三能级量子比特量子信道的无界长度最短同步词*

Bjørn Kjos-Hanssen夏威夷大学数学系，*M¯anoa*美国檀香山
bjoernkh@hawaii.edu

Swarnalakshmi Lakshmanan夏威夷大学数学系，*M¯anoa*美国檀香山
slaks@hawaii.edu

arXiv:2603.00861v1 [cs.DM] 1 Mar 2026

摘要——**Grudka、Karczewski、Kurzynski、Stempin、W´ojcik 和 Wojcik（2025年）构造了具有长度为 3 的三能级量子比特同步词的量子信道。我们将他们的结果推广到最短同步词长度任意大的情形，这与 Černˇy 关于有限自动机的猜想形成对照。**

索引词——**同步词，量子信道，Cern´y 的猜想**

一、引言

Grudka 等人 [1] 构造了具有长度为 3 的同步词的三能级量子比特量子信道。我们将他们的结果扩展到任意长度的最短同步词。

定义 1. 确定性自动机（DA） M 由状态集合 Q、字母表 Σ、初始状态 q_0、接受状态集合 $F \subseteq Q$以及转移函数 δ 组成：$Q \times \Sigma \to Q$。如果 Q 和 Σ 是有限集合，那么 M 是确定性有限自动机（DFA）。令 λ 表示空词，并令 Σ^* 表示字母表 Σ 上的有限词集合。函数 δ 诱导出映射 δ^*：$Q \times \Sigma^* \to Q$，其定义为

$$\delta^*(q, \lambda) = q, \quad \delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$$

其中 $w \in \Sigma^*$ 和 $a \in \Sigma^*$。

定义 2. DFA 中的同步词 是字母表 $\{A, B\}$ 上的一个词 $w \in \{A, B\}^*$，满足对于所有状态 r 和 q，$\delta^*(q, w) = \delta^*(r, w)$。

我们的研究受到 Cern´y 关于 DFA 中最短同步词的猜想 [2]的启发。J´an Cern´y 证明，对于某些具有 q 多个状态的 DFA，最短同步词的长度为 $(q-1)^2$。长期以来的*Cern´*<style id='11>y 的猜想 断言，只要 DFA 存在同步词，就存在长度不超过此界的同步词。我们的结果表明，如果只计算基态（即维数），那么在量子情形下，Cern´y 的猜想并不成立。原因很简单：最短同步词的长度根本不存在有限上界，即使将其视为维数的函数也是如此。

我们在定理 11 中证明，对于每个 $l \in \mathbb{N}$，都存在一个由三能级量子比特构成的量子信道（因此具有 $q = 3$ 个基态），其中存在同步词，但不存在长度不超过 l 的同步词。

本工作部分得到西蒙斯基金会的一项资助支持（#704836，授予 Bjørn Kjos-Hanssen）。

II. 构造

我们的构造是对 Grudka 等人所给出的一种构造的修改。设

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

并定义克劳斯算子 A by $A(\rho) = A_1\rho A_1^* + A_2\rho A_2^*$。对于每个正整数 n，令

$$B = B_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $\theta = \pi/(2n)$，并定义克劳斯算子 B by$B(\rho) = B\rho B^*$。

令 e_1, e_2, e_3 为 $\mathbb{C}^3$的标准基向量，因此例如

$$|e_2\rangle\langle e_2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 3. 对于任意正整数 n，$\mathscr{M}_n$ 是一个密度自动机，其状态为 $\mathbb{C}^3$上的密度矩阵，字母表为 $\{A, B_n\}$，转移函数为

$$\delta(\rho, C) = C(\rho)$$

对于 $C \in \{A, B_n\}$。可数子自动机 $\mathscr{M}_n'$与 $\mathscr{M}_n$ 相同，只是其状态集为

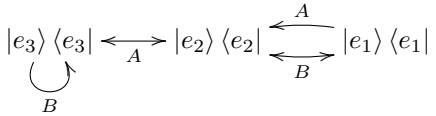
$$Q = \{\delta^*(|e_1\rangle\langle e_1|, w);\, w \in \{A, B_n\}^*\}$$

即，可通过使用 A 和 B_n 从 $|e_1\rangle\langle e_1|$ 到达的密度矩阵。

注意，A 和 B 都是量子信道，尤其是迹保持的，并且满足

$$\sum A_i^* A_i = \mathbb{1} = B^* B. \tag{1}$$

如果 A和 B 都是单射，它们就无法生成同步词。例如，$\mathscr{M}_1'$ 的完整形式如下：



经检查可验证，词 ABA 是同步的，而 A 的非单射性是实现这一点的关键。（无限且更复杂的密度自动机 $\mathscr{M}_2'$的有限部分见图 1。）能够维持（1）这一事实，是单射性之后令人惊喜的次优之选。

III. 主要结果

给定正整数 l 。我们的策略很简单：若取角度 θ，使其相较于 l非常小，则算子B 接近恒等矩阵 I，因此，长度不超过 l 的任意词都近似只是 A^p的某个幂。由于 A 置换了 $|e_2\rangle\langle e_2|$和 $|e_3\rangle\langle e_3|$，可知不存在长度不超过 l 的同步词。

为了精确描述 B 接近 I 的程度，我们使用迹距离。

定义 4. ρ与 σ 之间的迹距离定义为$D_{\mathrm{tr}}(\rho,\sigma)$ $=\frac{1}{2}\|\rho-\sigma\|_1=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\sqrt{(\rho-\sigma)^2}\big)$。

我们回顾著名的定理 5。

引理 5. 对于任意量子信道 Φ，

$$D_{\mathrm{tr}}(\Phi(\rho),\Phi(\sigma))\le D_{\mathrm{tr}}(\rho,\sigma).$$

引理 6(H¨older 不等式（适用于 Schatten范数） **[?]** (5.6))。 设 A、B 为复矩阵（或实矩阵），且令 $1\le p$、q、$r\le\infty$满足

$$\frac{1}{r}\ \le\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

Then

$$\|AB\|_r\ \le\ \|A\|_p\,\|B\|_q,$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 表示 ***Schatten*** p-范数，

$$\|X\|_p=\begin{cases}\big(\mathrm{tr}[(X^*X)^{p/2}]\big)^{1/p}, & 1\le p<\infty,\\ \max_i s_i(X), & p=\infty,\end{cases}$$

且 $s_i(X)$ 是 X的奇异值。

特别地，对于 $p=q=\infty$ 和 $r=1$，

$$\|AB\|_1\le\|A\|_\infty\,\|B\|_1.$$

现在我们为一个接近恒等矩阵的秩一信道得到一个迹距离界。

引理 7。 设 B 为一个 3×3 实矩阵，并定义一个量子信道

$$\Phi(\rho)=B\rho B^T.$$

假设 B 的每个元素与恒等矩阵的差至多为 $\epsilon\le2/9$:

$$B=I+E,\qquad |E_{ij}|\le\epsilon.$$

那么 $D_{\mathrm{tr}}(\rho,\ \Phi(\rho$<style id='9'>$\ \le4\epsilon$。

证明。 我们希望给迹距离作出上界

$$D_{\mathrm{tr}}(\rho,\Phi(\rho))=\tfrac{1}{2}\|\Phi(\rho)-\rho\|_1=\tfrac{1}{2}\|B\rho B^T-\rho\|_1.$$

写出

$$B\rho B^T-\rho=(B-I)\rho B^T+\rho(B^T-I).$$

应用三角不等式和定理 6

$$\|XYZ\|_1\le\|XY\|_1\|Z\|_\infty\le\|X\|_\infty\|Y\|_1\|Z\|_\infty,$$

我们得到

$$\|B\rho B^T-\rho\|_1\le\|B-I\|_\infty\|\rho\|_1\|B\|_\infty+\|\rho\|_1\|B^T-I\|_\infty.$$

由于 $\|\rho\|_1=$迹$\rho=1$ 且 $\|B^T-I\|_\infty=\|B-I\|_\infty$,

$$\|B\rho B^T-\rho\|_1\le\|B-I\|_\infty(\|B\|_\infty+1).\tag{2}$$

对于一个 3×3 矩阵，弗罗贝尼乌斯范数满足

$$\|M\|_\infty\le\|M\|_F=\sqrt{\sum_{i,j}|M_{ij}|^2}\le3\max_{i,j}|M_{ij}|.$$

因此，利用 $|E_{ij}|\le\epsilon$,

$$\|B-I\|_\infty=\|E\|_\infty\le\|E\|_F\le3\epsilon.$$

此外,

$$\|B\|_\infty\le\|I\|_\infty+\|E\|_\infty\le1+3\epsilon.$$

代入式 (2) 得

$$\|B\rho B^T-\rho\|_1\le(3\epsilon)\big(1+1+3\epsilon\big)=3\epsilon(2+3\epsilon).$$

最后,

$$D_{\mathrm{tr}}(\rho,\Phi(\rho))=\tfrac{1}{2}\|B\rho B^T-\rho\|_1\le3\epsilon+\tfrac{9}{2}\epsilon^2\le4\epsilon.\qquad\square$$

引理 8. 对于我们选取的 $B=B_n$，定理 7 中的值 $|E_{ij}|$ 有上界 $|\theta|$。

证明。 这些值为 0、$\cos\theta-1$和 $\pm\sin\theta$，并且有$|\sin\theta|\le|\theta|$和 $|\cos\theta-1|\le|\theta|$。 $\square$

引理 9. 如果 $D_{\mathrm{tr}}(B(\rho)\ \rho)\le\delta$ 对所有 ρ 都成立，那么对所有整数$s\ge0$ 以及所有 ρ, $D_{\mathrm{tr}}(B^s(\rho)\ \rho)\le s\cdot\delta$都成立。

证明. 对于 $s=0$, $D_{\mathrm{tr}}(B^0(\rho)\ \rho)=D_{\mathrm{tr}}(\rho,\rho)=0$。归纳地,

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{tr}}(B^{s+1}(\rho),\rho)&\le D_{\mathrm{tr}}(B^{s+1}(\rho),B^s(\rho))+D_{\mathrm{tr}}(B^s,\rho)\\&\le\delta+s\cdot\delta=(s+1)\cdot\delta.\end{aligned}\qquad\square$$

引理 10. 如果 $D_{\mathrm{tr}}(B(\rho)\ \rho)\le\delta$ 对所有 ρ 都成立，那么

$$D_{\mathrm{tr}}\left(\left(\prod_{i=1}^t A^{a_i}B^{b_i}\right)\rho,\ A^{\sum_i a_i}\rho\right)\le\delta\sum_i b_i.$$

证明. 根据定理 5 和定理 9,

$$\left(\prod_{i=1}^t A^{a_i}B^{b_i}\right)\rho=A^{a_1}B^{b_1}\left(\prod_{i=2}^t A^{a_i}B^{b_i}\right)\rho$$

位于 $b_1\cdot\delta$ 之内

$$A^{a_1}\left(\prod_{i=2}^t A^{a_i}B^{b_i}\right)\rho,$$

因此由归纳法可得结论。 $\square$

定理 11. 对于每个 l，都存在一个 n，使得在字母表 $\{A,B_n\}$上，$\mathscr{M}_n$ 或$\mathscr{M}_n'$ 中不存在长度不超过 l 的同步词。

证明. 设 $\epsilon < 1/2$ 和 $\epsilon' = \frac{\epsilon}{4l}$。取 $|\theta| \leq \epsilon'$。由于$\theta = \pi/(2n)$，这相当于选择 $n \geq \pi/(2\epsilon')$。

设 w 是一个长度不超过 l 的候选同步词。我们不妨假设 w 的长度恰好为 l，因为对于任意词 v，拼接得到的词 vw 也同样是同步词。根据定理 10，取 $\rho = |e_2\rangle\langle e_2|$，存在某个 j，使得

$$\begin{aligned} & D_{\mathrm{tr}}(w(|e_2\rangle\langle e_2|), A^j(|e_2\rangle\langle e_2|)) \leq \epsilon \\ \text{and} \quad & D_{\mathrm{tr}}(w(|e_3\rangle\langle e_3|), A^j(|e_3\rangle\langle e_3|)) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

由于 w 是同步的，$w(|e_2\rangle\langle e_2|) = w(|e_3\rangle\langle e_3|)$。然而，$A$ 会置换 $|e_2\rangle\langle e_2|$ 和 $|e_3\rangle\langle e_3|$，因此这是不可能的：

$$\begin{aligned} 1 &= D_{\mathrm{tr}}(|e_2\rangle\langle e_2|, |e_3\rangle\langle e_3|) \\ &= D_{\mathrm{tr}}(A^j(|e_2\rangle\langle e_2|), A^j(|e_3\rangle\langle e_3|) \\ &\leq D_{\mathrm{tr}}(A^j(|e_2\rangle\langle e_2|), w(|e_2\rangle\langle e_2|) \\ &+ D_{\mathrm{tr}}(w(|e_2\rangle\langle e_2|), A^j(|e_3\rangle\langle e_3|) \\ &\leq 2\epsilon < 1. \end{aligned}$$

□

引理 12. 对于所有正整数 n，词 AB_n^nA在 $\mathscr{M}_n$ 中和在 $\mathscr{M}_n'$ 中都是同步词，并将所有状态映射到$|e_2\rangle\langle e_2|$。

证明. 矩阵 B_n^n 与 n 无关，Grudka 等人 [1] 将其称为 B，他们证明了 ABA 是同步的；参见他们的公式 (73)。

□

IV. 未来工作

我们提出几个问题。

1）若以量子比特代替三能级量子比特，类似结果是否仍然成立？2）我们能否确保两个字母均由幺正算子给出，即算子 C 满足$\sum_i C_i C_i^* = \mathbb{1}$?

参考文献

[1] A. Grudka、M. Karczewski、P. Kurzynski、J. Stempin、J. W´ojcik和A. Wojcik，“量子同步词”，《新物理学杂志》，2025年。 [在线]。可获取：http://iopscience.iop.org/article/10. 1088/1367-2630/ae16ca[2] J. ˇCern´y，“关于有限自动机齐次实验的一个注记”，*Mat.-Fyz. ˇCasopis. Sloven. Akad. Vied.*，第14卷，第208–216页，1964年。

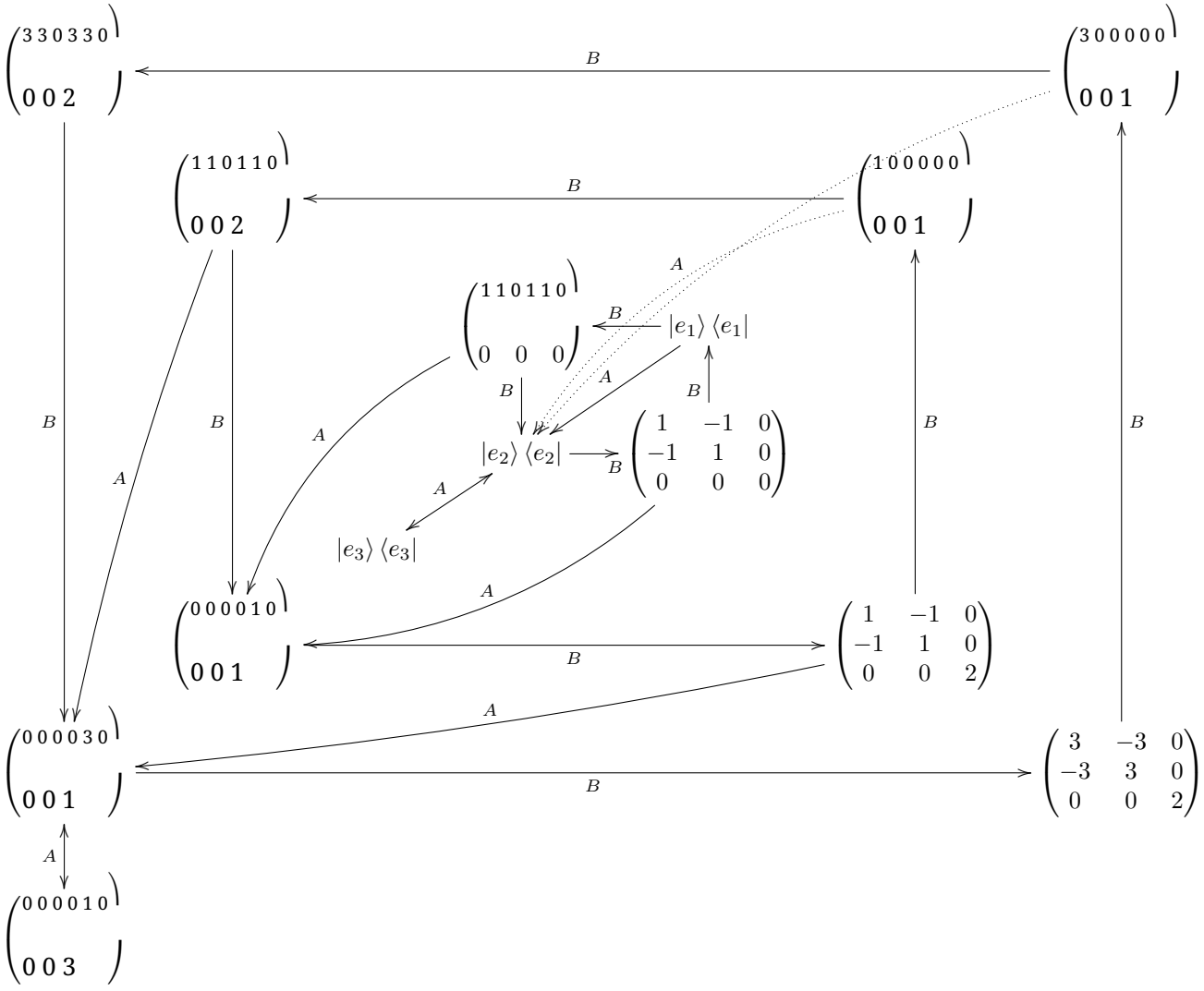


Fig. 1. $\mathscr{M}_2$的一部分。图中未显示自环，且每个密度矩阵都应归一化，使其迹为 1。