制的标准均匀分布生成提议分布

规则。为便于误差估计，本文按照随机化 QMC（RQMC）的设定，重点使用扰乱数字网作为求积点 [22, 34]。

Pan 等人 [37] 考虑了具有独立分量的传输映射，即 $T(\boldsymbol{u}) = (T_1(u_1), \ldots, T_s(u_s))$. 若传输映射 $T_j : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ 可微，则权函数具有乘积形式

$$w(\boldsymbol{u}) = \prod_{j=1}^{s} w_j(u_j) \quad \text{for} \quad w_j(u) = T_j'(u)\varphi \circ T_j(u).$$

因此我们有

$$T_j(u) = \Phi^{-1}\Big(\int_0^u w_j(t)\,\mathrm{d}t \Big), \tag{1.3}$$

其中 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,\mathrm{d}y$ 表示累积分布函数（CDF），而 $\Phi^{-1} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$表示逆累积分布函数（分位数函数）。不同于在蒙特卡罗设置中从某一分布族选择重要性抽样提议分布的做法，[11, 34], Pan 等人 [37] 提出从一组参数化函数中选择权重$w_j(\cdot)$，即 $w_j(u) = w_{\theta_j}(u)$, 其中 $\theta_j \in (0, 1/2]$。给定参数 θ_j，传输映射 T_j 由（1.3）确定。当 $\theta \in (0, 1/2]$时，Pan 等人 [37]特别取

$$w_\theta(u) = \begin{cases} (1-\theta)^{-1}\eta(u/\theta), & \text{if } u \in (0, \theta/2] \\ (1-\theta)^{-1}(1-\eta(1-u/\theta)), & \text{if } u \in (\theta/2, \theta) \\ (1-\theta)^{-1}, & \text{if } u \in [\theta, 1/2] \\ w_\theta(1-u), & \text{if } u \in (1/2, 1), \end{cases} \tag{1.4}$$

and

$$\eta(u) = \eta_p(u) = \begin{cases} 2^{-p-2}u^{-p-1}\exp(2^p - u^{-p}), & \text{if } u \in (0, 1/2] \\ 0, & \text{if } u = 0 \end{cases} \quad \text{for} \quad p \geq 1. \tag{1.5}$$

此外，当 $\theta_j = 0$ 时，我们令 $T_j(u) = \Phi^{-1}(u)$，这就是反演方法 [5, 10, 26, 33, 47] 中常用的传输映射。如 [37], 所示，估计 μ 等价于对

$$f^w(\boldsymbol{u}) := w(\boldsymbol{u}) f \circ T(\boldsymbol{u})$$

在 $\mathbb{I}^s$ 上积分。权函数 $w_\theta(u)$ 可抑制被积函数 $f^w(\boldsymbol{u})$ 的边界增长，因此，当原始被积函数 $f(\boldsymbol{x})$ 随着 $\boldsymbol{x}$ 趋于无穷而无界增长时，可以获得更快的随机化准蒙特卡罗收敛率，故称为边界阻尼重要性抽样（BDIS）。当 $f \in W^{1,q}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 满足 $q = 2$ 或 $f \in W^{1,q,\infty}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 满足 $q \in$ 时，BDIS 方法的均方误差（MSE）收敛率也得到了确立（其中 $1, 2]$, 中较小的 q 表示更严重的边界增长，参见第 2 节中函数范数的定义）。[37] 中建立的理论有一项局限：对于 $W^{1,q}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 或 $W^{1,q,\infty}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 中满足 $q > 2$ 的被积函数，其收敛率不会提升，这限制了该理论在不确定性量化问题中的适用性。因此，研究 BDIS 在边界增长较缓和（即 q 较大）甚至没有显著边界增长（即 q 可任意大）的被积函数上的表现颇有意义。

本文的贡献有三点。首先，我们为 $f \in W^{1,q}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 中 BDIS 方法的维数无关收敛给出了更优的上界，且

任意 $q > 1$，使我们的理论适用于边界增长较缓的函数。其次，我们将分析推广至具有一般参数化输入随机场的偏微分方程。基于格点规则的 QMC 方法已证明对具有对数正态随机扩散系数的椭圆型偏微分方程有效 [13, 16]。近期，Guth 和 Kaarnioja [14]研究了具有 Gevrey 正则输入的椭圆型偏微分方程 [4], ，其中参数输入服从广义 β- 高斯分布，并分析了使用随机移位秩-1 格点规则评估偏微分方程响应统计量时的 QMC 积分误差。我们的分析也涵盖了这类偏微分方程问题，并表明，具有 n个点的基于 BDIS 的扰乱网可实现维数无关的均方误差收敛率 $O(n^{-1-\alpha^*+\varepsilon})$，其中 $\varepsilon > 0$ 可任意小，而 $\alpha^* \in (0,1)$ 取决于参数变量的正则性。第三，我们将收敛结果推广至加权函数空间的情形，从而将我们的方法与格点规则等构造性准蒙特卡罗方法联系起来 [13, 14, 20]。

本文其余部分安排如下。第2节给出主要收敛结果，并改进了 [37]中的结果。第3 节证明第2节中的主定理。第4 节展示如何将我们的方法应用于参数化椭圆型偏微分方程。第 5 节利用加权 Sobolev 范数推广收敛结果。第6节给出数值结果，以说明所提方法的有效性。第7节总结全文。

2 主要结果

我们沿用 [37] 中的记号。对于向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$ 和子集 $v \subseteq 1{:}s$， $\boldsymbol{x}_v$ 表示由 v 索引的 $\boldsymbol{x}$ 的子向量，而 $\boldsymbol{x}_{v^c}$ 表示由 $1{:}s \setminus v$ 索引的子向量。令 $\mathbb{N}$ 为正整数集，并令 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$。令 $\|\boldsymbol{x}\|_q = (\sum_{j=1}^s |x_j|^q)^{1/q}$，其中 $q > 0$。对于非空集合 $v \subseteq 1{:}s$，将混合导数定义为

$$\partial^v f(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{j \in v} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) f(\boldsymbol{x}),$$

并按约定定义 $\partial^\emptyset f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$。本文中的所有常数都隐含依赖于 φ，为简便起见，我们在记号中将其省略。

本文将使用以下定义的一些函数范数：

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{I}^s)} &= \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{I}^s} |f(\boldsymbol{u})|^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right)^{1/q} & 0 < q < \infty \\ \sup_{u \in \mathbb{I}^s} |f(\boldsymbol{u})| & q = \infty \end{cases}, \\
\|f\|_{W^{1,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^s)} &= \left(\sum_{v \subseteq 1:s} \|\partial^v f\|^q_{L^q(\mathbb{I}^s)}\right)^{1/q}, \\
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^s} |f(\boldsymbol{x})|^q \prod_{j=1}^s \varphi(x_j) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/q}, \\
\|f\|_{W^{1,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} &= \left(\sum_{v \subseteq 1:s} \|\partial^v f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)}\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Pan 等人 [37]还考虑了一阶混合 L^∞ 范数:

$$\|f\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^s,\varphi)} = \Big(\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^s} |f(\boldsymbol{x})|^q \prod_{j=1}^{s} \frac{\varphi(x_j)}{\varphi_\infty}\Big)^{1/q},$$

$$\|f\|_{W^{1,q,\infty}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} = \Big(\sum_{v\subseteq 1:s} \|\partial^v f\|^q_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^s,\varphi)}\Big)^{1/q},$$

其中 $\varphi_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x) < \infty$。他们针对 $f \in W^{1,q}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s,\varphi)$（其中 $q=2$）或 $f \in W^{1,q,\infty}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s,\varphi)$（其中 $q \in (1,2]$）研究了 BDIS 方法。在后一种情形中，函数 f对 QMC积分更具挑战性，并且由于其快速的边界增长，可能不属于 L^2。 [37] 的引理2.2表明，只要 $q > q' \geq 1$，就有 $W^{1,q,\infty}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s,\varphi) \subseteq W^{1,q'}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s,\varphi)$。为推广这些结果，我们研究任意 $q>1$ 下的情形 $f \in W^{1,q}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s,\varphi)$。我们将需要如下版本的索博列夫嵌入定理。

引理 2.1. 对于 $f \in W^{1,1}\mathrm{mix}(\mathbb{I}^s), \|f\|_{L^\infty(\mathbb{I}^s)} \leq \|f\|_{W^{1,1}\mathrm{mix}(\mathbb{I}^s)}$.

证明。 见附录A。 □

为了了解被积函数的维数结构，我们利用ANOVA分解。按照 [21], 中的框架，我们引入广义ANOVA分解。令P_j: $L^1(\mathbb{R}^s,\varphi) \to L^1(\mathbb{R}^s,\varphi)$表示积分算子

$$P_j(f)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}} f(\boldsymbol{x})\varphi(x_j)\,\mathrm{d}x_j \text{ for } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^s.$$

注意到 $P_j(f)$不依赖于 x_j和 $P_j^2 = P_j$。我们进一步定义迭代积分算子 $P_v = \prod_{j\in v} P_j$。根据Fubini定理， P_v 中的 P_j 可以按任意顺序应用。按照约定， $P_\emptyset = I$ 是恒等算子。$f \in L^1(\mathbb{R}^s,\varphi)$的ANOVA分解由下式给出

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{v\subseteq 1:s} f_v(\boldsymbol{x}), \tag{2.1}$$

其中

$$f_v(\boldsymbol{x}) = \Big(\prod_{j\in v}(I-P_j)\Big) P_{1:s\setminus v} f(\boldsymbol{x}) = P_{1:s\setminus v} f(\boldsymbol{x}) - \sum_{w\subsetneq v} f_w(\boldsymbol{x}).$$

显然， $f_v(\boldsymbol{x})$仅依赖于 $\boldsymbol{x}_v$ ，因此我们可以改写为 $f_v(\boldsymbol{x}_v)$。下一个引理来自 [37, 引理2.4]。

引理2.2。 若 $f \in W^{1,q}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s,\varphi)$，则对所有 $v\subseteq 1{:}s$，有 $f_v \in W^{1,q}\mathrm{mix}(\mathbb{R}^s,\varphi)$。

如第1节所述，我们使用的估计量 (1.2) 中的求积点是扰乱网。下面简要介绍以 $b\geq 2$ 为底的扰乱 (t,m,s)-网；更多详情请参见 [9]。对于 t、 $m\in\mathbb{N}_0$ 和整数 $b\geq 2$，集合 $\mathcal{P} := \{\boldsymbol{u}_0,\dots,\boldsymbol{u}_{b^m-1}\}$ in $[0,1)^s$ 称为以 b 为底的 (t,m,s)-网，若每个形如 $\prod_{j=1}^s \left[\frac{a_j}{b^{k_j}}, \frac{a_j+1}{b^{k_j}}\right)$ 的区间，对所有整数 $a_j \in [0,b^{k_j})$ 以及满足 $\sum_{j=1}^s k_j = m-t$ 的所有 $k_j\in\mathbb{N}_0$，都恰好包含 b^t 个 $\mathcal{P}$ 点。对于 $\emptyset \neq w \subseteq 1{:}s$, $\mathcal{P}$ 在坐标 $j\in w$ 上的投影构成以 b 为底的 $(t_w,m,|w|)$-网，其中 $t_w\in\mathbb{N}$

称为 t-质量参数，且 $t_w = t$ 当 $w = 1{:}\ s$。对 [30] 执行 Owen 扰乱 $\mathcal{P}$ 后，所得点集称为扰乱 $(t,\ m,\ s)$-网；它以概率 1 也是一个 $(t,\ m,\ s)$-网。

接下来 [37], ，我们假设密度 $\varphi(x)$是一个严格为正、有界、对称且轻尾的函数。

假设 2.3。假设 $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\varphi_\infty := \text{上确界}_{x\in\mathbb{R}}\,\varphi(x) < \infty$，且对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $c_\varepsilon > 0$，使得对于任意 $x \le 0$，$\varphi(x) \ge c_\varepsilon \Phi(x)^{1+\varepsilon}$。

回顾一下，在重要性抽样下，单位立方体 $\mathbb{I}^s$ 上的相应被积函数为 $f^w(\boldsymbol{u}) = w(\boldsymbol{u}) f\circ T(\boldsymbol{u})$。定义

$$\|f\|_q = \sup_{v\subseteq 1:s} \|f_v\|_{W^{1,q}_{\text{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)}, \tag{2.2}$$

$$\gamma_v = \begin{cases} \|f\|_q^{-1}\|f_v\|_{W^{1,q}_{\text{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} & \|f\|_q > 0 \\ 0 & \|f\|_q = 0 \end{cases}. \tag{2.3}$$

注意，γ_v 可视为对 ANOVA 项f_v 进行调整后的一阶混合 L^q 范数，以满足 $\gamma_v \in [0,1]$。我们准备陈述主定理，它是对 [37,定理 53]的推广。其证明见第3 节，供感兴趣的读者参阅。

定理 2.4。假设条件2.3成立。设 $\{\boldsymbol{u}_0,\dots,\boldsymbol{u}_{n-1}\}$ 为基数为 $b \ge 2$ 、具有 $n = b^m$ 和 t-质量参数 $\{t_\omega \mid \emptyset \ne \omega \subseteq 1{:}\ s\}$的扰乱数字网。则对于给定的 $\alpha \in (0,1)$，$f \in W^{1,\ q}{}_{\text{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)$，对于 $q > 1$、$w_j = w_{\theta_j}$，当 $\{\theta_j \mid j \in 1{:}\ s\} \subseteq (0,1/2]$ 且 $\varepsilon > 0$时，我们有

$$\mathbb{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^w(\boldsymbol{u}_i) - \int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x})\prod_{j=1}^{s}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big|^2 \le \frac{\|f\|_q^2}{n^{1+\alpha}} \sum_{\emptyset\ne\omega\subseteq 1:s} C_*^{|\omega|} m^{|\omega|-1}\tilde{\gamma}_\omega, \tag{2.4}$$

其中 C_* 是一个依赖于 ε、p、q、b和 α的常数，并且

$$\tilde{\gamma}_\omega = b^{(1+\alpha)t_\omega}\sum_{v\subseteq\omega}\gamma_v^2\prod_{j\in v}\theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon}\prod_{j\in\omega\setminus v}\theta_j^{1-\alpha}$$

对于 γ_v 由以下公式给出 (2.3)且

$$\nu_{\alpha,q} = \max(2\alpha/q, 2/q+\alpha-1) = \begin{cases} 2/q+\alpha-1 & q\in(1,2] \\ 2\alpha/q & q\in(2,\infty). \end{cases}$$

备注 2.5。在条件 2.3下，累积分布函数 $\Phi(x)$及其反函数 $\Phi^{-1}(u)$几乎处处可微且严格递增。容易验证，高斯密度$\varphi(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ 满足条件 2.3。关于 Sobol序列 [45], 和 Niederreiter序列，参见[42] ； [27], 其 t-质量参数 t_w 满足

$$t_\omega \le \sum_{j\in\omega} t_j \tag{2.5}$$

其中 $t_j = O(\log_b(j))$，这是分析下述推论中维数无关收敛的重要要素。

推论 2.6. 设 t-质量参数 $\{t_\omega \mid \emptyset \neq \omega \subseteq 1{:}s\}$ 满足 (2.5)，且函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的 *ANOVA* 项具有满足以下条件的调整后的一阶混合 L^q 范数

$$\gamma_v \leq \prod_{j\in v} \Gamma_j \ \forall v \subseteq 1{:}s$$

对于 $\{\Gamma_j \mid j \in 1{:}\ s\}$。那么在定理 2.4 的假设下，对于任意 $\lambda \in (0,\ 1)$,

$$\mathbb{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^w(\boldsymbol{u}_i) - \int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x}) \prod_{j=1}^{s} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big|^2 \leq \frac{\|f\|_q^2}{n^{1+\alpha}} \exp(C_\lambda S_\lambda m^\lambda),$$

其中 $n = b^m$、C_λ 是一个依赖于 λ 的常数，并且

$$S_\lambda = \sum_{j=1}^{s} \tilde{\Gamma}_j^\lambda \quad for \quad \tilde{\Gamma}_j = C_* b^{(1+\alpha)t_j}(\Gamma_j^2 \theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon} + \theta_j^{1-\alpha}).$$

证明。将 t_ω 和 γ_v 的上界代入式（2.4），通过直接计算可得

$$\mathbb{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^w(\boldsymbol{u}_i) - \int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x}) \prod_{j=1}^{s} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big|^2 \leq \frac{\|f\|_q^2}{n^{1+\alpha}} \sum_{\emptyset\neq\omega\subseteq 1:s} m^{|\omega|-1} \prod_{j\in\omega} \tilde{\Gamma}_j.$$

由于当 $x \to 0^+$ 或 $x \to \infty$时，$x^{-\lambda}\log(1+x) \to 0$，我们可以找到一个常数 C_λ，使得在 $x \in (0,\ \infty)$ 上 $\log(1+x) \leq C_\lambda x^\lambda$。因此,

$$\sum_{\emptyset\neq\omega\subseteq 1:s} m^{|\omega|-1} \prod_{j\in\omega} \tilde{\Gamma}_j \leq \sum_{\omega\subseteq 1:s} m^{|\omega|} \prod_{j\in\omega} \tilde{\Gamma}_j = \prod_{j=1}^{s}(1 + m\tilde{\Gamma}_j) \leq \exp\Big(C_\lambda \sum_{j=1}^{s} m^\lambda \tilde{\Gamma}_j^\lambda\Big).$$

证明完毕。 □

注 2.7。由于对于任意 $\varepsilon > 0$都有 $\lim_{n\to\infty} n^{-\varepsilon}\exp(m^\lambda) = 0$，上述推论表明，如果 S_λ 和 $\|f\|_q^2$ 在$s \to \infty$时对某个 $\lambda \in (0,\ 1)$保持有界，则 $\hat{}\mu$可达到几乎为 $O(n^{-1-\alpha})$ 的维数无关的均方误差率。它将 [37, 推论 5.5] 推广到了 $f \in W^{1,\ q}{}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\ \varphi)$ 且 $q \in (1,\ \infty)$ 的情形。

注释 2.8。 假设对于 $\rho > \max(2/q,\ 1)$, $\Gamma_j = O(j^{-\rho})$ 且 $t_j = O(\log_b(j))$。那么

$$\tilde{\Gamma}_j = O(j^{1+\alpha}(j^{-2\rho}\theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon} + \theta_j^{1-\alpha})).$$

按照 [37, 注释 5.6], 中的类似分析，我们通过设定来平衡 $\tilde{\Gamma}_j$ 中的两个项 $j^{-2\rho}\theta^{-\nu_\alpha,\ j}{}^{q}$ 和 $\theta_j^{1-\alpha}$

$$\theta_j = \begin{cases} \theta_0 j^{-\rho q}, & \text{if } q \in (1, 2] \\ \theta_0 j^{-2\rho/(2\alpha/q+1-\alpha)}, & \text{if } q \in (2, \infty) \end{cases} \tag{2.6}$$

具有常数 $\theta_0 \in (0,\ 1/2]$。

对于 $q \in (1,2],$，上述选择给出 $\tilde{\Gamma}_j = O(j^{1+\alpha-(1-\alpha)\rho q+\rho q\varepsilon})$。为确保 $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j^{\lambda} < \infty$ 对某个 $\lambda \in (0, 1)$ 成立，我们要求

$$1+\alpha-(1-\alpha)\rho q < -1,$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可以任意小。这导致条件

$$0 < \alpha < a^*(q,\rho) := \frac{\rho q - 2}{\rho q + 1}.$$

对于 $q > 2$，我们有 $\tilde{\Gamma}_j = O(j^{1+\alpha-2\rho(1-\alpha)/(2\alpha/q+1-\alpha)+\varepsilon'})$，其中 $\varepsilon' = 2\varepsilon\rho/(2\alpha/q+1-\alpha) > 0$ 可以任意小。为确保对于某个 $\lambda \in (0, 1)$ 有 $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j^{\lambda} < \infty$，我们需要

$$1+\alpha-2\rho(1-\alpha)/(2\alpha/q+1-\alpha) < -1,$$

或等价地

$$F(\alpha) := (q-2)\alpha^2 - (2q\rho - q + 4)\alpha + 2q(\rho-1) > 0.$$

由于 $F(0) > 0$ 且 $F(1) < 0$，我们有

$$0 < \alpha < \alpha^*(q,\rho) := 1 - \frac{\sqrt{((2\rho-3)q+8)^2 + 24(q-2)} - (2\rho-3)q - 8}{2(q-2)} < 1.$$

总之，在参数选择（2.6）下，$\hat{}\mu$ 的均方误差以近似 $O(n^{-1-\alpha^*(q,\ \rho)})$ 速率收敛，其隐含常数与维数 s 无关，其中

$$\alpha^*(q,\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho q - 2}{\rho q + 1}, & \text{if } q \in (1,2] \\ 1 - \dfrac{\sqrt{((2\rho-3)q+8)^2 + 24(q-2)} - (2\rho-3)q - 8}{2(q-2)}, & \text{if } q > 2 \end{cases}. \tag{2.7}$$

备注 2.9。 如果 $\rho \geq 3/2$，显然有

$$\lim_{q\to\infty} \alpha^*(q,\rho) = 1.$$

如果 $\rho \in (1, 3/2)$，则我们有

$$\lim_{q\to\infty} \alpha^*(q,\rho) = 2\rho - 2.$$

假设 f不存在显著的边界增长，即对于每个 $q \in (1, \infty)$，都有 $f \in W^{1,\ q}{}_{混合}(\mathbb{R}^s,\ \varphi)$。如果 $\rho \geq 3/2$，我们应设置 $\theta_j = 0$，并使用通常的反演方法，这与反演方法对这类被积函数可达到近乎 $O(n^{-2})$ 的均方误差这一事实相符[10]。否则，若 $\rho \in (1, 3/2)$，则取 $\theta_j = \theta_0 j^{-2\rho/(3-2\rho)}$，可达到近乎 $O(n^{-2\rho+1})$ 的均方误差。为统一这两种情况，我们得出结论：如果对于每个 $q \in (1, \infty)$，都有 $f \in W^{1,\ q}{}_{混合}(\mathbb{R}^s,\ \varphi)$，那么我们的 BDIS 可达到近乎 $O(n^{-1-\min\{2\rho-2,1\}})$ 的维数无关均方误差。

3 定理 2.4 的证明

我们首先介绍证明所需的一些预备知识。假设 b 是一个素数。对于非负整数 $k < b^r$ 和 $u \in [0,1)$，我们分别将它们写成 b-进展开形式 $k = \sum_{i=1}^{r} \kappa_i b^{i-1}$和 $u = \sum_{i=1}^{\infty} v_i b^{-i}$。第 k 个 b-进沃尔什函数定义为

$$ {}_b\mathrm{wal}_k(u) = \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{b} \sum_{i=1}^{r} \kappa_i v_i\right), \tag{3.1} $$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。对于多元情形，沃尔什函数自然地定义为乘积形式

$$ {}_b\mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) := \prod_{j=1}^{s} {}_b\mathrm{wal}_{k_j}(u_j), \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^s. $$

注意，$\{{}_b\mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^s\}$ 构成了 $L^2(\mathbb{I}^s)$ [9] 的一组正交归一基。对于 $f \in L^2(\mathbb{I}^s)$，其沃尔什级数展开为

$$ f(\boldsymbol{u}) \sim \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^s} \hat{f}(\boldsymbol{k}) {}_b\mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}), $$

其中 $f \sim g$ 表示 $L^2(\mathbb{I}^s)$ 空间上的等价关系，并且

$$ \hat{f}(\boldsymbol{k}) := \int_{\mathbb{I}^s} f(\boldsymbol{u}) \overline{{}_b\mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})} \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} $$

表示 f 的第 $\boldsymbol{k}$ 个沃尔什系数。

对于 $k \in \mathbb{N}_0$，若 $k = \sum_{i=1}^{r} \kappa_i b^{i-1}$ 且满足 $\kappa_r \neq 0$，则记为 $\lceil k \rceil = r$；若 $k = 0$，则记为 $\lceil k \rceil = 0$。对于$\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^s$，记 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{k}) = \{j \in 1{:}s \mid k_j \neq 0\}$，并记 $\lceil \boldsymbol{k} \rceil = (\lceil k_1 \rceil, \ldots\ldots, \lceil k_s \rceil)$。对于 $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}_0^s$，令

$$ \sigma_{\boldsymbol{\ell}}^2 = \sum_{\boldsymbol{k} \in L_{\boldsymbol{\ell}}} |\hat{f}(\boldsymbol{k})|^2 \quad \text{for} \quad L_{\boldsymbol{\ell}} = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^s \mid \lceil \boldsymbol{k} \rceil = \boldsymbol{\ell}\}. $$

下一个引理出自 [37, 引理 2.7]，，其中实际上汇总了 [9, 12,31, 32] 中的结果。

引理 3.1. 对于 $f \in L^2(\mathbb{I}^s)$ 以及 $\{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}\}$ 一个以 $b \geq 2$ 为基、满足$n = b^m$的扰乱(t, m, s)-网，

$$ \mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\boldsymbol{u}_i) - \int_{\mathbb{I}^s} f(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{u}\right|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\emptyset \neq \omega \subseteq 1:s} \sum_{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^\omega} \Gamma_{\omega,\boldsymbol{\ell}} \sigma_{\boldsymbol{\ell}}^2, \tag{3.2} $$

其中 $\mathbb{N}^v = \{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}_0^s \mid \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell}) = v\}$ 并且

$$ \Gamma_{\omega,\boldsymbol{\ell}} \leq \left(\frac{b}{b-1}\right)^{|\omega|-1} b^{t_\omega} \mathbf{1}\{\|\boldsymbol{\ell}\|_1 > m - t_\omega - |\omega|\}. \tag{3.3} $$

接下来，我们将定理 2.4的证明分为三个步骤。首先，给出 $W^{1,1\,\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^s$ 范数的上界，其中 f^w 满足 $f \in W^{1,q}{}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s, \varphi)$，且 $q > 1$。接下来，给出方差分量 $\sigma_{\boldsymbol{\ell}}^2$的上界，其中$f^w$。最后，应用引理 3.1 证明主定理。

3.1 步骤 I: f^w的范数

接下来的定理对于刻画 $\|f^w\|_{W^{1,1\,\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^s)}$对 $\theta_j, j \in 1{:}s$ 的依赖关系至关重要。

定理 3.2. 给定 φ 满足假设 2.3, $f \in W^{1,q}_{,\text{混合}}(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 对于 $q > 1$, $w_j = w_{\theta_j}$ 对于$\{\theta_j \mid j \in 1{:}s\} \subseteq (0, 1/2]$ 以及 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$\|f^w\|_{W^{1,1}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^s)} \le \|f\|_{W^{1,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} \prod_{j=1}^{s} C_{\varepsilon,p,q}\theta_j^{-1/q-\varepsilon},$$

其中 $C_{\varepsilon,p,q}$ 是一个依赖于 ε, p 和 q的常数。

证明。 直接计算可得

$$\partial^v f^w(\boldsymbol{u}) = \Big(\prod_{j\in 1:s\setminus v} w_j(u_j)\Big)\sum_{v'\subseteq v}(\partial^{v'} f)\circ T(\boldsymbol{u})\prod_{j\in v'}\frac{w_j(u_j)^2}{\varphi\circ T_j(u_j)}\prod_{j\in v\setminus v'} w_j'(u_j).$$

根据 H¨older 不等式以及 $\sup_{u\in\mathbb{I}} w_\theta(u) \le 2$ 对于 $\theta \in (0, 1/2]$,

$$\begin{aligned}
&\|\partial^v f^w\|_{L^1(\mathbb{I}^s)} \\
\le& 2^{s-|v|}\sum_{v'\subseteq v}\int_{\mathbb{I}^s}|(\partial^{v'} f)\circ T(\boldsymbol{u})|w(\boldsymbol{u})^{1/q}\prod_{j\in v'}\frac{w_j(u_j)^{2-1/q}}{\varphi\circ T_j(u_j)}\prod_{j\in v\setminus v'}\frac{|w_j'(u_j)|}{w_j(u_j)^{1/q}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \\
\le& 2^{s-|v|}\sum_{v'\subseteq v}\Big(\int_{\mathbb{I}^s}|(\partial^{v'} f)\circ T(\boldsymbol{u})|^q w(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\Big)^{1/q}\prod_{j\in v'} I_1(\theta_j,q)\prod_{j\in v\setminus v'} I_2(\theta_j,q),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中，记 $q^* = q/(q-1)$,

$$I_1(\theta,q) = \Big(\int_{\mathbb{I}}\frac{w_\theta(u)^{q^*+1}}{(\varphi\circ T_\theta(u))^{q^*}}\,\mathrm{d}u\Big)^{1/q^*}$$

and

$$I_2(\theta,q) = \Big(\int_{\mathbb{I}}\frac{|w_\theta'(u)|^{q^*}}{w_\theta(u)^{q^*-1}}\,\mathrm{d}u\Big)^{1/q^*}.$$

首先，我们对 $I_1(\theta, q)$ 进行界定。根据 [37, 引理 4.3], , 对于 $u \in (0, \theta)$,

$$\varphi\circ T_\theta(u) \ge c_{\varepsilon,p}\Big(\theta w_\theta(u)\min\big((2u/\theta)^{p+1},1\big)\Big)^{1+\varepsilon} \ge c_{\varepsilon,p}\Big(\theta w_\theta(u)(u/\theta)^{p+1}\Big)^{1+\varepsilon},$$

其中 $c_{\varepsilon,\ p}$ 是一个依赖于 ε 和 p的常数。当 $u \in [\theta, 1/2]$时，我们使用假设 2.3 来界定

$$\varphi\circ T_\theta(u) \ge c_\varepsilon\Big(\Phi\circ\Phi^{-1}\Big(\int_0^u w_\theta(u')\,\mathrm{d}u'\Big)\Big)^{1+\varepsilon} = c_\varepsilon(u-\theta/2)^{1+\varepsilon}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
I_1(\theta,q) =& \Big(2\int_0^{1/2} \frac{w_\theta(u)^{q^*+1}}{(\varphi\circ T_\theta(u))^{q^*}}\,\mathrm{d}u\Big)^{1/q^*}\\
\le& \Big(2\int_0^{\theta} \frac{w_\theta(u)^{q^*+1}}{c_{\varepsilon,p}^{q^*}(\theta w_\theta(u)(u/\theta)^{p+1})^{q^*(1+\varepsilon)}}\,\mathrm{d}u + 2\int_\theta^{1/2} \frac{(1-\theta)^{-q^*-1}}{c_\varepsilon^{q^*}(u-\theta/2)^{q^*(1+\varepsilon)}}\,\mathrm{d}u\Big)^{1/q^*}\\
\le& \Big(2\theta^{1-q^*(1+\varepsilon)}\int_0^{1} \frac{w_\theta(\theta u)^{1-q^*\varepsilon}}{c_{\varepsilon,p}^{q^*}u^{q^*(p+1)(1+\varepsilon)}}\,\mathrm{d}u + 2\int_{\theta/2}^{\infty} \frac{2^{q^*+1}}{c_\varepsilon^{q^*}u^{q^*(1+\varepsilon)}}\,\mathrm{d}u\Big)^{1/q^*}\\
\le& C_1\theta^{-1/q-\varepsilon},
\end{aligned}$$

其中 C_1 取决于 ε，p 和 q，并且在最后一个不等式中，我们使用了 $w_\theta(\theta u) = 2^{-p-2}u^{-p-1}\exp(2^p - u^{-p})$ 在 $u\in(0,\ 1/2)$ 上。

接下来，我们给出 $I_2(\theta,\ q)$ 的界。根据 [37, 引理 4。4],

$$|w_\theta'(u)| \le c_p\theta^{-1}w_\theta(u)$$

对于 $u\in(0,\ \theta]$，其中常数 c_p 取决于 p。因此，

$$\begin{aligned}
I_2(\theta,q) = \Big(2\int_0^{\theta}\frac{|w_\theta'(u)|^{q^*}}{w_\theta(u)^{q^*-1}}\,\mathrm{d}u\Big)^{1/q^*} \le& \Big(2c_p^{q^*}\theta^{-q^*}\int_0^{\theta} w_\theta(u)\,\mathrm{d}u\Big)^{1/q^*}\\
=& \Big(2c_p^{q^*}\theta^{-q^*+1}\int_0^{1} w_\theta(\theta u)\,\mathrm{d}u\Big)^{1/q^*} \le C_2\theta^{-1/q},
\end{aligned}$$

其中 C_2 取决于 p 和 q。将上述界代入方程 (3.4) 并代入

$$\int_{\mathbb{I}^s}|(\partial^{v'}f)\circ T(\boldsymbol{u})|^q w(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{I}^s}|(\partial^{v'}f)\circ T(\boldsymbol{u})|^q\prod_{j=1}^{s}\varphi\circ T_j(u_j)\,\mathrm{d}T(\boldsymbol{u}) = \|\partial^{v'}f\|_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)}^q,$$

我们可以给出其界

$$\begin{aligned}
&\|\partial^v f^w\|_{L^1(\mathbb{I}^s)}\\
\le& 2^{s-|v|}\sum_{v'\subseteq v}\|\partial^{v'}f\|_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)}\prod_{j\in v'}C_1\theta_j^{-1/q-\varepsilon}\prod_{j\in v\setminus v'}C_2\theta_j^{-1/q}\\
\le& 2^{s-|v|}\Big(\sum_{v'\subseteq v}\|\partial^{v'}f\|_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)}^q\Big)^{1/q}\Big(\sum_{v'\subseteq v}\prod_{j\in v'}C_1^{q^*}\prod_{j\in v\setminus v'}C_2^{q^*}\Big)^{1/q^*}\prod_{j\in v}\theta_j^{-1/q-\varepsilon}\\
\le& 2^{s-|v|}\|f\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)}\prod_{j\in v}(C_1^{q^*}+C_2^{q^*})^{1/q^*}\theta_j^{-1/q-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}
\|f^w\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,1}(\mathbb{I}^s)} =& \sum_{v\subseteq 1:s}\|\partial^v f^w\|_{L^1(\mathbb{I}^s)}\\
\le& \|f\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)}\sum_{v\subseteq 1:s}2^{s-|v|}\prod_{j\in v}(C_1^{q^*}+C_2^{q^*})^{1/q^*}\theta_j^{-1/q-\varepsilon}\\
\le& \|f\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)}\prod_{j=1}^{s}\Big((C_1^{q^*}+C_2^{q^*})^{1/q^*}+2\Big)\theta_j^{-1/q-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

□

备注 3.3. 我们可以进一步推广定理 3.2，利用 [37, 定理 4.5] 对$\|f^w\|_{W^{1,q}\text{混合}(\mathbb{I}^s)}$进行界定，并应用插值不等式 [1,定理 2.11]对$\|f^w\|_{W^{1,q'\text{混合}}(\mathbb{I}^s)}$进行界定，其中 $q' \in [1,q]$。

3.2 步骤 II： σ_ℓ^2的界

我们需要以下两个引理:

引理 3.4。对于 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^s$ 和 $g \in W^{1,\ 1\ \text{mix}}(\mathbb{I}^s)$,

$$|\hat{g}(\boldsymbol{k})| \le \|\partial^{1:s} g\|_{L^1(\mathbb{I}^s)} \prod_{j=1}^{s} b^{-\lceil k_j \rceil + 1}.$$

证明。根据引理 3.3], 的证明， [37,

$$\hat{g}(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathbb{I}^s} \partial^{1:s} g(\boldsymbol{u}) \prod_{j=1}^{s} \overline{\mathcal{I}({}_b\text{wal}_{k_j})(u_j)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{u},$$

其中

$$\mathcal{I}({}_b\text{wal}_k)(u) = \int_0^u {}_b\text{wal}_k(t)\, \mathrm{d}t.$$

如 [37, 例 3.4], 所示，若 $\kappa_r b^{r-1} \le k < (\kappa_r + 1) b^{r-1}$ 对于 $r = \lceil k \rceil$,

$$\mathcal{I}({}_b\text{wal}_k) = {}_b\text{wal}_{\mathcal{M}(k)} \mathcal{I}({}_b\text{wal}_{\mathcal{N}(k)})$$

对于 $\mathcal{M}(k) = k - \kappa_r b^{r-1}$和 $\mathcal{N}(k) = \kappa_r b^{r-1}$，以及 $\|\mathcal{I}({}_b\text{wal}^{\mathcal{N}(k)})\|_{L^\infty(\mathbb{I})} \le b^{-r+1}$. 最后，我们应用 H¨older 不等式并得出

$$|\hat{g}(\boldsymbol{k})| \le \|\partial^{1:s} g\|_{L^1(\mathbb{I}^s)} \prod_{j=1}^{s} \|\mathcal{I}({}_b\text{wal}_{k_j})(u_j)\|_{L^\infty(\mathbb{I})} \le \|\partial^{1:s} g\|_{L^1(\mathbb{I}^s)} \prod_{j=1}^{s} b^{-\lceil k_j \rceil + 1}.$$

□

注 3.5. 在 [43] 中推导出了类似的界，其中 $\partial^{1:s} g$ 连续。我们的引理只要求 $\partial^{1:s} g$ 弱意义下存在。

引理 3.6. 对于 $\alpha \in (0,1)$， $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^s$和 $g \in W^{1,\ 1\ \text{混合}}(\mathbb{I}^s)$,

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in L_{\boldsymbol{\ell}}} |\hat{g}(\boldsymbol{k})|^2 \le C_{b,\alpha}^s b^{-\alpha\|\boldsymbol{\ell}\|_1} \|g\|_{L^2(\mathbb{I}^s)}^{2-2\alpha} \|\partial^{1:s} g\|_{L^1(\mathbb{I}^s)}^{2\alpha},$$

其中 $L_{\boldsymbol{\ell}} = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^s \mid \lceil \boldsymbol{k} \rceil = \boldsymbol{\ell}\}$ 和 $C_{b,\ \alpha}$ 是一个依赖于 b 和 α的常数。

证明。 我们对每个 $\boldsymbol{k} \in L_{\boldsymbol{\ell}}$ 应用引理 3.4，并得到

$$|\hat{g}(\boldsymbol{k})|^2 \le b^{-2\|\boldsymbol{\ell}\|_1 + 2s} \|\partial^{1:s} g\|_{L^1(\mathbb{I}^s)}^2.$$

因为 $|L_{\boldsymbol{\ell}}| = \prod_{j=1}^{s}(b-1)b^{\ell_j-1}$,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in L_{\boldsymbol{\ell}}} |\hat{g}(\boldsymbol{k})|^2 \le |L_{\boldsymbol{\ell}}| b^{-2\|\boldsymbol{\ell}\|_1+2s} \|\partial^{1:s} g\|^2_{L^1(\mathbb{I}^s)} = b^s(b-1)^s b^{-\|\boldsymbol{\ell}\|_1} \|\partial^{1:s} g\|^2_{L^1(\mathbb{I}^s)}.$$

均值W 虽然， $g \in L^2(\mathbb{I}^s)$ 由引理 2.1 以及 $g \in W^{1,\,1\text{混合}}(\mathbb{I}^s)$。根据贝塞尔不等式,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in L_{\boldsymbol{\ell}}} |\hat{g}(\boldsymbol{k})|^2 \le \|g\|^2_{L^2(\mathbb{I}^s)}.$$

结合这两个界即可得出结论。 □

定理 3.7。 给定 $\alpha \in (0,\ 1)$， $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, $f \in W^{1,\,q\text{混合}}(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 对于 $q > 1$, $w_j = w_{\theta_j}$ 对于$\{\theta_j \mid j \in 1\colon s\} \subseteq (0,\ 1/2]$ 以及 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\sigma^2_{\boldsymbol{\ell}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in L_{\boldsymbol{\ell}}} |\hat{f}^w(\boldsymbol{k})|^2 \le C^{|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})|}_{\varepsilon,p,q,b,\alpha} b^{-\alpha\|\boldsymbol{\ell}\|_1} \sum_{v\subseteq \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})} \|f_v\|^2_{W^{1,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} \prod_{j\in v} \theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon} \prod_{j\in \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})\setminus v} \theta_j^{1-\alpha},$$

其中 $L_{\boldsymbol{\ell}} = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^s \mid \lceil \boldsymbol{k} \rceil = \boldsymbol{\ell}\}$, $\nu_{\alpha,\,q} =$ 最大值$(2\alpha/q, 2/q+\alpha-1)$ 以及 $C_{\varepsilon,\,p,\,q,\,b,\,\alpha}$ 是一个依赖于 ε, p, q, b 以及 α的常数。

证明。 根据 [37, 引理 3.1],

$$\hat{f}^w(\boldsymbol{k}) = \sum_{v\subseteq \boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})} \hat{f}^w_v(\boldsymbol{k}_v) \prod_{j\in \boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})\setminus v} \hat{w}_j(k_j) \quad \text{for} \quad f^w_v(\boldsymbol{u}_v) = f_v \circ T(\boldsymbol{u}) \prod_{j\in v} w_j(u_j)$$

其中 $f_v \circ T(\boldsymbol{u})$ 视为 $\boldsymbol{u}_v$ 的函数。根据柯西–施瓦茨不等式,

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\boldsymbol{\ell}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in L_{\boldsymbol{\ell}}} |\hat{f}^w(\boldsymbol{k})|^2 &\le \sum_{\boldsymbol{k}\in L_{\boldsymbol{\ell}}} 2^{|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})|} \sum_{v\subseteq \boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})} |\hat{f}^w_v(\boldsymbol{k}_v)|^2 \prod_{j\in \boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})\setminus v} |\hat{w}_j(k_j)|^2 \\ &= 2^{|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})|} \sum_{v\subseteq \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})} \Bigg(\sum_{\boldsymbol{k}_v\in L_{\boldsymbol{\ell},v}} |\hat{f}^w_v(\boldsymbol{k}_v)|^2 \Bigg) \prod_{j\in \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})\setminus v} \sum_{k_j=b^{\ell_j-1}}^{b^{\ell_j}-1} |\hat{w}_j(k_j)|^2,\end{aligned}$$

其中 $L_{\boldsymbol{\ell},\,v} = \{\boldsymbol{k}_v \in \mathbb{N}^v \mid \lceil \boldsymbol{k}_v \rceil = \boldsymbol{\ell}_v\}$。通过将 v 与 $\mathbf{1}$ 等同： $|v|$, 引理 3.6 得出

$$\sum_{\boldsymbol{k}_v\in L_{\boldsymbol{\ell},v}} |\hat{f}^w_v(\boldsymbol{k}_v)|^2 \le C^{|v|}_{b,\alpha} b^{-\alpha\sum_{j\in v}\ell_j} \|f^w_v\|^{2-2\alpha}_{L^2(\mathbb{I}^{|v|})} \|\partial^v f^w_v\|^{2\alpha}_{L^1(\mathbb{I}^{|v|})}. \tag{3.5}$$

定理3.2 表明

$$\|\partial^v f^w_v\|_{L^1(\mathbb{I}^{|v|})} \le \|f^w_v\|_{W^{1,1}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^{|v|})} \le \|f_v\|_{W^{1,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} \prod_{j\in v} C_{\varepsilon,p,q}\theta_j^{-1/q-\varepsilon}.$$

如果 $q \ge 2$, 我们使用 [37, 引理 3.1] 来界定

$$\|f^w_v\|_{L^2(\mathbb{I}^{|v|})} \le \|f^w_v\|_{L^q(\mathbb{I}^{|v|})} \le 2^{\frac{q-1}{q}|v|} \|f_v\|_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)} \le 2^{\frac{q-1}{q}|v|} \|f_v\|_{W^{1,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)}.$$

如果 $q \in (1,\ 2)$，我们使用引理 2.1 和插值不等式 [1, 定理 2.11] 来界定

$$\begin{aligned}\|f_v^w\|_{L^2(\mathbb{I}^{|v|})} \leq & \|f_v^w\|_{L^q(\mathbb{I}^{|v|})}^{q/2} \|f_v^w\|_{L^\infty(\mathbb{I}^{|v|})}^{1-q/2} \\ \leq & 2^{\frac{q-1}{2}|v|} \|f_v\|_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)}^{q/2} \|f_v^w\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,1}(\mathbb{I}^{|v|})}^{1-q/2} \\ \leq & 2^{\frac{q-1}{2}|v|} \|f_v\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)}^{q/2} \left(\|f_v\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)} \prod_{j\in v} C_{\varepsilon,p,q} \theta_j^{-1/q-\varepsilon} \right)^{1-q/2} \\ = & \|f_v\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)} \prod_{j\in v} 2^{\frac{q-1}{2}} C_{\varepsilon,p,q}^{1-q/2} \theta_j^{-1/q+1/2-(1-q/2)\varepsilon}.\end{aligned}$$

将上述界代入方程（3.5），得到

$$\sum_{\boldsymbol{k}_v \in L_{\boldsymbol{\ell},v}} |\hat{f}_v^w(\boldsymbol{k}_v)|^2 \leq C_3^{|v|} b^{-\alpha \sum_{j\in v} \ell_j} \|f_v\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)}^2 \prod_{j\in v} \theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon},$$

其中 C_3 取决于 ε，p，q，b 和 α。最后，[37, 引理 3.2] 推出 $|\hat{w}_j(k_j)| \leq 4\min(\theta_j,\ b^{-\ell_j+1})$，并且

$$\sum_{k_j=b^{\ell_j-1}}^{b^{\ell_j}-1} |\hat{w}_j(k_j)|^2 \leq 16(b-1)\min(\theta_j^2 b^{\ell_j-1}, b^{-\ell_j+1}) \leq 16(b-1)\theta_j^{1-\alpha} b^{-\alpha(\ell_j-1)}.$$

因此我们得出

$$\begin{aligned}\sigma_{\boldsymbol{\ell}}^2 \leq & 2^{|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})|} b^{-\alpha\|\boldsymbol{\ell}\|_1} \sum_{v\subseteq \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})} \left(C_3^{|v|} \|f_v\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)}^2 \prod_{j\in v} \theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon} \right) \prod_{j\in \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})\setminus v} 16(b-1)\theta_j^{1-\alpha} b^{\alpha} \\ \leq & C_{\varepsilon,p,q,b,\alpha}^{|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})|} b^{-\alpha\|\boldsymbol{\ell}\|_1} \sum_{v\subseteq \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})} \|f_v\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)}^2 \prod_{j\in v} \theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon} \prod_{j\in \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\ell})\setminus v} \theta_j^{1-\alpha}\end{aligned}$$

对于 $C_{\varepsilon,\ p,\ q,\ b,\ \alpha} = 2\max(C_3,\ 16b^\alpha(b-1))$。 □

3.3 步骤III：扰乱网方差的界

定理 *2.4* 的证明。 根据引理3.1 和定理3.7，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^w(\boldsymbol{u}_i) - \int_{\mathbb{I}^s} f^w(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right|^2 = \frac{1}{n}\sum_{\emptyset\neq\omega\subseteq 1:s}\sum_{\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{N}^\omega} \Gamma_{\omega,\boldsymbol{\ell}}\sigma_{\boldsymbol{\ell}}^2 \\ \leq & \frac{1}{b^m}\sum_{\emptyset\neq\omega\subseteq 1:s}\sum_{\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{N}^\omega} \Gamma_{\omega,\boldsymbol{\ell}} C_{\varepsilon,p,q,b}^{|\omega|} b^{-\alpha\|\boldsymbol{\ell}\|_1} \sum_{v\subseteq\omega} \|f_v\|_{W_{\mathrm{mix}}^{1,q}(\mathbb{R}^s,\varphi)}^2 \prod_{j\in v} \theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon} \prod_{j\in\omega\setminus v} \theta_j^{1-\alpha} \\ = & \frac{\|f\|_q^2}{b^m}\sum_{\emptyset\neq\omega\subseteq 1:s} C_{\varepsilon,p,q,b}^{|\omega|} \left(\sum_{\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{N}^\omega} \Gamma_{\omega,\boldsymbol{\ell}} b^{-\alpha\|\boldsymbol{\ell}\|_1}\right) \sum_{v\subseteq\omega} \gamma_v^2 \prod_{j\in v} \theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon} \prod_{j\in\omega\setminus v} \theta_j^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

在 [37, 定理 5.3] 的证明中可以证明

$$\sum_{\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{N}^\omega} \Gamma_{\omega,\boldsymbol{\ell}} b^{-\alpha\|\boldsymbol{\ell}\|_1} \leq \frac{C_4^{|\omega|} m^{|\omega|-1} b^{(1+\alpha)t_\omega}}{b^{\alpha m}}$$

对于 C_4，取决于 b 和 α。因此，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f^w(\boldsymbol{u}_i)-\int_{\mathbb{I}^s}f^w(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\Big|^2\\ \le&\frac{\|f\|_q^2}{b^{(1+\alpha)m}}\sum_{\emptyset\neq\omega\subseteq 1:s}C_*^{|\omega|}m^{|\omega|-1}b^{(1+\alpha)t_\omega}\sum_{v\subseteq\omega}\gamma_v^2\prod_{j\in v}\theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon}\prod_{j\in\omega\setminus v}\theta_j^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

对于 $C_*=C_{\varepsilon,\ p,\ q,\ b}C_4$。注意到 $\int_{\mathbb{I}^s}f^w(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\mu$ 和 $n=b^m$，即可得出结论。 □

4 参数化偏微分方程的应用

4.1 模型设定

考虑一个具有随机扩散系数的椭圆型偏微分方程，其形式为

$$\begin{aligned}-\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(a(\boldsymbol{y},\omega)\nabla_{\boldsymbol{y}}p(\boldsymbol{y},\omega))&=g(\boldsymbol{y})\ \text{in}\ D,\\ p(\boldsymbol{y},\omega)&=0\ \text{on}\ \partial D,\end{aligned}\tag{4.1}$$

对于完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 中几乎所有的 $\omega\in\Omega$，其中 $D\subseteq\mathbb{R}^d(d=1,2,3)$ 是有界Lipschitz区域，∂D 是其边界，$a(\boldsymbol{y},\omega)$ 是扩散系数。记 $H_0^1(D)$ 为 $H^1(D)$ 中在 ∂D 上具有零迹的子空间，其范数为 $\|v\|_{H_0^1(D)}=\|\nabla v\|_{L^2(D)}$。令 $H^{-1}(D)$ 为 $H_0^1(D)$ 的对偶空间。$H_0^1(D)$ 与 $H^{-1}(D)$ 之间的对偶配对记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1}(D)\ H_0^1(D)}$。对于问题 (4.1) 的数值近似，通常将输入随机场 $a(\boldsymbol{y},\omega)$ 表示为由 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^s$ 参数化的有限和：

$$a(\boldsymbol{y},\omega)=a_s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=a_*(\boldsymbol{y})+a_0(\boldsymbol{y})\exp\left\{\sum_{j=1}^s x_j\xi_j(\boldsymbol{y})\right\},\tag{4.2}$$

其中，对于所有 $\boldsymbol{y}\in D$，$a_*(\boldsymbol{y})\ge 0$，$a_0(\boldsymbol{y})>0$，且 $\{\xi_j(\boldsymbol{y})\}_{j=1}^s$ 为基函数。

按照 [14], ，我们将参数输入 x_j 建模为广义 β-高斯随机变量，其密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\beta^{1/\beta}\Gamma(1+1/\beta)}e^{-\frac{|x|^\beta}{\beta}}\ \text{with}\ \beta>0.\tag{4.3}$$

对于 $g\in H^{-1}(D)$，我们研究问题（4.1），其中 $a(\boldsymbol{y},\ \omega)=a_s(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$ 的弱形式如下：求一个解 $p(\cdot,\ \boldsymbol{x})\in H_0^1(D)$，使得

$$\int_D a_s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\nabla_x p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}v(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\langle g,v\rangle_{H^{-1}(D),H_0^1(D)}$$

对于所有 $v\in H_0^1(D)$，以及几乎所有 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^s$。

给定与 $\boldsymbol{x}$ 无关的 $G\in H^{-1}(D)$，我们的目标是估计 $f(\boldsymbol{x})=\langle G,\ p(\cdot,\ \boldsymbol{x})\rangle_{H^{-1}(D)\ H_0^1(D)}$ 的期望，并研究所提方法的收敛率。更一般地，我们假设对任意 $v\subseteq 1{:}s$,

$$\|\partial^v p(\cdot,\boldsymbol{x})\|_{H_0^1(D)}\lesssim(|v|!)^\sigma\left(\prod_{j\in v}b_j\right)\exp\left\{\sum_{j=1}^s\alpha_j|x_j|^\tau\right\},\tag{4.4}$$

其中 $\sigma \geq 1$、$0 < \tau \leq \beta$、$\boldsymbol{b} = (b_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathbb{N}_0$，且 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathbb{N}$。从现在起，记号 $\lesssim$ 用于表示与 s 和 $\boldsymbol{x}$ 无关的常数。我们假设 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j < \infty$，从而 $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |x_j|^\tau < \infty$ 几乎必然成立；对于 Gevrey 正则输入随机场[14]，这一条件成立。当 $\beta = \tau$ 时，我们还假设 $\beta < 1/\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$，从而 $\exp(\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty |x|^\tau) \in L^1(\mathbb{R}, \varphi)$（见 (4.9)）。

作为一个特例，对于由（4.2）给出的对数正态随机场，若所有 x_j 均独立服从标准高斯分布，则有 $\beta = 2$, $\sigma = \tau = 1$, $\alpha_j = \|\xi_j(\boldsymbol{y})\|_{L^\infty(\bar{D})}$且 $b_j = \alpha_j / \ln 2$（详情见 [13]）。

4.2 关于 γ_v的界

为给出 γ_v 的界，我们假设概率密度 $\varphi(x)$ 满足如下广义 Poincar´e 不等式：

假设 4.1。给定 $q > 1$，假设存在一个常数 $PC_q > 0$，使得对于任意 $f \in W^{1,q}(\mathbb{R}, \varphi)$和 $\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \mu(f)|^q \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq PC_q \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^q \varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

对于 $q = 2$, [2] 可得，假设 4.1 在以下条件下成立：$\varphi(x) = \exp(-V(x))$，其中 $V : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ 为凸函数。对于一般的 $q > 1$，以下引理表明，假设 4.1 对于若干常见的密度函数仍然成立，包括广义β-高斯分布，其中 $\beta \geq 1$。

引理 4.2。令 $m(x) = (1 - \Phi(x))/\varphi(x)$ 为米尔斯比率。若 φ 满足假设 *2.3*且 $\sup^{x\in[0,\infty)} m(x) < \infty$，则假设 *4.1* 对所有 $q > 1$均成立。

证明。参见附录B。 □

备注 4.3。对于标准高斯分布，已知其米尔斯比率满足$m(x) < x^{-1}$，其中 $x > 0$。对于具有 $\beta \geq 1$ 的广义β-高斯分布，也有类似的界 $m(x) \leq x^{1-\beta}$。这是因为对于任意 $\beta \geq 1$ 和 $x > 0$

$$\begin{aligned}
1 - \Phi(x) &= \frac{1}{2\beta^{1/\beta}\Gamma(1 + 1/\beta)} \int_x^\infty e^{-\frac{t^\beta}{\beta}}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2\beta^{1/\beta}\Gamma(1 + 1/\beta)} \int_x^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} e^{-\frac{t^\beta}{\beta}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{1-\beta}}{2\beta^{1/\beta}\Gamma(1 + 1/\beta)} e^{-\frac{x^\beta}{\beta}} \\
&= x^{1-\beta}\varphi(x).
\end{aligned}$$

因此，只要 4.2 适用于 $\beta \geq 1$。

为确保积分与可微性可以互换，我们作出如下假设。

假设 4.4。 假设对于 $f \in W^{1,\,q}{}_{\text{混合}}(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 以及 $v, w \subseteq 1{:}\ s$ 其中 $v \cap w = \emptyset$,

$$\int_{\mathbb{R}^{|w|}} \partial^v f(\boldsymbol{x}) \prod_{j \in w} \varphi(x_j)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_w = \partial^v \int_{\mathbb{R}^{|w|}} f(\boldsymbol{x}) \prod_{j \in w} \varphi(x_j)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_w$$

对几乎所有 $\boldsymbol{x}_{w^c} \in \mathbb{R}^{s-|w|}$ （相对于勒贝格测度）。

引理 4.5。 假设 4.4在以下条件下成立： φ 在 $\mathbb{R}$上连续且严格为正。

证明。 参见附录C。 □

引理 4.6。假设4.1 和4.4 在 $q > 1$ 条件下成立。则对于 $f \in W^{1,\,q}{}_{\text{混合}}(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 的 *ANOVA* 项为 $\{f_v \mid v \subseteq 1{:}\ s\}$,

$$\|f_v\|_{W^{1,q}_{\text{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} \le (PC_q + 1)^{|v|/q} \|\partial^v f_v\|_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)} \ \forall v \subseteq 1{:}s.$$

证明。 证明思路受 [35]启发。对于 $\omega \subsetneq v$ 和 $j \in v \setminus \omega$, ANOVA分解的定义和假设4.4推出

$$\int_{\mathbb{R}} \partial^w f_v(\boldsymbol{x}) \varphi(x_j)\, \mathrm{d}x_j = \partial^w \Big(\int_{\mathbb{R}} f_v(\boldsymbol{x}) \varphi(x_j)\, \mathrm{d}x_j \Big) = 0.$$

记 $\omega' = \omega \cup \{j\}$, 我们可以应用假设4.1 关于 x_j 并得到界

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial^\omega f_v(\boldsymbol{x})|^q \varphi(x_j)\, \mathrm{d}x_j \le PC_q \int_{\mathbb{R}} |\partial^{\omega'} f(\boldsymbol{x})|^q \varphi(x_j)\, \mathrm{d}x_j.$$

通过归纳法可得

$$\int_{\mathbb{R}^{|v\setminus\omega|}} |\partial^\omega f_v(\boldsymbol{x})|^q \prod_{j \in v\setminus\omega} \varphi(x_j)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{v\setminus\omega} \le PC_q^{|v|-|\omega|} \int_{\mathbb{R}^{|v\setminus\omega|}} |\partial^v f_v(\boldsymbol{x})|^q \prod_{j \in v\setminus\omega} \varphi(x_j)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{v\setminus\omega}.$$

进一步对两边关于 $\prod_{j \in (v\setminus\omega)^c} \varphi(x_j)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{(v\setminus\omega)^c}$ 积分, 得到

$$\|\partial^\omega f_v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)} \le PC_q^{|v|-|\omega|} \|\partial^v f_v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)}.$$

最后, 由于 f_v 不依赖于 $\boldsymbol{x}_{v^c}$,

$$\begin{aligned}\|f_v\|^q_{W^{1,q}_{\text{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} = \sum_{\omega\subseteq v} \|\partial^\omega f_v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)} &\le \sum_{\omega\subseteq v} PC_q^{|v|-|\omega|} \|\partial^v f_v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)} \\ &= (PC_q + 1)^{|v|} \|\partial^v f_v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)}.\end{aligned}$$

□

定理*4.7*。设 $f(\boldsymbol{x}) = \langle G, p(\cdot, \boldsymbol{x})\rangle_{H^{-1}(D)\, H^1_0(D)}$ 对于 $G \in H^{-1}(D)$ 成立。假设 $\varphi(x)$ 是由式 *(4.3)* 给出的广义 β-高斯分布的密度, 且式 *(4.4)* 对 $\sigma \ge 1$、 $0 < \tau \le \beta$ 和 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 < \infty$ 成立。那么, 当 $\beta > \tau$ 时, 对于所有 $q > 1$, 有 $f \in W^{1,q}\mathit{mix}(\mathbb{R}^s, \varphi)$; 或者当 $\beta = \tau < 1/\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$ 时, 对于 $q \in (1, 1/(\beta\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty))$, 有上述结论。此外, 对于非零 f 以及所有 $v \subseteq 1{:}s$,

$$\gamma_v = \|f\|_q^{-1} \|f_v\|_{W^{1,q}_{\text{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} \lesssim (|v|!)^\sigma \prod_{j \in v} \Gamma_j, \tag{4.6}$$

其中 $\Gamma_j = (PC_q + 1)^{1/q} b_j > 0$。

证明。 利用 G 的线性性以及（4.4）可得

$$\begin{aligned}|\partial^v f(\boldsymbol{x})| &\le \|G\|_{H^{-1}(D)}\|\partial^v p(\cdot,\boldsymbol{x})\|_{H_0^1(D)} \\ &\lesssim (|v|!)^\sigma \left(\prod_{j\in v} b_j\right) \exp\left\{\sum_{j=1}^s \alpha_j |x_j|^\tau\right\}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\partial^v f_v\|_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^{|v|}} \left|\int_{\mathbb{R}^{s-|v|}} \partial^v f(\boldsymbol{x}) \prod_{j\in v^c} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{v^c}\right|^q \prod_{j\in v}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_v\right)^{1/q} \\ \lesssim &(|v|!)^\sigma \left(\prod_{j\in v} b_j\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{s-|v|}} \prod_{j\in v^c} e^{\alpha_j|x_j|^\tau}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{v^c}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{|v|}}\prod_{j\in v} e^{q\alpha_j|x_j|^\tau}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_v\right)^{1/q} \\ \lesssim &(|v|!)^\sigma \left(\prod_{j\in v} b_j\right)\left(\prod_{j\in v^c} I(\alpha_j)\right)\left(\prod_{j\in v} I(q\alpha_j)\right)^{1/q},\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中

$$I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|x|^\tau}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\beta^{1/\beta}\Gamma(1+1/\beta)}\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|x|^\tau-\beta^{-1}|x|^\beta}\mathrm{d}x.$$

若 $\beta=\tau$，为确保对所有 j 都有 $I(q\alpha_j)<\infty$，我们要求对所有 j 都有 $q\alpha_j<1/\beta$，即 $q<1/(\beta\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty)$。于是

$$I(\alpha) = \frac{1}{\beta^{1/\beta}\Gamma(1+1/\beta)}\int_0^\infty e^{(\alpha-\beta^{-1})x^\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^{1/\beta}}. \tag{4.9}$$

由于对所有 $x\in[0,1)$，$(1-x)^{-1}\le \exp(x(1-x)^{-1})$，因此对任意 $w\subseteq 1{:}s$，

$$\prod_{j\in w} I(\alpha_j) \le \prod_{j=1}^s \frac{1}{(1-\alpha_j\beta)^{1/\beta}} \le \exp\left(\sum_{j=1}^s \frac{\alpha_j}{1-\alpha_j\beta}\right) \le \exp\left(\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1}{1-\beta\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty}\right) < \infty.$$

由引理 4.5，假设 4.4 对广义 β-高斯密度成立。由此，根据引理 4.6 和（4.8）可得

$$\begin{aligned}\|f_v\|_{W^{1,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} &\le (PC_q+1)^{|v|/q}\|\partial^v f_v\|_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)} \\ &\lesssim C_q^{|v|}(|v|!)^\sigma\left(\prod_{j\in v} b_j\right)\left(\prod_{j\in v^c} I(\alpha_j)\right)\left(\prod_{j\in v} I(q\alpha_j)\right)^{1/q} \\ &\lesssim C_q^{|v|}(|v|!)^\sigma\left(\prod_{j\in v} b_j\right)\exp\left(\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1}{1-\beta\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty}+\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1}{1-q\beta\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty}\right) \\ &\lesssim (|v|!)^\sigma\prod_{j\in v}(C_q b_j),\end{aligned}$$

其中 $C_q=(PC_q+1)^{1/q}>0$。

若 $\beta > \tau$，根据 [14, 命题 4 的证明2], ，对于任意 $w \subseteq 1\colon s$,

$$\prod_{j\in w} I(\alpha_j) \lesssim \exp\left(2\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\right) < \infty.$$

类似地，我们有

$$\|f_v\|_{W^{1,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)} \lesssim C_q^{|v|}(|v|!)^\sigma \left(\prod_{j\in v} b_j\right) \exp\left(4\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\right) \lesssim (|v|!)^\sigma \prod_{j\in v}(C_q b_j).$$

我们通过注意到 $\gamma_v = \|f_v\|_{W^{1,\,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\ \varphi)} / \|f\|_q \lesssim \|f_v\|_{W^{1,\,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\ \varphi)} \lesssim (|v|!)^\sigma \prod_{j\in v}\Gamma_j$对 $\Gamma_j = C_q b_j$, 即可完成证明。 □

定理 4.7 给出乘积与阶相关（POD）权重 $(|v|!)^\sigma \prod_{j\in v}\Gamma_j$，适用于 γ_v，而非推论 2.6 中出现的乘积权重。为将问题化为乘积权重情形，我们使用如下界

$$\gamma_v \lesssim (|v|!)^\sigma \prod_{j\in v}\Gamma_j \le \prod_{j\in v}(j^\sigma \Gamma_j) =: \prod_{j\in v}\Gamma'_j, \tag{4.10}$$

然后应用推论 2.6 ，并将 Γ_j 替换为 $\Gamma'_j = j^\sigma\Gamma_j$。

假设对于某个 $\rho^* > 0$，有 $b_j = O(j^{-\rho^*})$。那么 $\gamma_v \lesssim \prod_{j\in v}\Gamma'_j$，其中 $\Gamma'_j = O(j^{-\rho})$ 且 $\rho = \rho^* - \sigma$。若 $\rho > \max(2/q, 1)$，如注 2.8 所述，该方法可达到近似为 $O(n^{-1-\alpha^*(q,\rho)})$ 的维数无关均方误差率，其中 $\alpha^*(q,\rho)$ 由式 (2.7) 给出。遵循注记2.9，并令 q 取定理4.7 所允许的最大值，我们得到下述推论中给出的维数无关收敛速率。

推论 4.8. 考虑定理 4.7 中的设置，并假设 $b_j = O(j^{-\rho^*})$ 满足$\rho = \rho^* - \sigma > 1$。若 $\beta = \tau < 1/\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$，我们还要求 $\rho > 2\beta\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$。令$q^* = 1/\beta\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$ 并取

$$\theta_j = \begin{cases} \theta_0 j^{-\rho q^*}, & \text{if } \beta = \tau < 1/\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty,\ q^* \in (1,2] \\ \theta_0 j^{-2\rho/(2\alpha^*/q^* + 1 - \alpha^*)}, & \text{if } \beta = \tau < 1/\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty,\ q^* > 2 \\ \theta_0 j^{-2\rho/(3-2\rho)}, & \text{if } \beta > \tau,\ \rho \in (1, 3/2) \\ 0, & \text{if } \beta > \tau,\ \rho \ge 3/2, \end{cases}$$

其中 $\theta_0 \in (0,\ 1/2)$，我们有

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^w(\boldsymbol{u}_i) - \int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x})\prod_{j=1}^{s}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|^2 \le C n^{-1-\alpha^*+\varepsilon}$$

with

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{\rho q^* - 2}{\rho q^* + 1}, & \text{if } \beta = \tau < 1/\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty,\ q^* \in (1,2] \\ 1 - \frac{\sqrt{((2\rho-3)q^*+8)^2 + 24(q^*-2)} - (2\rho-3)q^* - 8}{2(q^*-2)}, & \text{if } \beta = \tau < 1/\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty,\ q^* > 2 \\ 2\rho - 2, & \text{if } \beta > \tau,\ \rho \in (1, 3/2) \\ 1, & \text{if } \beta > \tau,\ \rho \ge 3/2, \end{cases}$$

其中 $C > 0$ 是一个与维数 s 无关的常数，且 $\varepsilon > 0$ 可以任意小。

注4.9。当 $\beta = \tau$时，BDIS 方法的均方误差收敛率可任意接近 $O(n^{-2})$，当 $\rho \to \infty$。这与求逆方法形成对比，后者的均方误差收敛率无法快于 $O(n^{-2+2\beta\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty}$，即使 $\rho \to \infty$ [14, 定理 6。2]。

5 与加权 Sobole夫范数的联系

使用格点规则时，通常通过以下加权 Sobole夫范数来刻画 f [13]:

$$\|f\|_{s,\boldsymbol{\gamma}'} = \left[\sum_{v\subseteq 1:s} \frac{1}{\gamma'_v} \int_{\mathbb{R}^{|v|}} \left(\int_{\mathbb{R}^{s-|v|}} \partial^v f(\boldsymbol{x}) \prod_{j\in v^c} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{v^c}\right)^2 \prod_{j\in v} \psi_j^2(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_v\right]^{1/2},$$

其中，$\boldsymbol{\gamma}' = \{\gamma'_v \mid v \subseteq 1{:}s\}$ 是一组正权重，$\psi_j(x)$是一个坐标相关权重函数。在适当选择 $\boldsymbol{\gamma}'$ 和 $\psi(x)$的情况下，[13] 证明了$\|f\|_{s,\,\boldsymbol{\gamma}'}$ 可以获得与 s无关的上界，并且可以构造高效的基于格点的准蒙特卡罗规则来估计$\mathbb{E}[f(\boldsymbol{x})]$。

下面我们说明，$\|f\|_{s,\,\boldsymbol{\gamma}'}$自然地给出了 $\|f\|_2$的上界，其定义见定理2.4，从而将 [13] 中的框架与我们的框架联系起来。为简便起见，我们仅讨论 $\psi_j^2(x) = \varphi(x)$的情形。当 x_j 服从正态分布时，这一 $\psi_j(x$的高斯尾部会产生比 [13], 中的指数尾部替代项更弱的范数，因此适用的函数类更广。

为了陈述下一个定理，我们通过类比推广$\|f\|_{s,\,\boldsymbol{\gamma}'}$，借鉴$\|\cdot\|_{s,\,\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\gamma},\,q,\,r}$-范数的思路，该范数在 [7, 8]中引入，并定义

$$\|f\|_{s,\boldsymbol{\gamma}',q,r} = \left[\sum_{v\subseteq 1:s} \left(\frac{1}{\gamma'_v} \int_{\mathbb{R}^{|v|}} \left|\int_{\mathbb{R}^{s-|v|}} \partial^v f(\boldsymbol{x}) \prod_{j\in v^c} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{v^c}\right|^q \prod_{j\in v} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_v\right)^{r/q}\right]^{1/r}$$

对于 $r \in [1,\infty)$，并且

$$\|f\|_{s,\boldsymbol{\gamma}',q,\infty} = \sup_{v\subseteq 1:s} \left(\frac{1}{\gamma'_v} \int_{\mathbb{R}^{|v|}} \left|\int_{\mathbb{R}^{s-|v|}} \partial^v f(\boldsymbol{x}) \prod_{j\in v^c} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{v^c}\right|^q \prod_{j\in v} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_v\right)^{1/q}.$$

定理 5.1。 假设条件*4.1* 和*4.4* 在 $q > 1$下成立。那么对于 $r \in [1,\infty]$ 和$f \in W^{1,\,q}$混合$(\mathbb{R}^s, \varphi)$ 且 $\|f\|_{s,\,\boldsymbol{\gamma}',\,q,\,r} < \infty$,

$$\|f\|_q \le \begin{cases} \left[\sum_{v\subseteq 1:s} \left(\dfrac{\gamma_v^q}{(PC_q+1)^{|v|}\gamma'_v}\right)^{r/q}\right]^{-1/r} \|f\|_{s,\boldsymbol{\gamma}',q,r}, & \text{if } r \in [1,\infty) \\ \sup\limits_{v\subseteq 1:s} \left(\dfrac{\gamma_v^q}{(PC_q+1)^{|v|}\gamma'_v}\right)^{-1/q} \|f\|_{s,\boldsymbol{\gamma}',q,\infty}, & \text{if } r = \infty \end{cases}, \tag{5.1}$$

and

$$\gamma_v \|f\|_q \le \left((PC_q+1)^{|v|}\gamma'_v\right)^{1/q} \|f\|_{s,\boldsymbol{\gamma}',q,r}, \tag{5.2}$$

其中 $\|f\|_q$ 和 γ_v 分别定义于 (2.2) 和 (2.3)中。

证明。 我们对 $r \in [1,\infty)$ 证明该结论，因为 $r=\infty$ 情形可通过类似论证得出。根据ANOVA分解的定义和假设 4.4，对于每个 $v \subseteq 1{:}\ s$，

$$\int_{\mathbb{R}^{s-|v|}} \partial^v f(\boldsymbol{x}) \prod_{j\in v^c} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{v^c} = \partial^v\Big(\sum_{\omega\subseteq v} f_\omega(\boldsymbol{x})\Big) = \partial^v f_v(\boldsymbol{x}).$$

因此，引理4.6 意味着

$$\|f\|^r_{s,\gamma',q,r} = \sum_{v\subseteq 1:s}\Big(\frac{1}{\gamma'_v}\|\partial^v f_v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^s,\varphi)}\Big)^{r/q} \ge \sum_{v\subseteq 1:s}\Big(\frac{1}{\gamma'_v(PC_q+1)^{|v|}}\|f_v\|^q_{W^{1,q}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\varphi)}\Big)^{r/q}.$$

代入 $\|f_v\|_{W^{1,\ q}{}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{R}^s,\ \varphi)} = \gamma_v\|f\|_q$得到方程（5.1）。将关于 $v \subseteq 1{:}\ s$的求和以下界估计为其中一项，可得方程（5.2）。 □

推论5.2。 在定理 *2.4* 和 *5.1*的假设下，

$$\mathbb{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^w(\boldsymbol{u}_i) - \int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x})\prod_{j=1}^{s}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big|^2 \le \frac{\|f\|^2_{s,\gamma',q,r}}{n^{1+\alpha}}\sum_{\emptyset\neq\omega\subseteq 1:s} C_{**}^{|\omega|}m^{|\omega|-1}\tilde{\gamma}'_\omega, \tag{5.3}$$

其中， C_{**} 是一个依赖于 ε、 p、 q、 b、 α 和 PC_q的常数，并且

$$\tilde{\gamma}'_\omega = b^{(1+\alpha)t_\omega}\sum_{v\subseteq\omega}(\gamma'_v)^{2/q}\prod_{j\in v}\theta_j^{-\nu_{\alpha,q}-\varepsilon}\prod_{j\in\omega\setminus v}\theta_j^{1-\alpha}.$$

证明。 这是由（2.4）和（5.2）直接得到的结论。 □

推论5.2 表明，第2 节中的结果可应用于 f，其中$\|f\|_{s,\ \gamma',\ q,\ r}<\infty$，只需将 $\|f\|_q$ 替换为 $\|f\|_{s,\ \gamma',\ q,\ r}$，并将 γ_v 替换为 $(\gamma'_v)^{\ 1/q}$。

备注5.3。当 γ'_v 采用第4节所述的POD形式时，类似于（4.10）的论证可将问题归结为乘积权重情形。关于（ [36] 右侧的进一步估计，请参见5.3），其中 γ'_v 采用非乘积形式。

6 数值实验

本节通过比较基于BDIS的RQMC与蒙特卡罗及标准RQMC（使用求逆方法，即所有 $\theta_j=0$）的收敛率，给出数值结果以验证所提出方法的效率。对于随机化准蒙特卡罗方法，我们使用扰动Sobol'序列 [30] 。对于BDIS方法，我们在（ $p=1$ 1.5）中取，并比较$w_j = w_{\theta_j}$的几种选择。

现在考虑椭圆型偏微分方程问题（4.1），在单位正方形区域 $D=(0,1)^2$ 上，确定性源项由 $g(\boldsymbol{y}) = y_2$ 给出，对于 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$。扩散系数$a(\boldsymbol{y},\omega)$服从截断随机场模型：

$$a(\boldsymbol{y},\omega) = a_s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \exp\left(\sum_{j=1}^{s} x_j\xi_j(\boldsymbol{y})\right), \tag{6.1}$$

其中 x_j 为相互独立的 β-高斯随机变量，其密度由（4.3）给出，且基函数 $\{\xi_j\}_{j=1}^{s}$ 共享一个固定的空间模态，振幅随指标 j衰减：

$$\xi_j(\boldsymbol{y}) = \zeta \cdot j^{-\rho^*} \sin(\pi y_1) \sin(\pi y_2), \tag{6.2}$$

其中 $\zeta > 0$和 $j = 1$、.....、 s。参数 $\rho^* > 1$控制涨落的衰减率，从而决定 γ_v的衰减率。如 [13], 所示，该模型满足（4.4），其中 $\tau = \sigma = 1$, $\alpha_j = \|\xi_j(\boldsymbol{y})\|_{L^\infty(\bar{D})} = \zeta \cdot j^{-\rho^*}$ 且 $b_j = O(j^{-\rho^*})$。显然，由于 $\rho^* > 1$，我们有$\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty = \zeta$和 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 < \infty$。

空间区域采用有限元方法进行离散，在均匀三角网格上使用连续分片线性（P_1）基函数。我们将网格细化层级设为 $N_{\text{mesh}} = 8$，得到一个包含 $h \approx 1/8$ 的三角剖分。在以下分析中，我们不考虑维数截断误差和空间离散误差，因为它们与求积误差相互独立。总误差的全面分析见 [14, 20]。对于给定的截断维数 s 和网格细化层级，我们报告不同求积规则的均方根误差（RMSE）。我们将截断维数固定为 $s = 128$。

对于每个固定样本量 n，我们对随机化准蒙特卡罗方法进行 $R = 64$ 次独立扰乱。令 $\hat{p}_n^{(r)}(\cdot)$ 表示基于 n 个 Sobol' 点的第 r 次扰乱所得到的解 $p(\cdot, \boldsymbol{x})$ 的数值近似，其中 $r = 1$、.....、 R。期望值 $\mathbb{E}[p(\cdot, \boldsymbol{x})]$ 的总体估计量由 R 次扰乱的样本均值给出：

$$\bar{p}_{n,R}(\cdot) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \hat{p}_n^{(r)}(\cdot). \tag{6.3}$$

通过将样本量 n 从 2^6 几何级数式地增加至 2^{16}，计算均方根误差来分析收敛行为。我们使用 R 次独立重复的样本标准差来估计均方根误差。具体而言，我们通过两种方式衡量误差： $H_0^1(D)$-范数误差

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^{R} \|\bar{p}_{n,R} - \hat{p}_n^{(r)}\|_{H_0^1(D)}^2} = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^{R} \|\nabla \bar{p}_{n,R} - \nabla \hat{p}_n^{(r)}\|_{L_2(D)}^2},$$

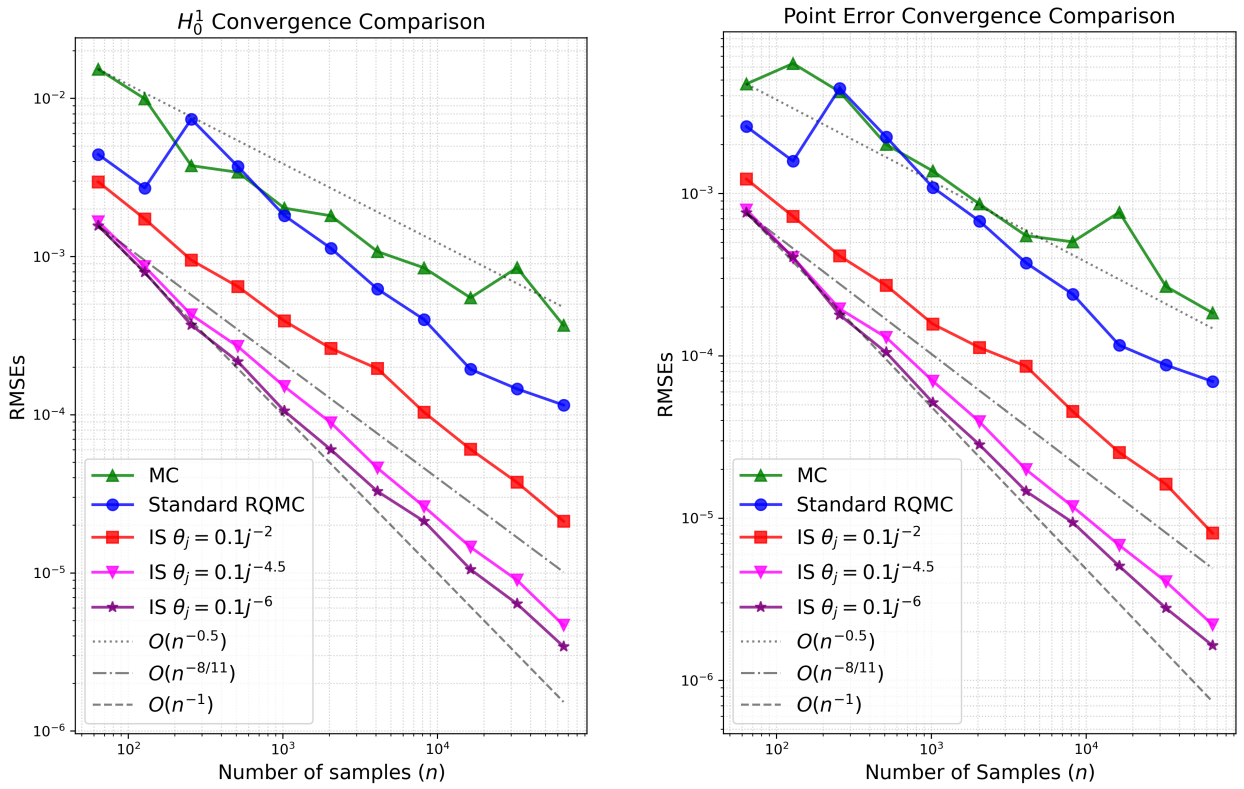
其中， $L_2(D)$-范数中的积分使用 $\hat{p}_n^{(r)}$ 的有限元表示精确计算，而区域中心 $\boldsymbol{y}_c = (0.5, 0.5)$ 处的逐点误差

$$\hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^{R} \left| \bar{p}_{n,R}(\boldsymbol{y}_c) - \hat{p}_n^{(r)}(\boldsymbol{y}_c) \right|^2}.$$

我们设衰减参数为 $\rho^* = 4$, $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty = \zeta = 2/3$，分布参数为$\beta = 1$。由于 $\tau = \beta = 1$，被积函数属于 $W^{1,q}\text{mix}(\mathbb{R}^s, \varphi)$，且 $1 < q < 1/(\beta\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty)$ =3/2。在这种设置下，我们有 $\gamma_v \le \prod_{j \in v} \Gamma_j$，其中 $\Gamma_j = O(j^{-\rho})$ 和 $\rho = \rho^* - \sigma = 3$。如推论 4.8 所示，我们设 $\theta_j = \theta_0 j^{-4.5}$，以获得近似为 $O(n^{-8/11})$ 的维数无关的均方根误差收敛率。我们还考虑另外两种情况： $\theta_j = \theta_0 j^{-2}$ 和 $\theta_j = \theta_0 j^{-6}$。

前一种情况低估了 θ_j的最优衰减率，而后一种情况则是忽略上界（$|v|!)^{\sigma}$ (源自（4.4））中的阶乘项后得到的高估（4.6），其中 γ_v，从而得到 $\rho = \rho^* = 4$。我们在数值实验中设定 $\theta_0 = 0.1$ 。

图1 报告了结果。由于被积函数的边界增长迅速，标准RQMC方法收敛缓慢，而所提出的BDIS 方法在 θ_j 的三种选择下，其收敛率快于通常的蒙特卡洛收敛率 $O(n^{-1/2})$ 。对于 $\theta_j = 0.1j^{-4.5}$的情形，BDIS 方法得到的均方根误差接近 $O(n^{-8/11})$ $\approx$ $O\ n^{-0.73}$ ()，这与我们的理论一致。有趣的是，使用 θ_j =$0.1j^{-6}$的BDIS 方法（通过省略阶乘项得到）表现甚至更好。这种省略策略此前已在 [18] 中用于为基于格点的核近似定义一类新的乘积权重，从而相较包含阶乘项的光滑度驱动的 POD 权重，在高维下取得了更好的性能。这些结果表明，$\sigma = 1$ 在（4.4）中的估计可能过于保守。

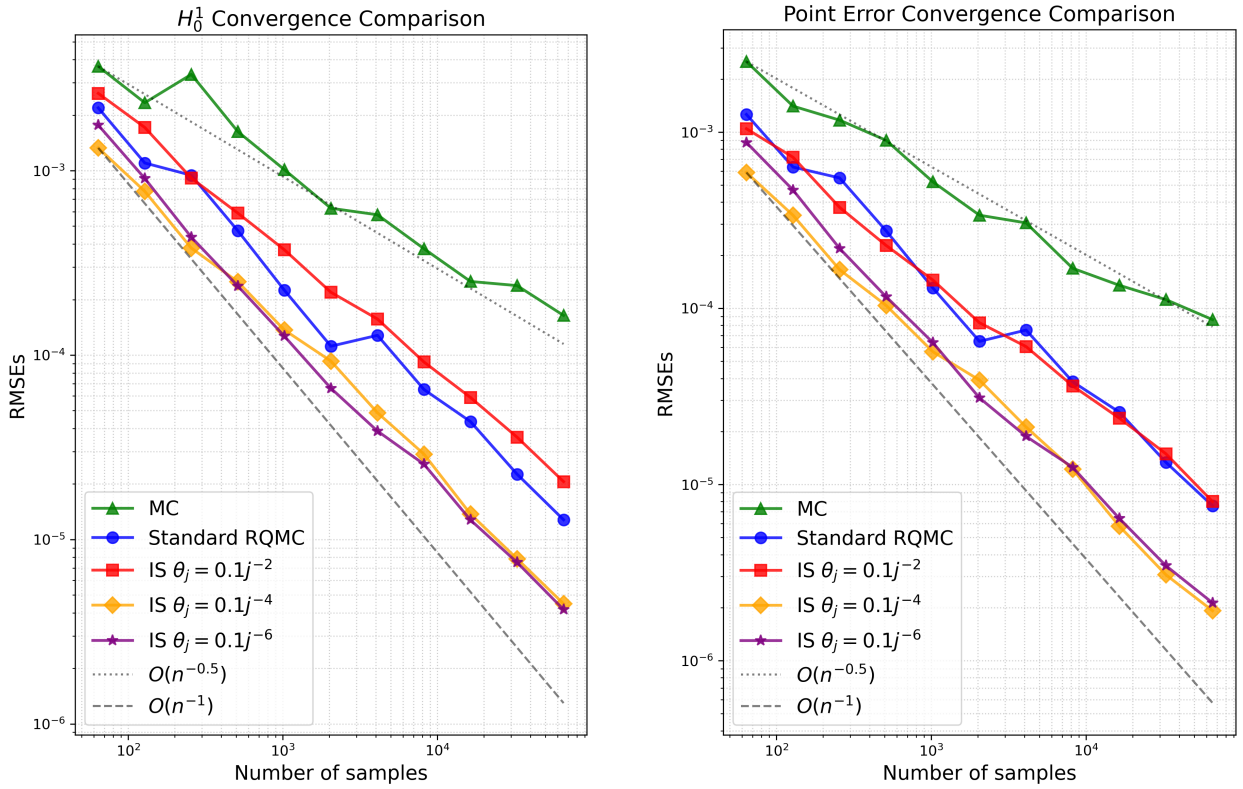


(a) $H_0^1(D)$ 误差　　(b) $\boldsymbol{x}_c$ 处的逐点误差

图 1 $s = 128$ $q \in$ 1 3/2 $\beta = \tau = 1$ $\zeta =$: 2/3 $\rho^* = 4$ $\theta_j = 0.1j^{-2}$ $0.1j^{-4.5}$ $0.1j^{-6}$ 针对 , (,), ,, 的均方根误差收敛结果。这些图将所提出的 BDIS 方法（ , 或 ）与标准RQMC和蒙特卡罗方法进行了比较。虚线参考线分别表示 $O(n^{-0.5})$、$O(n^{-8/11})$ 和 $O(n^{-1})$ 收敛。

图2 给出了以下情形下的均方根误差： $\rho^* = 2$， $\zeta = 1/2$和 $\beta = 1$，此时被积函数属于 $W^{1,\ q\text{混合}}(\mathbb{R}^s,\ \varphi)$，其中 $q \in (1,\ 2)$。推论4.8 要求选择 $\theta_j =$

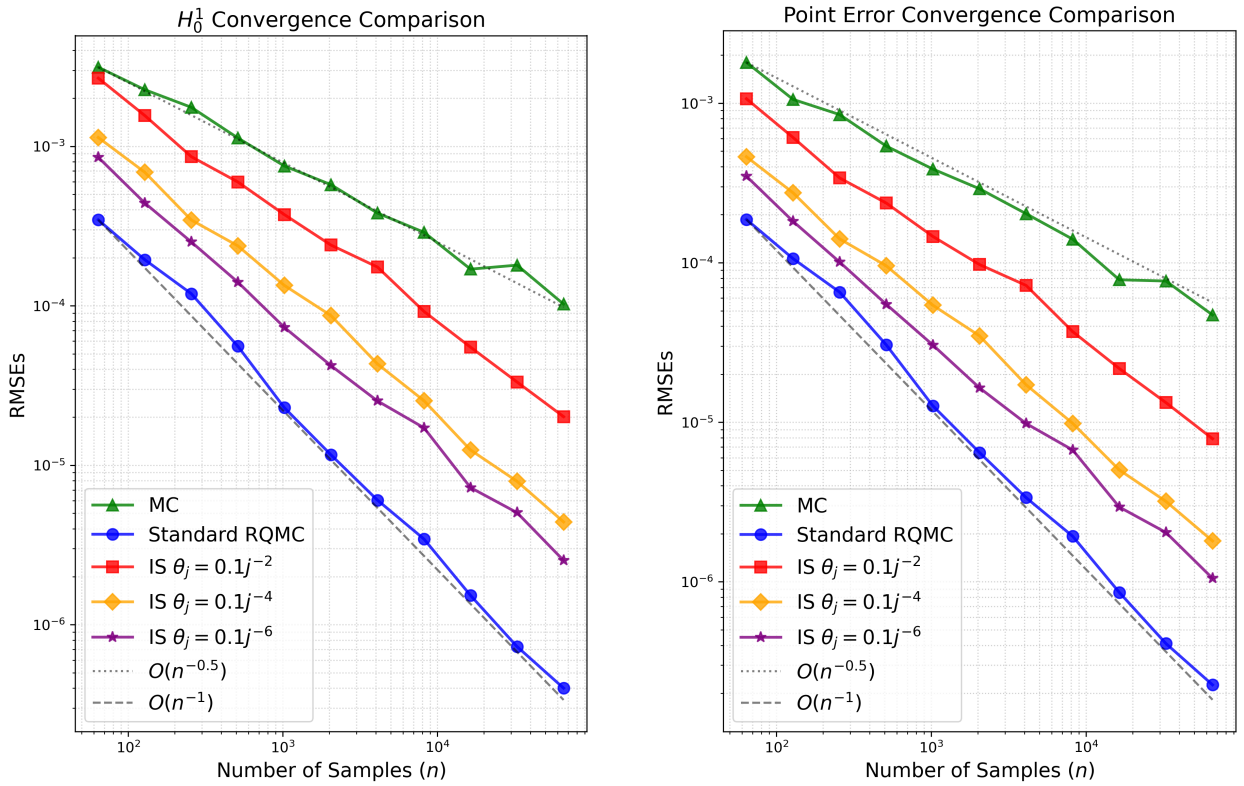
$0.1j^{-2}$，而省略阶乘项则促使我们考虑另一种选择 $\theta_j = 0.1j^{-4}$。与之前的设置相比，q 的值增至接近 2，且我们观察到标准随机化准蒙特卡罗的均方根误差收敛率相应提高。由于 q 不能任意增大，使用 BDIS 仍有机会改进标准随机化准蒙特卡罗。我们的 BDIS 方法在采用 $\theta_j = 0.1j^{-4}$ 和 $\theta_j = 0.1j^{-6}$ 时明显优于标准随机化准蒙特卡罗，而选择 $\theta_j = 0.1j^{-2}$ 时的表现则略逊于标准随机化准蒙特卡罗。这些发现再次表明，省略阶乘项有助于更好地估计 θ_j的最优选择。



(a) $H_0^1(D)$ 误差　　(b) $\boldsymbol{x}_c$ 处的逐点误差

图 2：$s = 128$，$q \in (1, 2)$ $\beta = \tau = 1$，$\zeta = 1/2$，$\rho^* = 2$ 的均方根误差收敛结果。图中比较了所提出的 BDIS 方法（$\theta_j = 0.1j^{-2}, 0.1j^{-4}$ 或 $0.1j^{-6}$）与标准RQMC 和蒙特卡罗方法。虚线参考线分别表示 $O(n^{-0.5})$ 和 $O(n^{-1})$ 收敛。

最后，为了考察 $\beta > \tau = 1$的情形，我们考虑对数正态随机场，此时 $\beta = 2$ 和 q 可以任意大。我们设 $\zeta = 2/3$ 和 $\rho^* = 5/2$，从而得到一个易于进行 QMC积分的测试案例。推论4.8建议在 $\theta_j = 0$的情况下使用 BDIS；由于 $\rho = 3/2$，该方法退化为标准RQMC方法。这产生了几乎为 $O(n^{-1})$的维数无关的均方根误差收敛率，如图3所示。作为比较，我们还针对 θ_j测试了具有三种衰减率的 BDIS：$\theta_j = 0.1j^{-2}$、$\theta_j = 0.1j^{-4}$和 $\theta_j = 0.1j^{-6}$。图3 表明，当 θ_j 衰减得更快时，BDIS 可实现更快的误差收敛率。这些结果证实了在此情形下标准RQMC的最优性。



(a) $H_0^1(D)$ 误差　　(b) $\boldsymbol{x}_c$ 处的逐点误差

图 3：$s = 128$、$q > 1$、$\beta = 2$、$\tau = 1$、$\zeta = 2/3$、$\rho^* = 5/2$ 的均方根误差收敛结果。图中比较了所提出的 BDIS 方法（$\theta_j = 0.1j^{-2}$, $0.1j^{-4}$ 或 $0.1j^{-6}$）与标准RQMC和蒙特卡罗方法。虚线参考线分别表示 $O(n^{-0.5})$ 和 $O(n^{-1})$ 收敛。

7 总结

作为对 BDIS 的后续研究，本文推导了扰乱数字网的改进误差界，并为具有随机扩散系数的椭圆型偏微分方程中的不确定性量化问题建立了与维数无关的误差率。进一步将分析扩展到加权函数空间，从而使所提出的方法与现有的构造型准蒙特卡罗方法研究相衔接。

本工作的一个自然延伸方向是研究能否将 BDIS 与格点规则等构造性方法结合起来。定理 3.2 给出了修正后的被积函数的 W^1、$_{1\,\text{混合}}(\mathbb{I}^s)$- 范数的一个估计，该估计以原始被积函数的 W^1、$_{q\,\text{混合}}(\mathbb{R}^s$、$\varphi)$-范数表示$f$；而根据定理 4.7，后者本身也有界。这些估计可用于设计合适的权重，以构造格点规则。一个有趣的研究方向是探究联合优化传输映射 T_j 与格点规则能否提高收敛性和可处理性。

我们的分析基于被积函数的一阶混合偏导数。一个自然的问题是，能否利用高阶导数将高阶准蒙特卡罗规则 [6] 与 BDIS 相结合。为消除第二

导数 T_j 由（1.3）和（1.4）定义的间断性，我们预计，合适的构造能够达到与 M¨obius 变换准蒙特卡罗规则 [19, 44]相匹配的收敛率。我们将这一问题留待未来研究。

引理2.1的证明

证明。 我们首先证明单变量情形（$s = 1$）下的结果。对于任意 $f \in C^1(\mathbb{I})$ 以及任意 $x,\ y \in \mathbb{I}$, 有

$$f(x) = f(y) + \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

对两边关于 y 在 $\mathbb{I}$ 上积分，得到

$$f(x) = \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.$$

取绝对值可得

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\le \int_0^1 |f(y)|\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \left|\int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}y \\
&\le \|f\|_{L^1(\mathbb{I})} + \int_0^1 \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{I})} + \|f'\|_{L^1(\mathbb{I})} = \|f\|_{W^{1,1}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{I})}.
\end{aligned}$$

对 $x \in \mathbb{I}$ 取上确界，得到所需的不等式$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{I})} \le \|f\|_{W^{1,\ 1\,\mathrm{mix}}(\mathbb{I})}$。

对于多元情形（$s > 1$），我们用归纳法证明。假设该不等式对所有小于 s 维的情形均成立。设 $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}',\ u_s) \in \mathbb{I}^s$，其中 $\boldsymbol{u}' \in \mathbb{I}^{s-1}$ 且 $u_s \in [0, 1]$。固定 $\boldsymbol{u}'$，对变量 u_s 应用单变量不等式，得到

$$|f(\boldsymbol{u}', u_s)| \le \int_0^1 |f(\boldsymbol{u}', t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |\partial_s f(\boldsymbol{u}', t)|\,\mathrm{d}t.$$

对 $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}',\ u_s) \in \mathbb{I}^s$ 取上确界，得到

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{I}^s} |f(\boldsymbol{u})| \le \sup_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{I}^{s-1}} \int_0^1 |f(\boldsymbol{u}', t)|\,\mathrm{d}t + \sup_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{I}^{s-1}} \int_0^1 |\partial_s f(\boldsymbol{u}', t)|\,\mathrm{d}t. \tag{A.1}$$

根据归纳假设,

$$\sup_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{I}^{s-1}} |f(\boldsymbol{u}', t)| \le \|f(\cdot, t)\|_{W^{1,1}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^{s-1})}, \qquad \sup_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{I}^{s-1}} |\partial_s f(\boldsymbol{u}', t)| \le \|\partial_s f(\cdot, t)\|_{W^{1,1}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^{s-1})}.$$

我们将子集 $v \subseteq 1{:}s$ 分成两组：不包含 s 的子集，对应于 $f(\cdot, t)$；包含 s 的子集，对应于 $\partial_s f(\cdot, t)$。接着

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|f(\cdot, t)\|_{W^{1,1}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^{s-1})}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{v\subseteq\{1:s-1\}} \int_{\mathbb{I}^{s-1}} |\partial^v_{\boldsymbol{u}'} f(\boldsymbol{u}', t)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}'\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{v\subseteq\{1:s-1\}} \int_{\mathbb{I}^s} |\partial^v f(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u},
\end{aligned}$$

类似地，

$$\int_0^1 \|\partial_s f(\cdot,t)\|_{W^{1,1}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^{s-1})}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{v\subseteq\{1:s-1\}} \int_{\mathbb{I}^{s-1}} |\partial^v_{\boldsymbol{u}'}\partial_s f(\boldsymbol{u}',t)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}'\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{v\subseteq\{1:s-1\}} \int_{\mathbb{I}^s} |\partial^v(\partial_s f)(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}.$$

将这些表达式代入（A.1）可知，这两项之和涵盖了所有子集 $v \subseteq 1{:}\ s$:

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{I}^s)} \le \sum_{\substack{v\subseteq\{1:s\}\\ s\notin v}} \|\partial^v f\|_{L^1(\mathbb{I}^s)} + \sum_{\substack{v\subseteq\{1:s\}\\ s\in v}} \|\partial^v f\|_{L^1(\mathbb{I}^s)} = \|f\|_{W^{1,1}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{I}^s)}.$$

□

B 引理4.2的证明

证明。首先注意，对于 $f \in W^{1,q}(\mathbb{R},\ \varphi)$,

$$\|f-\mu(f)\|_{L^q(\mathbb{R},\varphi)} \le \|f-f(0)\|_{L^q(\mathbb{R},\varphi)} + \|\mu(f)-f(0)\|_{L^q(\mathbb{R},\varphi)} \le 2\|f-f(0)\|_{L^q(\mathbb{R},\varphi)}$$

其中，在第二个不等式中，我们用到了这样一个事实:

$$\|\mu(f)-f(0)\|_{L^q(\mathbb{R},\varphi)} = \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x)-f(0))\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)-f(0)|^q\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} = \|f-f(0)\|_{L^q(\mathbb{R},\varphi)}.$$

因此，要证明庞加莱不等式（4.5），只需证明以下加权 Hardy 不等式:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|^q \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le C_q \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^q\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $C_q > 0$ 是一个与 $f(x)$无关的常数。

记 $g = f'$。由 φ的对称性，只需证明

$$\int_{-\infty}^0 \left|\int_x^0 g(t)\,\mathrm{d}t\right|^q \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le C\int_{-\infty}^0 |g(x)|^q\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

根据 [24]，当且仅当下式成立时，此不等式成立

$$B^- := \sup_{x<0} \left(\int_{-\infty}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^0 \varphi(t)^{-\frac{1}{q-1}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{q-1}{q}} < \infty. \tag{B.1}$$

由于当 $x \geq 0$时，米尔斯比率 $m(x)$等于 $\Phi(-x)/\varphi(-x)$，因此根据我们的假设，存在一个常数 $C > 0$，满足 $\varphi(t)^{-1} \leq C\Phi(t)^{-1}$ 对所有 $t \leq 0$均成立。因此，

$$\begin{aligned}\int_x^0 \varphi(t)^{-\frac{1}{q-1}}\,\mathrm{d}t = \int_x^0 \varphi(t)^{-\frac{q}{q-1}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t &\leq C^{\frac{q}{q-1}}\int_x^0 \Phi(t)^{-\frac{q}{q-1}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= C^{\frac{q}{q-1}}\int_x^0 \Phi(t)^{-\frac{q}{q-1}}\,\mathrm{d}\Phi(t) \\ &= C^{\frac{q}{q-1}}(q-1)\left[\Phi(x)^{-\frac{1}{q-1}} - \Phi(0)^{-\frac{1}{q-1}}\right].\end{aligned}$$

将此界代入（B.1），得到

$$B^- \leq \sup_{x<0}\Phi(x)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(C^{\frac{q}{q-1}}(q-1)\Phi(x)^{-\frac{1}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} = C(q-1)^{\frac{q-1}{q}} < \infty.$$

这就证明了所需结果。 □

C 引理 4.5的证明

我们先证明 v 为单元素集时的情形。完整结论可由归纳法推出。在我们的假设下，测度 $\varphi(x)\mathrm{d}x$ 与 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度等价。我们先考虑 $v \subsetneq w^c$的情形，并将 $f(\boldsymbol{x})$ 写为 $f(x_v, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v})$。对于 $h \neq 0$ 以及几乎处处的 $\boldsymbol{x}_{w^c\setminus v} \in \mathbb{R}^{s-|w|-1}$，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^{|w|}}\left(f(x_v+h, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}) - f(x_v, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v})\right)\prod_{j\in w}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_w \\ =&\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^{|w|}}\left(\int_{x_v}^{x_v+h}\partial_v f(t, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v})\,\mathrm{d}t\right)\prod_{j\in w}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_w = \frac{1}{h}\int_{x_v}^{x_v+h} g(t, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v})\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中

$$g(t, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}) = \int_{\mathbb{R}^{|w|}}\partial_v f(t, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v})\prod_{j\in w}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_w.$$

这里，我们可以应用 Fubini定理改变积分次序，因为 $\partial_v f(t, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}) \in L^1(\mathbb{R}^s, \varphi)$，并且

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{|w|}}\int_{x_v}^{x_v+h}|\partial_v f(t, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v})|\prod_{j\in w}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_w \\ \leq&\frac{1}{\min_{t\in[x_v, x_v+h]}\varphi(t)}\int_{\mathbb{R}^{|w|}}\int_{x_v}^{x_v+h}|\partial_v f(t, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v})|\varphi(t)\prod_{j\in w}\varphi(x_j)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_w < \infty\end{aligned}$$

对于每个 $\boldsymbol{x}_{w^c\setminus v} \in \mathbb{R}^{s-|w|-1}$，除去一个零测集 $A \subseteq \mathbb{R}^{s-|w|-1}$。上述论证还表明，对于每个 $\boldsymbol{x}_{w^c\setminus v} \in \mathbb{R}^{s-|w|-1}\setminus A$，$g(t, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v})$ 在 t 上局部可积。因此，我们可以应用勒贝格微分定理，并得出当 $\boldsymbol{x}_{w^c\setminus v} \in \mathbb{R}^{s-|w|-1}\setminus A$ 时，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_v}^{x_v+h} g(t, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v})\,\mathrm{d}t = g(x_v, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}) \tag{C.1}$$

对于每个 $x_v \in \mathbb{R}$，除去一个零测集 $B_{\boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}} \subseteq \mathbb{R}$，该零测集可能依赖于 $\boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}$。如 [28, 第 4 章1], 所示，并集 $\mathcal{B} = \bigcup_{\boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}\in\mathbb{R}^{s-|w|-1}\setminus A} B_{\boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}} \times \{\boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}\}$ 是可测的，且相对于 $\mathbb{R}^{s-|w|}$上的勒贝格测度，其测度为零。由此可得

$$\partial_v \int_{\mathbb{R}^{|w|}} f(x_v, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}) \prod_{j\in w} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_w = \int_{\mathbb{R}^{|w|}} \partial_v f(t, \boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}) \prod_{j\in w} \varphi(x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_w$$

对于每个 $\boldsymbol{x}_{w^c} = (x_v, \boldsymbol{x}_{w^c\setminus v}) \in \mathbb{R}^{s-|w|}$，除零测集 $(\mathbb{R}\times A)$ 外 $\bigcup\mathcal{B}$。

The 情形 $v = w^c$ 直接由 (C.1) 得出，该式对几乎处处的 $x_v \in \mathbb{R}$成立。

参考文献

[1] Adams, R. A. 和 Fournier, J. J.（2003）。索*об*列夫空间，第 140 卷。爱思唯尔。

[2] Bobkov, S. G.（1999）。对数凹概率测度的等周不等式与解析不等式。《概率年刊》，27(4):1903–1921。

[3] Caflisch, R. E., Morokoff, W. 和 Owen, A. B.（1997年）。利用布朗桥降低有效维数的抵押贷款支持证券估值。《计算金融学杂志》，1:27–46。

[4] Chernov, A. 和 Le, T.（2024）。参数椭圆特征值问题的解析正则性与 Gevrey 类正则性及其应用。*SIAM* 数值分析杂志，62(4):1874–1900。

[5] Cui, T., Dick, J. 和 Pillichshammer, F.（2025年）。用于 $\mathbb{R}^s$ 上积分的二阶交错多项式格点规则。预印本。

[6] Dick, J.（2008）。包含光滑函数的 Walsh 空间与任意高阶拟蒙特卡罗规则。*SIAM* 数值分析杂志，46(3):1519–1553。

[7] Dick, J., Kuo, F. Y., Le Gia, Q. T., Nuyens, D. 和 Schwab, C.（2014年）。针对具有随机场输入的仿射参数算子方程的高阶拟蒙特卡罗 Petrov–Galerkin 离散。*SIAM* 数值分析杂志，52(6):2676–2702。

[8] Dick, J.、Kuo, F. Y.、LeGia, Q.T. 和 Schwab, C.（2016）。用于仿射参数算子方程的多层高阶拟蒙特卡罗 Petrov–Galerkin离散。*SIAM* 数值分析杂志，54(4)：2541–2568。

[9] Dick, J. 和 Pillichshammer, F.（2010年）。数字序列、偏差与准蒙特卡罗积分。剑桥大学出版社，剑桥。

[10] Dick, J. 和 Pillichshammer, F.（2025年）。基于数字网的 $\mathbb{R}^s$ 上的准蒙特卡罗积分。计算与应用数学杂志，462：116451。

[11] Glasserman, P.（2004年）。金融工程中的蒙特卡罗方法。施普林格，纽约。

[12] Goda, T. 和 Suzuki, K.（2023）。素数幂底数下数字网增益系数的改进界。复杂性杂志，76：101722。[13] Graham, I. G.、Kuo, F. Y.、Nichols, J. A.、Scheichl, R.、Schwab, Ch. 和 Sloan, I. H.（2015）。具有对数正态随机系数的椭圆型偏微分方程的准蒙特卡洛有限元方法。数值数学，131(2)：329–368。[14] Guth, P. A. 和 Kaarnioja, V.（2025年）。具有广义高斯输入不确定性的偏微分方程的准蒙特卡洛方法。*SIAM* 数值分析杂志，63(4)：1666–1690。[15] Herrmann, L.、Keller, M. 和 Schwab, C.（2021）。椭圆型反问题中基于 Besov 先验的准蒙特卡洛贝叶斯估计。计算数学，90(330)：1831–1860。[16] Herrmann, L. 和 Schwab, C.（2019年）。对数正态参数化椭圆型偏微分方程的 QMC 积分：局部支撑与乘积权重。数值数学，141(1)：63–102。[17] Kaarnioja, V.、Kazashi, Y.、Kuo, F. Y.、Nobile, F. 和 Sloan, I. H.（2022a）。基于周期核的格点插值快速近似及其在不确定性量化中的应用。数值数学，150(1)：33–77。[18] Kaarnioja, V.、Kuo, F. Y. 和 Sloan, I. H.（2022b）。超高维参数化偏微分方程的基于格点的核近似与偶然权重。载于蒙特卡洛与准蒙特卡洛科学计算方法国际会议，第81–103页。施普林格。[19] Kazashi, Y.、Suzuki, Y. 和 Goda, T.（2025年）。高斯索博列夫空间中准蒙特卡洛方法的最优性与稀疏网格高斯–埃尔米特求积公式的次优性。预印本。[20] Kuo, F. Y. 和 Nuyens, D.（2016）。准蒙特卡洛方法在具有随机扩散系数的椭圆型偏微分方程中的应用：分析与实现综述。计算数学基础，16(6)：1631–1696。[21] Kuo, F. Y.、Sloan, I. H.、Wasilkowski, G. W. 和 Wo´zniakowski, H.（2010）。多元函数的分解。计算数学，79(270)：953–966。[22] L’Ecuyer, P. 和 Lemieux, C.（2002）。随机化准蒙特卡洛方法综述。载于 Dror, M.、L’Ecuyer, P. 和 Szidarovszki, F. 编，《不确定性建模：随机理论、方法与应用探析》，第419–474页，纽约。克吕维尔学术出版社。[23] L’Ecuyer, P.（2009）。准蒙特卡洛方法及其在金融领域的应用。金融与随机学，13(3)：307–349。[24]Muckenhoupt, B.（1972）。带权哈代不等式。数学研究，44(1)：31–38。

[25] Nichols, J. A. 与 Kuo, F. Y.（2014a）。在带有 POD 权重的加权空间中，对 $\mathbb{R}^s$ 上无界被积函数实现 $\mathcal{O}(n^{-1+\delta})$ 收敛的随机移位格点规则的快速逐分量构造。30(4):444–468。[26] Nichols, J. A. 与 Kuo, F. Y.（2014b）。在带有 POD 权重的加权空间中，对 $\mathbb{R}^s$ 上无界被积函数实现 $o(n^{-1+\delta})$ 收敛的随机移位格点规则的快速逐分量构造。《复杂性杂志》，30(4):444–468。[27] Niederreiter, H.（1988年）。低偏差与低离散度序列。《数论杂志》，30(1):51–70。[28] Nikol'skii, S. M.（2012年）。《多变量函数逼近与嵌入定理》，第205卷。施普林格科学与商业媒体。[29] Nuyens, D. 与 Cools, R.（2006年）。平移不变再生核希尔伯特空间中秩1格点规则逐分量构造的快速算法。《计算数学》，75(254):903–920。[30] Owen, A. B.（1995年）。随机置换的 (t, m, s)-网与 (t, s)-序列。载于 Niederreiter, H. 与 Shiue, P. J.-S. 编，《科学计算中的蒙特卡罗与准蒙特卡罗方法》，第299–317页，纽约。施普林格出版社。[31] Owen, A. B.（1997年）。扰乱网求积的蒙特卡罗方差。《SIAM 数值分析杂志》，34(5):1884–1910。[32] Owen, A. B.（1998）。Sobol' 点与 Niederreiter-Xing 点的扰乱。《复杂性杂志》，14(4):466–489。[33] Owen, A. B.（2006年）。Halton 序列避开原点。《SIAM 综述》，48:487–583。[34] Owen, A. B.（2013年）。《蒙特卡罗理论、方法与实例》。 https://artowen.su.domains/mc/。[35] Owen, A. B.（2019年）。具有主导混合偏导数的加权预 Sobolev 空间的有效维数。《SIAM 数值分析杂志》，57(2):547–562。[36]Pan, Z.（2025年）。POD 与 SPOD 权重之和的尖锐收敛界。预印本。[37] Pan, Z.、Ouyang, D. 与 He, Z.（2025年）。结合边界阻尼重要性抽样的 $\mathbb{R}^s$ 上准蒙特卡罗积分。预印本。[38] Scheichl, R.、Stuart, A. M. 与 Teckentrup, A. L.（2017年）。用于计算椭圆型反问题中后验期望的拟蒙特卡罗与多层蒙特卡罗方法。《SIAM/ASA 不确定性量化杂志》，5(1):493–518。[39] Schillings, C.、Sprungk, B. 与 Wacker, P.（2020年）。关于拉普拉斯近似的收敛性以及基于拉普拉斯近似的蒙特卡罗方法对贝叶斯反问题的噪声水平鲁棒性。《数值数学》，145(4):915–971。

[40] Sloan, I. H.、Kuo, F. Y. 与 Joe, S.（2002）。在加权 Sobolev 空间中构造随机移位格点规则。*SIAM* 数值分析杂志，40(5):1650–1665。[41] Sloan, I. H. 与 Wo´z niakowski, H.（1998）。准蒙特卡罗算法何时对高维积分有效？复杂性杂志，14(1):1–33。[42] Sobol', I. M.（1967）。立方体中点的分布与积分的精确计算（俄语）。计算数学与数学物理杂志，7:784–802。[43] Suzuki, K. 与 Yoshiki, T.（2016）。光滑函数 Walsh 系数的公式及其在 Walsh 系数界上的应用。逼近理论杂志，205:1–24。[44] Suzuki, Y.、Hyv¨onen, N. 与 Karvonen, T.（2026）。M¨obius 变换梯形法则。计算数学，95:1491–1515。[45] Wang, X.（2003）。使用准蒙特卡罗算法的多变量积分的强可处理性。计算数学，72(242):823–838。[46] Wang, X. 与 Fang, K.-T.（2003）。有效维数与准蒙特卡罗积分。复杂性杂志，19:101–124。[47] Ye, Z.、Dick, J. 与 Wang, X.（2025年）。非锚定加权 Sobolev 空间中 $\mathbb{R}^s$ 上无界被积函数的中位数 QMC 方法。预印本。[48]Zhang, C.、Wang, X. 与 He, Z.（2021）。计算金融中准蒙特卡洛方法的高效重要性抽样。*SIAM* 科学计算杂志，43(1):B1–B29。