arXiv:2603.00891v1 [math.OC] 1 Mar 2026

一种用于最佳逼近的抽象随机 Haugazeau 方法*

Javier I. Madariaga[1]

[1]北卡罗来纳州立大学数学系,
美国北卡罗来纳州罗利
27695jimadari@ncsu.edu

摘要 Haugazeau 方法最初旨在通过迭代使用到各个集合上的投影算子，计算希尔伯特空间中闭凸集交集的最佳逼近。我们提出其抽象随机版本，通过对该集合随机生成的随机外逼近进行逐次投影，来计算闭凸集的最佳逼近。在关于外逼近的一般假设下，导出了均方意义和几乎必然模式下的强收敛。这些结果被应用于发展随机算法，通过算子块的随机激活，构造任意不动点集交集的最佳逼近。文中给出了计算切比雪夫中心的数值应用。

关键词。 最佳逼近、随机不动点算法、随机块迭代分裂、随机算法。

*通讯作者：J. I. Madariaga。电子邮箱：jimadari@ncsu.edu。本工作由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2513409。

§1. 引言

本文中，H 是一个可分实希尔伯特空间，其恒等算子为 Id，标量积为 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_H$，相应的范数为 $\|\cdot\|_H$。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个完备概率空间。

在其未发表的论文中，Yves Haugazeau 提出了一种几何策略，通过依次对有限个闭凸子集中的每个集合进行周期投影，求出到它们的交集 Z_k的投影，其中这些闭凸子集构成 H 的子集。为描述这一策略，令 $(x, y, z) \in H^3$ 并定义

$$\begin{cases} H(x,y) &= \{z \in H \mid \langle z-y \mid x-y\rangle_H \leqslant 0\}; \\ O(x,y,z) &= \begin{cases} H(x,y)\cap H(y,z), & \text{if } H(x,y)\cap H(y,z)\neq\varnothing; \\ \{y\}, & \text{if } H(x,y)\cap H(y,z)=\varnothing; \end{cases} \\ Q(x,y,z) &= \operatorname{proj}_{O(x,y,z)} x. \end{cases} \tag{1.1}$$

半空间 H(x, y) 的定义使得 x 在 H(x, y) 上的投影恰好为 y，即 $y = \operatorname{proj}^{H(x,y)} x$。此外，O(x, y, z) 是 H 的非空闭凸子集，因此 Q (x, y, z) 有良好定义。给定初始点 $x_0 \in H$，[18, Théorème 3-1] 证明，由迭代算法生成的序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = Q\big(x_0, x_n, \operatorname{proj}_{Z_{n(\bmod p)+1}} x_n\big) \tag{1.2}$$

强收敛到 x_0 在 Z 上的最佳逼近 $\operatorname{proj}_Z x_0$。在这一过程中，$x_0$ 被投影到集合 $O(x_0, x_n, \operatorname{proj}^{Z_{n(\bmod p)+1}} x_n)$上，该集合是 Z 的一个外逼近。这些思想也被用于设计并行投影方法，将 x_0 投影到 Z [28]。注意

$$Z = \bigcap_{1\leqslant k\leqslant p} Z_k \subset Z_{n(\bmod p)+1} \subset H\big(x_n, a_n\big), \quad \text{where } \ a_n = \operatorname{proj}_{Z_{n(\bmod p)+1}} x_n. \tag{1.3}$$

这一观察促成了 [6] 以下 Haugazeau 方法抽象版本的发展，用于从 H 的非空闭凸子集 Z 中求出 $x_0 \in H$ 的最佳逼近。

$$\begin{array}{l} \text{for } n = 0, 1, \ldots \\ \quad \text{take } a_n \in H \text{ such that } Z \subset H(x_n, a_n) \\ \quad \text{take } \lambda_n \in \,]0, 1] \\ \quad r_n = x_n + \lambda_n(a_n - x_n) \\ \quad x_{n+1} = Q(x_0, x_n, r_n). \end{array} \tag{1.4}$$

该算法涵盖了原始的 Haugazeau 方法，只需令 $Z = \tilde{\text{N}}\ 16k6p\ Z_k$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = 1$ 和 $a_n = \operatorname{proj}^{Z_{n(\bmod p)+1}} x_n$ 即可得到。在一般情形下，只要序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的每个弱聚点都属于 Z [3, 6]，就能保证 (1.4) 中的序列强收敛到最佳逼近问题的解。该框架的应用例如可见于 [2, 5, 6, 9, 10, 25, 26, 29]。

在优化理论中，人们提出了许多随机方法来处理大规模问题和高维情形；例如，参见 [11, 13, 15, 19, 21, 24] 及其参考文献，其中讨论了随机方法在建模和计算方面的优势。然而，随机版本的（1.4）能否构造出来，以及若能构造，其收敛性质如何，仍是一个悬而未决的问题。与最佳逼近问题密切相关的是凸可行性问题，即在一族闭凸集的交集中寻找任意一点。针对这一问题，人们提出了随机方法：每次迭代时，仅激活有限个

随机选取的集合子集 [12, 19, 22, 27]。当集合族不可数无限时，这一特点尤为重要，因为在这种情况下，确定性方法通过激活有限个集合块无法保证迭代序列收敛。本着这一思路，我们拟研究随机对应方法（1.4）的收敛性，该方法旨在从任意集合族中求出$x_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$的最佳逼近。该抽象随机 Haugazeau 方法的步骤如下。

算法 1.1. 设 Z 是 H 的非空闭凸子集，并令 $x_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$。进行迭代

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于 } \mathrm{n} = 0,1,\ldots\text{，取 } a_{\mathrm{n}} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})\text{，使得 } \mathrm{Z} \subset \mathrm{H}(x_{\mathrm{n}}, a_{\mathrm{n}}) \text{ 几乎} \\ \text{处处；取 } \lambda_{\mathrm{n}} \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P};]0,1[)\ r_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}} + \lambda_{\mathrm{n}}(a_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{n}})\ x_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{Q}(x_0, x_{\mathrm{n}}, r_{\mathrm{n}})。\end{array}\right. \tag{1.5}$$

与确定性情形不同，在确定性情形中，[3] 所发现的弱到强收敛原理能够将非线性分析中广泛的一类弱收敛方法转化为强收敛的最佳逼近方法 [9]，；对于随机方法，则不存在随机的弱到强收敛原理。这是因为这些方法建立在随机外逼近之上，而随机外逼近并非确定性的，也不构成意义上的精确切割，即 Z 并非几乎必然包含于随机外逼近中，正如[12, 图 1]所示。因此，需要对算法 1.1 进行专门分析，以在这一随机框架下建立收敛保证。

本文结构安排如下。第2节介绍符号约定和预备结果。第1.1 节研究算法3，并证明迭代序列几乎必然强收敛，且在$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$意义下收敛。第4节将该方法应用于构造一种随机激活的块迭代算法，用以求解最佳逼近问题，其中Z 被描述为任意算子族（可能不可数无穷）的公共不动点集。此外，我们将 Haugazeau 原始循环方法与本方法的一个特化版本进行比较，该版本用于求取闭凸集有限交集上的投影。第5 节以一项数值应用作为全文结尾，该应用计算$\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$中的非空有界集的切比雪夫中心。

§2. 符号约定与背景

2.1. 符号约定

随机变量用斜体衬线字母表示，确定性变量则用无衬线字母表示。

符号 $\rightharpoonup$ 和 $\to$ 分别表示 H 中的弱收敛和强收敛。序列 $(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ 在 H 中的弱序列聚点集记为 $\mathfrak{W}(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$。到非空闭凸集 $\mathrm{C} \subset \mathrm{H}$ 上的投影记为 $\mathrm{proj_C}$。算子 $\mathrm{T}\colon \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 的不动点集为 $\mathrm{Fix\ T} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{H} \mid \mathrm{Tx} = \mathrm{x}\}$，若 T 满足牢固拟非扩张性 [4, 定义 4.1(iv)]，则

$$(\forall \mathrm{x} \in \mathrm{H})(\forall \mathrm{y} \in \mathrm{Fix\,T}) \quad \|\mathrm{Tx} - \mathrm{y}\|_{\mathrm{H}}^2 + \|\mathrm{Tx} - \mathrm{x}\|_{\mathrm{H}}^2 \leqslant \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_{\mathrm{H}}^2, \tag{2.1}$$

且 T 在 $\mathrm{y} \in \mathrm{H}$ 处是半闭的，即对于任意 $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$ 以及 H 中的任意序列 $(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$，若 $\mathrm{x_n} \rightharpoonup \mathrm{x}$ 且 $\mathrm{Tx_n} \to \mathrm{y}$，则有 $\mathrm{Tx} = \mathrm{y}$。关于凸分析和不动点理论的背景知识，请参阅 [4]。

设 $(\Xi, \mathcal{G})$ 为一个可测空间。若 $x\colon (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \to (\Xi, \mathcal{G})$ 是一个 Ξ 值随机变量（简称随机变量），且它是可测的，则称之为 Ξ 值随机变量。特别地，H 值随机变量是一个可测映射 $x\colon (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \to (\mathrm{H}\ \mathcal{B}_{\mathrm{H}})$，其中 $\mathcal{B}_{\mathrm{H}}$ 表示 H 的 Borel σ-代数。由一族 Φ 随机变量生成的 $\mathcal{F}$ 的子σ-代数记为 $\sigma(\Phi)$。给定 $x\colon \Omega \to \Xi$ 且 $\mathrm{S} \in \mathcal{G}$，令 $[x \in \mathrm{S}] = \{\omega \in \Omega \mid x(\omega) \in \mathrm{S}\}$。设 x 和 y 为 Ξ 值随机变量。若对于每个 $\mathrm{S} \in \mathcal{G}$，均有 $\mathrm{P}([x \in \mathrm{S}]) = \mathrm{P}([y \in \mathrm{S}])$，则称 y 是 x 的一个副本。设 $\mathcal{X}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数。那么，$L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$ 表示由满足 $\mathrm{E}\|x\|_{\mathrm{H}}^2 < +\infty$ 的 H 值随机变量 $x\colon (\Omega, \mathcal{X}, \mathrm{P}) \to (\mathrm{H}\ \mathcal{B}_{\mathrm{H}})$ 的 P-几乎处处相等的等价类组成的空间。赋予标量积

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{X},\mathrm{P};\mathrm{H})}\colon (x, y) \mapsto \mathrm{E}\langle x \mid y \rangle_{\mathrm{H}} = \int_{\Omega} \big\langle x(\omega) \,\big|\, y(\omega) \big\rangle_{\mathrm{H}} \mathrm{P}(d\omega), \tag{2.2}$$

$L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$ 是一个实希尔伯特空间。关于希尔伯特空间中的概率背景知识，请参阅 [20, 23]。

2.2. 预备结果

关于算法 1.1 的一个基本问题是，x_{n+1} 对于每个 $n \in \mathbb{N}$是否定义良好且可测。为给出肯定答案，首先需要研究 Q的性质。

引理 2.1（[4,定义 2.8]）。设 $\chi = \langle x - y \mid y - z \rangle_{\mathrm{H}}, \mu = \|x - y\|_{\mathrm{H}}^2, \nu = \|y - z\|_{\mathrm{H}}^2$，且 $\rho = \mu\nu - \chi^2$。则

$$\mathrm{Q}(x, y, z) = \begin{cases} y, & \text{if } \rho = 0 \text{ and } \chi < 0; \\ z, & \text{if } \rho = 0 \text{ and } \chi \geqslant 0; \\ x + (1 + \chi/\nu)(z - y), & \text{if } \rho > 0 \text{ and } \chi\nu \geqslant \rho; \\ y + (\nu/\rho)\big(\chi(x - y) + \mu(z - y)\big), & \text{if } \rho > 0 \text{ and } \chi\nu < \rho. \end{cases} \tag{2.3}$$

引理 2.2. 设 $\{x, y, z\} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$。假设存在某个 $u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$，使得$u \in O(x, y, z)$ 几乎处处成立。则 $Q(x, y, z) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$。特别地，若存在 $u \in H$，使得 $u \in O(x, y, z)$ 几乎处处成立，则 $Q(x, y, z) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$。

证明。令 $\chi = \langle x - y \mid y - z \rangle_{\mathrm{H}}, \mu = \|x - y\|_{\mathrm{H}}^2, \nu = \|y - z\|_{\mathrm{H}}^2$，以及 $\rho = \mu\nu - \chi^2$。H 上加法、数乘、标量积的连续性以及 H 上范数的连续性，加上 x、y 和 z 的可测性，保证了 χ、μ、ν 和 ρ 是可测的。定义互不相交的可测集

$$\begin{cases} \mathrm{S}_1 = [\rho = 0 \text{ and } \chi < 0]; & \mathrm{S}_2 = [\rho = 0 \text{ and } \chi \geqslant 0]; \\ \mathrm{S}_3 = [\rho > 0 \text{ and } \chi\nu \geqslant \rho]; & \mathrm{S}_4 = [\rho > 0 \text{ and } \chi\nu < \rho]. \end{cases} \tag{2.4}$$

于是，由引理 2.1和（2.4），我们可以将 $\mathrm{Q}(x, y, z)$写为

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(x, y, z) = 1_{\mathrm{S}_1} y + 1_{\mathrm{S}_2} z + 1_{\mathrm{S}_3} \Big(x + \Big(1 + \frac{\chi}{\nu + 1_{[\nu=0]}}\Big)(z - y)\Big) \\ + 1_{\mathrm{S}_4} \Big(y + \Big(\frac{\nu}{\rho + 1_{[\rho=0]}} \big(\chi(x - y) + \mu(z - y)\big)\Big)\Big) \quad \mathrm{P}\text{-a.s.}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

这表明 $\mathrm{Q}(x, y, z)$是可测的，因为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$是完备的。另一方面，由（1.1）及假设可推得

$$\frac{1}{2}\mathrm{E}\big\|\mathrm{Q}(x, y, z) - x\big\|_{\mathrm{H}}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{E}\big\|\mathrm{proj}_{\mathrm{O}(x,y,z)}\, x - x\big\|_{\mathrm{H}}^2 \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{E}\|u - x\|_{\mathrm{H}}^2 \leqslant \mathrm{E}\|u\|_{\mathrm{H}}^2 + \mathrm{E}\|x\|_{\mathrm{H}}^2. \tag{2.6}$$

因此，由于 $\{x, u\} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$，我们得出 $\mathrm{Q}(x, y, z) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$。 □

引理 2.3（[12, 引理 2.8]）。设 $x=(x_1,\dots,x_N)$ 是一个取值于 H^N 的随机变量，设 $(K,\mathcal{K})$ 是一个可测空间，并假设随机变量 $k:(\Omega,\mathcal{F})\to(K,\mathcal{K})$ 与 $\sigma(x)$ 独立。设 $f:(K\times H,\mathcal{K}\otimes\mathcal{B}_H)\to\mathbb{R}$ 可测且满足 $E|f(k,x_1)|<+\infty$，并定义 $g:H\to\mathbb{R}:x\mapsto Ef(k,x)$。那么，对于 P-几乎处处的 $\omega'\in\Omega$,

$$\mathsf{E}\big(\mathsf{f}(k,x_1)\,\big|\,\sigma(x)\big)(\omega')=\int_\Omega \mathsf{f}\big(k(\omega),x_1(\omega')\big)\mathsf{P}(d\omega)=\mathsf{g}\big(x_1(\omega')\big). \tag{2.7}$$

§3. 收敛分析

本节将证明，由算法 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 生成的序列1.1 在几乎必然和 $L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P};\ \mathsf{H})$模式下强收敛到最佳逼近问题的解。

定理 3.1。设$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为算法 1.1生成的序列。则以下结论成立：

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P;H)$中的定义良好的序列。*(ii)* $(\forall n\in\mathbb{N})\ Z\subset H(x_0,x_n)\cap H(x_n,r_n)$ 几乎处处。*(iii)* $(\exists\ell\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R}))\ kx_n-x_0k_H\uparrow\ell\leqslant kproj_Z x_0-x_0k_H$几乎处处。*(iv)* $(kx_nk_H)_{n\in\mathbb{N}}$几乎处处有界。*(v)* $\acute{I}_{n\in\mathbb{N}}Ekx_{n+1}-x_nk_H^2<+\infty$和 $\acute{I}_{n\in\mathbb{N}}E(kx_{n+1}-x_nk_H^2\,|\,\mathcal{X}_n)<+\infty$几乎处处。*(vi)* $\acute{I}_{n\in\mathbb{N}}E(\lambda_n^2ka_n-x_nk_H^2)<+\infty$和 $\acute{I}_{n\in\mathbb{N}}E(\lambda_n^2ka_n-x_nk_H^2\,|\,\mathcal{X}_n)<+\infty$几乎处处。*(vii)* 假设 $\mathfrak{W}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset Z$ 几乎处处成立。则$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎处处强收敛，并在$L^2(\Omega,\mathcal{F},P;H)$中强收敛到$proj_Z x_0$。

证明. (i) 和 (ii)：假设对于某个 n, $\in\mathbb{N}, x_n\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P};\mathsf{H})$，且 $Z\subset\mathsf{H}(x_0,x_n)$ 几乎处处成立。由 (1.5) 可知 $r_n\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P};\mathsf{H})$。另一方面，对于几乎所有 $\omega\in\Omega$,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{H}\big((x_n(\omega),a_n(\omega)\big)\\
&\quad=\big\{z\in\mathsf{H}\,\big|\,\langle z-a_n(\omega)\,|\,x_n(\omega)-a_n(\omega)\rangle_{\mathsf{H}}\leqslant 0\big\}\\
&\quad=\big\{z\in\mathsf{H}\,\big|\,\langle z-a_n(\omega)\,|\,x_n(\omega)-x_n(\omega)-\lambda_n(a_n(\omega)-x_n(\omega))\rangle_{\mathsf{H}}\leqslant 0\big\}\\
&\quad=\big\{z\in\mathsf{H}\,\big|\,\langle z-r_n(\omega)\,|\,x_n(\omega)-r_n(\omega)\rangle_{\mathsf{H}}\leqslant\langle a_n(\omega)-r_n(\omega)\,|\,x_n(\omega)-r_n(\omega)\rangle_{\mathsf{H}}\big\}\\
&\quad=\big\{z\in\mathsf{H}\,\big|\,\langle z-r_n(\omega)\,|\,x_n(\omega)-r_n(\omega)\rangle_{\mathsf{H}}\leqslant-\lambda_n(1-\lambda_n)\|x_n(\omega)-a_n(\omega)\|_{\mathsf{H}}^2\big\}\\
&\quad\subset\mathsf{H}\big(x_n(\omega),r_n(\omega)\big).
\end{aligned}\tag{3.1}$$

由 (1.5) 和 (3.1) 可推出 $Z\subset\mathsf{H}(x_n,r_n)$ 几乎处处成立。因此存在一个子集 $\Omega_n'\in\mathcal{F}$，使得 $\mathsf{P}(\Omega_n')=1$，且 $(\forall\omega\in\Omega_n')\ Z\subset\mathsf{H}(x_n(\omega)\ r_n(\omega))$。同样，存在 $\Omega_n''\in\mathcal{F}$，使得 $\mathsf{P}(\Omega_n')=1$，且 $(\forall\omega\in\Omega_n'')\ Z\subset\mathsf{H}(x_0(\omega)\ x_n(\omega))$。令 $\omega\in\Omega_n'\cap\Omega_n''$。由 [4, 定理 3.16] 和 (1.5) 可得

$$\begin{aligned}
Z\subset\mathsf{H}\big(x_0(\omega),x_n(\omega)\big)\cap\mathsf{H}\big(x_n(\omega),r_n(\omega)\big)\ &\Rightarrow Z\subset\mathsf{H}\big(x_0(\omega),\mathsf{Q}(x_0(\omega),x_n(\omega),r_n(\omega))\big)\\
&\Leftrightarrow Z\subset\mathsf{H}(x_0(\omega),x_{n+1}(\omega)).
\end{aligned}\tag{3.2}$$

由于 $\mathsf{P}(\Omega_n'\cap\Omega_n'')=1$，我们得到 $\varnothing\neq Z\subset\mathsf{H}(x_0,x_{n+1})$ 几乎处处。因此，由引理 2.2 可得 $x_{n+1}\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P};\mathsf{H})$。由于 $x_0\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P};\mathsf{H})$，且 $Z\subset\mathsf{H}(x_0,x_0)=\mathsf{H}$ 几乎处处，我们通过归纳论证得出，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P};\mathsf{H})$ 中的序列，并且对每个 $n\in\mathbb{N}$，$Z\subset\mathsf{H}(x_0,x_n)\cap\mathsf{H}(x_n,r_n)$ 几乎处处。

(iii)：对每个 $n \in \mathbb{N}$， $\mathcal{X}_n = \sigma(x_0, \dots, x_n)$，并考虑随机过程 $(\|x_n - x_0\|_H,\ \mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$。下面证明该过程是一个次鞅。设 $n \in \mathbb{N}$。由 (ii) 可得

$$O(x_0, x_n, r_n) = H(x_0, x_n) \cap H(x_n, r_n)\ P\text{-a.s.}\ \text{ and }\ x_{n+1} \in H(x_0, x_n) \cap H(x_n, r_n)\ P\text{-a.s.} \tag{3.3}$$

由（1.1）可知 $x_n = \mathrm{proj}_{H(x_0,x_n)}\ x_0$ P-几乎处处成立；由（3.3）可知 $x_{n+1} \in H$（x_0， x_n） P-几乎处处成立。因此

$$(\forall n \in \mathbb{N})\quad \|x_n - x_0\|_H \leqslant \|x_{n+1} - x_0\|_H \quad P\text{-a.s.} \tag{3.4}$$

因此

$$(\forall n \in \mathbb{N})\quad \|x_n - x_0\|_H = E\big(\|x_n - x_0\|_H \,\big|\, \mathcal{X}_n\big) \leqslant E\big(\|x_{n+1} - x_0\|_H \,\big|\, \mathcal{X}_n\big) \quad P\text{-a.s.} \tag{3.5}$$

因此，$(\|x_n - x_0\|_H,\ \mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$是一个正次鞅。另一方面，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{proj}_Z x_0 \in Z \subset H(x_0,\ x_n)$ 几乎处处成立。于是，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\|x_n - x_0\|_H \leqslant \|\mathrm{proj}_Z x_0 - x_0\|_H$ 几乎处处成立，这说明

$$(\forall n \in \mathbb{N})\quad E\|x_n - x_0\|_H^2 \leqslant E\|\mathrm{proj}_Z x_0 - x_0\|_H^2 < +\infty. \tag{3.6}$$

因此，$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\|x_n - x_0\|_H^2 < +\infty$，由此根据 [16, §IV 定理 4.1s(i) 和 4.1s(iii)]可知，$(\|x_n - x_0\|_H)_{n\in\mathbb{N}}$几乎处处收敛，并且在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ 中收敛于一个随机变量 $\ell \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$，该随机变量满足 $\ell \leqslant \|\mathrm{proj}_Z x_0 - x_0\|_H$几乎处处成立。

(iv)：注意，对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n\|_H \leqslant \|x_n - x_0\|_H + \|x_0\|_H \quad P\text{-a.s.} \tag{3.7}$$

由（3.7）和 (iii)可推出 $(\|x_n\|_H)_{n\in\mathbb{N}}$是有界的 P几乎处处

(v)：设 $n \in \mathbb{N}$。由于 $x_{n+1} \in H(x_0,\ x_n)$ P几乎处处成立，因此有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\|_H^2 &\leqslant \|x_{n+1} - x_n\|_H^2 + 2\langle x_{n+1} - x_n \,|\, x_n - x_0\rangle_H \\ &= \|x_{n+1} - x_0\|_H^2 - \|x_n - x_0\|_H^2 \quad P\text{-a.s.}\end{aligned} \tag{3.8}$$

因此，$\sum_{j=0}^{n} \|x_{j+1} - x_j\|_H^2 \leqslant \|x_{n+1} - x_0\|_H^2 \leqslant \|\mathrm{proj}_Z x_0 - x_0\|_H^2$几乎处处成立。因此，取期望值并令 $n \to +\infty$，可得

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} E\Big(E\big(\|x_{j+1} - x_j\|_H^2 \,\big|\, \mathcal{X}_j\big)\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} E\|x_{j+1} - x_j\|_H^2 \leqslant E\|\mathrm{proj}_Z x_0 - x_0\|_H^2 < +\infty. \tag{3.9}$$

我们得出 $\sum_{j\in\mathbb{N}} E\|x_{j+1} - x_j\|_H^2 < +\infty$，并且 $\sum_{j\in\mathbb{N}} E(\|x_{j+1} - x_j\|_H^2 \,|\, \mathcal{X}_j) < +\infty$ P几乎处处

(vi)：设 $n \in \mathbb{N}$。由于 $x_{n+1} \in H(x_n,\ r_n)$ P几乎处处成立，因此有

$$\begin{aligned}\|r_n - x_n\|_H^2 &\leqslant \|x_{n+1} - r_n\|_H^2 + \|x_n - r_n\|_H^2 \\ &\leqslant \|x_{n+1} - r_n\|_H^2 + 2\langle x_{n+1} - r_n \,|\, r_n - x_n\rangle_H + \|x_n - r_n\|_H^2 \\ &= \|x_{n+1} - x_n\|_H^2 \quad P\text{-a.s.}\end{aligned} \tag{3.10}$$

于是，由 (v) 和（1.5）可得

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} E\Big(E\big(\lambda_j^2 \|a_j - x_j\|_H^2 \,\big|\, \mathcal{X}_j\big)\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} E\big(\lambda_j^2 \|a_j - x_j\|_H^2\big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} E\|r_j - x_j\|_H^2 < +\infty. \tag{3.11}$$

因此，$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\lambda_j^2\|a_j - x_j\|_H^2) < +\infty$ 且 $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\lambda_j^2\|a_j - x_j\|_H^2 \mid \mathcal{X}_j) < +\infty$ 几乎处处。

(vii)：由 (iv) 可知，$\mathfrak{W}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq \varnothing$ 几乎处处。现在假设 $\mathfrak{W}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z$ 几乎处处。于是存在 $\Omega' \in \mathcal{F}$ 使得 $P(\Omega') = 1$，且 $(\forall \omega \in \Omega')\ \varnothing \neq \mathfrak{W}(x_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \subset Z$。此外，由 (iii) 考虑事件 $\Omega'' \in \mathcal{F}$，使得 $P(\Omega'') = 1$，且

$$(\forall \omega \in \Omega'') \quad \begin{cases} \|x_n(\omega) - x_0(\omega)\|_H \to \ell(\omega); \\ \ell(\omega) \leqslant \|\mathrm{proj}_Z x_0(\omega) - x_0(\omega)\|_H. \end{cases} \tag{3.12}$$

令 $\omega \in \Omega' \cap \Omega''$ 并令 $x \in Z$ 为 $(x_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 的弱序列聚点 $x_{k_n}(\omega) \rightharpoonup x$。那么，$\|\cdot\|_H$ 的弱下半连续性以及 (3.12) 蕴含

$$\begin{aligned} \|x - x_0(\omega)\|_H &\leqslant \varliminf_{n\in\mathbb{N}} \|x_{k_n}(\omega) - x_0(\omega)\|_H \\ &= \ell(\omega) \\ &\leqslant \|\mathrm{proj}_Z x_0(\omega) - x_0(\omega)\|_H \\ &= \inf_{y\in Z} \|y - x_0(\omega)\|_H \\ &\leqslant \|x - x_0(\omega)\|_H. \end{aligned} \tag{3.13}$$

因此，$x = \mathrm{proj}_Z x_0(\omega)$ 是序列 $(x_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ and $x_n(\omega) \rightharpoonup \mathrm{proj}_Z x_0(\omega)$ 的唯一弱序列聚点。因此，$x_n(\omega) - x_0(\omega) \rightharpoonup \mathrm{proj}_Z x_0(\omega) - x_0(\omega)$，且 (3.13) 得出 $\|x_n(\omega) - x_0(\omega)\|_H \to \|\mathrm{proj}_Z x_0(\omega) - x_0(\omega)\|_H$。然后，由[4, 引理 2.41(i)], 可得 $x_n(\omega) - x_0(\omega) \to \mathrm{proj}_Z x_0(\omega) - x_0(\omega)$，因此 $x_n(\omega) \to \mathrm{proj}_Z x_0(\omega)$。由于 $P(\Omega' \cap \Omega'') = 1$，我们推得 $x_n \to \mathrm{proj}_Z x_0$ 几乎处处。此外，注意到由 (iii) 可知，对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{proj}_Z x_0 - x_n\|_H &\leqslant \|\mathrm{proj}_Z x_0 - x_0\|_H + \|x_n - x_0\|_H \\ &\leqslant 2\|\mathrm{proj}_Z x_0 - x_0\|_H \quad P\text{-a.s.} \end{aligned} \tag{3.14}$$

由于 $\|\mathrm{proj}_Z x_0 - x_0\|_H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$，控制收敛定理保证 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ 中强收敛到 $\mathrm{proj}_Z x_0$。 □

§4. 在共同不动点最佳逼近中的应用

本节将最佳逼近问题具体化为以下情形。

问题 4.1。设 $(K, \mathcal{K})$ 为一个可测空间，且 $(T_k)_{k\in K}$ 是一族牢固拟非扩张算子，满足 $\mathbf{T}: (K \times H, \mathcal{K} \otimes \mathcal{B}_H) \to (H, \mathcal{B}_H) : (k, x) \mapsto T_k x$ 可测，并且对每个 $k \in K$，$\mathrm{Id} - T_k$ 在 0 处半闭。设 k 为一个取值于 K 的随机变量，并假设

$$Z = \left\{ z \in H \,\middle|\, z \in \mathrm{Fix}\, T_k \ P\text{-a.s.} \right\} \neq \varnothing, \tag{4.1}$$

并令 $x_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$。目标是求 $\mathrm{proj}_Z x_0$。

为强调问题 4.1的通用性，我们列举一些非线性分析和优化方法中常用的牢固拟非扩张算子的例子。

例 4.2 ([3, 命题 2.3])。设 $T: H \to H$。那么 T 满足以下任一条件时，均为牢固拟非扩张映射：

(i) Z 是 H 的非空闭凸子集，且 $T = \mathrm{proj}_Z$。此处，$\mathrm{Fix}\, T = Z$。(ii) $f : H \to]-\infty, +\infty]$ 是正常下半连续凸函数，且

$$T = \mathrm{prox}_f : H \to H : x \mapsto \operatorname*{argmin}_{y \in H}\left(f(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|_H^2\right). \tag{4.2}$$

这里，$\mathrm{Fix}\, T = \mathrm{Argmin}\, f$。

(iii) $A : H \to 2^H$ 是极大单调的，且 $T = J_A = (\mathrm{Id} + A)^{-1}$。这里，$\mathrm{Fix}\, T = \{z \in H \mid 0 \in Az\}$。

(iv) $f : H \to \mathbb{R}$ 是连续凸函数，$s : H \to H : x \mapsto s(x) \in \partial f(x)$ 是 ∂f 的一个选择，并且

$$T = G_f : H \to H : x \mapsto \begin{cases} x - \dfrac{f(x)}{\|s(x)\|_H^2} s(x), & \text{if } f(x) > 0; \\ x, & \text{if } f(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

是到 $\mathrm{Fix}\, T = \{x \in H \mid f(x) \leqslant 0\}$ 上的次梯度投影算子。

4.1. 算法与收敛

由于集合 Z 是问题 4.1 的一个非空闭凸子集，且属于 H [12, 注 5。3], 我们调用定理 3.1 ，引入第一个随机选择分块迭代不动点算法来求解问题 4.1，该算法保证在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$中既强几乎必然收敛，又强收敛。我们强调，即使 K 是有限或可数无穷的，该方法也是新颖的。此外，与确定性算法不同，这种随机方法能够通过随机激活算子块，以一般形式求解问题 4.1 。

The定理 4.3。 在问题 4.1的设定下，令 $0 < M \in \mathbb{N}$， $\delta \in]0, 1/M[$, 并且 $\varepsilon \in]0, 1[$。迭代

$$\begin{array}{l}
\text{for } n = 0, 1, \ldots \\
\quad \mathcal{X}_n = \sigma(x_0, \ldots, x_n) \\
\quad \textit{for } i = 1, \ldots, M \\
\quad\quad k_{i,n} \text{ is a copy of } k \text{ and is independent of } \mathcal{X}_n \\
\quad\quad p_{i,n} = T_{k_{i,n}} x_n \\
\quad (\beta_{i,n})_{1 \leqslant i \leqslant M} \text{ are } [0,1]\text{-valued random variables such that} \\
\quad\quad \textstyle\sum_{i=1}^M \beta_{i,n} = 1 \text{ P-a.s. and } (\forall i \in \{1, \ldots, M\})\ \beta_{i,n} \geqslant \delta 1_{[\|p_{i,n} - x_n\|_H = \max_{1 \leqslant j \leqslant M} \|p_{j,n} - x_n\|_H]} \\
\quad p_n = \textstyle\sum_{i=1}^M \beta_{i,n} p_{i,n} \\
\quad L_n = \dfrac{\sum_{i=1}^M \beta_{i,n} \|p_{i,n} - x_n\|_H^2 + 1_{[p_n = x_n]}}{\|p_n - x_n\|_H^2 + 1_{[p_n = x_n]}} \\
\quad a_n = x_n + L_n(p_n - x_n) \\
\quad \text{take } \lambda_n \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P; [\varepsilon, 1]) \\
\quad r_n = x_n + \lambda_n(a_n - x_n) \\
\quad x_{n+1} = Q(x_0, x_n, r_n).
\end{array} \tag{4.3}$$

则 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 几乎必然强收敛 P-a.s.， 并且在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ 中强收敛到 $\mathrm{proj}_Z x_0$。

证明。 我们将证明，由（4.3）构造的序列对应于算法 1.1生成的序列。首先，我们来证明

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad L_n \geqslant 1 \ \text{ P-a.s.} \tag{4.4}$$

取 $z \in Z$ 和 $n \in \mathbb{N}$。对于每个 $i \in \{1,\dots,M\}$，令 $\Omega_{i,n} \in \mathcal{F}$ 满足

$$P(\Omega_{i,n}) = 1 \quad \text{and} \quad (\forall \omega \in \Omega_{i,n}) \quad z \in \operatorname{Fix} T_{k_{i,n}(\omega)}. \tag{4.5}$$

由（4.5），于是我们选择 $\Omega_n \in \mathcal{F}$ 使得

$$P(\Omega_n) = 1 \quad \text{and} \quad (\forall \omega \in \Omega_n) \quad \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant M} \operatorname{Fix} T_{k_{i,n}(\omega)} \neq \varnothing \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}(\omega) = 1. \tag{4.6}$$

给定 $\omega \in \Omega_n$，我们研究以下两种情况：

- 假设 $p_n(\omega) = x_n(\omega)$。那么 [7, 命题 2.4] 表明

$$x_n(\omega) \in \operatorname{Fix}\left(\sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}(\omega) T_{k_{i,n}(\omega)}\right) = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant M} \operatorname{Fix} T_{k_{i,n}(\omega)}, \tag{4.7}$$

  因此，对每个 $i \in \{1,\dots,M\}$，$x_n(\omega) = p_{i,n}(\omega)$。于是，

$$L_n(\omega) = \frac{\sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}(\omega) \|p_{i,n}(\omega) - x_n(\omega)\|_H^2 + 1_{[p_n = x_n]}(\omega)}{\|p_n(\omega) - x_n(\omega)\|_H^2 + 1_{[p_n = x_n]}(\omega)} = \frac{1_{[p_n = x_n]}(\omega)}{1_{[p_n = x_n]}(\omega)} = 1. \tag{4.8}$$

- 假设 $p_n(\omega) \neq x_n(\omega)$。那么，$k \cdot k^2_H$ 的凸性给出

$$0 < \|p_n(\omega) - x_n(\omega)\|_H^2 = \left\|\sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}(\omega)\big(p_{i,n}(\omega) - x_n(\omega)\big)\right\|_H^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}(\omega) \|p_{i,n}(\omega) - x_n(\omega)\|_H^2, \tag{4.9}$$

  这意味着 $L_n(\omega) \geqslant 1$。

接下来，我们将通过归纳法证明，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$。令 $i \in \{1, \dots, M\}$，并假设 $x_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$。则 $T_{k_{i,n}} x_n = T \circ (k_{i,n}, x_n)$ 是可测的。此外，对于每个 $\omega \in \Omega_{i,n}$，$2T_{k_{i,n}(\omega)} - \mathrm{Id}$ 是拟非扩张的，且 $\operatorname{Fix}(2T_{k_{i,n}(\omega)} - \mathrm{Id}) = \operatorname{Fix} T_{k_{i,n}(\omega)}$ [7, 命题 2.2(v)]。因此

$$\begin{aligned} 2\|p_{i,n}(\omega)\|_H^2 &= \frac{1}{2}\|2T_{k_{i,n}(\omega)} x_n(\omega)\|_H^2 \\ &\leqslant \|(2T_{k_{i,n}(\omega)} - \mathrm{Id}) x_n(\omega) - z\|_H^2 + \|x_n(\omega) + z\|_H^2 \\ &\leqslant \|x_n(\omega) - z\|_H^2 + \|x_n(\omega) + z\|_H^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

因此，正弦ce $x_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ 且$z \in H$，我们有$p_{i,n} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$。因此，(4.3) 得出 tha t

$p_n \in L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P};\ \mathrm{H})$ 且 a_n 是可测的。为证明 $a_n \in L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P};\ \mathrm{H})$，我们首先注意到

$$
\begin{aligned}
x_n - a_n &= L_n(x_n - p_n) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\|p_{i,n} - x_n\|_H^2 + 1_{[p_n=x_n]}}{\|p_n - x_n\|_H^2 + 1_{[p_n=x_n]}}(x_n - p_n) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\left(\langle x_n \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H - \langle p_{i,n} \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H\right)}{\|x_n - p_n\|_H^2 + 1_{[p_n=x_n]}}(x_n - p_n) \\
&= \frac{\langle x_n \mid x_n - p_n\rangle_H - \sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\langle p_{i,n} \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H}{\|x_n - p_n\|_H^2 + 1_{[p_n=x_n]}}(x_n - p_n) \qquad (4.11) \\
&= \frac{\langle x_n \mid x_n - p_n\rangle_H - \sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\langle p_{i,n} - z \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H - \sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\langle z \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H}{\|x_n - p_n\|_H^2 + 1_{[p_n=x_n]}}(x_n - p_n) \\
&= \frac{\langle x_n - z \mid x_n - p_n\rangle_H - \sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\langle p_{i,n} - z \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H}{\|x_n - p_n\|_H^2 + 1_{[p_n=x_n]}}(x_n - p_n) \quad \mathrm{P\text{-a.s.}} \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

另一方面，由 [4, 命题 4.2(iv)] 可知

$$
(\forall i \in \{1, \ldots, M\}) \quad \left\langle p_{i,n} - z \middle| x_n - p_{i,n} \right\rangle_H = \left\langle T_{k_{i,n}} x_n - z \middle| x_n - T_{k_{i,n}} x_n \right\rangle_H \geqslant 0 \quad \mathrm{P\text{-a.s.}} \qquad (4.13)
$$

进而，$y \mapsto \mathrm{h}y - z \mid x_n(\omega) - y\mathrm{i}_H$ 的凹性给出

$$
0 \leqslant \sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\left\langle p_{i,n} - z \middle| x_n - p_{i,n} \right\rangle_H \leqslant \left\langle p_n - z \middle| x_n - p_n \right\rangle_H \quad \mathrm{P\text{-a.s.}} \qquad (4.14)
$$

因此，由范数平方的凸性和（4.12）可得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{E}\|x_n - a_n\|_H^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{E}\left\|\frac{\langle x_n - z \mid x_n - p_n\rangle_H - \sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\langle p_{i,n} - z \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H}{\|x_n - p_n\|_H^2 + 1_{[p_n=x_n]}}(x_n - p_n)\right\|_H^2 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{E}\left|\frac{\langle x_n - z \mid x_n - p_n\rangle_H - \sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\langle p_{i,n} - z \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H}{\|x_n - p_n\|_H + 1_{[p_n=x_n]}}\right|^2 \\
&\leqslant \mathrm{E}\left|\frac{\langle x_n - z \mid x_n - p_n\rangle_H}{\|x_n - p_n\|_H + 1_{[p_n=x_n]}}\right|^2 + \mathrm{E}\left|\frac{\sum_{i=1}^{M} \beta_{i,n}\langle p_{i,n} - z \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H}{\|x_n - p_n\|_H + 1_{[p_n=x_n]}}\right|^2 \\
&\leqslant \mathrm{E}\left|\frac{\|x_n - z\|_H\|x_n - p_n\|_H}{\|x_n - p_n\|_H + 1_{[p_n=x_n]}}\right|^2 + \mathrm{E}\left|\frac{\langle p_n - z \mid x_n - p_n\rangle_H}{\|x_n - p_n\|_H + 1_{[p_n=x_n]}}\right|^2 \\
&\leqslant \mathrm{E}\|x_n - z\|_H^2 + \mathrm{E}\left|\frac{\|p_n - z\|_H\|x_n - p_n\|_H}{\|x_n - p_n\|_H + 1_{[p_n=x_n]}}\right|^2 \\
&\leqslant \mathrm{E}\|x_n - z\|_H^2 + \mathrm{E}\|p_n - z\|_H^2 \\
&< +\infty. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

由于 $\{x_n, p_n\} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$，且 $z \in \mathrm{H}$，因此我们得到 $x_n - a_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$，进而有 $a_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$。此外，由 (4.3) 可得 $r_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathrm{H})$。另一方面，我们推得

由 (4.3) 和 (4.11) 可知

$$\begin{aligned}\langle a_n \mid x_n - a_n\rangle_H &= L_n\big\langle x_n + L_n(p_n - x_n) \,\big|\, x_n - p_n\big\rangle_H \\ &= L_n\Big(\langle x_n \mid x_n - p_n\rangle_H - L_n\|p_n - x_n\|_H^2\Big) \\ &= L_n\Big(\langle x_n \mid x_n - p_n\rangle_H - \langle x_n \mid x_n - p_n\rangle_H + \sum_{i=1}^{M}\beta_{i,n}\langle p_{i,n} \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H\Big) \\ &= L_n\sum_{i=1}^{M}\beta_{i,n}\langle p_{i,n} \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H \quad \mathsf{P}\text{-a.s.} \end{aligned} \tag{4.16}$$

此外，(4.4)、(4.14) 和 (4.16) 给出

$$\begin{aligned}\langle z \mid x_n - a_n\rangle_H &= L_n\langle z \mid x_n - p_n\rangle_H \\ &= L_n\sum_{i=1}^{M}\beta_{i,n}\langle z \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H \\ &\leqslant L_n\sum_{i=1}^{M}\beta_{i,n}\langle p_{i,n} \mid x_n - p_{i,n}\rangle_H \\ &= \langle a_n \mid x_n - a_n\rangle_H \quad \mathsf{P}\text{-a.s.}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

这表明 $Z \subset H(x_n, a_n)$ P-几乎必然。我们可以重复 (3.1)–(3.2) 中的论证，从而证明 $x_{n+1} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}; H)$。由于 $x_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}; H)$，我们归纳得出

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{x_n, a_n\} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}; H) \ \text{ and } \ Z \subset H(x_n, a_n) \ \mathsf{P}\text{-a.s.} \tag{4.18}$$

因此，由 $((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 构造的序列对应于由算法 4.3) 生成的序列1.1。因此，只需证明 $\mathfrak{W}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z$ P-几乎必然，即可证明该结论。为此，我们首先由 (4.3) 推得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big(\|a_n - x_n\|_H^2 \,\big|\, \mathcal{X}_n\big) &= \mathsf{E}\Big(\big\|L_n(p_n - x_n)\big\|_H^2 \,\Big|\, \mathcal{X}_n\Big) \\ &= \mathsf{E}\Big(|L_n|^2\|p_n - x_n\|_H^2 \,\Big|\, \mathcal{X}_n\Big) \\ &= \mathsf{E}\Big(L_n\sum_{i=1}^{M}\beta_{i,n}\|p_{i,n} - x_n\|_H^2 \,\Big|\, \mathcal{X}_n\Big) \\ &\geqslant \mathsf{E}\Big(\sum_{i=1}^{M}\beta_{i,n}\|p_{i,n} - x_n\|_H^2 \,\Big|\, \mathcal{X}_n\Big) \\ &\geqslant \mathsf{E}\Big(\delta\max_{1\leqslant j\leqslant M}\|p_{j,n} - x_n\|_H^2 \,\Big|\, \mathcal{X}_n\Big) \\ &\geqslant \delta\mathsf{E}\Big(\|p_{1,n} - x_n\|_H^2 \,\Big|\, \mathcal{X}_n\Big) \\ &= \delta\mathsf{E}\Big(\big\|\mathsf{T}_{k_{1,n}}x_n - x_n\big\|_H^2 \,\Big|\, \mathcal{X}_n\Big). \end{aligned} \tag{4.19}$$

然而，$k_{1,\,n}$ 独立于 $\mathcal{X}_n$ 并且作为副本对应于 k。因此，引理2.3 保证，对于P-几乎 t

每一个 $\omega' \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big(\big\|\mathsf{T}_{k_{1,n}}x_n - x_n\big\|_{\mathsf{H}}^2 \,\Big|\, \mathcal{X}_n\Big)(\omega') &= \int_\Omega \big\|\mathsf{T}_{k_{1,n}(\omega)}x_n(\omega') - x_n(\omega')\big\|_{\mathsf{H}}^2 \mathsf{P}(d\omega)\\ &= \int_\Omega \big\|\mathsf{T}_{k(\omega)}x_n(\omega') - x_n(\omega')\big\|_{\mathsf{H}}^2 \mathsf{P}(d\omega). \end{aligned} \tag{4.20}$$

因此，对于 P-几乎处处的 $\omega' \in \Omega$，(4.19) 得出

$$\mathsf{E}\big(\lambda_n^2\|a_n - x_n\|_{\mathsf{H}}^2 \,\big|\, \mathcal{X}_n\big)(\omega') \geqslant \varepsilon^2\delta \int_\Omega \big\|\mathsf{T}_{k(\omega)}x_n(\omega') - x_n(\omega')\big\|_{\mathsf{H}}^2 \mathsf{P}(d\omega) \quad \mathsf{P}\text{-a.s.} \tag{4.21}$$

对 (4.21) 取期望值，对 $n \in \mathbb{N}$ 求和，并应用定理 3.1(vi)，可得

$$\mathsf{E}\bigg(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \big\|\mathsf{T}_{k(\omega)}x_n - x_n\big\|_{\mathsf{H}}^2 \mathsf{P}(d\omega)\bigg) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\bigg(\int_\Omega \big\|\mathsf{T}_{k(\omega)}x_n - x_n\big\|_{\mathsf{H}}^2 \mathsf{P}(d\omega)\bigg) < +\infty, \tag{4.22}$$

这意味着

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \big\|\mathsf{T}_{k(\omega)}x_n - x_n\big\|_{\mathsf{H}}^2 \mathsf{P}(d\omega) < +\infty \quad \mathsf{P}\text{-a.s.} \tag{4.23}$$

由此可知存在一个集合 $\Omega' \in \mathcal{F}$，使得 $\mathsf{P}(\Omega') = 1$，并且对每个 $\omega' \in \Omega'$，级数 $\acute{\mathrm{I}}_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \mathrm{k}\mathsf{T}^{k(\omega)}x_n($ $\omega') - x_n(\omega')\mathrm{k}_{\mathsf{H}}^2 \mathsf{P}(d\omega)$ 收敛。此外，根据定理 3.1(iv)，我们可以假设 $\mathfrak{W}(x_n(\omega'))_{n\in\mathbb{N}} \neq \varnothing$ 在 Ω' 上成立。固定 $\omega' \in \Omega'$，并令 $x(\omega') \in \mathfrak{W}(x_n(\omega'))_{n\in\mathbb{N}}$，即 $x_{j_n}(\omega') \rightharpoonup x(\omega')$。由单调收敛定理可知

$$\int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} \big\|\mathsf{T}_{k(\omega)}x_n(\omega') - x_n(\omega')\big\|_{\mathsf{H}}^2 \mathsf{P}(d\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \big\|\mathsf{T}_{k(\omega)}x_n(\omega') - x_n(\omega')\big\|_{\mathsf{H}}^2 \mathsf{P}(d\omega) < +\infty. \tag{4.24}$$

因此，对于几乎处处的 $\omega \in \Omega$，$\acute{\mathrm{I}}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{k}\mathsf{T}^{k(\omega)}x_n(\omega') - x_n(\omega')\,\mathrm{k}_{\mathsf{H}}^2 < +\infty$。因此，存在 $\Omega'' \in \mathcal{F}$ 使得 $\mathsf{P}(\Omega'') = 1$，并且

$$(\forall \omega \in \Omega'') \quad \mathsf{T}_{k(\omega)}x_n(\omega') - x_n(\omega') \to 0. \tag{4.25}$$

由算子 $(\mathrm{Id} - \mathsf{T}_k)_{k\in K}$ 在 0 处的渐闭性可得

$$(\forall \omega \in \Omega'') \quad \mathsf{T}_{k(\omega)}x(\omega') = x(\omega'). \tag{4.26}$$

因此 $x(\omega') \in \{z \in \mathsf{H} \mid z \in \mathrm{Fix}\,\mathsf{T}_k \text{ P-几乎处处}\} = \mathsf{Z}$。由于 ω' 在 Ω'中的取值任意，因此我们得出 $\mathfrak{W}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{Z}$ P-几乎处处成立，故由定理 3.1(vii)可得所述结论。 □

注 4.4。 定理 4.3 中的算法受到 [6, 第 6 节中提出的确定性外推算法的启发，5], 其中集合族至多可数无限，且控制规则 $\mathrm{k}_{i,\,n}$、权重 $\beta_{i,\,n}$以及松弛参数 λ_n 均为确定性的。

注记 4.5。 定理 4.3 中的指标随机激活取代了确定性方法中的控制规则策略。因此，同样可以采用随机化控制规则的方法，例如，设计随机化的分块迭代强收敛算法，以求得与原始-对偶单调包含问题相关联的 Kuhn-Tucker 集中的最佳逼近[5, 9, 10]。

4.2. 从有限个闭凸集进行最佳逼近

为了将定理 4.3 与 Haugazeau 的原始工作联系起来，我们将其专门化，用于求解以下简单的最佳逼近问题。

问题 4.6。 设 $(Z_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ 是 H 中的一个有限闭凸子集族，满足 $Z = \tilde{\bigcap}_{1\leqslant k\leqslant p} Z_k \neq \varnothing$，并设 $x_0 \in H$。目标是求 $\operatorname{proj}_Z x_0$。

为了应用定理 4.3，我们首先需要将问题 4.6 纳入问题 4.1的框架中。于是定义

$$\begin{cases} K = \{1,\dots,p\};\ \mathcal{K} = 2^K;\ k \text{ 是任意一个取值于 } K \text{ 的随机变量，使得 } (\forall k \in \{1,\dots,p\})\ P([k = k]) > 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

那么，$Z = \{z \in H \mid z \in Z_k \text{ 几乎处处}\} = \{z \in H \mid z \in \operatorname{Fix} \operatorname{proj}_{Z_k} \text{ 几乎处处}\}$，其中，按照例 4.2(i)，牢固拟非扩张算子对应于投影算子。我们指出，任何满足 (4.27) 的随机变量 k 均足以定义随机化方法。特别地，k 可以在 K 上均匀分布，即对于每个 $k \in \{1,\dots,p\}$，$P([k = k]) = 1/p$。不过，(4.27) 也允许采用非均匀权重。

我们利用 $\lambda_n \equiv 1$ 和 $M = 1$ 实现定理 4.3，这意味着 $L_n \equiv 1$ 和 $r_n \equiv a_n \equiv p_n \equiv p_{1,n}$。

推论 4.7. 在问题 4.6 和 (4.27)的情形下，迭代

$$\begin{cases} \text{对于 } n = 0, 1,\dots, & k_n \text{ 是 } k \text{ 的一个副本，且与 } \sigma \\ (x_0,\dots,x_n)\ x_{n+1} = Q(x_0, x_n, \operatorname{proj}_{Z_{k_n}} x_n). & \text{独立} \end{cases} \tag{4.28}$$

那么 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎必然强收敛 P-a.s.，并且在 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P;H)$ 中强收敛到 $\operatorname{proj}_Z x_0$。

注 4.8。

(i) 所提出的随机策略与 Haugazeau 最初的循环方法有着根本区别。循环方法遵循确定性顺序，确保每个集合每隔 p 次迭代恰好被激活一次。这为任何特定集合被忽略的时间设定了严格上限。另一方面，随机策略在每次迭代时独立选择活跃索引。虽然这种方法不保证对特定集合的访问间隔固定，但仍确保以概率为一的方式无限次访问所有集合。因此，它提供了一种更简单的替代方案，避免了僵化的模式。此外，激活特定索引 k 的期望等待时间仍然有限，因为它等于激活概率的倒数；例如，在 k均匀分布的情况下，该值等于 p。

(ii) 分析算法渐近行为的另一种方法是固定 $\omega \in \Omega$ 并通过控制规则研究 $(x_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$的行为 $(k_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$。在这种情况下，无法借助确定性结果来证明$(x_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$的收敛性，因为 $(k_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 不满足必要假设；参见 [6, 定义 3.1 和定理 3。1]。

(iii) 为了比较 Haugazeau 原始的循环方法与随机策略，我们在推论 $\lambda_n \equiv 1$和 $M = 1$ 中使用 4.7。不过，也可以实现随机选取的分块迭代版本，其中外推 $L_n \geqslant 1$ 将显著加快收敛，正如确定性算法中所示 [8, 14, 28]。

§5. 切比雪夫中心的计算应用

我们将情形特化为 $H = \mathbb{R}^N$，并令 S 为 H 的一个非空有界子集。S 的切比雪夫中心和切比雪夫半径分别是下述问题的一个解和最优值

$$\underset{x\in H}{\text{minimize}} \quad \sup_{y\in S} \|x-y\|_H. \tag{5.1}$$

有关切比雪夫中心的更多背景，请参阅 [1, 第 15] 。目标是求出 S 的一个切比雪夫中心以及 S 的切比雪夫半径。然而，这项任务可能很困难，尤其是当集合 S 非凸时，这也使得（5.1）同样是非凸的。将这个问题改写为更高维空间中的如下约束最小化问题，是另一种方法：

$$\underset{(x,\rho)\in H\times\mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad \rho \quad \text{subject to} \quad (x,\rho) \in \bigcap_{y\in S} \{(z,\xi) \in H\times\mathbb{R} \mid \|z-y\|_H \leqslant \xi\}. \tag{5.2}$$

对于每个 $y \in S$，集合 $\{(z\ \xi) \in H\times\mathbb{R} \mid \|z-y\|_H \leqslant \xi\}$ 是闭凸集，因此它们的交集也是闭凸集。我们提出以下对（α5.2）的近似。

问题 5.1. 设 $K = S$，令 $\mathcal{K}$ 为限制在 S 上的 H 的博雷尔 σ-代数，并令 k 为一个在 S 上服从均匀分布的 S 值随机变量。令 $\alpha \in]0, +\infty[$ 并设 $(x_0, \rho_0) = (0, -\alpha)$。任务是

$$\underset{(x,\rho)\in H\times\mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad \|(x,\rho)-(x_0,\rho_0)\|^2_{H\times\mathbb{R}} \quad \text{subject to} \quad (x,\rho) \in \{(z,\xi) \in H\times\mathbb{R} \mid \|z-k\|_H \leqslant \xi \ \text{ P-a.s.}\}. \tag{5.3}$$

该 α-逼近（5.2）是问题 4.1 意义下的最佳逼近问题，其中的拟非扩张算子由投影算子定义，如例 4.2(i)所示。目标函数

$$(x,\rho) \mapsto \|(x,\rho)-(x_0,\rho_0)\|^2_{H\times\mathbb{R}} = \|x\|^2_H + |\rho|^2 + 2\alpha\rho + |\alpha|^2 \tag{5.4}$$

对应于（5.2）目标函数的正则化，并且当 $\alpha \uparrow +\infty$ 时，它们的极小化解之间的距离趋于零。此外，我们将对每个 $y \in S$ 取严格交集，替换为如下定义的几乎必然交集： k。

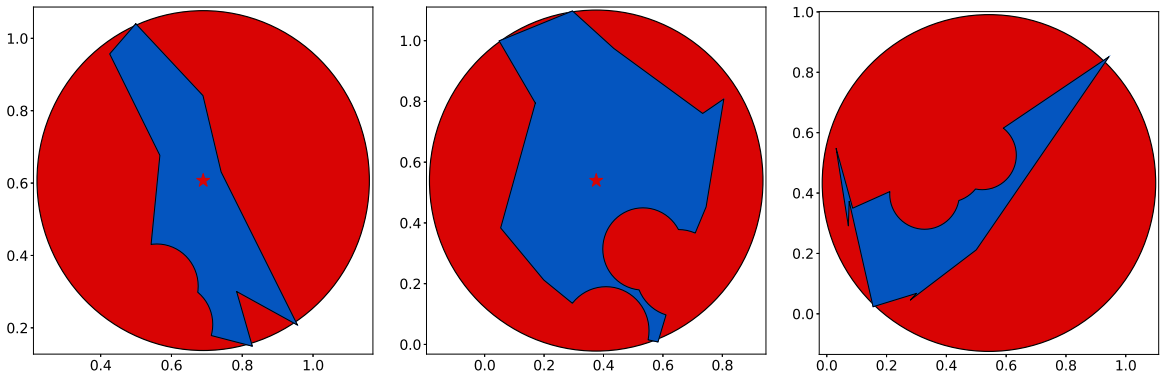

图1：第 5 节实验的三个实例。 蓝色：子集 S。 红色：由 α-逼近给出的中心和半径的球。

在实验中，我们针对 5.1 问题，求解了三个实例，其中 $H = \mathbb{R}^2$、$\alpha = 200$，且 S是随机生成的。对于每个 $y \in S$，集合 $\{(z, \xi) \in H \times \mathbb{R} \mid \|z - y\|_H \leqslant \xi\}$ 对应于平移后的二阶锥，其投影算子有显式表达式 [17, 命题 3。3]。我们采用定理 4.3，其中 $M = 1$ 且 $\lambda_n \equiv 1$。

致谢

本工作是作者博士学位论文的一部分。作者衷心感谢博士导师 P. L. Combettes 在整个研究过程中给予的指导。

参考文献

[1] A. R. Alimov 和 I. G. Tsar’kov，《几何逼近理论》。Springer，Cham，2022年。[2] A. Alotaibi、P. L. Combettes 和 N. Shahzad，复合单调包含的库恩–塔克集合上的最佳逼近，《数值泛函分析与优化》，第36卷，第1513–1532页，2015年。[3] H. H. Bauschke 和 P. L. Combettes，希尔伯特空间中 Fejér 单调方法的弱到强收敛原理，《数学运筹研究》，第26卷，第248–264页，2001年。[4] H. H. Bauschke 和 P. L. Combettes，《希尔伯特空间中的凸分析与单调算子理论》，第2版。Springer，纽约，2017年。[5] M. N. Bùi 和 P. L. Combettes，鞍点形式的多元单调包含，《数学运筹研究》，第47卷，第1082–1109页，2022年。[6] P. L. Combettes，凸优化中分块迭代外逼近方法的强收敛，SIAM 控制与优化杂志，第38卷，第538–565页，2000年。[7] P. L. Combettes，若干优化算法的准 Fejér 分析，载于：《可行性与优化的内在并行算法》（D. Butnariu、Y. Censor 和 S. Reich 编），第115–152页。Elsevier，纽约，2001年。[8] P. L. Combettes，一种用于二次信号恢复的分块迭代代理约束分裂方法，IEEE 信号处理汇刊，第51卷，第1771–1782页，2003年。[9] P. L. Combettes，单调算子分裂方法的几何，数值数学学报，第33卷，第487–632页，2024年。[10] P. L. Combettes 和 J. Eckstein，单调包含的异步分块迭代原始-对偶分解方法，《数学规划》，第B168卷，第645–672页，2018年。[11] P. L. Combettes 和 J. I. Madariaga，几乎必然收敛的随机激活单调算子分裂方法，SIAM 成像科学杂志，第18卷，第2177–2205页，2025年。[12] P. L. Combettes 和 J. I. Madariaga，随机迭代的几何框架，arXiv，2025年。https://arxiv.org/pdf/2504.02761[13] P. L. Combettes 和 J.-C. Pesquet，采用随机扫描的随机准 Fejér 分块坐标不动点迭代，SIAM 优化杂志，第25卷，第1221–1248页，2015年。[14] P. L. Combettes 和 Z. C. Woodstock，根据指定近端点重构函数，逼近理论杂志，第268卷，文章编号105606，共26页，2021年。[15] A. Dieuleveut、G. Fort、E. Moulines 和 H.-T. Wai，超越梯度的随机逼近：信号处理与机器学习中的应用，IEEE 信号处理汇刊，第71卷，第3117–3148页，2023年。[16] J. L. Doob，《随机过程》。Wiley，纽约，1953年。[17] M. Fukushima、Z.-Q. Luo 和 P. Tseng，用于二阶锥互补问题的平滑函数，SIAM 优化杂志，第12卷，第436–460页，2002年。

[18] Y. Haugazeau，变分不等式与凸泛函极小化。博士论文，巴黎大学，1968年。[19] N. Hermer、D. R. Luke 和 A. Sturm，一致随机可行性问题的随机函数迭代，《数值泛函分析与优化》，第40卷，第386–420页，2019年。[20] T. Hytönen、J. van Neerven、M. Veraar 和 L. Weis，《巴拿赫空间分析。第一卷：鞅与*Littlewood–Paley*理论》。Springer，纽约，2016年。[21] P. R. Johnstone、J. Eckstein、T. Flynn 和 S. Yoo，随机投影分裂，《计算与优化应用》，第87卷，第397–437页，2024年。[22] V. R. Kostić 和 S. Salzo，随机可行性问题的随机化Bregman投影方法，《数值算法》，第93卷，第1269–1307页，2023年。[23] M. Ledoux 和 M. Talagrand，《巴拿赫空间中的概率：等周问题与随机过程》。Springer，纽约，1991年。[24] D. R. Luke、S. Schultze 和 H. Grubmüller，大规模复合优化的随机算法：X-FEL成像中似然最大化的案例，《数学规划》，即将出版。[25] M. Marques Alves、J. E. Navarro Caballero 和 R. T. Marcavillaca，一种具有强收敛性的非精确惯性投影分裂算法，《优化理论与应用杂志》，第207卷，文章编号65，2025年。[26] M. Marques Alves、J. E. Navarro Caballero、M. Geremia 和 R. T. Marcavillaca，一种用于单调包含且具有强收敛性的惯性非精确近端点算法及其在变分不等式中的应用，《优化》，第75卷，第543–570页，2026年。[27] I. Necoara 和 A. Nedić，用于带凸不等式的可行性问题的小批量随机次梯度投影算法，《计算与优化应用》，第80卷，第121–152页，2021年。[28] G. Pierra，用于二次型极小化的并行约束分解，《计算机科学讲义》，第41卷。Springer，纽约，1976年，第200–218页。[29] M. V. Solodov 和 B. F. Svaiter，在希尔伯特空间中促使近端点迭代强收敛，《数学规划》，第A87卷，第189–202页，2000年。