三量子比特态制备：分类与显式量子电路

Yonghae Lee[1], * 和 Taewan Kim[2], †[1] *Department of Liberal Studies, Kangwon National University, Samcheok 25913, Republic of Korea*
[2] *Electronics and Telecommunications Research Institute, Daejeon 34129, Republic of Korea*(日期: 2026年3月3日)

我们提出一个用于制备任意三量子比特纯态的确定性框架。为利用态制备任务中的纠缠结构，我们根据二分划分将三量子比特纯态分为五种类型。给定由其振幅指定的目标态，我们提供具体判据和基于并发度的判据，以确定其类型。对于每种类型，我们推导出一个由基本单量子比特旋转和 CNOT 门组成的显式量子电路模板，其门参数通过施密特分解系统地确定。我们从目标振幅出发，逐步描述完整构造过程，不存在程序上的歧义。作为应用，我们进一步将量子信息中常见的三量子比特纯态归为四类，并为每一类提供一个显式量子电路。与以往方法相比，我们的量子电路面向实际应用：可直接进行算法化实现，仅使用相邻量子比特之间的 CNOT 门，并且对某些类别实现更少的门数和更浅的电路深度。

arXiv:2603.00845v1 [quant-ph] 1 Mar 2026

I. 引言

预定量子态是量子信息处理中的一项基础原语。在近期的含噪中等规模量子（NISQ）设备中，态制备会直接受到有限相干时间和不完美门保真度的制约，因此，浅层且面向硬件的制备流程至关重要 [1]。在容错量子计算（FTQC）中，态制备同样处于核心地位：许多架构依赖于反复制备经过校准的辅助态，以实现量子纠错，并将Clifford操作提升至普适性 [2–4]。这些考量推动了态制备电路的设计，使其不仅正确，而且结构清晰、定义明确并具有实际可实现性。

对于一般的 n量子比特目标态，精确态制备在最坏情况下本质上代价高昂。$\mathbb{C}^{2^n}$ 中的一般纯态包含数量呈指数增长的实数集自由度，因此，构造性综合方法通常需要 $\mathcal{O}(2^n)$ 个基本操作 [5]。多种分解方法通过明确的门电路构造实现了这种指数级扩展，包括基于均匀受控旋转的方案 [6], 、基于香农式递归分解的方法 [7], , 以及从更一般的等距分解中推导出的约化方法 [8]。人们也研究了深度优化变体，强调在保留渐近指数级门数的同时可以降低量子电路深度 [5]。由于这一指数级障碍在一般情况下不可避免，小规模n 设置尤其适合采用完全明确的编译规则，以及针对少量量子比特寄存器定制的可复用电路构造——这正是与NISQ实验以及在容错量子计算工作流中反复制备小型辅助态/资源态最直接相关的范围 [5, 9, 10]。

在小型寄存器中，三量子比特态制备是一项重要且受到广泛研究的基准。首先，三个量子比特构成了能够出现真正多体纠缠的最小情形，因此制备流程已经需要处理纯二分设置中不会出现的纠缠特征 [11]。其次，广泛使用的少量子比特资源态会作为子程序出现在量子通信和量子计算中，而 GHZ态和图态/簇态等三量子比特态是其中的典型例子 [12–14]；因此，紧凑且直观的制备电路具有实际意义 [15]。第三，三量子比特情形的结构描述相对易于处理；对于更多量子比特，纠缠分类及相关典范描述很快就会变得更加复杂，使得以结构为指导的电路设计也相应地不那么直观 [16]。

文献中已有若干确定性的三量子比特态制备方法。Znidarič、Giraud 和 Georgeot 证明，任意三量子比特纯态至多使用三个 CNOT 门即可制备，从而在全连接设置下达到最坏情况下的最小 CNOT 门数 [17]。这些作者还提出了一个显式的三量子比特电路模板，其参数可经采样以生成 Haar分布随机态，从而提供一个使用三个 CNOT 门的精确随机态生成器 [9]。最近，Perdomo 等人提出

* yonghaelee@kangwon.ac.kr
† TaewanKim@etri.re.kr；联系作者：TaewanKim@etri.re.kr

表 I. 三量子比特纯态的态制备电路总结。第一列给出第 II 节中讨论的纠缠类型。此处 R_y 和 R_z 表示单量子比特旋转，CNOT 表示受控非门。我们还报告了单量子比特门与双量子比特门的总数以及电路深度。由于全局相位门 Φ 在物理上不可观测，故不计入门数。对于全可分类型，所报告的数值是通过对每个量子比特独立应用单量子比特态制备电路得到的。对于双可分类型，这些数值是通过将单量子比特态制备与双量子比特态制备相结合而得到的。对于 SS、SE 和 EE 类型，每个电路均以单量子比特酉算子结束。对于每个量子比特，我们将作用于该量子比特的所有单量子比特酉算子合并为一个酉，并按式 (29) 中的标准 Z–Y–Z 形式表示；门数据此计算。

Type	量子电路	$n(R_y)$	$n(R_z)$	n(CNOT)	总深度	
全可分类型	对每个量子比特应用图2	3	3	0	6	2
双可分类型	图2和图3的组合	4	4	1	9	5
SS 型	图 4(a)	5	6	2	13	6
SE 型	图 4(b)	7	6	3	16	8
EE 型	图 4(c)	8	7	4	19	10

一种替代性的构造方法，包括基于 CZ 门的表述，以及对实振幅目标态的明确讨论 [10]。

尽管这些工作给出了强有力的最坏情况保证和实用的通用模板，但其表述未必总能直接实例化为适用于固定硬件配置的端到端编译流程。某些中间选择可能留给读者自行决定，例如选择特定的分解方式、隐式地进行局部调整，或重新标记量子比特。此外，在连通性受限的情况下，所需的双量子比特门布局可能不够便利。最后，通用构造可能无法利用常见态族的额外结构，这会在简单情况下导致不必要的参数处理和电路开销。

在本工作中，我们提出一种完全明确且面向实践的确定性三量子比特态制备方法。这类明确的构造也能自然融入容错量子计算工作流。许多架构会在量子纠错过程中反复制备小型辅助态。我们的出发点是针对三量子比特系统的一种施密特分解视角，采用 $1|2$ 二分划分，以统一的方式揭示目标态的内在结构，并组织编译问题。在多种可能的选择中，我们采用 $A|BC$ 二分划分作为代表性划分，从而能够以尤为直接、统一的方式呈现我们的构造。基于这一视角，我们给出一个具体流程：(i) 确定任意三量子比特纯态的纠缠类型；(ii) 提取综合所需的结构数据；(iii) 通过少量规范电路模块，将这些数据映射为态制备电路。由此得到一种结构化的编译方法，其中每种纠缠类型及若干常见子类均配有明确的电路构造。表 I 简要概述了所得的电路族，包括各纠缠类型对应的门数和电路深度。

我们的构造在设计时即考虑到实际实例化。首先，整体流程是算法化且无歧义的：量子电路参数由给定的目标振幅经清晰的步骤序列得到，而不依赖于隐式局部调整、隐藏分解或量子比特重新标记。其次，所得量子电路具有连通性感知，其排布旨在改进CNOT布局，从而在将量子电路部署到NISQ设备所典型的受限硬件图上时，可减少对SWAP插入的需求。第三，通过利用常见三量子比特态族的额外结构，我们的类别特定量子电路能够简化这些情形下的综合，并在某些情况下得到比通用构造更小、深度更浅的量子电路。

本文组织如下。第 II 节中，我们介绍一种基于 $1|2$二分划分的三量子比特纯态分类。第三节中，我们提出一种通用态制备方案，为分类中的每种纠缠类型构造相应的量子电路。第四节中，我们给出一种明确的识别流程：对于一个以振幅表示的三量子比特态，该流程可确定其纠缠类型，并提取构造相应制备电路所需的结构信息。第 V 节中，我们讨论 $A|BC$-可分目标端，涵盖完全可分类型和双可分类型；具体而言，我们给出制备任意单量子比特态和任意双量子比特态的明确量子电路，作为所需的构建模块。第六节中，我们给出制备 SS 型、SE 型和 EE 型态的明确量子电路。第七节中，我们进一步将量子信息中常见的三量子比特纯态归为四类，并为每一类提供一个明确的量子电路。最后，第八节总结我们的研究结果，重点介绍这些量子电路在实践中的优势，并讨论未来工作。

II. 相对于 1|2 二分划分的纠缠分类

本节将三个量子比特的纯态分为五种类型，以设计适用于任意三量子比特态的态制备电路。我们的分类利用了一个量子比特与其余两个量子比特之间的 1|2 二分划分。设 A、B 和 C 表示三个单量子比特子系统。共有三种选择，即 $A|BC$、 $B|CA$ 和 $C|AB$。这些选择在对量子比特重新标记后彼此等价。因此，只需描述 $A|BC$ 二分划分下的分类。

我们首先利用施密特分解 [18, 19]，按 $A|BC$二分划分将三量子比特态分为两类。考虑三量子比特系统 ABC的任意纯态 $|\psi_3\rangle_{ABC}$。其施密特分解具有如下形式

$$|\psi_3\rangle_{ABC} = \sum_{j=0}^{1} \lambda_j |\alpha_j\rangle_A \otimes |\beta_{j0}\rangle_{BC}, \tag{1}$$

其中施密特系数 λ_j 为满足 $\lambda_0^2+\lambda_1^2=1$的非负实数，且 $\{|\alpha_j\rangle_A\}$ 构成 $\mathcal{H}_A$的一组标准正交基，而 $\{|\beta_{j0}\rangle_{BC}\}$ 是 $\mathcal{H}_{BC}$中的一个标准正交集。此后，只要不致混淆，我们就省略态矢量 $|\psi_3\rangle_{ABC}$、 $|\alpha_j\rangle_A$和 $|\beta_{j0}\rangle_{BC}$ 上的子系统标记。施密特秩是严格为正的施密特系数的个数。在此情形下，施密特秩为1或2。若施密特秩为1，则施密特分解约化为单项，即乘积形式；在我们的分类中，称此类态为 $A|BC$-可分。不失一般性，我们将施密特系数排序为 $\lambda_0 \geq \lambda_1$，从而在秩1情形下令 $\lambda_1 = 0$。施密特秩为2的态称为 $A|BC$-纠缠。

接下来，我们将上述两类细分为五种类型。分类如下。首先，考虑$A|BC$-可分情况。如果 $|\beta_{00}\rangle$ 在 $B|C$ 二分划分下可分，则该状态属于完全可分型。否则，我们称之为双可分型。另一方面， $A|BC$-纠缠情况分为三种类型。为此，我们使用式（1）中的施密特分解。具体而言，我们考察每个施密特基态$|\beta_{j0}\rangle$ （$j=0,\ 1$）在 $B|C$ 二分划分下是可分还是纠缠，并根据这对状态（$|\beta_{00}\rangle$， $|\beta_{10}\rangle$）的可分性模式对状态进行分组：若二者均可分，则称为SS型；若恰有一个可分，则称为SE型；若二者均纠缠，则称为EE 型。我们将这三种分别称为 SS 型、SE 型和 EE 型 $A|BC$ 纠缠类型。

SS/SE/EE细化是根据与一个施密特分解相关联的施密特基态 $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{10}\rangle\}$ $A|BC$ 来表述的。当施密特谱非简并，即 $\lambda_0 > \lambda_1$时，子系统 A 上相应的施密特基在相位意义下唯一，因此这三种类型是定义良好的。相反，当 $\lambda_0 = \lambda_1$时，我们有 $\rho_A = I_A/2$。此时， A 上的施密特基并不唯一： $\mathcal{H}_A$ 的任意标准正交基都可作为施密特基，而 BC 上对应的向量也会随之改变。在这个简并情形下，我们始终将子系统 A 上的施密特基固定为计算基 $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$，然后对所得向量对（$|\beta_{00}\rangle$， $|\beta_{10}\rangle$）应用上述可分性检验，以此定义 SS/SE/EE 型。我们在下述定义中给出分类。

定义 1（类型分类）。设 $|\psi_3\rangle$ 为三个量子比特的纯态，并考虑如式（1）所示跨越 $A|BC$ 的施密特分解。在简并情形 $\lambda_0 = \lambda_1$ 下，我们固定 A 上的施密特基为 $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$。令$|\beta_{j0}\rangle$ 表示系统 BC上的施密特向量。我们将 $|\psi_3\rangle$ 分类为以下五种类型。

1. **全可分类型：** $|\psi_3\rangle$ 是 $A|BC$-可分的，且 $|\beta_{00}\rangle$ 跨越 $B|C$ 二分划分是可分的。2. **双可分类型：** $|\psi_3\rangle$ 是 $A|BC$-可分的，且 $|\beta_{00}\rangle$ 跨越 $B|C$ 二分划分是纠缠的。3. **SS 型：** $|\psi_3\rangle$是 $A|BC$-纠缠的，且 $|\beta_{00}\rangle$和 $|\beta_{10}\rangle$跨越 $B|C$ 二分划分均为可分的。4. **SE 型：** $|\psi_3\rangle$是 $A|BC$-纠缠的，且 $|\beta_{00}\rangle$和 $|\beta_{10}\rangle$中恰有一个跨越 $B|C$ 二分划分是可分的。5. **EE 型：** $|\psi_3\rangle$ 是 $A|BC$-纠缠的，且 $|\beta_{00}\rangle$ 和 $|\beta_{10}\rangle$ 跨越 $B|C$ 二分划分均为纠缠的。

这种分类的一个优点是，要确定给定三量子比特态的类型，只需计算其相对于二分划分的施密特分解即可。由于 $A|BC$ 割对应于一个 2×4 系统，施密特分解可以高效计算。此外，纠缠类型在单量子比特酉算子下保持不变。基于这一性质，我们将给出三量子比特态制备的通用方案。

III. 三量子比特纯态的一般制备方案

我们遵循文献 [20] 的方法，提出一种基于相对于 1|2 二分划分的施密特分解、用于制备任意三量子比特纯态的通用方案。由于我们的分类框架也是基于

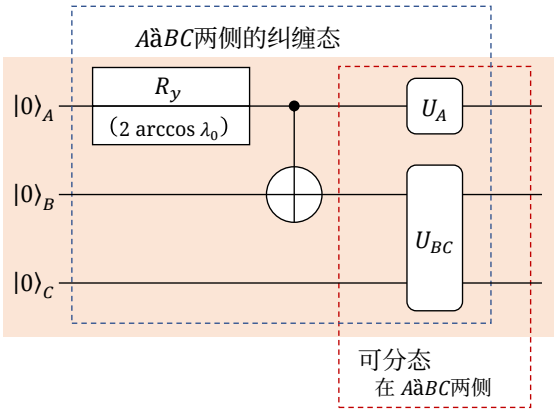


图 1. 通过相对于公式 (1) 中的 $A|BC$ 二分划分进行施密特分解，制备任意三量子比特纯态的通用方案 [20]。酉变换 U_A 和 U_{BC} 定义于公式 (4) 和 (5) 中。为具体实现该方案，我们在第 II 节中将三量子比特纯态分为五种纠缠类型。如果目标态是完全可分态，或相对于 $A|BC$ 二分划分为双可分态，则只需要 U_A 和 U_{BC}；而 SS 型、SE 型和 EE 型 $A|BC$纠缠态则需要包含 R_y 旋转和 CNOT 门在内的完整量子电路。

1|2 二分划分构建的，因此非常适合采用这一方法。为与第 II 节保持一致，我们使用$A|BC$ 二分划分来描述该方案。本节从概念上说明如何根据施密特分解将任意三量子比特纯态分为两类： $A|BC$-可分情况和 $A|BC$-纠缠情况。各类型对应的显式量子电路将在后续章节中推导。

设目标态 $|\psi_3\rangle$ 属于我们定义的五种类型之一。无论其类型如何，我们的分类最终都会得到相对于 $A|BC$ 二分划分的 $|\psi_3\rangle$ 施密特分解，如公式 (1) 所示。更具体地说，我们假设施密特系数 λ_j 以及相应的施密特基态 $|\alpha_j\rangle$ 和 $|\beta_{j0}\rangle$ 均为已知。

我们首先考虑目标态为 $A|BC$-纠缠的情形。从初始态 $|000\rangle$出发，我们对量子比特 A 施加旋转 $R_y(2\arccos\lambda_0)$，使态变为$(\lambda_0|0\rangle+\lambda_1|1\rangle)\otimes|00\rangle$，其中

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

为了在 A 与子系统 BC之间产生纠缠，我们随后施加一个以 A 为控制端、以 B为目标端的CNOT门，得到中间态

$$\sum_{j=0}^{1}\lambda_j|j\rangle_A\otimes|j0\rangle_{BC}. \tag{3}$$

最后，我们施加由下式定义的单量子比特酉算符 U_A 和两量子比特幺正算符 U_{BC}

$$U_A = \sum_{j=0}^{1}|\alpha_j\rangle\langle j|, \tag{4}$$

$$U_{BC} = \sum_{j=0}^{1}|\beta_{j0}\rangle\langle j0|+\sum_{j=0}^{1}|\beta_{j1}\rangle\langle j1|, \tag{5}$$

其中选取 $\{|\beta_{j1}\rangle\}_{j=0}^{1}$，使得$\{|\beta_{jk}\rangle\}_{j,k=0}^{1}$ 构成 $\mathcal{H}_{BC}$的标准正交基；则 U_{BC} 按构造是酉的。该过程精确制备目标态。图1给出了相应的概念电路。U_{BC} 针对SS型、SE型与EE型的具体实现将在后文讨论。

一旦理解了 $A|BC$纠缠态的制备过程， $A|BC$可分态的量子电路便可直接得出。在 $A|BC$可分的情况下，目标态在该划分下为乘积态；因此既不需要 CNOT 门，也不需要 R_y 旋转，只需直接对 $|000\rangle$施加 U_A 和 U_{BC}，如图 1 所示。换言之，完全可分态和双可分态的态制备可归结为单量子比特态制备过程与双量子比特态制备过程的组合。

IV. 根据态系数识别三量子比特纠缠类型

本节将给出一种系统的判定程序，可直接根据三量子比特纯态的振幅确定其纠缠类型。由于我们的类型分类是通过针对适当二分划分的施密特分解定义的，主要任务是从振幅中提取相应的施密特秩和施密特系数。

任意目标三量子比特纯态均可由其在计算基中的振幅表示为

$$|\psi_3\rangle \coloneqq c_0|000\rangle + c_1|001\rangle + c_2|010\rangle + c_3|011\rangle + c_4|100\rangle + c_5|101\rangle + c_6|110\rangle + c_7|111\rangle, \tag{6}$$

其中，振幅 c_j 满足归一化条件，即 $\sum_{j=0}^{7}|c_j|^2 = 1$；此处，$\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 表示每个单量子比特希尔伯特空间的计算基。现在，我们根据分类方案说明如何确定 $|\psi_3\rangle$ 的类型。首先，对于 $A|BC$ 二分划分，我们必须判断给定态是$A|BC$可分的还是 $A|BC$纠缠的。我们不计算施密特分解（或者更直接地说，不计算约化态的谱分解），而是通过检验目标态能否写成单量子比特系统 A 与双量子比特系统 BC之间的乘积形式，来检验 $A|BC$ 可分性。此方法可实现$A|BC$可分性检验，且计算开销相对较小。具体而言，我们在以下命题中给出可分性条件。

命题 2 ($A|BC$ 可分性)。设 $|\psi_3\rangle$ 为式 (6)中的三量子比特纯态。当且仅当以下三个条件之一成立时，它是 $A|BC$-可分的：

1. $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$。
2. $c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = 0$。
3. 系数向量 (c_0, c_1, c_2, c_3) 与 (c_4, c_5, c_6, c_7) 成比例；等价地，存在一个非零$k \in \mathbb{C}$ 使得 $c_{j+4} = kc_j\,(j = 0,1,2,3)$。

请注意，在命题 2 中，第一个和第二个条件对应于退化情形：子系统 A分别固定为 $|1\rangle$ 或 $|0\rangle$。若第三个条件成立，则对于任意满足 $c_{j'} \neq 0$的 $j' \in \{0,1,2,3\}$，$|\psi_3\rangle$ 具有以下乘积形式：

$$|\psi_3\rangle = \left(\frac{1}{\tau}\left(c_{j'}|0\rangle + c_{j'+4}|1\rangle\right)\right) \otimes \left(\frac{\tau}{c_{j'}}\left(c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle\right)\right), \tag{7}$$

其中 $\tau \coloneqq \sqrt{|c_{j'}|^2 + |c_{j'+4}|^2}$为实数且为正。特别地，当且仅当上述条件均不成立时，$|\psi_3\rangle$ 是 $A|BC$-纠缠的。

A. $A|BC$-separable case

若命题 2 中的三个条件之一成立，则目标态 $|\psi_3\rangle$ 是 $A|BC$-可分的。为了确定该态是否完全可分，我们还需判断双量子比特子系统 BC 是否纠缠。为此，我们采用 concurrence [21, 22]。将 BC 上的双量子比特态记为 $|\psi_2\rangle_{BC}$，它在计算基下可写为

$$|\psi_2\rangle_{BC} \coloneqq d_0|00\rangle_{BC} + d_1|01\rangle_{BC} + d_2|10\rangle_{BC} + d_3|11\rangle_{BC}, \tag{8}$$

其中 $\sum_{j=0}^{3}|d_j|^2 = 1$。双量子比特纯态 $|\psi_2\rangle$ 的$concurrence$ $\mathcal{C}$ 定义为

$$\mathcal{C} \coloneqq 2|d_0d_3 - d_1d_2|. \tag{9}$$

若 $\mathcal{C} = 0$，则 $|\psi_2\rangle$ 可分；否则，若 $\mathcal{C} > 0$，则其为纠缠态。因此，通过计算 $|\psi_2\rangle$的 concurrence，我们可以判断目标态 $|\psi_3\rangle$ 是完全可分态还是双可分态。

1. **全可分类型**。若 $\mathcal{C} = 0$，则 $|\psi_2\rangle$ 是 $B|C$-可分的，因而目标态 $|\psi_3\rangle$ 是完全可分的。在此情况下，若 $d_0 \neq 0$，则可取

$$|\psi_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{|d_0|^2 + |d_2|^2}}\left(d_0|0\rangle + d_2|1\rangle\right)\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{|d_0|^2 + |d_1|^2}}\left(d_0|0\rangle + d_1|1\rangle\right)\right), \tag{10}$$

其中等式由条件 $d_0d_3 = d_1d_2$ 得出。同样，若 $d_0 = 0$，则 $\mathcal{C} = 0$ 蕴含 $d_1d_2 = 0$，且 $|\psi_2\rangle$ 约化为支撑在计算基子空间上的一个显然乘积态。因此，在完全可分情况下，$|\psi_3\rangle$ 的制备归结为在每个量子比特系统上独立进行单量子比特态制备，如第 V 节所述。

2. 双可分类型。如果 $\mathcal{C} > 0$，那么 $|\psi_2\rangle$ 是 $B|C$-纠缠的，因此目标态 $|\psi_3\rangle$ 是双可分的。在这种情况下，目标态可写为系统 A 上的一个单量子比特态与系统 BC上的一个双量子比特态 $|\psi_2\rangle$ 的乘积态。因此，制备双可分三量子比特态可以通过结合单量子比特态制备和双量子比特态制备来完成。在第 V 节中，我们给出了制备纠缠双量子比特纯态的显式量子电路；该构造基于双量子比特态的施密特分解。

由于本节的目标是提供一种系统的判定程序，因此说明如何求出公式（8）中双量子比特态 $|\psi_2\rangle$ 的施密特分解是有益的。参考文献 [23] 给出了任意双量子比特纯态施密特分解的解析公式。如其中所示，并不存在适用于所有双量子比特纯态的单一闭式表达式。相反，所用公式取决于态系数的结构。为了对这些情况进行分类，我们将 $|\psi_2\rangle$ 的对角 系数 $\mathcal{D}$ [23] 定义为

$$\mathcal{D} \coloneqq d_0^* d_1 + d_2^* d_3, \tag{11}$$

其中 $(\cdot)^*$ 表示复 共轭。根据 $\mathcal{D}$ 是零还是非零，适用不同的公式。

我们首先考虑一般情形 $\mathcal{D} \neq 0$，这适用于几乎所有纠缠双量子比特态。为应用施密特分解公式，我们计算式（9）中的量子 concurrence $\mathcal{C}$ 以及式（11）中的对角系数 $\mathcal{D}$。利用这些结果，对每个 $j = 0,\ 1$，我们定义以下系数:

$$\tau_j \coloneqq \left(\frac{1 + (-1)^j\sqrt{1-\mathcal{C}^2}}{2}\right)^{1/2}, \tag{12}$$

$$B_j \coloneqq \tau_j^2 - |d_0|^2 - |d_3|^2, \tag{13}$$

$$E_j \coloneqq d_0\mathcal{D} + d_1 B_j, \tag{14}$$

$$F_j \coloneqq d_2\mathcal{D} + d_3 B_j. \tag{15}$$

按照参考文献 [23], 中的惯例，$|\psi_2\rangle$ 的施密特分解为

$$|\psi_2\rangle = \sum_{j=0}^{1} \tau_j \left(\frac{1}{\sqrt{|E_j|^2 + |F_j|^2}} \left(E_j |0\rangle + F_j |1\rangle\right)\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{D}|^2 + |B_j|^2}} \left(\mathcal{D}^* |0\rangle + B_j |1\rangle\right)\right). \tag{16}$$

相反，当目标态的对角系数为零，即 $\mathcal{D} = 0$时，该态的施密特分解形式更简单 [23]:

$$|\psi_2\rangle_{BC} = \sum_{j=0}^{1} \tau_j \left(\frac{1}{\tau_j} \left(d_j |0\rangle + d_{j+2} |1\rangle\right)\right) \otimes |j\rangle. \tag{17}$$

在这种情况下，施密特系数简化为 $\tau_j = \sqrt{|d_j|^2 + |d_{j+2}|^2}$。这种二分情况可以从单个量子比特上的约化态来理解。要得到跨越 $B|C$的施密特分解，可以对 B（或 C）的 2×2 约化密度矩阵进行谱分解。当 $\mathcal{D} = 0$时，该约化密度矩阵的非对角元素为零，因此它在计算基下为对角矩阵，其特征分解可直接得到。由此，施密特分解呈现式（17）中的简单形式。

B. $A|BC$-纠缠情形

接下来讨论目标态为 $A|BC$纠缠的情形，并说明如何在我们的分类中进一步细分其类型。为了遵循第三节介绍的一般制备方案，我们针对 $A|BC$ 二分划分计算施密特分解。为此，对于式（6）中的目标态 $|\psi_3\rangle$，我们首先计算子系统 A上的约化态，记为 ρ_A，即

$$\rho_A = \left(\sum_{j=0}^{3} |c_j|^2\right) |0\rangle\langle 0| + \left(\sum_{j=0}^{3} c_j c_{j+4}^*\right) |0\rangle\langle 1| + \left(\sum_{j=0}^{3} c_j^* c_{j+4}\right) |1\rangle\langle 0| + \left(\sum_{j=4}^{7} |c_j|^2\right) |1\rangle\langle 1|. \tag{18}$$

接下来，我们计算 ρ_A的谱分解。由于 2×2厄米矩阵的特征分解有标准的解析公式，这里省略细节，并假设已知以下分解：

$$\rho_A = \sum_{j=0}^{1} \lambda_j^2 \left|\alpha_j\right\rangle \left\langle\alpha_j\right|, \tag{19}$$

其中，特征值 λ_j^2满足 $\lambda_0^2+\lambda_1^2=1$，而特征向量 $\{|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle\}$ 构成子系统 A的单量子比特希尔伯特空间的一组标准正交基。为使符号与前文引入的施密特分解保持一致，我们假设 $\lambda_0 \geq \lambda_1$。由此得到施密特系数 λ_j 以及子系统 A上的施密特基态 $|\alpha_j\rangle$ 。

为求得子系统 BC上的施密特基态，我们构造投影到 $|\alpha_0\rangle$ 上的秩一投影算符，并将其作用于目标态。由此得到施密特分解的第一项。由于所得向量按定义是$A|BC$-可分的，因此我们可以利用已知的 λ_0 和 $|\alpha_0\rangle$ ，确定子系统 BC上对应的第一个施密特基态，记为 $|\beta_{00}\rangle$。总而言之，这一步可用恒等式概括为

$$\left(\left|\alpha_0\right\rangle\left\langle\alpha_0\right|\right)_A \otimes I_{BC} \left|\psi_3\right\rangle_{ABC} = \lambda_0 \left|\alpha_0\right\rangle_A \otimes \left|\beta_{00}\right\rangle_{BC}, \tag{20}$$

其中， I_{BC} 表示子系统 BC上的恒等算符。为求得子系统BC上的第二个施密特基态，我们从 $|\psi_3\rangle$中减去施密特分解的第一项。由于 λ_1 和 $|\alpha_1\rangle$ 也已知，因此可以用相同的方法确定第二个施密特基态$|\beta_{10}\rangle$ 。等价地，我们可以写作

$$\left|\psi_3\right\rangle_{ABC} - \lambda_0 \left|\alpha_0\right\rangle_A \otimes \left|\beta_{00}\right\rangle_{BC} = \lambda_1 \left|\alpha_1\right\rangle_A \otimes \left|\beta_{10}\right\rangle_{BC}. \tag{21}$$

原则上，可以通过对约化态 ρ_{BC}进行对角化，来获得 BC侧的施密特基底。然而，这种方法无法满足我们的需求，因为施密特分解要求两个局部基底 $|\alpha_j\rangle$ 和 $|\beta_{j0}\rangle$之间存在相位一致配对。虽然 ρ_A 的特征向量只能将 $|\alpha_j\rangle$ 确定到彼此独立的全局相位因子，但这些相位选择会固定分解中 $|\beta_{j0}\rangle$ 对应的相位。相比之下，从 ρ_{BC} 中提取$|\beta_{j0}\rangle$ 会丢失这一信息： ρ_{BC} 的特征向量同样只在任意相位意义下确定，而约化态并未记录应如何将这些相位与先前选定的 $|\alpha_j\rangle$匹配。因此，一旦从 ρ_A中确定了 $|\alpha_j\rangle$ ，我们便通过投影到 $|\alpha_j\rangle$上来确定 $|\beta_{j0}\rangle$ ，从而保留正确的相位关系，并得到与所选 $|\alpha_j\rangle$一致的 BC 上的施密特基态。

确定施密特基态 $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{10}\rangle\}$ 后，我们通过计算这两个双量子比特态的 concurrence [21, 22] ，进一步将目标态分类为 SS、SE 和 EE 类型之一。

1. **SS 型**。 如果向量 $|\beta_{00}\rangle$ 和 $|\beta_{10}\rangle$的 concurrence 均为零，则目标态属于 SS 型。在这种情况下，我们使用公式（10）计算这两个向量对应的乘积形式。第 VI A 节介绍 SS 型目标态的显式制备电路设计。

2. **SE 型**。 如果 $|\beta_{00}\rangle$ 和 $|\beta_{10}\rangle$ 中恰有一个向量的 concurrence 为零，而另一个不为零，则目标态属于 SE 型。在这种情况下，我们使用公式（10）计算 $B|C$-可分向量的乘积形式。第 VI B 节将说明如何为 SE 型设计显式制备电路。

3.**EE 型**。如果两个向量的 concurrence 均非零，则目标态属于 EE 型。在这种情况下，我们使用第四节 A 中给出的双量子比特纯态解析公式，计算第一个向量 $|\beta_{00}\rangle$ 的施密特分解。相应的电路设计见第 VI C 节。

本节介绍了一套系统的方法，用于识别任意三量子比特纯态的纠缠类型。此外，针对每种类型，我们描述了提取相关结构数据的显式公式和方法，包括施密特系数和施密特基态。在后续章节中，我们将利用这些信息构造针对各类纠缠类型的态制备电路。

V. $A|BC$ 可分三量子比特纯态的制备：化约为单量子比特和双量子比特态制备

本节介绍一种构造性方法，用于设计制备双可分三量子比特纯态的量子电路，涵盖完全可分类和双可分类。我们聚焦于相对于 $A|BC$ 二分划分可分的态：任意目标态均可写成这样一种形式，其中子系统 A 是单量子比特纯态，而子系统 BC 则是两个单量子比特纯态的乘积态，或是纠缠双量子比特纯态。因此，我们首先说明如何通过显式量子电路制备任意单量子比特纯态，随后介绍如何在 BC上制备任意纠缠双量子比特纯态的量子电路。

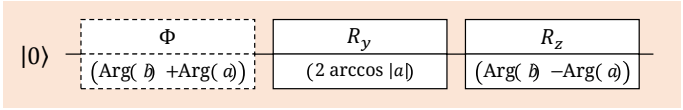


图2. 制备任意单量子比特态 $|\psi_1\rangle$ 的量子电路，如公式（22）所示。该量子电路是制备双可分三量子比特纯态的基本构件。由于全局相位不会产生可观测的物理效应， Φ 仅用于表示数学上精确的态制备；因此，它以虚线轮廓绘制，实际操作中可以省略。同样的基本构件也足以制备完全可分三量子比特纯态。

A. 精确单量子比特态制备

我们首先给出一个显式的单量子比特电路，用于从计算基态 $|0\rangle$精确制备任意纯态，其门参数由态系数直接确定。我们考虑一个任意的单量子比特态 $|\psi_1\rangle$，其形式为

$$|\psi_1\rangle \coloneqq a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,, \tag{22}$$

其中 $|a|^2+|b|^2=1$。从概念上讲，单量子比特态制备的任务是设定模 $|a|$ 和 $|b|$，以及相对相位 $\mathrm{Arg}(b)-\mathrm{Arg}(a)$。施加一次 R_y 旋转，以创建 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态，并确定两个振幅的大小。随后施加一次 R_z 旋转，以纳入所需的相对相位。因此，目标态可通过以下方式获得

$$|\psi_1\rangle = R_z\left(\mathrm{Arg}(b)-\mathrm{Arg}(a)\right) R_y\left(2\arccos|a|\right) \Phi\left(\mathrm{Arg}(b)+\mathrm{Arg}(a)\right)|0\rangle\,, \tag{23}$$

其中，按照惯例，最右侧的门先作用。全局相位门 Φ 仅用于表示数学上精确的态制备；实际操作中可以省略，因为全局相位在物理上不可观测。这里，单量子比特旋转 R_z 和全局相位门 Φ 定义为

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2}\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \Phi(\theta)=\begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2}\end{bmatrix}. \tag{24}$$

图2展示了通过其系数参数化的任意单量子比特态的制备量子电路。一般而言，SU(2) 中的任意单量子比特酉算符在 Z–Y–Z 分解中通常需要三次旋转，但当前任务所需的门更少：如图2所示，两个单量子比特门即可完成制备，至多相差一个全局相位。这种简化之所以可行，是因为任意酉算符都必须指定两个计算基态各自的映像，而态制备只需确定 $|0\rangle$的映像。

B. 精确的双量子比特态制备

接下来，我们构造一个量子电路，用于制备由公式（8）给出的任意双量子比特纯态 $|\psi_2\rangle$，并假设 $C>0$排除可分情况。此时，该双量子比特态可作施密特分解：

$$|\psi_2\rangle = \sum_{j=0}^{1} \tau_j\,|\gamma_j\rangle \otimes |\delta_j\rangle\,, \tag{25}$$

其中施密特系数τ_j是满足 $\tau_0^2+\tau_1^2=1$的非负实数，且 $\{|\gamma_j\rangle\}$和 $\{|\delta_j\rangle\}$分别是单量子比特子系统 B 和 C的标准正交基。

按照第 II 节中介绍的一般策略，我们以该施密特分解作为构建制备电路的起点。态制备从计算基态 $|00\rangle$ 开始，第一步是对量子比特 B施加旋转 $R_y(2\arccos\tau_0)$，以编码施密特系数。随后施加一个 CNOT 门，以量子比特 B 为控制端、量子比特 C 为目标端，从而得到中间纠缠态

$$\tau_0\,|00\rangle_{BC} + \tau_1\,|11\rangle_{BC}\,. \tag{26}$$

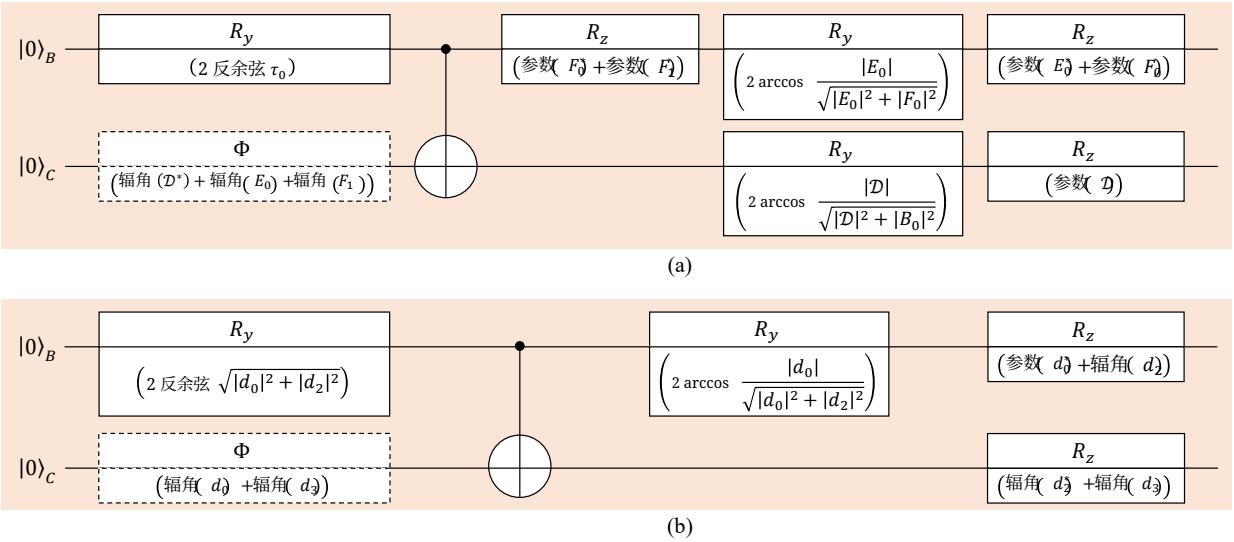


图 3. 用于制备任意双量子比特态 $|\psi_2\rangle$ 的量子电路，如公式（8）所示，等价地可表示为公式（25）的施密特形式。该量子电路可作为制备双可分三量子比特纯态的构件。我们假设该双量子比特态相对于 $B|C$ 二分划分是纠缠的。根据公式（11）中的对角系数 $\mathcal{D}$，电路构造分为两种情况：(a) 一般情形 $\mathcal{D}\neq 0$，为简化门参数化，单量子比特酉算子 V_B 和 V_C 用施密特系数 τ_j 以及公式（16）中定义的辅助量 B_j、E_j 和 F_j 表示；(b) 特殊情形 $\mathcal{D}=0$，公式（17）中较简单的施密特分解使得门参数可直接用公式（8）中的振幅 d_j 表示。

我们考虑如下定义的单量子比特酉算子 V_B 和 V_C

$$V_B \coloneqq \sum_{j=0}^{1} |\gamma_j\rangle\langle j| \quad \text{and} \quad V_C \coloneqq \sum_{j=0}^{1} |\delta_j\rangle\langle j|\,. \tag{27}$$

分别对量子比特 B 和 C 应用单量子比特酉算子 V_B 和 V_C，即可得到双量子比特态 $|\psi_2\rangle$。为确定与该施密特分解相对应的式 (27) 中的酉变换 V_B 和 V_C，我们考虑一个任意的单量子比特酉矩阵

$$U = a\,|0\rangle\langle 0| + b\,|0\rangle\langle 1| + c\,|1\rangle\langle 0| + d\,|1\rangle\langle 1|\,. \tag{28}$$

基于文献 [24]，中提出的分解，酉变换 U（其中 $a\neq 0$）可按如下方式实现：

$$U = \Phi\left(\mathrm{Arg}(a)+\mathrm{Arg}(d)\right) R_z\left(\mathrm{Arg}(a^*)+\mathrm{Arg}(c)\right) R_y\left(2\arccos|a|\right) R_z\left(\mathrm{Arg}(c^*)+\mathrm{Arg}(d)\right), \tag{29}$$

其中，该分解由 $|a|$ 参数化，而 a、b、c 和 d 的自变量则通过 Φ 处理整体相位。对于特殊情形 $a=0$，也可以改为如下方式实现

$$U = \Phi\left(\mathrm{Arg}(b)+\mathrm{Arg}(c)-\pi\right) R_z\left(\mathrm{Arg}(b^*)+\mathrm{Arg}(c)+\pi\right) R_y(\pi)\,. \tag{30}$$

由于满足 $a=0$ 的酉变换集合构成 $U(2)$ 中的零测度子集，因此本文将式 (29) 视为描述一般情形，并重点关注 $a\neq 0$ 的范围。式 (27) 中的酉变换 V_B 和 V_C，可通过将相应参数代入式 (29) 中的 U 得到。

结合上述步骤，我们得到任意纠缠双量子比特纯态的显式制备电路。由于用于推导施密特分解的解析公式取决于式（11）中定义的对角系数 $\mathcal{D}$，因此我们区分两种情况。若纠缠双量子比特纯态满足 $\mathcal{D}\neq 0$，则使用式（16）中的施密特分解，由此确定式（27）中的单量子比特酉算子 V_B 和 V_C。相应的态制备电路如图 3(a) 所示。另一方面，若 $\mathcal{D}=0$，则改用式（17）中更简单的施密特分解，由此得到形式更简单的 V_B 和 V_C。特别地，单量子比特酉算符 V_B 的形式为

$$V_B = \frac{d_0}{\tau_0}|0\rangle\langle 0| + \frac{d_1}{\tau_1}|0\rangle\langle 1| + \frac{d_2}{\tau_0}|1\rangle\langle 0| + \frac{d_3}{\tau_1}|1\rangle\langle 1|\,, \tag{31}$$

且 V_C 在子系统 C 上化简为恒等算符。此情形的完整量子电路如图 3(b) 所示。

请注意，我们通过推导依赖于系数的施密特分解，并针对性地设计单量子比特酉算子 V_B 和 V_C，给出了制备振幅已指定的任意纠缠双量子比特纯态的明确电路构造。虽然实现任意两量子比特幺正算符通常需要三个 CNOT 门 [25, 26], ，但在我们的方案中，制备纠缠双量子比特纯态只需一个 CNOT 门，因此所需的纠缠资源更少。

VI. $A|BC$纠缠三量子比特纯态的制备

本节将给出制备 $A|BC$纠缠目标态的明确态制备电路。具体而言，我们将展示如何实现第三节中的通用方案，以处理 SS、SE 和 EE 型族。根据第四节 B 小节的讨论，我们假定目标态的施密特数据已知。对于每种类型，我们将 (i) 推导施密特基态的一种便捷规范形式，(ii) 确定图 1 中两量子比特幺正算符 U_{BC} 的关键作用，以及 (iii) 构造明确的量子电路，以制备该类型的任意 $A|BC$纠缠三量子比特纯态。

严格来说，主要任务是使用基本的单量子比特门和 CNOT 门来实现所需的双量子比特变换 U_{BC} 。原则上，可以调用任意双量子比特酉变换的标准分解 [8, 25–27], ，但这并不适合我们的目的。例如，参考文献 [25, 26], 中的构造旨在对整个计算基上的给定酉变换进行实现，并依赖特定的双量子比特分解 [28–30],，因此在我们的情形下显得过于复杂。然而，对于态制备，只需控制 U_{BC} 对两个正交输入态——施密特基态 $|\beta_{00}\rangle$ 和 $|\beta_{10}\rangle$——的作用即可。因此，我们通过结合量子计算中的标准量子电路技术 [18, 24], ，直接构造所需的双量子比特映射，从而对 SS、SE 和 EE 型族进行统一且清晰的处理。

A. SS 型态的态制备电路

我们给出一种制备 SS 型目标态 $|\psi_3\rangle$ 的显式电路实现。回顾一下，若某个态关于式 (1) 中的 $A|BC$ 二分划分进行施密特分解时，其施密特基向量$|\beta_{00}\rangle$ 和 $|\beta_{10}\rangle$ 关于 $B|C$ 二分划分可分，则称该态为 SS 型。具体而言，对于每个 $j = 0,\ 1$，设

$$|\beta_{j0}\rangle = |\gamma_j\rangle \otimes |\delta_j\rangle\,, \tag{32}$$

其中， $|\gamma_j\rangle$ 和 $|\delta_j\rangle$ 分别是系统 B 和 C上的任意单量子比特纯态。由于 $|\beta_{00}\rangle$ 和 $|\beta_{10}\rangle$ 正交，因此至少有一对$\{|\gamma_j\rangle\}_{j=0,\ 1}$ 和 $\{|\delta_j\rangle\}_{j=0,\ 1}$ 由正交的单量子比特态组成。

我们首先考虑子系统 B 上的量子比特态彼此正交的情形，即 $\langle\gamma_0|\gamma_1\rangle = 0$。在这种情况下，我们可以在保持施密特基向量的正交性和可分性的同时，将目标态变换为以下形式

$$U_A^\dagger \otimes W_B^\dagger \otimes W_C^\dagger\,|\psi_3\rangle_{ABC} = \lambda_0\,|000\rangle_{ABC} + \lambda_1\,|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \otimes W_C^\dagger\,|\delta_1\rangle_C\,, \tag{33}$$

其中单量子比特酉　　算子 U_A 由公式（4）给出，其余酉变换 W_B 和 W_C 定义为

$$W_B \coloneqq |\gamma_0\rangle\langle 0| + |\gamma_1\rangle\langle 1| \quad \text{and} \quad W_C \coloneqq |\delta_0\rangle\langle 0| + |\delta_0^\perp\rangle\langle 1|\,. \tag{34}$$

这一表示清楚地表明，对于 SS 型态，两量子比特幺正算符 U_{BC} 必须实现何种核心变换。忽略在 U_{BC}之前和之后施加的单量子比特酉算子，只需实现以下映射

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \;\mapsto\; |0\rangle \otimes |0\rangle\,, \tag{35}$$

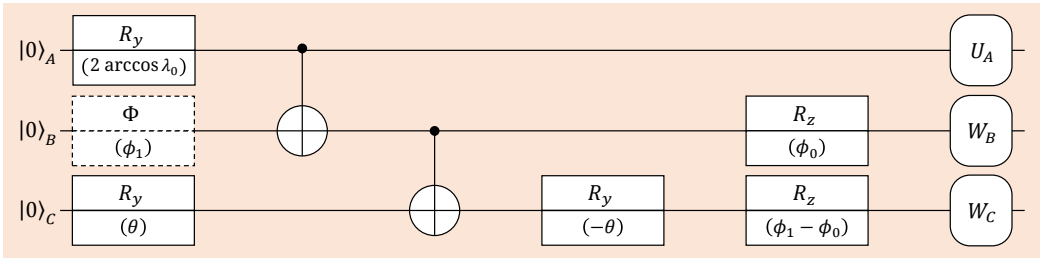
$$|1\rangle \otimes |0\rangle \;\mapsto\; |1\rangle \otimes \big(\sin\theta\, e^{i\phi_0}\,|0\rangle + \cos\theta\, e^{i\phi_1}\,|1\rangle\big), \tag{36}$$

其中 $\theta \in [0, \pi/2]$ 和 $\phi_j \in \mathbb{R}$ 对于 $j = 0,\ 1$。由于两个输入态在第一个量子比特上正交，因此可以使用一个 CNOT 门实现这一映射。具体而言，对第二个量子比特所需的条件作用可通过文献 [24]中的标准构造实现:

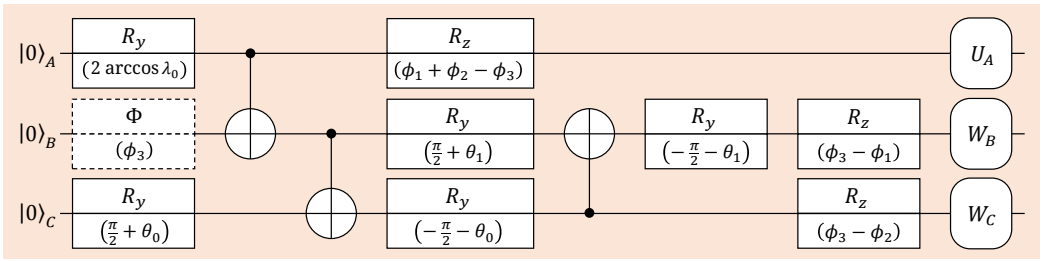
$$R_z(\phi_1 - \phi_0)R_y(-\theta)XR_y(\theta)R_z(\phi_0 - \phi_1) = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta e^{i(\phi_0-\phi_1)} \\ \cos\theta e^{i(\phi_1-\phi_0)} & -\sin\theta \end{bmatrix}, \tag{37}$$

其中 Pauli-X 门为

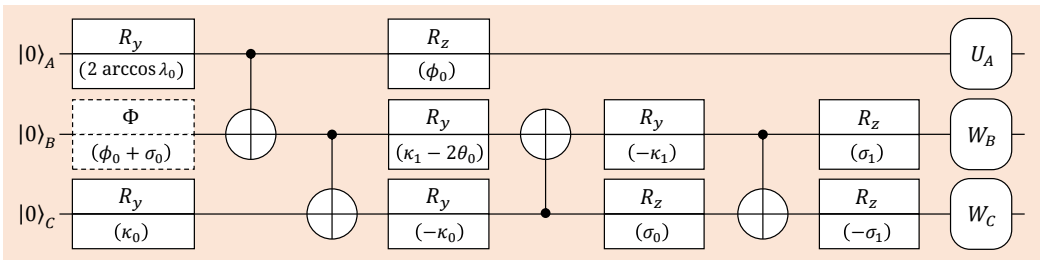
$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{38}$$



(a)



(b)



(c)

图 4. 用于制备纠缠 $A|BC$的三量子比特态 $|\psi_3\rangle$的量子电路。基于式 (1) 中的施密特分解，我们构造了 SS、SE 和 EE 型族的态制备电路。(a) 制备 SS 型态的量子电路。角度θ 和 ϕ_j 由式 (36) 给出，最终的单量子比特酉算子 U_A、 W_B和 W_C 定义于式 (4) 和 (34)。(b) 制备 SE 型态的量子电路。量子电路参数 θ_j 和 ϕ_j 由式 (43) 给出， U_A、 W_B和 W_C 定义于式 (4) 和 (41)。(c) 制备 EE 型态的量子电路。相位 ϕ_0 以及参数 κ_j 和 σ_j 分别由式 (49) 和式 (50)–(51) 给出。最终的单量子比特酉算子 U_A、 W_B和 W_C 定义于式 (4) 和 (47)。

与 CNOT 组合后，该构造仅在控制量子比特处于状态 $|1\rangle$时才会产生非平凡作用，即作用于 $|10\rangle$ 分量。所得量子电路如图 4(a) 所示。

接下来，我们考虑式 (32) 中子系统 C 上的量子比特态彼此正交的情形，即 $\langle\delta_0|\delta_1\rangle = 0$。该情形与前一情形等价，因为它是通过互换系统 B 与 C 的角色而得到的。在操作上，相应的态制备电路可通过交换图 4(a) 中各门的目标量子比特而得到。

B. SE 型态的态制备电路

我们给出一个用于制备 SE 型目标态 $|\psi_3\rangle$的显式量子电路。与 SS 型情形类似，我们确定图 1 中的两量子比特幺正算符 U_{BC} 必须实现的核心作用。假设第一个施密特基矢 $|\beta_{00}\rangle$ 是可分的，而第二个 $|\beta_{10}\rangle$ 是纠缠的。具体而言，我们写成

$$|\beta_{00}\rangle = |\gamma_0\rangle \otimes |\delta_0\rangle\,, \tag{39}$$

其中， $|\gamma_0\rangle$ 和 $|\delta_0\rangle$是任意单量子比特纯态。对每个子系统施加适当的单量子比特酉算子，可以在保持目标态 $|\psi_3\rangle$的纠缠结构不变的同时，将其变换为

$$U_A^\dagger \otimes W_B^\dagger \otimes W_C^\dagger\,|\psi_3\rangle_{ABC} = \lambda_0\,|000\rangle_{ABC} + \lambda_1\,|1\rangle_A \otimes (W_B^\dagger \otimes W_C^\dagger)\,|\beta_{10}\rangle_{BC}\,, \tag{40}$$

其中，单量子比特酉算符 U_A 由公式（4）给出，其余酉变换 W_B 和 W_C 定义如下:

$$W_B \coloneqq |\gamma_0\rangle\langle 0| + |\gamma_0^{\perp}\rangle\langle 1| \quad \text{and} \quad W_C \coloneqq |\delta_0\rangle\langle 0| + |\delta_0^{\perp}\rangle\langle 1|. \tag{41}$$

与 SS 型情形完全相同地进行推导，我们发现，对于 SE 型态，需要实现的基本映射为

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \;\mapsto\; |0\rangle \otimes |0\rangle, \tag{42}$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle \;\mapsto\; \sin\theta_0 \sin\theta_1 e^{i\phi_1} |0\rangle \otimes |1\rangle + \cos\theta_0 e^{i\phi_2} |1\rangle \otimes |0\rangle + \sin\theta_0 \cos\theta_1 e^{i\phi_3} |1\rangle \otimes |1\rangle, \tag{43}$$

其中 $\theta_0 \in (0,\ \pi/2)$、$\theta_1 \in (0,\ \pi/2]$，以及 $\phi_j \in \mathbb{R}$ 对于 $j = 1,\ 2、3$。通过改变 θ_0、θ_1 和 ϕ_j，右侧可以遍历所有与 $|00\rangle$正交的归一化双量子比特态。

现在解释如何实现上述映射。忽略相对相位 $e^{i\phi_j}$ 后，三个非零振幅的大小可以通过两个 R_y 旋转来设定。由于 $|00\rangle$ 必须保持不变，这些旋转必须有条件地实现。采用文献 [24], 中的标准构造，在目标量子比特上插入一个 CNOT 门，并将该量子比特作为目标端，置于同一量子比特上的两个单量子比特旋转之间，即可实现一个受控旋转，从而得到

$$R_y(-\theta) X R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad R_y(-\theta) I R_y(\theta) = I. \tag{44}$$

因此，当控制量子比特处于状态 $|1\rangle$ 时，目标端会经历所需的非平凡变换；而当控制量子比特处于状态 $|0\rangle$ 时，目标端上的整体作用为恒等变换。以此方式确定幅值后，我们在 R_y 旋转之前和之后加入 R_z 旋转，以纳入相位参数 ϕ_j。图 4(b) 展示了用于制备 SE 型态的最终量子电路。

最后，考虑互补情形：$|\beta_{00}\rangle$ 纠缠，而 $|\beta_{10}\rangle$ 可分。此情形与上文讨论的情形等价：只需交换两个施密特项，也就是交换施密特系数及其对应的施密特基向量，即可使用相同的电路模板，无需进一步修改。

C. EE 型态的态制备电路

最后，我们给出一个用于制备 EE型态的具体量子电路。与 SS 型和 SE 型情形一样，核心步骤是分离出图 1 中两量子比特幺正算符 U_{BC} 的关键作用。假设第一个施密特基向量的施密特分解为

$$|\beta_{00}\rangle = \cos\theta_0 |\gamma_0\rangle \otimes |\delta_0\rangle + \sin\theta_0 (-|\gamma_1\rangle) \otimes |\delta_1\rangle, \tag{45}$$

其中，$\theta_0 \in (0, \pi/2)$ 和 $\{(-1)^j |\gamma_j\rangle\}_{j=0,1}$ 以及 $\{|\delta_j\rangle\}_{j=0,1}$ 分别构成单量子比特子系统 B和 C的标准正交基。

为了明确所需的结构　　，我们应用适当的单量子比特酉算子，并将目标态改写为

$$U_A^{\dagger} \otimes W_B^{\dagger} \otimes W_C^{\dagger} |\psi_3\rangle_{ABC} = \lambda_0 |0\rangle_A \otimes (\cos\theta_0 |00\rangle_{BC} - \sin\theta_0 |11\rangle_{BC}) + \lambda_1 |1\rangle_A \otimes (W_B^{\dagger} \otimes W_C^{\dagger}) |\beta_{10}\rangle_{BC}, \tag{46}$$

单　　量子比特酉算子 U_A 由公式（4）给出，而酉变换 W_B 和 W_C 定义为

$$W_B \coloneqq \sum_{j=0}^{1} |\gamma_j\rangle\langle j| \quad \text{and} \quad W_C \coloneqq \sum_{j=0}^{1} |\delta_j\rangle\langle j|. \tag{47}$$

在这种形式下，U_{BC} 必须实现的核心映射为

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \;\mapsto\; \cos\theta_0 |0\rangle \otimes |0\rangle - \sin\theta_0 |1\rangle \otimes |1\rangle, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} |1\rangle \otimes |0\rangle \;\mapsto\; & \cos\theta_1 \sin\theta_0 e^{i\phi_0} |0\rangle \otimes |0\rangle + \sin\theta_1 \sin\theta_2 e^{i\phi_1} |0\rangle \otimes |1\rangle \\ & + \sin\theta_1 \cos\theta_2 e^{i\phi_2} |1\rangle \otimes |0\rangle + \cos\theta_1 \cos\theta_0 e^{i\phi_0} |1\rangle \otimes |1\rangle, \end{aligned} \tag{49}$$

其中 $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$ 且 $\phi_j \in \mathbb{R}$ 对于 $j = 0, 1, 2$。通过改变 θ_1、θ_2 和 ϕ_j，$|1\rangle \otimes |0\rangle$ 的像遍历所有与 $\cos\theta_0 |00\rangle - \sin\theta_0 |11\rangle$正交的归一化双量子比特态。

上述映射可以通过以图 4(b) 中的 SE 型核心电路为起点，并添加一个相对相位门和一个额外的 CNOT 门来实现，门参数需作适当选择。为此，我们引入参数

$$\kappa_0 \coloneqq \frac{\pi}{2} + \theta_1, \quad \kappa_1 \coloneqq \frac{\pi}{2} + \theta_0 - \theta_2, \tag{50}$$

$$\sigma_0 \coloneqq \frac{\phi_1 + \phi_2 - \pi}{2} - \phi_0, \quad \sigma_1 \coloneqq \frac{\pi - \phi_1 + \phi_2}{2}, \tag{51}$$

这些参数用于确定 EE 型电路中的各个门。制备这一类 EE 型 $A|BC$-纠缠态的完整电路如图 4(c) 所示。

VII. 四类具有显式制备电路的三量子比特态

我们的态制备电路能够系统地制备任意三量子比特纯态。作为一般构造的一项应用，我们为一组在量子信息论及相关量子科学领域广泛使用的三量子比特纯态 [11, 13, 14, 31–53] 给出了显式的态制备电路。

为说明这些电路的适用性，我们将这些态分为四类，记作 R_k。这里，R_k表示第 k类，它在第 k小节中定义为一组固定计算基态的叠加态；我们为每一类都给出了显式的制备电路。这些电路的一项主要优势是，其参数可直接由 R_k类态的振幅和相位数据确定。因此，只需调整门参数，就能轻松制备 R_k 类中的任意目标态。此外，任何与给定 R_k类态局部幺正等价的态，都可以通过在电路输出端附加适当的单量子比特门来制备。这表明，我们的方案能够提供实用且可直接实现的电路，用于制备已知的三量子比特态。

A. 实数集$_1$ 类： $|000\rangle$ 与 $|111\rangle$的叠加态

作为我们结果的首个应用，我们聚焦于三量子比特 GHZ态 [11, 31]及其若干变体 [13, 14,32–35]。这些态是真正三体纠缠和非局域关联的标准示例 [11, 31]，并且在多体量子通信 [32, 33] 和基于测量的量子计算 [13, 14]等多种任务中发挥着核心作用。

这些三量子比特纯态的一个共同特征是，它们都可以写成计算基态 $|000\rangle$ 和 $|111\rangle$的叠加态。具体而言，它们属于实数集 R_1 类，其态具有如下形式

$$|\psi_{\mathrm{R}_1}\rangle = r_0 e^{i\varphi_0} |000\rangle + r_1 e^{i\varphi_1} |111\rangle , \tag{52}$$

其中 r_0，$r_1 > 0$ 且 $r_0^2 + r_1^2 = 1$ 和 φ_0，$\varphi_1 \in \mathbb{R}$。与其他三量子比特纯态相比，实数集 R_1 类具有特别简单的纠缠结构。相对于 $A|BC$ 二分划分，其施密特分解为

$$|\psi_{\mathrm{R}_1}\rangle = r_0 |0\rangle \otimes \left(e^{i\varphi_0} |00\rangle\right) + r_1 |1\rangle \otimes \left(e^{i\varphi_1} |11\rangle\right) . \tag{53}$$

根据我们的纠缠分类，状态 $|\psi_{\mathrm{R}_1}\rangle$ 因此属于 SS 型。为获得制备此类状态的量子电路，我们确定图 4(a) 所示 SS 型模板中的门参数和单量子比特酉算子。

所得量子电路如图 5(a) 所示，由一系列门组成，其参数仅用目标态 $|\psi_{\mathrm{R}_1}\rangle$ 的振幅 r_j 和相位 φ_j 表示。从实现角度来看，可以省略电路中的全局相位门 Φ 。此外，相对相位门 P 可以作用于第一个或第二个量子比特，而输出态仅相差一个全局相位。特别是，如果将 P 移至第一个量子比特，就可以用深度为 3 的电路制备目标态。表 II 列出了若干具有代表性的 R_1 类状态及其计算基系数。

B. 实数集$_2$ 类： $|000\rangle$、 $|110\rangle$、 $|111\rangle$ 的叠加态

作为第二个应用，我们考虑另一种 SS 型族，并将其记为 R_2 类。这些态在三量子比特纠缠分类 [36], 受控隐形传态协议 [37], 以及多体纠缠度量 [38]的分析中发挥着重要作用。

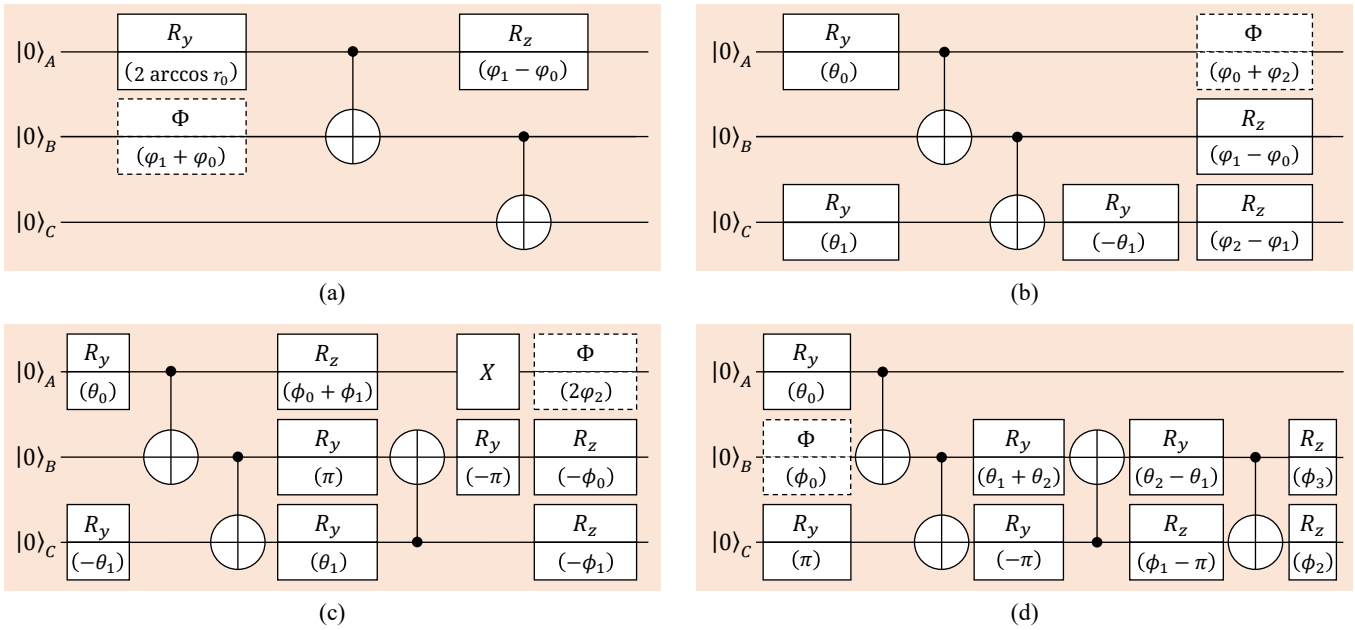


图 5。制备 R_1–R_4 类的显式量子电路。(a) 式 (52) 中定义的 R_1 类的量子电路。(b) R_2 类的量子电路。相位 φ_j 出现在式 (54) 中，旋转角 θ_j 见式 (57)。(c) R_3 类的量子电路。门参数由式 (58) 中的态参数 φ_2 以及式 (61) 中的 θ_j 和 ϕ_j 确定。(d) R_4 类的量子电路。式 (62) 中的态参数 r_j 和 φ_j 决定了式 (65)–(67) 中的门参数 θ_j 和 ϕ_j。通过选择适当的参数值，这些量子电路可以制备表 II 中列出的态。

表 II。属于 R_1–R_4 类的三量子比特纯态代表性示例。第一列表示类别归属。接下来的八列列出与计算基态相关联的系数。第十列说明制备目标态后施加的任何额外局域酉变换（LUs），最后一列列出引用文献中使用的态名称。此处，短横线“–”表示第 2–9 列中的系数为零，并表示第 10 列中未施加 LUs。这里 $p>0$ 和 $p_j>0$、$q_j\geq 0$ 取 $q_0\geq q_1\geq q_2$，其中 n 为正整数，H 表示 Hadamard 门 [18, 19]。

类别	$\|000\rangle$	$\|001\rangle$	$\|010\rangle$	$\|011\rangle$	$\|100\rangle$	$\|101\rangle$	$\|110\rangle$	$\|111\rangle$	LUs	Name
R_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	–	–	–	–	–	–	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	–	GHZ态 [11]
	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	–	–	–	–	–	–	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$	–	GHZ型态 [34]
	$r_0e^{i\varphi_0}$	–	–	–	–	–	–	$r_1e^{i\varphi_1}$	–	类GHZ态 [32],广义 GHZ 态 [35]
	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	–	–	–	–	–	–	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$H\otimes I\otimes H$	簇态 [13, 33], 图态 $\|P_3\rangle$ [14]
R_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	–	–	–	–	–	$\frac{r_0}{\sqrt{2}}$	$\frac{r_1}{\sqrt{2}}$	–	最大切片态 [37]
	$r_0e^{i\varphi_0}$	–	–	–	–	–	$r_1e^{i\varphi_1}$	$r_2e^{i\varphi_2}$	–	IV'' 型态 [36]
	p_0	–	–	–	–	–	p_1	p_2	–	3b-3型态 [38]
R_3	–	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	–	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	–	–	–	–	W 态 [11], Dicke 态 $\|D_1^3\rangle$ [43]
	–	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}}$	–	$\frac{1}{\sqrt{2n+2}}$	–	–	–	–	W_n 态 [34]
	–	q_0	q_1	–	q_2	–	–	–	–	W型态 [32]
	–	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{1}{2}$	–	–	–	–	W类态 [41, 42]
	–	$r_0e^{i\varphi_0}$	$r_1e^{i\varphi_1}$	–	$r_2e^{i\varphi_2}$	–	–	–	–	广义W态 [35], W型态 [39, 40]
	–	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	–	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	–	–	–	$X^{\otimes 3}$	Dicke 态 $\|D_2^3\rangle$ [43], 簇Werner态 [44]
R_4	$\frac{1}{2}$	–	–	$\pm\frac{1}{2}$	–	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	–	–	类GHZ态 [45–47]
	$-\frac{1}{2}$	–	–	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	–	$(HX)^{\otimes 3}$	图态 $\|K_3\rangle$ [14]
	$\frac{1}{2}$	–	–	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	–	–	相位翻转码 [52, 53]
	$\frac{1}{2}$	–	–	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	–	$X^{\otimes 3}$	相位翻转码 [52, 53]
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	–	–	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	–	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	–	$X^{\otimes 3}$	衰变态 [48]
	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	–	–	$\frac{-1}{\sqrt{6}}$	–	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	–	$X^{\otimes 3}$	置换对称态 [49, 50]

在文献 [36–38], 中，相应的三量子比特态可写成 $|000\rangle$、 $|110\rangle$和 $|111\rangle$的叠加态。因此，我们考虑这种形式最一般的叠加态:

$$|\psi_{\mathrm{R}_2}\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|000\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|110\rangle + r_2 e^{i\varphi_2}|111\rangle\,, \tag{54}$$

其中，对于 $j = 0,1,2$， $r_j > 0$ 满足 $\sum_{j=0}^{2} r_j^2 = 1$ 和 $\varphi_j \in \mathbb{R}$。与一般的三量子比特纯态相比，R_2类关于 $A|BC$ 二分划分也具有简单的纠缠结构。态 $|\psi_{\mathrm{R}_2}\rangle$ 的施密特分解为

$$|\psi_{\mathrm{R}_2}\rangle = r_0|0\rangle\otimes|\beta_{00}\rangle + \sqrt{r_1^2+r_2^2}\,|1\rangle\otimes|\beta_{10}\rangle\,, \tag{55}$$

其中，施密特基态 $|\beta_{j0}\rangle$为

$$|\beta_{00}\rangle = e^{i\varphi_0}|00\rangle \quad \text{and} \quad |\beta_{10}\rangle = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}e^{i\varphi_1}|10\rangle + \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}e^{i\varphi_2}|11\rangle\,. \tag{56}$$

根据我们的纠缠分类，目标态 $|\psi_{\mathrm{R}_2}\rangle$ 因此是SS型态。基于此，我们得到图 5(b)中的显式量子电路，用于制备 $|\psi_{\mathrm{R}_2}\rangle$。将图 4(a)中的SS 型模板具体化后，我们得到一个量子电路，其旋转角为

$$\theta_0 = 2\arccos r_0 \quad \text{and} \quad \theta_1 = \arccos\left(\frac{r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}\right). \tag{57}$$

表 II 列出了代表性的 R_2 类态，以及相应计算基态的系数。特别地，采用表 II 中列出的参数选择时，图 5(b) 中的量子电路可直接用作态制备模块，以制备文献 [36–38] 中出现的 IV'' 型态、最大切片态和 3b-3态。

C. R_3 类: $|001\rangle$、 $|010\rangle$、 $|100\rangle$的叠加态

作为我们这一构造的另一应用，我们考虑三量子比特 W 态 [11] 及其若干变体 [32,34, 35, 39–44]。与 GHZ态一起，W 态被广泛视为典型的真正纠缠三量子比特态，并作为量子信息处理中各类任务的资源而得到广泛研究。

所有这些态都位于由计算基态 $|001\rangle$、 $|010\rangle$ 和$|100\rangle$张成的单激发子空间中。受此启发，我们引入如下定义的 R_3 类

$$|\psi_{\mathrm{R}_3}\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|001\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|010\rangle + r_2 e^{i\varphi_2}|100\rangle\,, \tag{58}$$

其中 $r_j > 0$ 对于 $j = 0$，1，2，且 $\sum_{j=0}^{2} r_j^2 = 1$ 和 $\varphi_j \in \mathbb{R}$。关于 $A|BC$ 二分划分，目标态$|\psi_{\mathrm{R}_3}\rangle$ 的施密特分解为

$$|\psi_{\mathrm{R}_3}\rangle = r_2|1\rangle\otimes|\beta_{00}\rangle + \sqrt{r_0^2+r_1^2}\,|0\rangle\otimes|\beta_{10}\rangle\,, \tag{59}$$

其中施密特基态 $|\beta_{j0}\rangle$为

$$|\beta_{00}\rangle = e^{i\varphi_2}|00\rangle \quad \text{and} \quad |\beta_{10}\rangle = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+r_1^2}}e^{i\varphi_0}|01\rangle + \frac{r_1}{\sqrt{r_0^2+r_1^2}}e^{i\varphi_1}|10\rangle\,. \tag{60}$$

该施密特分解表明， $|\psi_{\mathrm{R}_3}\rangle$ 属于我们分类中的 SE 型。因此，可通过对图 4(b) 所示的 SE型模板进行特化，得到制备目标态的量子电路。在这种情况下，门参数选取为

$$\theta_0 = 2\arccos r_2, \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{r_1}{\sqrt{r_0^2+r_1^2}}\right), \quad \text{and} \quad \phi_j = \varphi_j - \varphi_2, \tag{61}$$

其中， ϕ_j 定义于 $j = 0$、1、2。所得电路实现如图 5(c)所示。具有代表性的 R_3 类态列于表 II。

表 III. 在假设 CNOT 门仅可用于相邻量子比特之间的前提下，对 [9] 的固定深度模板与本工作中针对每个 R_k 类所得到的量子电路进行的资源比较。

量子电路 / 类	$n(R_z)$	$n(R_y)$	n(CNOT)	总深度	
固定模板 [9]	7	8	6	21	14
R_1 类	1	1	2	4	3
R_2 类	2	3	2	7	5
实数集$_3$ 类	3	5	3	11	7
实数集$_4$ 类	3	5	4	12	8

D. 实数集$_4$ 类：$|000\rangle$、$|011\rangle$、$|101\rangle$、$|110\rangle$的叠加态

现在我们转向 EE 型三量子比特态的一个特殊子类。与前述类别不同，这一类态由四个计算基态 $|000\rangle$、$|011\rangle$、$|101\rangle$ 和 $|110\rangle$ 张成。这些基态的叠加态出现在多种场景中，包括多体图态 [14], 量子隐形传态和受控量子隐形传态方案 [45, 46],，以及对多体纠缠 [47–50] 和非定域性 [51–53]的研究。

在这些协议的实际实现中，通常需要一种高效的方法，在初始步骤中制备这类态。基于此，我们将实数集$_4$ 类定义为

$$|\psi_{\mathrm{R}_4}\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|000\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|011\rangle + r_2 e^{i\varphi_2}|101\rangle + r_3 e^{i\varphi_3}|110\rangle\,, \tag{62}$$

其中，对于 $j=0,\ \ r_j>0$，1，2，3，且满足$\sum_{j=0}^{3} r_j^2 = 1$和 $\varphi_j \in \mathbb{R}$。通过适当选择这些参数，该类涵盖了一系列值得关注的三量子比特态。对于 $A|BC$ 二分划分，目标态$|\psi_{\mathrm{R}_4}\rangle$的施密特分解为

$$|\psi_{\mathrm{R}_4}\rangle = \sqrt{r_0^2+r_1^2}\,|0\rangle\otimes|\beta_{00}\rangle + \sqrt{r_2^2+r_3^2}\,|1\rangle\otimes|\beta_{10}\rangle\,, \tag{63}$$

其中，施密特基态 $|\beta_{j0}\rangle$为

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+r_1^2}}e^{i\varphi_0}|00\rangle + \frac{r_1}{\sqrt{r_0^2+r_1^2}}e^{i\varphi_1}|11\rangle \quad \text{and} \quad |\beta_{10}\rangle = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}}e^{i\varphi_2}|01\rangle + \frac{r_3}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}}e^{i\varphi_3}|10\rangle\,. \tag{64}$$

该分解直接导出一个显式的制备电路。具体而言，将图 4(c) 中的 EE 型模板特化后，便得到图 5(d) 所示的量子电路。为简洁地描述该量子电路，我们将门参数θ_j 和 ϕ_j 表示为态参数 r_j 和 φ_j 的函数：

$$\theta_0 = 2\arccos\sqrt{r_0^2+r_1^2},\quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{r_3}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}}\right),\quad \theta_2 = -\arccos\left(\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+r_1^2}}\right), \tag{65}$$

$$\phi_0 = \frac{+\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}{2},\quad \phi_1 = \frac{-\varphi_0-\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}{2}, \tag{66}$$

$$\phi_2 = \frac{-\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3}{2},\quad \phi_3 = \frac{-\varphi_0+\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3}{2}+\pi. \tag{67}$$

表 II 列出了实数集$_4$ 类中的代表性示例。

总之，本节展示了如何将通用态制备框架特化，以高效制备量子信息文献中出现的多种代表性三量子比特纯态。我们将这些纯态分为四类 R_k ，并为每一类推导出显式的制备电路。所得实现的门参数由目标态的振幅和相位数据直接确定，因此只需调节这些参数即可制备任意 R_k 类纯态；此外，对于与给定 R_k 类纯态局部幺正等价的纯态，只需附加适当的单量子比特门即可制备。

从实现角度来看，利用各类纯态受限的支撑集和纠缠结构，相较于固定深度模板可大幅节省资源。如表 III 所示，文献 [9] 中的固定模板需要 18 个门、深度为 11；而针对各类纯态设计的量子电路则将实数集 R_1–R_4 类的总门数降至 4–12 个，深度降至 3–8。对于较简单的 R_1 和 R_2，类，这些改进尤为显著；即使在最一般的 R_4 类情形下，改进仍然明显。

VIII. 结论

在本工作中，我们基于关于 $A|BC$ 二分划分的施密特分解，提出了一种完全明确的确定性三量子比特态制备方法。给定由其

计算基振幅指定的任意目标态，我们给出了一个具体流程，用于：(i) 识别其纠缠类型；(ii) 提取相关结构数据，包括施密特系数和施密特基；以及 (iii) 通过一组小型规范电路模块，将这些数据映射为态制备电路。在此过程中，我们为每种纠缠类型及若干具有实际意义的子类提供了明确的量子电路，从而为三量子比特态制备构建了一个结构化的编译框架。

我们方法的一个关键特点是具有构造性，且参数明确：给定目标振幅后，所需的门参数便可通过一系列确定性的解析步骤得出 [5, 6]。具体而言，综合过程不依赖临时的局部调整、隐式的规范选择或针对不同情形的隐藏分解；相反，我们的流程在每个阶段都有明确的输入输出规范，包括纠缠类型分类、施密特数据提取和电路实例化。

我们的量子电路也能以实际应用中切实可行的方式适应连通性。在 IBM Quantum 设备等 NISQ时代超导平台上，可用的双量子比特相互作用受稀疏耦合映射的限制 [54]，而对三量子比特酉算子进行直接分解，很容易产生额外的路由开销，尤其是 SWAP插入 [55]。我们围绕 $A|BC$ 拆分来组织制备过程，并相应安排双量子比特相互作用，从而将纠缠操作限制在少量有针对性的双量子比特模块中。因此，在受限耦合图上部署量子电路时，通常能在实践中显著减少额外 SWAP路由的需求 [55, 56]。

最后，当存在额外结构时，我们的量子电路相较于通用三量子比特构造可以减少资源消耗 [5]。表 III 总结了与 [9] 的固定深度模板的定量比较。对于本文考察的 R_k 态族，我们的类别特定量子电路始终比固定模板具有更少的门数和更浅的整体深度，其中 R_1 和 R_2 类的节省尤为显著。在近期的 NISQ时代实现中，这种缩减尤为重要，因为 CNOT门数量和整体电路深度是导致保真度损失的主要因素 [1]。

未来一个自然的研究方向是，结合关于 n-量子比特态制备的一般深度与资源缩放考量，探究这种施密特分解方法在多大程度上能够扩展到三个以上的量子比特 [1, 57]。除了提升在 NISQ硬件上的性能之外，探索如何将相同思路应用于容错量子计算环境也很有意义，因为在此类环境中，纠错开销可能会放大量子电路深度和纠缠操作的成本 [1]。一种有前景的途径是保留相同的组织原则——选取固定的二分划分并提取二分结构数据——同时构建一套编译模块层级，以系统地将一个 n-量子比特制备流程扩展为一个 $(n+1)$-量子比特流程。这引出了若干具体问题：如何在迭代式基于二分划分的综合过程中控制双量子比特门数量的增长；如何在系统规模扩大时保持硬件感知布局；以及哪些结构化态族具备类似 R_k 类的类别特定简化。解决这些问题将有助于厘清该框架在实践中的可扩展性，并可能推动形成一种通用的构造性方法，用于确定性态制备，同时提供明确参数和可部署的连通性。

致谢

我们感谢 Soojoon Lee 提供的宝贵帮助和富有见地的讨论。本研究得到韩国国家研究基金会（NRF）通过教育部资助的基础科学研究计划支持（项目编号：NRF-2020R1I1A1A01058364、RS-2023-00243988、RS-2025-25415913 和 RS-2024-00432600）。

[1] J. Preskill, 《含噪中型量子时代及其之后的量子计算》, Quantum **2**, 79（2018）, arXiv:1801.00862 [量子物理]。[2] D. Aharonov 和 M. Ben-Or, 《恒定错误率下的容错量子计算》, SIAM计算杂志**38**, 1207（2008）, arXiv:量子物理/9906129 [量子物理]。[3] E. Knill、R. Laflamme 和 W. H. Zurek, 《弹性量子计算》, 科学**279**, 342（1998）。[4] S. Bravyi 和 A. Kitaev, 《利用理想 Clifford门和含噪辅助量子比特实现通用量子计算》, 《物理评论 A》**71**, 022316（2005）, arXiv:量子物理/0403025 [量子物理]。[5] M. Plesch 和 v. Brukner, 《利用通用门分解进行量子态制备》, Physical Review A **83**, 032302（2011）, arXiv:1003.5760 [量子物理]。[6] M. M¨ott¨onen、J. J. Vartiainen、V. Bergholm 和 M. M. Salomaa, 《利用均匀受控旋转进行量子态变换》, Quantum Inform. Compu. **5**, 467（2005）。[7] V. V. Shende、S. S. Bullock 和 I. L. Markov, 《量子逻辑电路综合》, IEEE计算机辅助设计与集成电路系统汇刊**25**, 1000（2006）, arXiv:量子物理/0406176 [量子物理]。

[8] R. Iten、R. Colbeck、I. Kukuljan、J. Home 和 M. Christandl，《等距变换的量子电路》，《物理评论 A》93，032318（2016）。[9] O. Giraud、M. ˇZnidariˇc 和 B. Georgeot，《三量子比特随机态的量子电路》，《物理评论 A》80，042309（2009）。[10] O. Perdomo、N. Castaneda 和 R. Vogeler，《三量子比特态的制备》（2022），arXiv:2201.03724 [量子物理]。[11] W. D¨ur、G. Vidal 和 J. I. Cirac，《三个量子比特可通过两种不等价方式纠缠》，《物理评论 A》62，062314（2000）。[12] C. H. Bennett、G. Brassard、C. Cr´epeau、R. Jozsa、A. Peres 和 W. K. Wootters，《通过双重经典与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森信道隐形传送未知量子态》，《物理评论快报》70，1895（1993）。[13] H. J. Briegel 和 R. Raussendorf，《相互作用粒子阵列中的持久纠缠》，《物理评论快报》86，910（2001）。[14] M. Hein、J. Eisert 和 H. J. Briegel，《图态中的多方纠缠》，《物理评论 A》69，062311（2004）。[15] R. Raussendorf 和 H. J. Briegel，《单向量子计算机》，《物理评论快报》86，5188（2001）。[16] F. Verstraete、J. Dehaene、B. De Moor 和 H. Verschelde，《四个量子比特可通过九种不同方式纠缠》，《物理评论 A》65，052112（2002）。[17] M. ˇZnidariˇc、O. Giraud 和 B. Georgeot，《生成三量子比特态所需受控非门的最优数量》，《物理评论 A》77，032320（2008）。[18] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，*Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*（剑桥大学出版社，2010）。[19] M. M. Wilde，*Quantum Information Theory*（剑桥大学出版社，2013）。[20] B. Murta、P. M. Q. Cruz 和 J. Fern´andez-Rossier，《在含噪中等规模量子计算机上制备价键固体态》，《物理评论研究》5，013190（2023）。[21] S. A. Hill 和 W. K. Wootters，《一对量子比特的纠缠》，《物理评论快报》78，5022（1997）。[22] W. K. Wootters，《两个量子比特任意态的形成纠缠》，《物理评论快报》80，2245（1998）。[23] Y. Lee、Y. Min、S. Bae 和 Y. Lim，《双量子比特系统中相互正交量子态的施密特分解公式》，《物理学杂志A：数学与理论》58，445303（2025）。[24] A. Barenco、C. H. Bennett、R. Cleve、D. P. DiVincenzo、N. Margolus、P. Shor、T. Sleator、J. A. Smolin 和 H. Weinfurter，《量子计算的基本门》，《物理评论 A》52，3457（1995）。[25] G. Vidal 和 C. M. Dawson，《使用三个受控非门实现双量子比特变换的通用量子电路》，《物理评论 A》69，010301（2004）。[26] F. Vatan 和 C. Williams，《一般双量子比特门的最优量子电路》，《物理评论 A》69，032315（2004）。[27] M. M¨ott¨onen、J. J. Vartiainen、V. Bergholm 和 M. M. Salomaa，《一般多量子比特门的量子电路》，《物理评论快报》93，130502（2004）。[28] N. Khaneja、R. Brockett 和 S. J. Glaser，《自旋系统中的时间最优控制》，《物理评论 A》63，032308（2001）。[29] B. Kraus 和 J. I. Cirac，《使用双量子比特门最优生成纠缠》，《物理评论 A》63，062309（2001）。[30] J. Zhang、J. Vala、S. Sastry 和 K. B. Whaley，《非局域双量子比特操作的几何理论》，《物理评论 A》67，042313 2003( )。[31] D. M. Greenberger、M. A. Horne、A. Shimony 和 A. Zeilinger，《无不等式的贝尔定理》，《美国物理学杂志》58，1131（1990）。[32] B. Fortescue 和 H.-K. Lo，《由 W 态和 W类态产生随机双体纠缠》，《物理评论快报》98，260501（2007）。[33] D. Singh、S. Kumar 和 B. K. Behera，《存在噪声时通过不同纠缠信道进行量子隐形传态的复杂度分析》，《IET量子通信》4，1（2023）。[34] S. Roy 和 B. Ghosh，《利用一些离散三体和四体态研究受控密集编码》，《国际量子信息杂志》13，1550033（2015），https://doi.org/10.1142/S0219749915500331。[35] C. Eltschka、A. Osterloh、J. Siewert 和 A. Uhlmann，《广义GHZ态与广义W态混合态的三缠结》，《新物理学杂志》10，043014（2008）。[36] C. Sab´ın 和 G. Garc´ıa-Alcaine，《三量子比特系统中的纠缠分类》，《欧洲物理学杂志D》48，435（2008）。[37] X.-H. Li 和 S. Ghose，《通过部分纠缠信道实现完美受控隐形传态的控制能力》，《物理评论 A》90，052305（2014）。[38] S. Luna-Hern´andez、M. Enr´ıquez 和 O. Rosas-Ortiz，《测量三量子比特系统整体纠缠与真正纠缠的几何表述》，《科学报告》14，25684（2024）。[39] Z.-X. Man、Y.-J. Xia 和 N. B. An，《N量子比特类W态的量子隐形传态》，《实验与理论物理学快报》85，662（2007）。[40] L.-L. Sun、H.-F. Wang、S. Zhang 和 K.-H. Yeon，《振幅阻尼下三量子比特W型态的纠缠纯化》，《韩国物理学会志》61，1938（2012）。[41] Y. you Nie、Y. hua Li、J. chang Liu 和 M. huang Sang，《利用四组W类态共享任意三量子比特态》，《光学通信》284，1457（2011）。[42] I. N. Artawan 和 A. Purwanto，《通过W类态隐形传态三量子比特纠缠态》，《物理学会议系列》1170，012016（2019）。[43] C. Marconi、G. M¨uller-Rigat、J. Romero-Pallej`a、J. Tura 和 A. Sanpera，《对称量子态：近期进展综述》（2025），arXiv:2506.10185 [量子物理]。[44] A. M. Frydryszak，《四量子比特的 η-三角态与纠缠度量》（2009），arXiv:0902.3553 [量子物理]。[45] H. Prakash 和 A. K. Maurya，《利用纠缠三量子比特态和“魔法基”进行量子隐形传态》，《光学通信》284，5024（2011）。[46] K. Yang、L. Huang、W. Yang 和 F. Song，《通过类GHZ态实现量子隐形传态》，《国际理论物理学杂志》48，516（2009）。

[47] H.-p. Zhu, 通过类GHZ态实现任意双量子比特态的完美隐形传态，《国际理论物理学杂志》**53**，4095（2014）。[48] A. Ac´ ın、J. I. Latorre 和 P. Pascual，正电子素中的三方纠缠，《物理评论 A》**63**，042107（2001）。[49] D. Singh、V. Gulati、Arvind 和 K. Dorai，对称三量子比特纠缠态的实验构造及其在核磁共振量子模拟器上检验贝尔不等式违背中的应用，《欧洲物理快报》**140**，68001（2022）。[50] M. Aulbach、D. Markham 和 M. Murao，基于几何度量的最大纠缠对称态，《新物理学杂志》**12**，073025（2010）。[51] F. Nusur，通过 W 态和类GHZ态实现双量子比特态的量子隐形传态，《物理学会议系列》**1951**，012070（2021）。[52] L. Huang 和 X. Wu，九量子比特纠错码的新构造（2021），arXiv:2110.05130 [量子物理]。[53] L. Huang，级联三量子比特码的优势（2024），arXiv:2209.15435 [量子物理]。[54] IBM 量子重六边形晶格，IBM 量子博客（2021），2021年7月7日。[55] G. Li、Y. Ding 和 Y. Xie，解决 NISQ 时代量子设备的量子比特映射问题，载于 *Proceedings of the Twenty-Fourth International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems*，ASPLOS '19（计算机协会，纽约，美国，2019年），第 1001–1014 页。[56] Sabreswap（最新版本）——IBM 量子文档，IBM Quantum Documentation（Qiskit API）。[57] X.-M. Zhang、T. Li 和 X. Yuan，最优电路深度下的量子态制备：实现与应用，《物理评论快报》**129**，230504（2022）。