arXiv:2603.00886v1 [math.AG] 1 Mar 2026

通过莫比乌斯生成元将蜘蛛代数显式形变为曲线型概形

DAVID TURTUREAN

摘要。我们构造了一个显式的平坦单参数族，其成员是 22 维阿廷 k- 代数，特殊纤维为蜘蛛代数 $k[x,y,z]/(x^8,\ y^8,\ z^8,\ xy,\ xz,\ yz)$，一般纤维则为曲线代数 $k[t]/(t^{22})$。构造中，我们在曲线型环内使用莫比乌斯生成元 $u_a = t/(1-at)$，并结合均差坐标变换，再通过具有整数系数的加权 Rees 退化构造出该族。对于这个蜘蛛理想，这给出了一个显式单参数族，印证了 Bérczi–Svendsen 证明的一般现象：$\mathbb{C}^d$ 的每个单项式子概形都属于点的希尔伯特概形的曲线型分支。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 预热：3 点情形 4 4. 莫比乌斯生成元与基定理 5 5. 一般理想 7 6. 加权 Rees 族 11 7. 平坦性 14 8. 补充计算验证 15 9. 总结 15 A. 纯幂关系的推导与验证 16 参考文献 17

1. 引言

设 k 是一个特征零域。 n 点的希尔伯特概形 $^n(\mathbb{C}^d)$ 参数化长度为 n 的仿射 d 空间中的零维子概形。曲线型分支 $\mathrm{CHilb}_0^n\ (\mathbb{C}^d)$ 是与 Spec $k[t]/(t^n)$ 同构的概形所在轨迹的闭包；它不可约且一般光滑。

2020 数学学科分类. 14C05, 13D10, 14B07, 13H10, 13E10.关键词和短语. 点的希尔伯特概形，曲线型分支，平坦形变，阿廷代数，蜘蛛代数，Rees 退化。

Briançon 的经典定理 [4] 证明，对于 $d = 2$，每个余维为 n 的单项式理想都属于曲线型分支。一般情形最近由 Bérczi 和 Svendsen [2]解决：

定理 1.1 ([2, 定理 1]). ^{n}希尔伯特概形$\mathbb{C}^d(\mathbb{C}^d)$中的每个单项式理想都属于曲线型分支$\mathrm{CHilb}_0^n\ (\mathbb{C}^d)$。

[2] 中的证明通过测试曲线模型进行，且是存在性的：它并未给出显式的变形族。此外，该论证依赖于会增加环境维数的底层扩张，作者还指出，早先在固定维数下进行的尝试均未成功。在原有环境维数中构造显式族本身也有其独立价值，原因有多方面。显式族能够给出希尔伯特概形在奇点附近的局部坐标，有助于有效地进行变形理论计算，也是枚举几何中等变局部化计算所必需的 [1, 3]。

相关工作。 先前从单项式理想构造平坦族的显式方法，适用范围有限。Cartwright–Erman–Velasco–Viray [6] 通过对每个单项式理想 I给出一个权向量 w 和一个可平滑化理想 J，使得 $I = $ 属于$_w(J)$，从而利用格罗布纳退化构造平坦族；他们据此分类了余长至多为 8 的所有可平滑化理想（见 [6, 第 4]节）。他们的方法针对的是可平滑性，而非曲线性本身，且无法推广到余长大于 8 的情形。作为补充，Jelisiejew–Ramkumar–Sammartano [12]引入了破碎的戈伦斯坦结构，并给出了 Hilb$^d(\mathbb{A}^3)$ 上哪些单项式点是光滑点的显式组合刻画（见 [12, 定理 4.8]）；他们的框架着眼于奇点分类，而非显式单参数族。在基础工作方面，Fogarty [7] 证明了对于光滑曲面 S，Hilb$^n(S)$ 是不可约的（因此二维中的每个理想都可平滑化）；Iarrobino [9] 则证明，当 $n \geq 3$ 且 d足够大时，Hilb$^d(\mathbb{A}^n)$ 是可约的，因此曲线型分支是一个真子簇。在解析情形下，Briançon–Galligo [5] 利用标准基和魏尔斯特拉斯预备定理，在 $k\{x, y\}$中构造了零维理想的显式平坦形变；他们的工作是“写出生成元并证明平坦性”这一做法最接近的经典先例，不过仅限于两个变量，且其目标是约化纤维（而非曲线代数纤维）。据我们所知，我们的构造首次给出了显式平坦族，将三个或更多变量中余长大于 8 的单项式理想形变为曲线代数。

动机与方法。 这项工作的动机来自 Epoch AI *FrontierMath*：未解决问题 文集 [8],中提出的一个问题，该问题要求给出从曲线型代数 $k[t]/(t^{22})$ 到 $(7, 7, 7)$ 型蜘蛛代数的显式平坦形变。人工智能工具被实质性地用于该构造的发现与验证

此处所给出的构造；关于人工智能如何被运用的详细说明将发表于即将出版的配套预印本。

本文为 22 维蜘蛛代数给出了完全显式的构造

$$A \;=\; k[x,y,z]/(x^8,\, y^8,\, z^8,\, xy,\, xz,\, yz),$$

它对应于三变量中一个单项式理想，其三条腿的长度均为 7。我们的主要结果如下：

定理 1.2 (主要定理)。 存在一个具有整数系数的显式理想 $I \subset k[x,y,z,\epsilon]$，使得这一族

$$\mathcal{A} \;=\; k[x,y,z,\epsilon]/I$$

在 $k[\epsilon]$上平坦，其中

(i) $\mathcal{A}/\epsilon\mathcal{A} \;\cong\; A,$
(ii) $\mathcal{A}[\epsilon^{-1}] \;\cong\; k[t]/(t^{22}) \otimes_k k[\epsilon,\epsilon^{-1}].$

方法。 我们的思路是通过莫比乌斯生成元 $u_a = t/(1-at)$，将蜘蛛的三条“腿”嵌入曲线型环 $R = k[t]/(t^{22})$，其中$a = 1$，2，3；转到差商坐标 $(x,\ y,\ z)$，证明这些坐标构成一组基，导出一般关系，然后构造加权 Rees 退化。莫比乌斯生成元是自然的选择：有理函数 $t \mapsto t/(1-at)$ 在 $t = 1/a$ 处有彼此间隔明显的极点，借助恒等式 $u_b - u_a = (b-a)u_a u_b$ 可得到简洁的乘法规则，并且通过极点阶数论证，线性无关性也一目了然。这种做法体现了经典显式变形构造的思路（参见 [5]），其中控制生成元与合冲是核心的技术难题。

大纲。 第 2 节固定记号并回顾背景知识。第 3 节讨论示例情形 $k[t]/(t^3) \rightsquigarrow k[x,y]/(x,\ y)^2$。第 4 节引入莫比乌斯生成元并证明基定理。第 5 节推导一般理想中的所有关系，并给出完整证明。第 6 节构造加权 Rees 族。第 7 节证明平坦性。第 8 节介绍补充计算验证。第 9 节讨论推广。附录 A 包含纯幂关系 g_x 和 g_y的推导与验证。

2. 预备知识

全文中，k 表示一个特征为零的域。

定义 2.1。 设 $\ell_1,\ \ldots,\ \ell_r \geq 1$为正整数。类型为 $(\ell_1,\ \ldots,\ \ell_r)$ 的蜘蛛代数（或星形单项式代数）为

$$A \;=\; k[x_1,\ldots,x_r]/(x_i^{\ell_i+1},\ x_i x_j \text{ for } i \neq j).$$

其 k维数为 $1 + \sum_{i=1}^{r} \ell_i$。相应的单项式理想在 $\mathbb{C}^r$ 中定义了一个胖点，其支撑图有 r 条长度为ℓ_1、.....、 ℓ_r的支腿。

在我们的情形下，$r=3$ 和 $\ell_1=\ell_2=\ell_3=7$，因此 $\dim_k A = 1+7+7+7 = 22$。

定义 2.2. 长度为 n 的曲线代数 是 $R=k[t]/(t^n)$。若一个零维概形的局部环同构于这样的代数，则称其为曲线的 。

定义 2.3. 从 k-代数 A 到 k-代数 B 的平坦单参数变形 是一个有限生成的 $k[\epsilon]$-代数 $\mathcal{A}$ ，它作为$k[\epsilon]$-模是平坦的，并带有同构 $\mathcal{A}/\epsilon\mathcal{A}\cong A$ 与 $\mathcal{A}\otimes_{k[\epsilon]} k(\epsilon) \cong B\otimes_k k(\epsilon)$。

我们回顾标准机制：

定义 2.4. 设 $S=k[x_1,\dots,x_s]/J$，并设 $w\colon \{x_1,\dots,x_s\}\to\mathbb{N}$ 为一个权函数，按加法延拓到单项式。对于多项式 $f=\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in J$，关于 w 的加权 ***Rees*** 齐次化 为

$$f^w \;=\; \sum_{\alpha} c_\alpha\, \epsilon^{\,w_{\max}(f)-w(\alpha)}\, x^\alpha,$$

其中 $w_{\max}(f)=\max\{w(\alpha)\colon\ c_\alpha\neq 0\}$。若 $J=(f_1,\ \dots\dots,\ f_m)$，且若对每个 f_i，最大权由唯一的首项单项式达到，则族 $k[x_1,\dots,x_s,\epsilon]/(f_1^w,\ \dots\dots,\ f_m^w)$ 具有如下性质：

(a) 在 $\epsilon=0$ 处，纤维为 $k[x_1,\dots,x_s]/(\mathrm{in}_w(f_1)\ \dots\dots,\ \mathrm{in}_w(f_m))$；当 f_i 关于权序构成格罗布纳基时，它等于 $k[x_1,\dots,x_s]/\,\mathrm{in}_w(J)$；

(b) 对于 $\epsilon=\lambda\neq 0$，代入 $x_i=\lambda^{w_i}X_i$ 可恢复原来的理想 J。

3. Warm-up: the 3-point case

在着手处理 22 维问题之前，我们用最简单的蜘蛛变形来说明该方法：

$$k[t]/(t^3)\ \rightsquigarrow\ k[x,y]/(x,y)^2.$$

两个代数的 k-维数均为 3。

例 3.1。 在 $R=k[t]/(t^3)$ 中，令 $x=t$ 和 $y=t^2$。关系 $y=x^2$ 在 R 中成立，因此满射 $k[x,y]\to R$ 的核为 $(y-x^2)$，由此得到

$$k[x,y]/(y-x^2)\ \cong\ R.$$

现在赋予 $w(x)=1$, $w(y)=2$权。在目标蜘蛛理想 (x^2,xy,y^2) 中，单项式 x^2 的权为 2，而 y的权也为 2；因此一般关系 $y=x^2$ 的首项权重相同，标准的 Rees 齐次化不起作用。我们改为直接构造这一族：理想 $(x^2-\epsilon y,\ xy,\ y^2)$ 在 $\epsilon=0$处的蜘蛛与 $\epsilon\neq 0$处的曲线代数之间插值。具体而言，所得的这一族为

$$\mathcal{B}\ =\ k[x,y,\epsilon]/(x^2-\epsilon y,\ xy,\ y^2).$$

在 $\epsilon = 0$ 处，纤维为 $k[x,y]/(x^2, xy, y^2) = k[x,y]/(x,y)^2$。对于 $\epsilon \neq 0$，关系 $x^2 = \epsilon y$ 使 y 成为冗余项，从而还原出 $k[x]/(x^3) \cong k[t]/(t^3)$。

这揭示了其核心机制：在极限下，单个生成元的幂分化为彼此独立的变量，而这一过程由加权变形参数控制。22维情形需要更精巧的嵌入。

4. 莫比乌斯生成元与基定理

4.1. 嵌入。 令 $R = k[t]/(t^{22})$，并在形式幂级数环 $k[[t]]/(t^{22})$ 中运算。对于每个 $a \in k$，定义莫比乌斯生成元

$$u_a = \frac{t}{1-at}.$$

由于 $1-at$ 是局部环 $k[[t]]/(t^{22})$ 中的可逆元，因此这一定义良好。注意，对于所有 a，$\mathrm{ord}_t(u_a) = 1$。

引理 4.1（莫比乌斯恒等式）。 对于所有 $a,\ b \in k$,

$$u_b - u_a = (b-a)\, u_a\, u_b. \tag{1}$$

证明。在 $k[[t]]$ 的分式域中直接计算：

$$\begin{aligned} u_b - u_a &= \frac{t}{1-bt} - \frac{t}{1-at} = \frac{t(1-at) - t(1-bt)}{(1-at)(1-bt)} \\ &= \frac{t^2(b-a)}{(1-at)(1-bt)} = (b-a)\cdot\frac{t}{1-at}\cdot\frac{t}{1-bt} \\ &= (b-a)\, u_a\, u_b. \end{aligned}$$

□

我们使用三个生成元 u_1、u_2、u_3，并转到差商坐标：

$$x := u_1 = \frac{t}{1-t}, \tag{2}$$

$$y := u_2 - u_1 = \frac{t^2}{(1-t)(1-2t)}, \tag{3}$$

$$z := u_3 - 2u_2 + u_1 = \frac{2t^3}{(1-t)(1-2t)(1-3t)}. \tag{4}$$

我们验证这些闭式。对于 y：根据定理 4.1，取 $a=1$、$b=2$,

$$y = u_2 - u_1 = (2-1)\, u_1 u_2 = u_1 u_2 = \frac{t}{1-t}\cdot\frac{t}{1-2t} = \frac{t^2}{(1-t)(1-2t)}.$$

对于 z：由定理 4.1，$u_3 - u_2 = u_2 u_3$ 和 $u_2 - u_1 = u_1 u_2$，因此

$$z = (u_3 - u_2) - (u_2 - u_1) = u_2 u_3 - u_1 u_2 = u_2(u_3 - u_1).$$

将定理 4.1 应用于 $a=1$、$b=3$：$u_3-u_1=2\,u_1u_3$。因此

$$z=u_2\cdot 2\,u_1u_3=2\,u_1u_2u_3=\frac{2t^3}{(1-t)(1-2t)(1-3t)}.$$

t-进阶数为 $\operatorname{ord}_t(x)=1$, $\operatorname{ord}_t(y)=2$, $\operatorname{ord}_t(z)=3$。

注记 4.2。差商结构显而易见：写作 $\Delta u_a = u_{a+1}-u_a$，有 $x=u_1$，$y=\Delta u_1$，$z=\Delta^2 u_1$。因式分解$z=2\,u_1u_2u_3$ 解释了为什么 $\operatorname{ord}_t(z)=3$。

4.2. **基定理**。考虑蜘蛛单项式蜘蛛单项式的集合

$$B=\{1,\,x,\dots,x^7,\;\;y,\dots,y^7,\;\;z,\dots,z^7\},\qquad |B|=22. \tag{5}$$

定理 4.3 (基)。集合 B 是 k-基于 $R=k[t]/(t^{22})$。

证明。由于 $\dim_k R=22=|B|$，只需证明 B 线性无关。设

$$a_0+\sum_{i=1}^{7}a_i\,x^i+\sum_{j=1}^{7}b_j\,y^j+\sum_{k=1}^{7}c_k\,z^k\;=\;0\quad\text{in } R.$$

由于 $\operatorname{ord}_t(x^i)\ge 1$、$\operatorname{ord}_t(y^j)\ge 2$，且 $\operatorname{ord}_t(z^k)\ge 3$，代入 $t=0$即可立即得到 $a_0=0$。接下来需要证明

$$F\;:=\;\sum_{i=1}^{7}a_i\,x^i+\sum_{j=1}^{7}b_j\,y^j+\sum_{k=1}^{7}c_k\,z^k\;=\;0$$

可推出 $a_i=b_j=c_k=0$。我们有 $F(t)\equiv 0$ (模 t^{22})。定义

$$D(t)\;=\;(1-t)^7\,(1-2t)^7\,(1-3t)^7.$$

步骤 1： $D\cdot F$ **是一个次数为** ≤ 21**的多项式**。由闭式 (2)–(4) 可得：

$$x^i=\frac{t^i}{(1-t)^i},\qquad y^j=\frac{t^{2j}}{(1-t)^j(1-2t)^j},\qquad z^k=\frac{2^k\,t^{3k}}{\prod_{\ell=1}^{3}(1-\ell t)^k}.$$

两边乘以 $D(t)$：

$$\begin{aligned}D\cdot x^i&=t^i(1-t)^{7-i}(1-2t)^7(1-3t)^7,\\ D\cdot y^j&=t^{2j}(1-t)^{7-j}(1-2t)^{7-j}(1-3t)^7,\\ D\cdot z^k&=2^kt^{3k}(1-t)^{7-k}(1-2t)^{7-k}(1-3t)^{7-k}.\end{aligned}$$

由于 $i,\;j,\;k\le 7$，所有指数 $7-i$、$7-j$、$7-k$ 均为非负数，因此每个乘积确实都是次数恰为 21 的多项式。因此，$D(t)F(t)$是一个次数至多为 21 的多项式。

步骤 2： $D\cdot F\equiv 0$。由于 $F(t)=O(t^{22})$，多项式 $D(t)F(t)$ 的前 22 个泰勒系数均为零。但 $\deg(DF)\le 21<22$，因此 $D(t)F(t)$ 恒等于零多项式。

步骤 3：极点分离。 由于 $DF \equiv 0$ 是多项式且 D 非零，$F \equiv 0$ 是关于 t 的有理函数。现在我们考察 F 的极点，以证明所有系数都为零。

在 $t = \frac{1}{3}$ 处的极点：在 F 的各项中，只有 z^k 在 $t = \frac{1}{3}$ 处有极点（分母中的因子 $(1-3t)^k$）。x^i 和 y^j 在此处均没有极点。z^k 在 $t = \frac{1}{3}$ 处的极点的阶恰为 k。由于 $F \equiv 0$ 和 $t = \frac{1}{3}$ 处的极点的阶各不相同，分别为 1、2、.....、7，因此我们得出，对于所有 $k = 1$、.....、7，$c_k = 0$。

在 $t = \frac{1}{2}$ 处的极点：约去所有 $c_k = 0$ 后，只剩下在 $t = \frac{1}{2}$ 处有极点的 y^j 项（来自因子 $(1-2t)^j$）。x^i 项在此处没有极点。y^j 在 $t = \frac{1}{2}$ 处的极点的阶为 j，这些阶对于 $j = 1$、..... 、7 各不相同。因此，对于所有 j，$b_j = 0$。

在 $t = 1$ 处的极点：</style}当 $b_j = c_k = 0$ 时，只剩下 x^i 项。每个 x^i 在 $t = 1$ 处都有 i 阶极点，且这些极点各不相同。因此，对所有 i，都有 $a_i = 0$。

因此，所有系数都为零，且 B 线性无关，故为一组基。□

推论 4.4。 元素 $x = t/(1-t)$ 作为 k-代数生成 R，并且 $R \cong k[x]/(x^{22}) \cong k[t]/(t^{22})$。

证明。由 $x = t/(1-t)$ 得到 $t = x/(1+x)$。由于 $\mathrm{ord}_t(x) = 1$，元素 x 在 R ($x^{22} = 0$) 中是幂零元，因此 $1+x$ 是可逆元，其逆为 $\sum_{n=0}^{21}(-x)^n$。因此 $t = x(1+x)^{-1} \in k[x] \subset R$，所以 $k[x] = R$，且 $x^{21} \neq 0$，但 $x^{22} = 0$。□

5. 一般理想

现在我们推导理想 J 中的所有关系，该理想定义了 R 作为$k[x,y,z]$ 的商。每一步都由莫比乌斯恒等式（定理 4.1）和定义 (2)–(4) 得到证明。

5.1. 有用的恒等式。 在推导这些关系之前，我们先记录若干将在下文反复使用的恒等式。它们都可直接由定理 4.1 得出。

引理 5.1。 以下等式在 R中成立：

(a) $u_1u_2 = y$（由 $u_2 - u_1 = u_1u_2$ 得出），(b) $u_2u_3 = u_3 - u_2$（由定理 *4.1* 取 $b - a = 1$ 得出），(c) $u_1u_3 = \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$（由定理 *4.1* 取 $b - a = 2$ 得出），(d) $u_2 = x + y$，(e) $u_3 - u_1 = z + 2y$（因为 $u_3 - u_1 = (u_3 - 2u_2 + u_1) + 2(u_2 - u_1) = z + 2y$），(f) $u_3 - u_2 = z + y$（因为 $u_3 - u_2 = (u_3 - 2u_2 + u_1) + (u_2 - u_1) = z + y$）。

证明。(a)：根据定理 4.1，取 $a = 1, b = 2$：$u_2 - u_1 = (2-1)u_1u_2 = u_1u_2$。由于根据定义有 $y = u_2 - u_1$，因此 $u_1u_2 = y$。

(b)：根据定理 4.1，取 $a=2, b=3$：$u_3-u_2=(3-2)u_2u_3=u_2u_3$。

(c)：由定理 4.1，结合 $a=1, b=3$：$u_3-u_1=(3-1)u_1u_3=2u_1u_3$，因此 $u_1u_3=\frac{1}{2}(u_3-u_1)$。

(d)：$u_2=u_1+(u_2-u_1)=x+y$。(e)：$u_3-u_1=(u_3-2u_2+u_1)+2(u_2-u_1)=z+2y$。(f)：$u_3-u_2=(u_3-2u_2+u_1)+(u_2-u_1)=z+y$。 □

5.2. **混合关系**。

命题 5.2。以下关系在 R中成立：

$$xy = y-x^2, \tag{6}$$

$$2xz = z-2y+2x^2, \tag{7}$$

$$2yz = z-2y+2x^2-4y^2. \tag{8}$$

证明。我们完整推导每个关系。

关系(6)： $xy=y-x^2$。回顾一下 $x=u_1$ 和 $y=u_2-u_1$。根据定理 5.1(a)，$y=u_1u_2=x\,u_2$，因此 $u_2=x+y$（定理 5.1(d)）。所以：

$$xy = x(u_2-u_1) = x\,u_2-x^2 = y-x^2.$$

关系(7)： $2xz=z-2y+2x^2$。我们展开 $xz=u_1(u_3-2u_2+u_1)$：

$$xz = u_1u_3-2u_1u_2+u_1^2.$$

代入定理 5.1 中的恒等式：

$$u_1u_3=\tfrac{1}{2}(u_3-u_1)=\tfrac{1}{2}(z+2y)=\tfrac{z}{2}+y \quad \text{(using (c) and (e))},$$
$$u_1u_2=y \quad \text{(using (a))},$$
$$u_1^2=x^2.$$

因此：

$$xz = \left(\tfrac{z}{2}+y\right)-2y+x^2 = \tfrac{z}{2}-y+x^2.$$

乘以 2：

$$2xz = z-2y+2x^2.$$

关系(8)： $2yz=z-2y+2x^2-4y^2$。我们将 $yz=(u_2-u_1)(u_3-2u_2+u_1)$ 完全展开：

$$yz = u_2u_3-2u_2^2+u_1u_2-u_1u_3+2u_1u_2-u_1^2. \tag{9}$$

我们计算这六项。

项 u_2u_3：根据定理 5.1(b) 和 (f)：$u_2u_3=u_3-u_2=z+y$。

项 u_1u_2 和 $2u_1u_2$：根据定理 5.1(a)：$u_1u_2=y$，因此 $u_1u_2+2u_1u_2=3y$。

项 u_1u_3：根据定理 5.1(c) 和 (e)：$u_1u_3=\frac{1}{2}(z+2y)=\frac{z}{2}+y$。

术语 u_1^2：$u_1^2=x^2$。

术语 u_2^2: 根据 $u_2 = x+y$(定理 5.1(d)) 和已证明的关系 $xy = y - x^2$ (6):

(10) $u_2^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = x^2+2(y-x^2)+y^2 = -x^2+2y+y^2.$

将所有内容代入 (9):

$$\begin{aligned} yz &= (z+y) - 2(-x^2+2y+y^2) + 3y - (\tfrac{z}{2}+y) - x^2 \\ &= z + y + 2x^2 - 4y - 2y^2 + 3y - \tfrac{z}{2} - y - x^2 \\ &= \tfrac{z}{2} + x^2 - y - 2y^2. \end{aligned}$$

乘以 2:

$$2yz \;=\; z + 2x^2 - 2y - 4y^2 \;=\; z - 2y + 2x^2 - 4y^2. \qquad \square$$

5.3. **纯幂关系**。 由于 $\mathrm{ord}_t(z) = 3$, 我们有 $\mathrm{ord}_t(z^8) = 24 > 21$, 因此

$$z^8 = 0 \quad \text{in } R = k[t]/(t^{22}). \tag{11}$$

对于 x^8 和 y^8, 情况更加复杂: $\mathrm{ord}_t(x^8) = 8$以及 $\mathrm{ord}_t(y^8) = 16$, 二者均为 ≤ 21, 因此它们在 R 中非零。由于 B 是一个基（定理 4.3）, x^8 和 y^8 各自都有唯一的 B-展开。消去基元素的有理表达式所产生的分母后, 可得到整系数多项式关系 $g_x = 0$和 $g_y = 0$。

推导方法以及对所声称关系成立的明确验证见附录 A。

命题 5.3。 以下关系在 R中成立:

(12)

$$\begin{aligned} g_x \;:=\; & 32\,x^8 - 1728\,x^7 - 2864\,x^6 - 11088\,x^5 - 14988\,x^4 \\ & - 28080\,x^3 - 23484\,x^2 + 23484\,y \\ & - 2048\,y^7 - 9728\,y^6 - 18944\,y^5 - 25888\,y^4 \\ & - 20384\,y^3 - 22284\,y^2 + 2298\,z \\ & + 16\,z^7 - 8\,z^6 + 16\,z^5 - 46\,z^4 + 156\,z^3 - 581\,z^2 \;=\; 0, \end{aligned}$$

and

(13)

$$\begin{aligned} g_y \;:=\; & 2048\,y^8 - 112608\,x^7 - 196272\,x^6 - 723264\,x^5 \\ & - 1000056\,x^4 - 1835964\,x^3 \\ & - 1556406\,x^2 + 1556406\,y \\ & - 116736\,y^7 - 582656\,y^6 - 1144064\,y^5 \\ & - 1576192\,y^4 - 1226864\,y^3 \\ & - 1395024\,y^2 + 139779\,z \\ & + 1008\,z^7 - 496\,z^6 + 984\,z^5 - 2816\,z^4 \\ & + 9522\,z^3 - 35392\,z^2 \;=\; 0. \end{aligned}$$

5.4. **一般理想**。令

(14)

$$J \;=\; \big(xy+x^2-y,\;\; 2xz-2x^2+2y-z,\;\; 2yz-2x^2+2y+4y^2-z,\; g_x,\, g_y,\, z^8\big)$$

在 $k[x,y,z]$ 中。

命题5.4. 存在一个同构 $k[x,y,z]/J \;\cong\; k[t]/(t^{22})$。

证明。 代换 (2)–(4) 定义了一个 k-代数映射 $\varphi\colon\ k[x,y,z]\to R$ ，根据定理4.4, 该映射是满射（因为仅凭 x 就能生成 R）。由定理5.2、定理 5.3 以及 (11)， J 的所有生成元都属于 $\ker\varphi$。因此， φ 可下降为一个满射 $\bar\varphi\colon\ k[x,y,z]/J \twoheadrightarrow R$。

还需证明 $\dim_k(k[x,y,z]/J) \;\le 22$。

步骤 1：约化混合单项式。 由 $xy = y - x^2$ （关系式 (6)）可知，单项式中每次出现乘积 xy 时，都可以将其替换为 $y - x^2$，即纯幂之和。

根据 $2xz = z - 2y + 2x^2$ （关系式 (7)），每个 xz 都会被替换为 $\frac{1}{2}(z-2y+2x^2)$，后者仍是纯幂之和。（在特征零下，除以 2 是合法的。）

根据 $2yz = z - 2y + 2x^2 - 4y^2$ （关系式 (8)），每个 yz 都会被替换为 $\frac{1}{2}(z - 2y + 2x^2 - 4y^2)$，即纯幂之和。

通过反复进行这些约化， $k[x,y,z]$ 中的每个单项式最终都会约化为纯幂 $\{x^i$ 的 k-线性组合： $i \ge 0\} \cup \{y^j :\ j \ge 1\} \cup \{z^k :\ k \ge 1\}$。为说明过程会终止，为 $w(x) = 15$、$w(y) = 16$、 $w(z) = 17$ 指定权（并以乘法方式扩展到单项式）。在每条重写规则中，每个输出单项式的权都严格小于输入单项式的权：对于 (6)， $w(xy) = 31 > 30 = w(x^2)$；对于 (7)， $w(xz) = 32 > 30 = w(x^2)$；对于 (8)， $w(yz) = 33 > 32 = w(y^2)$（每种情形仅列出权最大的输出项）。乘以公共单项式因子会保持严格不等式，因此每次应用都会严格降低权。由于权是非负整数，这一过程必然终止。

步骤 2：高次纯幂的约化。 关系 $g_x = 0$将 $32\,x^8$ 表示为 B 中元素的线性组合（首项系数 32 在特征零下可逆）。类似地， $g_y = 0$用 B表示 $2048\,y^8$ ，而 $z^8 = 0$ 直接消去 z^8 。通过迭代（应用 $xy = y - x^2$ 等以约化由代入产生的任何混合项，其终止性由步骤 1 的权序保证），每个次数为 ≥ 8 的纯幂都约化为 B中元素的组合。

结论。 步骤 1 和 2 表明 B张成 $k[x,y,z]/J$，因此 $\dim_k\big(k[x,y,z]/J\big) \le 22$。由于 $\bar\varphi$是映到 22 维代数 R上的满射，我们得出

$$k[x,y,z]/J \;\cong\; R \;\cong\; k[t]/(t^{22}).$$

□

6. The weighted Rees family

6.1. 权重选择。 我们赋予权

$$w(x) = 15, \qquad w(y) = 16, \qquad w(z) = 17. \tag{15}$$

关键性质是，在 J 的每个生成元中，边界单项式（即在$\epsilon = 0$处成为蜘蛛理想首项的单项式）都严格重于每个尾项单项式。

引理 6.1。 采用权(15)时，对 J 的每个生成元，以下严格不等式均成立：

(i) 在 $xy + x^2 - y$ 中：边界项为 xy，其权为 $w(xy) = 31$；尾项的权分别为 $w(x^2) = 30$ 和 $w(y) = 16$，因此 $31 > 30$。*(ii)* 在 $2xz - 2x^2 + 2y - z$ 中：边界项为 xz，其权为 $w(xz) = 32$；最重尾项的权为 $w(x^2) = 30$，因此 $32 > 30$。*(iii)* 在 $2yz - 2x^2 + 2y + 4y^2 - z$ 中：边界项为 yz，其权为 $w(yz) = 33$；最重尾项的权为 $w(y^2) = 32$，因此 $33 > 32$。*(iv)* 在 g_x 中：边界项为 x^8，其权为 $w(x^8) = 120$。尾项属于 $B \setminus \{1\}$；其中最重的是 z^7，其权为 $w(z^7) = 7 \cdot 17 = 119$，因此 $120 > 119$。*(v)* 在 g_y 中：边界项为 y^8，其权为 $w(y^8) = 128$；同样，$w(z^7) = 119$，因此 $128 > 119$。*(vi)* 在 z^8 中：边界项为 z^8，其权为 $w(z^8) = 136$，且没有尾项。

证明。 由 (15) 直接计算。我们逐一检查每种情况。情况 *(i)*：$w(xy) = w(x) + w(y) = 15 + 16 = 31$。尾项为 x^2 和y：$w(x^2) = 30$, $w(y) = 16$。两者均为 < 31。

情况 *(ii)*：$w(xz) = 15 + 17 = 32$。尾项为 x^2, y, z：$w(x^2) = 30$,$w(y) = 16$, $w(z) = 17$。它们全都满足 < 32。

情况 *(iii)*：$w(yz) = 16 + 17 = 33$。尾项为 x^2, y, y^2, z：$w(y^2) = 32$, $w(x^2) = 30$, $w(y) = 16$, $w(z) = 17$。它们全都满足 < 33。

情况 *(iv)*：$w(x^8) = 120$。g_x 中的尾项单项式全都属于 $B \setminus \{1, x^8\}$。它们的权从 $w(y) = 16$ 到 $w(z^7) = 119$不等。由于$120 > 119$，不等式成立。

情形 *(v)*：$w(y^8) = 128$。最重尾仍为 z^7 在 $w = 119$。由于 $128 > 119$，不等式成立。

情形 *(vi)*：z^8 没有尾（它在 R中等于零），因此该条件空满足。□

注 6.2.（iv）中的裕量恰好为1。权（15,16, 17）是形如（$w, w+1, w+2$）且满足全部六个严格不等式的字典序最小者。紧约束为 $8w > 7(w + 2)$，即$w > 14$。

6.2. 齐次化。将定理2.4应用于 J的每个生成元，并采用权 (15)，得到由 $I \subset k[x, y, z, \epsilon]$ 生成的族理想

by:

$$f_1 \;=\; xy + \epsilon\, x^2 - \epsilon^{15}\, y, \tag{16}$$

$$f_2 \;=\; 2xz - 2\epsilon^2\, x^2 + 2\epsilon^{16}\, y - \epsilon^{15}\, z, \tag{17}$$

$$f_3 \;=\; 2yz - 2\epsilon^3\, x^2 + 4\epsilon\, y^2 + 2\epsilon^{17}\, y - \epsilon^{16}\, z, \tag{18}$$

以及 $f_4 = g_x^w$、 $f_5 = g_y^w$、 $f_6 = z^8$。

我们在每种情况下都明确验证 ϵ-指数。

中的指数。一般关系为 $xy + x^2 - y = 0$，其边界权为 $w_{\max} = w(xy) = 31$。指数为：

$$\epsilon^{31-31} = \epsilon^0 \text{ on } xy, \qquad \epsilon^{31-30} = \epsilon^1 \text{ on } x^2, \qquad \epsilon^{31-16} = \epsilon^{15} \text{ on } y.$$

中的指数。一般关系为 $2xz - 2x^2 + 2y - z = 0$，其$w_{\max} = w(xz) = 32$。指数为：

$$\epsilon^{32-32} = \epsilon^0 \text{ on } xz, \quad \epsilon^{32-30} = \epsilon^2 \text{ on } x^2,$$
$$\epsilon^{32-16} = \epsilon^{16} \text{ on } y, \quad \epsilon^{32-17} = \epsilon^{15} \text{ on } z.$$

中的指数。一般关系为 $2yz - 2x^2 + 2y + 4y^2 - z = 0$，其 $w_{\max} = w(yz) = 33$。指数为：

$$\epsilon^{33-33} = \epsilon^0 \text{ on } yz, \quad \epsilon^{33-30} = \epsilon^3 \text{ on } x^2, \quad \epsilon^{33-32} = \epsilon^1 \text{ on } y^2,$$
$$\epsilon^{33-16} = \epsilon^{17} \text{ on } y, \quad \epsilon^{33-17} = \epsilon^{16} \text{ on } z.$$

和中的指数。对于 $f_4 = g_x^w$，边界权为 $w(x^8) = 120$。每个尾项单项式 m在 g_x 中都乘以因子 $\epsilon^{120-w(m)}$。例如，项 $-2048\, y^7$ 的 $w(y^7) = 112$，因此它表现为 $-2048\, \epsilon^8\, y^7$。项 $16\, z^7$ 的 $w(z^7) = 119$，因此它表现为 $16\, \epsilon^1\, z^7$。完整表达式为：

$$\begin{aligned} f_4 \;=\;& 32\, x^8 + 16\, \epsilon\, z^7 - 2048\, \epsilon^8\, y^7 - 1728\, \epsilon^{15}\, x^7 - 8\, \epsilon^{18}\, z^6 \\ & - 9728\, \epsilon^{24}\, y^6 - 2864\, \epsilon^{30}\, x^6 + 16\, \epsilon^{35}\, z^5 - 18944\, \epsilon^{40}\, y^5 \\ & - 11088\, \epsilon^{45}\, x^5 - 46\, \epsilon^{52}\, z^4 - 25888\, \epsilon^{56}\, y^4 - 14988\, \epsilon^{60}\, x^4 \\ & + 156\, \epsilon^{69}\, z^3 - 20384\, \epsilon^{72}\, y^3 - 28080\, \epsilon^{75}\, x^3 - 581\, \epsilon^{86}\, z^2 \\ & - 22284\, \epsilon^{88}\, y^2 - 23484\, \epsilon^{90}\, x^2 + 2298\, \epsilon^{103}\, z + 23484\, \epsilon^{104}\, y, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} f_5 \;=\;& 2048\, y^8 + 1008\, \epsilon^9\, z^7 - 116736\, \epsilon^{16}\, y^7 - 112608\, \epsilon^{23}\, x^7 \\ & - 496\, \epsilon^{26}\, z^6 - 582656\, \epsilon^{32}\, y^6 - 196272\, \epsilon^{38}\, x^6 + 984\, \epsilon^{43}\, z^5 \\ & - 1144064\, \epsilon^{48}\, y^5 - 723264\, \epsilon^{53}\, x^5 - 2816\, \epsilon^{60}\, z^4 - 1576192\, \epsilon^{64}\, y^4 \\ & - 1000056\, \epsilon^{68}\, x^4 + 9522\, \epsilon^{77}\, z^3 - 1226864\, \epsilon^{80}\, y^3 - 1835964\, \epsilon^{83}\, x^3 \\ & - 35392\, \epsilon^{94}\, z^2 - 1395024\, \epsilon^{96}\, y^2 - 1556406\, \epsilon^{98}\, x^2 \\ & + 139779\, \epsilon^{111}\, z + 1556406\, \epsilon^{112}\, y. \end{aligned} \tag{20}$$

对于 $f_5 = g_y^w$，边界权为 $w(y^8) = 128$，指数也以类似方式计算（例如，$1008\,z^7$ 有 $w(z^7) = 119$，得到 $\epsilon^{128-119} = \epsilon^9$）。

6.3. **纤维**。

命题 6.3 (特殊纤维)。在 $\epsilon = 0$ 处，理想 I 特殊化为$(xy,\ xz,\ yz,\ x^8,\ y^8,\ z^8)$，因此 $\mathcal{A}/\epsilon\mathcal{A} \cong A$。

证明。在 (16)–(18) 和 (19)–(20) 中令 $\epsilon = 0$，所有尾项单项式都消失（它们含有 ϵ 的正次幂），剩下

$$f_1\big|_{\epsilon=0} = xy, \quad f_2\big|_{\epsilon=0} = 2xz, \quad f_3\big|_{\epsilon=0} = 2yz,$$
$$f_4\big|_{\epsilon=0} = 32\,x^8, \quad f_5\big|_{\epsilon=0} = 2048\,y^8, \quad f_6\big|_{\epsilon=0} = z^8.$$

在特征零下，标量前因子 2、$32 = 2^5$ 和 $2048 = 2^{11}$ 都是可逆元，因此特殊化理想为 $(xy,\ xz,\ yz,\ x^8,\ y^8,\ z^8)$。□

命题 6.4 (一般纤维)。对于任意 $\lambda \neq 0$，在 $\epsilon = \lambda$ 处的纤维同构于 $k[t]/(t^{22})$。

证明。我们验证，代换 $x = \lambda^{15}X,\ y = \lambda^{16}Y,\ z = \lambda^{17}Z$ 会将每个 $f_i|_{\epsilon=\lambda}$ 映射为变量 X, Y, Z 中对应生成元的一个标量倍数，从而得到 J。

对于 f_1：代入后得到

$$\begin{aligned} f_1\big|_{\epsilon=\lambda} &= \lambda^{15}\lambda^{16}\,XY + \lambda\cdot\lambda^{30}\,X^2 - \lambda^{15}\cdot\lambda^{16}\,Y \\ &= \lambda^{31}(XY + X^2 - Y). \end{aligned}$$

由于 $\lambda^{31} \neq 0$，这生成与 $XY + X^2 - Y$ 相同的理想。

对于 f_2：代入 $x = \lambda^{15}X,\ y = \lambda^{16}Y,\ z = \lambda^{17}Z,\ \epsilon = \lambda$：

$$\begin{aligned} f_2\big|_{\epsilon=\lambda} &= 2\lambda^{15}\lambda^{17}\,XZ - 2\lambda^2\cdot\lambda^{30}\,X^2 + 2\lambda^{16}\cdot\lambda^{16}\,Y - \lambda^{15}\cdot\lambda^{17}\,Z \\ &= \lambda^{32}(2XZ - 2X^2 + 2Y - Z). \end{aligned}$$

对于 f_3：同理，

$$\begin{aligned} f_3\big|_{\epsilon=\lambda} &= 2\lambda^{16}\lambda^{17}\,YZ - 2\lambda^3\cdot\lambda^{30}\,X^2 + 4\lambda\cdot\lambda^{32}\,Y^2 \\ &\quad + 2\lambda^{17}\cdot\lambda^{16}\,Y - \lambda^{16}\cdot\lambda^{17}\,Z \\ &= \lambda^{33}(2YZ - 2X^2 + 4Y^2 + 2Y - Z). \end{aligned}$$

f_4（公因子 λ^{120}）、f_5（公因子 λ^{128}）和 f_6（公因子 λ^{136}）也遵循相同的模式。在每种情况下，公因子都是 $\lambda^{w_{\max}} \neq 0$。

因此，根据定理 5.4，$\epsilon = \lambda \neq 0$ 处的每个纤维都与 $k[X,Y,Z]/J \cong k[t]/(t^{22})$同构，从而证明了定理 1.2 (ii)。□

7. 平坦性

定理 7.1。 $\mathcal{A} = k[x, y, z, \epsilon]/I$ 族在 $k[\epsilon]$上是平坦的。

证明。将 $M = \mathcal{A}$ 视为一个 $k[\epsilon]$-模。我们验证主理想整环上标准平坦性判别准则的三个要素。

步骤 1： M **在** $k[\epsilon]$ **上有限生成**。定理 5.4 的证明中所用的同一套约化规则（步骤 1 和 2）适用于基环 $k[\epsilon]$ 而非 k：三条混合关系通过将混合单项式表示为纯幂的 $k[\epsilon]$-线性组合来消去它们，而纯幂关系则降低次数 ≥ 8。关键在于首项系数（ f_1 中的 1， f_2 和 f_3 中的 2， f_4 中的 32， f_5 中的 2048， f_6 中的 1）均为非零整数，因而在 k（特征零）上可逆，故这些约化在 $k[\epsilon]$ 上有效。因此B 作为 $k[\epsilon]$-模张成 M 。（等价地，这六个生成元关于权为 (15,16, 17) 的加权次数逆字典序构成格罗布纳基，这可通过验证全部十五个 S-多项式均约化为零来确认；由此直接推出该商是秩为 22 的自由 $k[\epsilon]$-模。）

步骤 2：一般秩等于 22。 定理 6.4 表明，在 $\epsilon = \lambda \neq 0$ 处的每个闭纤维都具有 k-维数 22。同样的缩放论证在 $k[\epsilon, \epsilon^{-1}]$ 上成立（代入 $x = \epsilon^{15}X$、 $y = \epsilon^{16}Y$、 $z = \epsilon^{17}Z$），从而得到

$$M[\epsilon^{-1}] \;\cong\; k[t]/(t^{22}) \otimes_k k[\epsilon, \epsilon^{-1}],$$

其在 $k[\epsilon, \epsilon^{-1}]$ 上是秩为 22 的自由模。

步骤 3：特殊纤维的维数为 22。定理 6.3 给出 $M/\epsilon M \cong A$，且 $\dim_k A = 22$。

结论。 在素理想 $(\epsilon) \subset k[\epsilon]$ 处局部化。局部环 $R_0 = k[\epsilon]_{(\epsilon)}$ 是以 ϵ 为一致化子的离散赋值环。模 $M_{(\epsilon)}$ 在 R_0 上有限生成（由步骤 1）。根据主理想整环上有限生成模的结构定理，

$$M_{(\epsilon)} \;\cong\; R_0^{\,r} \;\oplus\; \bigoplus_{i=1}^{s} R_0/(\epsilon^{n_i}).$$

由步骤 2，一般秩（即 $\dim_{k(\epsilon)} M \otimes k(\epsilon)$）为 $r = 22$。由步骤 3，特殊纤维的维数为

$$\dim_k\big(M_{(\epsilon)}/\epsilon\, M_{(\epsilon)}\big) \;=\; r + s \;=\; 22.$$

由于 $r = 22$，我们得到 $s = 0$：不存在挠子项。因此$M_{(\epsilon)} \cong R_0^{22}$，所以 M 在 (ϵ) 处是平坦的。

对于 $k[\epsilon]$ 的任意素理想 $\mathfrak{p} \neq (\epsilon)$，元素 ϵ 在 $k[\epsilon]_{\mathfrak{p}}$ 中是可逆元，因此由步骤 2 可知 $\mathfrak{p}$ 处平坦。于是 M 在整个 $k[\epsilon]$ 上都是平坦的。□

下文第 8 节将对关系和纤维维数提供独立的计算验证。

8. 补充计算验证

注 8.1。 定理 1.2 的证明在逻辑上并不依赖本节，已经完整成立。下文的计算既可作为独立验证，也可实际用于检查 g_x 和 g_y 中较大整数系数的正确性。

我们通过符号格罗布纳基计算（使用 Macaulay2 和 SymPy）验证了，商 $k[x,y,z]/(f_1,\ \ldots\ldots,\ f_6)|_{\epsilon=\lambda}$ 对以下每一种情况恰有 22 个标准单项式：

$$\lambda \in \{0,\ 1,\ 2,\ -1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3}\}.$$

在 $\lambda = 1$ 处，字典序 Gröbner 基可化为以下形式：

$$x^{22}, \qquad y - \sum_{i=2}^{21} \alpha_i\, x^i, \qquad z - \sum_{i=3}^{21} \beta_i\, x^i$$

对于显式整数 α_i，β_i，这证实了该纤维确实是 $k[x]/(x^{22})$：变量 y 和 z 是 x 中的多项式。

9. 总结

9.1.莫比乌斯生成元的作用。关键思路是，莫比乌斯函数 $u_a = t/(1-at)$ 在曲线型环中提供了一族自然的元素，其极点结构彼此充分分离。恒等式$u_b - u_a = (b-a)u_a u_b$ (定理 4.1)给出了简洁的乘法规则，而差商坐标则提取出具有指定t-进阶数的生成元。

9.2. 推广到其他蜘蛛。这一构造可以直接推广。对于类型为 $(\ell_1, \ldots, \ell_r)$ 且具有 $n = 1 + \sum \ell_i$ 的蜘蛛代数，可取 r 莫比乌斯生成元 $u_1, \ldots, u_r$ 以及阶数为 1、2, … , r 的差商坐标。基定理可通过相同的极点分离论证推广（利用 $t = 1/a$ 处的极点，对应于 $a = 1,\ldots,r$）。加权 Rees 退化要求权w_i 满足 $(\ell_i + 1)\, w_i > \ell_r\, w_r$ 对所有 i 均成立；取 w_i 为$w_1, w_1 + 1, \ldots, w_1 + r - 1$ 的形式，并令 w_1 足够大，便总能满足要求。

实际困难在于计算显式的纯幂关系（即 g_x 和 g_y 的类似物），其系数增长得非常快。

9.3.不等腿长。 对于腿长不等的蜘蛛代数，例如 $k[x,y]/(x^a, y^b, xy)$，同样的方法适用于 u_1 和 u_2 以及 1 阶和 2 阶的差商坐标。权重约束变为 $aw_1 > (b-1)w_2$ 和 $bw_2 > (a-1)w_1$，对于适当的 w_1, w_2，这些约束总能得到满足。

9.4. 开放问题。 莫比乌斯方法产生的形变与蜘蛛具有相同的嵌入维数（r 个变量）。以下问题值得进一步研究：

(1) 这一构造是否能推广到非蜘蛛单项式代数（例如，两个变量中的 L 形或阶梯理想）。(2) 我们显式构造的 Rees 族与蜘蛛代数的形变论 T^1 和 T^2 模之间有何关系。(3) 得到的族是否能通过等变局部化，为 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$ 上的交叉理论计算提供有用的局部坐标。

A. 纯幂关系的推导与验证

我们介绍推导 $g_x = 0$ 和 $g_y = 0$ 的方法（定理 5.3），随后进行明确验证。

A.1. 推导方法。 由于 B 是 k-基 R（定理 4.3），R 的任意元素都有唯一的 B 展开。为求出 x^8 的展开，我们代入有理函数 $x(t) = t/(1-t)$，并将 x^8 表示为模 t^{22} 意义下基元素的线性组合。

具体而言，我们求解系数 α_i、β_j、$\gamma_k \in k$，使得

$$x^8 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{7} \alpha_i\, x^i + \sum_{j=1}^{7} \beta_j\, y^j + \sum_{k=1}^{7} \gamma_k\, z^k \quad \text{in } R. \tag{21}$$

由于常数项 1 的阶为 $_t = 0$，而 x^8 的阶为 $_t = 8$，因此有 $\alpha_0 = 0$。两边同乘 $D(t) = (1-t)^7(1-2t)^7(1-3t)^7$，即可将 (21) 化为一个次数为 ≤ 21 的多项式恒等式。通过匹配等式左右两边的 22 个泰勒系数（从 $[t^0]$ 到 $[t^{21}]$），即可确定 21 个未知系数（α_1、……、α_7、β_1、……、β_7、γ_1、……、γ_7）。（关于 $[t^0]$ 的方程自动成立，因为两边都为零；因此得到一个 21×21 的方程组，并且由于 B 是一组基，该方程组有唯一解。）

通过求解该方程组（使用精确有理数运算），我们得到 x^8 在基 B 下的展开式。为消去分母并得到整数系数，我们将所有 α_i、β_j、γ_k 的分母的最小公倍数乘到等式两边。由此得到 (12) 中的关系式 g_x。对 y^8 应用相同的步骤，可得 g_y。

A.2. 验证 $g_x = 0$ 和 $g_y = 0$。 关系 $g_x = 0$ 由构造可知在 R 中成立：式（12）中的整数系数是通过将 x^8 按基 B 展开（利用 §A.1 的线性系统）并通分得到的。g_y的情况也同样如此。剩下的是算术校验：只需独立验证所示整数系数是否正确。

代入 $x = t/(1-t)$、$y = t^2/((1-t)(1-2t))$、$z = 2t^3/((1-t)(1-2t)(1-3t))$ 后，表达式 g_x 变为关于 t 的有理函数，其分母在 $k[[t]]$ 中均为可逆元。将其展开为模 t^{22} 的截断幂级数，并按式（12）构成线性组合后，可以验证全部 22 个系数 $[t^0]$、……、$[t^{21}]$ 均为零。对 g_y 和式（13）也可作同样处理。这是一项有限且确定的计算，在任何计算机代数系统中耗时都不到一秒。

A.3. **可复现性**。我们已分别在 Macaulay2、SageMath 和 SymPy 中独立完成上述验证，三个系统所得结果完全一致。随 arXiv 投稿附上的附属文件中包含一个独立的 Macaulay2 脚本（verify.m2）；该脚本验证了所有关系，并确认在若干纤维值处，商的维数为 22。以下摘录展示了混合关系 (6)–(8) 和纯幂关系 (12)–(13) 的核心检验：

```
R = QQ[t]/ideal(t^22); s1 = sum(22, i->t^i); s2 =
sum(22, i->(2*t)^i); s3 = sum(22, i->(3*t)^i); x = t*s1;
y = t^2*s1*s2; z = 2*t^3*s1*s2*s3; -- 混合关系（命题
5.2）assert(x*y ==y - x^2); assert(2*x*z ==z - 2*y + 2
*x^2); assert(2*y*z ==z - 2*y + 2*x^2 - 4*y^2); -- 纯幂
关系 g_x（命题 5.3）gx = 32*x^8-1728*x^7-2864*x^6-
11088*x^5-14988*x^4-28080*x^3-23484*x^2+23484
*y-2048*y^7-9728*y^6-18944*y^5-25888*y^4-20384*y
^3-22284*y^2+2298*z+16*z^7-8*z^6+16*z^5-46*z^4+156
*z^3-581*z^2; assert(gx == 0); -- 纯幂关系 g_y（命题
5.3）gy = 2048*y^8-112608*x^7-196272*x^6-
723264*x^5-1000056*x^4-1835964*x^3-1556406*x
^2+1556406*y -116736*y^7-582656*y^6-1144064*y^5-
1576192*y^4-1226864*y^3-1395024*y^2+139779*z
+1008*z^7-496*z^6+984*z^5-2816*z^4+9522*z^3-
35392*z^2; assert(gy == 0);
```

参考文献

[1]G. Bérczi，点的希尔伯特概形上的典范积分 *I*，预印本，arXiv:2303.14807，2023。[2] G. Bérczi 和 J. Svendsen，点的希尔伯特概形上的不动点分布，预印本，arXiv:2306.11521，2023。[3] G. Bérczi 和 A. Szenes，全纯映射的多点评分公式，预印本，arXiv:2112.15502，2021。[4] J. Briançon，*Hilb* 的描述 $\mathrm{Hilb}^n\,\mathbb{C}\{x,y\}$，《数学发明》**41**（1977），45–89。[5] J. Briançon 和 A. Galligo，点 $\mathbb{C}^2$ 或 $\mathbb{R}^2$ 的特殊变形，载于：《卡尔盖斯奇点》，《Astérisque》**7–8**（1973），129–138。[6] D. A. Cartwright、D. Erman、M. Velasco 和 B. Viray，*8*点希尔伯特概形，《代数与数论》**3**（2009），第7期，763–795。

[7]J. Fogarty，代数曲面上的代数族，《美国数学杂志》**90**（1968），511–521。[8]Epoch AI，*FrontierMath*：未解决问题，2026。https://epoch.ai/frontiermath/open-problems[9] A. Iarrobino，簇上 0 维概形族的可约性，《数学发明》**15**（1972），72–77。[10] A. Iarrobino，凝聚希尔伯特概形，美国数学会回忆录**188**，1977。[11] J. Jelisiejew，点的希尔伯特概形上的病态现象，《数学发明》**220**（2020），581–610。[12] J. Jelisiejew、R. Ramkumar 和 A. Sammartano，三维簇上点的希尔伯特概形：破碎的戈伦斯坦结构与链接，即将在《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志）发表，预印本，arXiv:2409.17009，2024。

麻省理工学院，剑桥，马萨诸塞州02139，美国电子邮箱：davidct@mit.edu