arXiv:2603.00893v1 [math.RA] 1 Mar 2026

有有限基底的有限半环生成了一个含有连续统多个子簇的簇

ZIDONG GAO

摘要。本文确立了这样一种有有限基底的有限半环的存在性：它所生成的簇包含连续统多个子簇；这样的簇称为类型 $2^{\aleph_0}$。借助克奈泽图的同态理论，我们证明，3 元半环 S_{53} 是目前已知的首个具有这一性质的例子。此外，S_{53} 属于最大加半环（$\mathbb{N}$，max，+）生成的簇，因此它也属于类型 $2^{\aleph_0}$。对于有有限基底的 4 元半环 B_0，我们证明其生成的簇包含无穷多个子簇，并指出 B_0 也可能是类型 $2^{\aleph_0}$的另一个候选例子。

1. 引言

簇是 一类在取子代数、同态像以及任意直积运算下封闭的代数。对于代数类 $\mathcal{K}$，我们用 $\mathbf{V}(\mathcal{K})$ 表示由 $\mathcal{K}$生成的簇，即包含 $\mathcal{K}$的最小簇。特别地，$\mathbf{V}(A)$ 表示由单个代数 A生成的簇。

根据伯克霍夫定理，一个代数类是簇，当且仅当它是一个方程类，也就是说，它由满足某个恒等式集合的所有代数组成。对于任意代数类 $\mathcal{K}$，记 $\mathrm{Id}(\mathcal{K})$ 为在给定的可数无限变量集 X 上由 $\mathcal{K}$ 满足的所有恒等式的集合。若一个簇可由有限个恒等式定义，则称其为有限基；否则称其为非有限基。相应地，若代数 A 所生成的簇 $\mathbf{V}(A)$ 为有限基（非有限基），则称代数 A 为有限基（非有限基）。代数类的有限基问题是普适代数中最重要的问题之一，旨在根据其成员是否为有限基对它们进行分类。

对于一个簇 $\mathcal{V}$，其所有子簇构成一个关于类包含关系的完备格，记作 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$，称为$\mathcal{V}$的子簇格。若 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的子簇，则区间 $[\mathcal{W},\mathcal{V}]$（由介于 $\mathcal{W}$ 与 $\mathcal{V}$ 之间的所有簇组成）是 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ 的一个完备子格。理解子簇格 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ 的结构是研究簇的一项基本问题。该问题的一个核心方面是确定格中各区间的大小。此类描述不仅揭示了 $\mathcal{V}$ 的内在复杂性，也往往反映了其中代数的重要代数性质和逻辑性质。

一个半环是一个代数结构（S，+，·），配备两个二元运算+ 和 ·，使得：

- 加法约化（S，+）是一个交换半群；

2010 数学主题分类。 16Y60, 03C05, 08B15.关键词和短语。 半环，簇，有限基问题。Zidong Gao 得到中国国家自然科学基金（12371024, 12571020）的资助。

- 乘法约化（S，$\cdot$）是一个半群；
- 分配律成立：

$$(x+y)z \approx xz+yz, \qquad x(y+z) \approx xy+xz.$$

一个加法幂等半环（简称ai-半环）是其加法约化为幂等的半环。这类代数在簇与等式性质的研究中受到特别关注。此类代数在数学中无处不在，并在诸多领域得到应用，例如代数几何 [5], 、热带几何 [28], 、信息科学 [17], 以及理论计算机科学 [18]。

设 S 为一个ai-半环。则 S 上由下式定义的关系 $\leq$

$$a \leq b \Leftrightarrow a+b=b$$

是一个偏序，使得$(S,\leq)$构成一个上半格，其中任意两个元素 a 与 b 的上确界为 $a+b$。因此，加法约化$(S,+)$由该半格序唯一确定。因而，借助$(S,\leq)$的哈斯图来直观表示加法往往较为方便。此外，易见序 $\leq$与乘法相容，这也解释了为何此类代数亦称为半格序半群。

在过去二十年中，加法幂等半环的有限基问题及其他簇论性质得到了深入研究和充分发展（参见 [6,8、9、11、15、22–24、27、29、31–37, 40, 43, 44]）。特别地，Pastijn 等人 [15, 29]证明，满足恒等式$x^2 \approx x$的 ai-半环簇恰有 78 个，并且它们全部具有有限基。随后，Ren 等人 [34,36] 证明，满足恒等式 $x^3 \approx x$的 ai-半环簇恰有 179 个，这些簇同样全部具有有限基。最近，Volkov 等人 [35] 证明，对于任意整数 $n \geq 4$，存在 $2^{\aleph_0}$ 个满足 $x^n \approx x$的不同簇，其中大多数是非有限基的。

表1。 S_7的凯莱表

$+$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	0
1	0	0	1

$\cdot$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	0	a
1	0	a	1

Shao 和 Ren [37] 证明了，由所有二阶 ai-半环生成的簇中的每个 ai-半环都有有限基。Zhao 等人 [44] 证明了，按同构分类，有 61 个三阶 ai-半环，记为 S_i, $1 \leq i \leq 61$。除半环 S_7外，这些半环都有有限基；该半环的凯莱表见表1 。Jackson 等人 [27]后来证明了 S_7 本身没有有限基。事实上，他们证明了 S_7 可以将这一性质传递给许多其他有限加法幂等半环。这类例子包括其簇包含 S_7的有限平坦半环，以及 B_2^1 乘法约化为六元 Brandt幺半群的 ai-半环

$$\underset{0}{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}} \quad \underset{1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}} \quad \underset{e_{12}}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}} \quad \underset{e_{21}}{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}} \quad \underset{e_{11}}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}} \quad \underset{e_{22}}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

其乘法采用通常的矩阵乘法。其加法约化由图1中的哈斯图确定。Perkins [30] 证明了B_2^1 的乘法约化没有有限基；事实上，它是第一个没有有限基的有限半群实例，有时也称为 Perkins 半群。

容易验证， B_2^1 包含 S_7的一个同构副本，因此 V(S_7) 是 V(B_2^1) 的一个子簇。最近，Gao 等人进一步证明，区间 [V(S_7)，V(B_2^1)]包含连续统多个子簇，且其中每个子簇都是非有限基的。

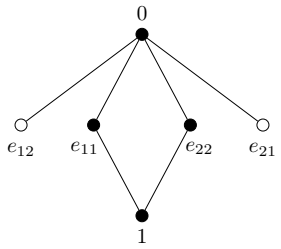

图 1. B_2^1的加法序

另一方面，已有研究表明，ai-半环簇的若干区间和子簇格具有连续统基数。特别是，Dolinka [7] 证明区间 [V(Σ_7)，V($\mathcal{R}_2$)] 也具有基数 $2^{\aleph_0}$。此处，Σ_7 表示由 B_2^1 添加一个新元素而得到的 7 元 ai-半环，该元素既是加法最小元，也是乘法零元；而 $\mathcal{R}_2$是定义在一个 2 元集合上的所有二元关系构成的半环。

据我们所知， $\mathcal{R}_2$ 是第一个其簇包含 $2^{\aleph_0}$ 个不同子簇的有限 ai-半环实例。它也是已知的第一个本质上非有限基半环 [8], ，这意味着任何包含 $\mathcal{R}_2$ 的局部有限簇都非有限基。作为背景， Σ_7 本身是第一个非有限基有限 ai-半环实例 [6]。我们还注意到，Volkov [40] 独立地用另一种方法解决了 B_2^1 的有限基问题 Σ_7 。最近，Shaprynskiĭ [38] 证明，B_2^1的子半环 $\{0, e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$（记作 B_0）是有限基的。尽管如此， B_2^1 的平坦子半环 B_2 的有限基问题仍未解决。

最近，Gao 等人 [11] 证明半环 S_7 是 $2^{\aleph_0}$型的。更确切地说， [11, 推论 4.13] 表明，对于每个 $k \geq 3$，子簇格 $\mathcal{L}$(V(S_7))中的区间 V($S_c(a_1 \cdots a_k)$)，$\mathbf{N}_{k+1}$]具有连续统基数，其中$\mathbf{N}_{k+1}$表示由$(k+1)$-幂零恒等式确定的 V(S_7)的子簇。因此，由所有$(k+1)$-幂零平坦半环生成的簇$\mathbf{NF}_{k+1}$ 也属于 $2^{\aleph_0}$型。

情形 $\mathbf{NF}_1$ 和 $\mathbf{NF}_2$ 显而易见：$\mathbf{NF}_1$ 是平凡半环簇$\mathbf{T}$，而$\mathbf{NF}_2$ 与 V($S(a)$) 相同，因此它们的子簇格的基数分别为 1 和 2。对于$\mathbf{NF}_3$, ， 高和 Ren [13]刻画了它的次直不可约成员，它们恰好是图半环。借助圈图半环，他们进一步证明了$\mathbf{NF}_3$ 同样属于类型 $2^{\aleph_0}$。

结合 [12, 14], 的最新研究结果，现在已知 V($\mathcal{R}_2$) 的子簇格包含一条连续区间链，

$$[\mathbf{T}, \mathsf{V}(S_7)],\ [\mathsf{V}(S_7), \mathsf{V}(B_2^1)],\ [\mathsf{V}(B_2^1), \mathsf{V}(\Sigma_7)],\ \text{and}\ [\mathsf{V}(\Sigma_7), \mathsf{V}(\mathcal{R}_2)],$$

其中每个区间的基数均为 $2^{\aleph_0}$。

在不同的代数背景 $2^{\aleph_0}$ 中还存在其他一些已知的此类簇 [7, 16, 21, 25, 26, 31, 39]。值得注意的是，Jackson [25] 给出了第一个例子：一个有限且有有限基底的半群生成了此类簇。然而，对于半环而言，此前还没有发现这样的例子。这自然引出了以下问题：

问题 1.1. 是否存在一个有有限基底的有限半环，其生成的簇属于 $2^{\aleph_0}$ 类型?

本文给出了此类半环的第一个例子。由于每个由单个 2 元半环生成的簇都只含有有限多个子簇（见 [41]），因此我们必须从 3 元半环开始寻找。通过考察每个有有限基底的 3 元 ai-半环所生成簇的子簇格，我们发现其中大多数簇实际上都只有有限多个子簇。

一个值得注意的例外是由3元 ai-半环 S_{53}生成的簇，其凯莱表见表2。

表 2。 S_{53}的凯莱表

$+$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

$\cdot$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	0	a
1	0	a	1

从表 2可以看出 S_{53} 与 S_7具有相同的乘法约化，但其加法序是一个链。事实上，加法序与乘法半群的整除关系一致。我们将证明由 S_{53} 生成的簇属于类型 $2^{\aleph_0}$。

本文结构如下。第 2 节介绍必要的概念和记号，尤其是理想商、形如 $S(W)$ 的平坦半环，以及等式词。第 3 节介绍与超图及由超图诱导的 ai-半环项相关的基本概念，并给出簇属于类型 $2^{\aleph_0}$ 的一个充分条件。第 4 节证明，在由整除关系诱导的偏序下，半群 $S_c(W)$ 构成一个 ai-半环，记作 $S_c^*(W)$。最后，我们利用 $S_c^*(a_1 \cdots a_n)$ 证明簇 $\mathsf{V}(S_{53})$ 和最大加半环 $(\mathbb{N}, \max, +)$ 属于类型 $2^{\aleph_0}$。第 5 节证明，由半环 B_0 生成的簇包含无穷多个子簇$\{\mathsf{V}(S(a_1 \cdots a_n))\}_{n\geq 1}$，这也表明它可能属于类型 $2^{\aleph_0}$。

2. 预备知识

本节介绍所需的预备知识和记号约定。关于自由代数和子代数等概念的更多细节，请参阅 [4, 27]。我们先引入以下记号。设P 表示所有素数构成的集合。对于任意正整数 n，令 $[n]$表示集合 $\{1, \ldots, n\}$。对于任意非负整数 k，令 $\mathbb{N}_{\geqslant k}$ 表示所有大于或等于 k的整数构成的集合。特别地， $\mathbb{N} = \mathbb{N}_{\geqslant 0}$。接下来，我们将重点介绍平坦半环和理想商的概念。

一个平坦半环是一个 ai-半环 S，其乘法约化有一个零元0，且其加法满足 $a+b=0$ 对所有互不相同的 $a,\ b\in S$。正如 [27, 引理 22]（另见 [10, 引理 4.11]）所述，带零元0的半群当且仅当它是0-可消的，才成为平坦半环；也就是说，$ab=ac\neq 0$ 蕴含 $b=c$且 $ab=cb\neq 0$ 蕴含 $a=c$对所有 $a,\ b,\ c\in S$。

对于任意消去半群（$S,\ \cdot$），令 S^0 表示通过添加一个乘法零元0得到的半群。于是 S^0 是0-消去的，并赋予相应的平坦加法后，它成为一个平坦半环；我们称之为 S 的平坦扩张，并将其记为 $\flat(S)$。我们将看到，X^+ 的平坦扩张$\flat(X^+)$的理想商是平坦半环的丰富来源。

设 S 是一个ai-半环，其中包含一个适当的非空子集 J，该子集既是乘法吸收理想，又是关于 $+$的序论滤子。于是我们可以通过将J的所有元素识别为同一元素，构造理想商 S/J。例如，半环 S_7 是由 $\flat(\{a\}^*)$ 关于$J=\{a^k\mid k>1\}$的理想商得到的。

现在令 W 为 X^+ 中的字集。用 $W^{\leq}$ 表示 W 中所有（非空）子词组成的集合。在集合 $W^{\leq}\cup\{0\}$ 上定义一个半群：令 0 为乘法零元，并且对于 $\mathbf{u},\ \mathbf{v}\in W^{\leq}$,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\begin{cases}\mathbf{uv}, & \text{if } \mathbf{uv}\in W^{\leq},\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这个半群记为 $S(W)$。若允许空字 1，则其乘法约化是一个幺半群，记为 $M(W)$。在自由交换半群 X_c^+（或幺半群 X_c^*）中进行运算，可得到交换类似物 $S_c(W)$ 和 $M_c(W)$。当 W 是单元素集 $\{\mathbf{w}\}$ 时，我们用 $\mathbf{w}$ 代替 $\{\mathbf{w}\}$。

上述所有构造都得到 0-消去半群。为它们配备相应的平坦加法后，我们得到平坦半环，仍用相同符号表示。它们都可以实现为平坦扩张半群的理想商。例如，平坦半环 $S(W)$ 同构于 $\flat(X^+)$ 关于集合 $J:=\{\mathbf{w}\in X^+\mid \mathbf{w}\notin W^{\leq}\}$ 的理想商。

在第4 节中，我们将在 $S_c(W)$ 和 $M_c(W)$上引入另一种半格序，从而将它们变为加法幂等半环。所得结构将分别记为 $S_c^*(W)$和 $M_c^*(W)$。

设 X^+ 表示变量的可数无限集 X 上的自由半群。由分配律，X 上的所有ai-半环项都可表示为 X^+中若干字的有限和。一个*ai-半环恒等式*（在 X 上）是形如

$$\mathbf{u}\approx\mathbf{v},$$

其中u和v是 X上的ai-半环项。设u ≈ v是字母表 $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$上的一个ai-半环恒等式。我们称ai-半环 S满足u ≈ v，或称u ≈v在 S中成立，如果对所有 a_1、a_2、…、 $a_n\in S$，都有u($a_1,a_2,\dots,a_n$) =v($a_1,a_2,\dots,a_n$)，其中u($a_1,a_2,\dots,a_n$)表示在赋值$x_i\to a_i$下于 S中对u求值的结果，对v($a_1,a_2,\dots,a_n$)亦然。

令 $\mathbf{p}$ 为 X^+ 中的一个字，且 $x\in X$ 为一个变量。那么，occ(x,$\mathbf{p}$)表示 x 在$\mathbf{p}$中的出现次数。另外，令 c($\mathbf{p}$)表示在$\mathbf{p}$中出现的所有变量构成的集合。对于每个$\mathbf{u}_i\in X^+$的加法幂等半环项$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\cdots+\mathbf{u}_n$，我们将

用 $c(\mathbf{u})$表示在$\mathbf{u}$中出现的所有变量构成的集合，也就是说，

$$c(\mathbf{u}) = \bigcup_{1\leq i\leq n} c(\mathbf{u}_i).$$

回顾 [37, 引理 1。1] 恒等式 $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ 在 M_2 （平坦半环M（1））中成立，当且仅当 c（$\mathbf{u}$）$= c$（$\mathbf{v}$）；这类恒等式称为正则的。

对于任意 ai-半环项 u 和 v，令 u $\preceq$v 表示恒等式 u +v $\approx$v。令S 为一个 ai-半环。若 S 满足恒等式 u $\preceq$v，我们记 u $\preceq_S$ v。若对每个字 u，u $\preceq_S$ w 都蕴含 u = w，则字 w 称为 S 的极小字。等价地，当且仅当 w 是 S的等式项时，w 才是 S 的极小字；也就是说，S 不满足任何形如 w $\approx$u 的非平凡恒等式，其中 u 为任意 ai-半环项。如果 w 是 S的等式项，那么从 w 的子词中取出并对其字母重新命名所得到的每个字，也都是 S的等式项。下面的引理揭示了等式项与平坦半环之间的良好联系。

引理 2.1 ([31, 引理 5.6])。 设$\mathbf{w}$ 是一个字，且 S 是一个 *ai*-半环。那么，当且仅当平坦半环 $S(\mathbf{w})$属于V(S)时，$\mathbf{w}$ 才是 S 的等式项。

3. 超图与超图项

本节介绍超图及其诱导的 ai-半环项，重点讨论克奈泽超图。利用超图的同态理论，我们建立了一个充分条件，以判定 ai-半环簇属于类型 $2^{\aleph_0}$。

超图 $\mathbb{H}$ 是一个有序对 (V, E)，其中 E 是集合 V的非空子集族。V 中的每个元素都是 $\mathbb{H}$的顶点，而 E 中的每个元素都是$\mathbb{H}$的超边。如果 V 的一个子集包含于某条超边中，那么它就是 $\mathbb{H}$ 的子超边。对于整数 $k \geq 1$，若对每个 $e \in E$都有 $|e| = k$，则超图 $\mathbb{H}$ 是-均匀 的。

从超图 $\mathbb{H}_1 = (V(\mathbb{H}_1)\ E(\mathbb{H}_1))$ 到超图$\mathbb{H}_2 = (V(\mathbb{H}_2)\ E(\mathbb{H}_2))$ 的 同态 是一个映射 φ: $V(\mathbb{H}_1) \to V(\mathbb{H}_2)$，满足对于每条超边 $e \in E(\mathbb{H}_1)$，其像 $\varphi(e)$ 都是 $E(\mathbb{H}_2)$ 中的一条超边。我们用 Hom$(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ 表示从 $\mathbb{H}_1$ 到 $\mathbb{H}_2$的所有同态组成的集合。

现在我们回顾一些与 k-一致超图相关的 ai-半环项。这些项由 [2, 11, 12, 27] 引入，并已在一系列应用中取得成功。设 $\mathbb{H} = (V, E)$ 是一个 k-一致超图，并设 $\{x_v \mid v \in V\}$ 是一个与 V 一一对应的变量集。我们用 $\mathbf{t}_{\mathbb{H}}$ 表示 ai-半环项

$$\sum_{\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}\in E} x_{v_1}x_{v_2}\cdots x_{v_k},$$

并且由$\mathbf{q}_{\mathbb{H}}$ 字

$$\prod_{v\in V} x_v,$$

其中，乘积可以按任意固定顺序进行。注意，$\mathbb{H}$ 的每条超边都会在$\mathbf{t}_{\mathbb{H}}$中产生 $k!$个不同的字。

设 m和 $k \geq 3$ 为正整数。 k-一致 *Kneser*超图 $\mathbb{H}_{k,m}$ =($V_{k,m}$,$E_{k,m}$)是一个 k-一致超图，其顶点为集合$[km]$的所有 m元子集，超边则由 k 个两两不相交的此类子集构成。因此，每条超边都对应于将 $[km]$ 划分为 k 个大小为 m的部分。

设 φ 是一个从$V_{k,\ m}$ 到$V_{k,\ n}$ 的映射。根据超图同态和 Kneser超图的定义， φ 是从 $\mathbb{H}_{k,\ m}$ 到 $\mathbb{H}_{k,\ n}$ 的同态，当且仅当 φ 将 $[km]$ 的每一组 k 两两不相交 m-子集映射到 k

中的两两不相交子集。这个条件等价于要求 φ 保持不相交性，也就是说，它将 $[km]$ 中任意两个不相交的 m-子集映射为 $[kn]$ 中不相交的 m-子集。

令 $\mathbb{G}_{k,m}$ 表示克奈泽图，其顶点是集合$[km]$的 m-子集；若两个 m-子集不相交，则它们相邻。上述论证表明，$\mathrm{Hom}(\mathbb{H}_{k,m},\mathbb{H}_{k,n}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{k,m},\mathbb{G}_{k,n})$。这一结果也可见于 [3,定理 1]。另一方面， [19, 引理 7.9.3] 指出，当且仅当 m整除 n时，$\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{k,m},\mathbb{G}_{k,n})$非空。因此我们得到：

引理 3.1. 设 m, n 和 k 为整数，且满足 $k \geq 3$。那么 $\mathrm{Hom}(\mathbb{H}_{k,m},\mathbb{H}_{k,n})$ 非空，当且仅当 m 整除 n。

引理3.2. 设 S 是一个 *ai*-半环，其乘法约化为 $S_c(\mathbf{w})$ ，其中$\ell(\mathbf{w}) \geq 2$。那么

(i) 0 是 S 的最大元。(ii) 对于 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ 这两个 $\mathbf{w}$ 的子字，若 $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ ，则 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{v}$ 的子字。(iii) 对于任意子集 $X \subseteq S$，由 X 生成的子半环 $\langle X\rangle$ 中的每个元素，要么是0 ，要么是 X 中某个字的超词。

证明。 我们先证明 (i)。为导出矛盾，假设 0 不是 S 的最大元。那么存在 $\mathbf{w}_1$ ，它是 $\mathbf{w}$ 的子字，并且 $0 \leq \mathbf{w}_1$。设 $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2$ ，其中 $\mathbf{w}_2 \leq \mathbf{w}$。由于乘法保序，我们得到

$$0 = 0 \cdot \mathbf{w}_2 \leq \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}.$$

另一方面，利用分配律，我们计算得

$$0 = \mathbf{w}_1\mathbf{w} = \mathbf{w}_1(\mathbf{w} + \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_1\mathbf{w} + \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 = 0 + \mathbf{w} = \mathbf{w},$$

这与假设 $\mathbf{w} \neq 0$ 矛盾。因此，0 确实必须是 S 的最大元，从而证明了 (i)。

为证明 (ii)，设 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{w}$ 的两个子字，且 $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$。我们断言$\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{v}$ 的子字。反设不然；则存在一个字母 a ，使得 $\mathrm{occ}(a,\mathbf{u}) > \mathrm{occ}(a,\mathbf{v})$。取一个正整数 k ，使得在 $S(\mathbf{w})$ 中有$a^k\mathbf{u} = 0$ ，但 $a^k\mathbf{v} \neq 0$。由于乘法再次保序，可得

$$0 = a^k \cdot \mathbf{u} \leq a^k \cdot \mathbf{v} \neq 0,$$

这与 (i) 矛盾，因为 0 是 S 的最大元。因此，$\mathbf{u}$ 必定是$\mathbf{v}$的子词，从而证明了 (ii)。

最后，我们证明 (iii)。令 T 表示由 X 生成的乘法子半群。 T 的每个元素都是 X 中有限多个元素的乘积，因此它要么是 0，要么是 X 中某个字的超词。现在，子半环 $\langle X\rangle$ 由 T 中元素的有限和（即上确界）构成。根据 (i) 和 (ii)， S 中的偏序与可比较非零元之间的子词关系一致。因此， X 中某些字的超词所成元素的任意有限上确界，本身也是 X 中某个字的超词（或等于 0）。由此， $\langle X\rangle$ 的每个元素要么是 0，要么是 X 中某个字的超词，这就证明了 (iii)。□

注 3.3. $\ell(\mathbf{w}) = 1$ 的情形确实很特殊。根据 [37], 半群 $S(a)$ 存在两种不同的加法序，可以使其成为 ai-半环，即 N_2 和 T_2。

根据上述引理，整除性与通过定义半格序将半群 $S(\mathbf{w})$ 构造成 ai-半环密切相关。我们将在第4节进一步讨论这一点。接下来，我们给出本文的主要结果。为方便起见，令 P 表示所有素数构成的集合。

定理 3.4。设 $\mathcal{V}$ 为一个 *ai*-半环簇。假设对于每个正整数 n，存在 $\mathcal{V}$ 中的一个 *ai*-半环 S_n，其乘法约化为$S_c(a_1\cdots a_n)$。则 $\mathcal{V}$为 $2^{\aleph_0}$型。

证明。对于每个整数 $k \geqslant 3$，我们将证明 $\mathcal{NV}_{k+1}$ 为 $2^{\aleph_0}$型，其中$\mathcal{NV}_{k+1}$ 是由 $(k+1)$-幂零恒等式确定的 $\mathcal{V}$ 子簇。对于每个素数 p，令 $A_{k,\,p}$ 表示由以下集合生成的 S_{kp} 子半环

$$\{\, a_{i_1}\cdots a_{i_p} \mid \{i_1,\ldots,i_p\} \text{ is a } p\text{-subset of } [kp]\,\}. \tag{1}$$

由引理 3.2，零元 0 是$A_{k,\,p}$ 的最大元，并且$A_{k,\,p}$中的每个非零元都是 $a_1\cdots a_{kp}$的子词，其长度至少为 p。因此，

$$(A_{k,p})^k = \{0,\ a_1\cdots a_{kp}\}, \qquad (A_{k,p})^{k+1} = \{0\}. \tag{2}$$

特别地，$A_{k,\,p}$ 是 $(k+1)$-幂零的，所以 $A_{k,\,p} \in \mathcal{NV}_{k+1}$。

接下来，我们将利用族 $\{A_{k,p}\}_{p\in P}$ 证明 $\mathcal{NV}_{k+1}$ 包含 $2^{\aleph_0}$个不同的子簇。对于每个素数 q，考虑 Kneser超图 $\mathbb{H}_{k,\,q}$ =($V_{k,\,q}$，$E_{k,\,q}$) 及其关联的恒等式 $\sigma_{k,\,q}$，其定义如下

$$\mathbf{t}_{\mathbb{H}_{k,q}} \approx \mathbf{t}_{\mathbb{H}_{k,q}} + \mathbf{q}_{\mathbb{H}_{k,q}}. \tag{3}$$

我们将证明，恒等式 $\sigma_{k,\,q}$ 能够区分代数 $A_{k,\,p}$。

首先，我们证明 $A_{k,\,q}$ 不满足恒等式 (3)。定义赋值$\varphi : \{x_v \mid v \in V_{k,q}\} \to A_{k,\,q}$ 如下

$$\varphi(x_v) = \prod_{i\in v} a_i.$$

注意，每个 $v \in V_{k,\,q}$ 都对应于 $[kq]$ 的一个 q-子集；因此，$\varphi(x_v)$ 属于 $A_{k,\,q}$ 的生成集 (1)。因此，对于每条超边 $\{v_1,\ldots,v_k\} \in E_{k,\,q}$，都有 $\varphi(x_{v_1}\cdots x_{v_k}) = a_1\cdots a_{kq}$，于是

$$\varphi\big(\mathbf{t}_{\mathbb{H}_{k,q}}\big) = \sum_{\{v_1,\ldots,v_k\}\in E_{k,q}} \varphi(x_{v_1}\cdots x_{v_k}) = a_1\cdots a_{kq}.$$

另一方面，字 $\mathbf{q}^{\mathbb{H}_{k,\,q}}$ 的长度为 $\binom{kq}{q}$，大于 k；因此，根据 (2)，$\varphi(\mathbf{q}^{\mathbb{H}_{k,\,q}}) = 0$。由于 0 是 $A_{k,\,q}$ 的最大元，我们得到

$$\varphi\big(\mathbf{t}_{\mathbb{H}_{k,q}}\big) = a_1\cdots a_{kq} \neq 0 = \varphi\big(\mathbf{t}_{\mathbb{H}_{k,q}}\big) + \varphi\big(\mathbf{q}_{\mathbb{H}_{k,q}}\big).$$

因此$A_{k,\,q}$ 不满足 $\sigma_{k,\,q}$。

接下来我们证明，若 $p \neq q$，则 $A_{k,\,p}$ 确实满足恒等式（3）。考虑任意赋值 $\varphi : \{x_v \mid v \in V_{k,q}\} \to A_{k,\,p}$。我们将证明 $\varphi(\mathbf{t}^{\mathbb{H}_{k,\,q}}) = 0$，由此即可轻易得出该恒等式。

反设，为了导出矛盾，$\varphi(\mathbf{t}^{\mathbb{H}_{k,\,q}}) \neq 0$。由于 0 是最大元，这意味着对每个 $\{v_1,\ldots,v_k\} \in E_{k,\,q}$，都有 $\varphi(x_{v_1}\cdots x_{v_k}) \neq 0$。根据（2），每个非零乘积 $\varphi(x_{v_1}\cdots x_{v_k})$ 都必须等于 $a_1\cdots a_{kp}$。因此，集合 $\{\varphi(x_{v_1})\text{.....}, \varphi(x_{v_k})\}$由 $a_1\cdots a_{kp}$ 中长度为 p 的不相交子词组成，其乘积等于 $a_1\cdots a_{kp}$。因此，对每个 $u \in V_{k,\,q}$，都存在唯一的 p-子集 $v_u \subseteq [kp]$，使得 $\varphi(x_u) = \prod_{i\in v_u} a_i$。此外，只要 $\{u_1,\ldots,u_k\} \in E_{k,\,q}$，这些 p-子集

v_{u_1}, ..., v_{u_k}两两不相交，即$\{v_{u_1}, \ldots, v_{u_k}\} \in E_{k,\ p}$。因此，映射$u \mapsto v_u$ 定义了从 $\mathbb{H}_{k,\ q}$ 到 $\mathbb{H}_{k,\ p}$的超图同态。这与引理 3.1 矛盾。因此 $\varphi(\mathbf{t}^{\mathbb{H}_{k,\ q}}) = 0$，且 $A_{k,\ p}$ 满足 $\sigma_{k,\ q}$。

总而言之，我们构造了半环族 $\{A_{k,p}\}_{p\in P}$和恒等式族 $\{\sigma_{k,p}\}_{p\in P}$，它们属于 $\mathcal{NV}_{k+1}$，使得对于任意两个素数 $p,\ q \in P$,

$$A_{k,p} \models \sigma_{k,q} \Leftrightarrow p \neq q. \tag{4}$$

最后，由 [14, 命题 1。3], 映射

$$\varphi\colon \mathcal{P}(P) \to \mathcal{L}(\mathcal{NV}_{k+1}), \quad Q \mapsto \mathsf{V}(\{A_{k,p} \mid p \in Q\})$$

是一个格嵌入。这意味着子簇格 $\mathcal{L}(\mathcal{NV}_{k+1})$ 至少有 $2^{\aleph_0}$ 个元素，即 $\mathcal{NV}_{k+1}$ 属于类型 $2^{\aleph_0}$，如所需。□

根据 [27, 命题 2。6], 每个平坦半环 $S_c(a_1 \cdots a_n)$ 都属于 S_7生成的簇。因此，根据定理3.4， S_7 包含 $2^{\aleph_0}$ 个不同的子簇。这一结果本身也是 [11]中确立的主要结果之一。

4. 半群 $S_c(W)$ 上的整除序

本节将证明，半群 $S_c(W)$在整除关系下仍构成一个 ai-半环，记作 $S_c^*(W)$，并进一步利用 $S_c^*(a_1 \cdots a_n)$和定理 3.4 证明 S_{53} 属于类型 $2^{\aleph_0}$。

对于每个非空子集 $W \subseteq X_c^+$，令 τ 为半群 $S_c(W)$ 上的整除关系；也就是说，$(x, y) \in \tau$当且仅当存在 $z \in M_c(W)$ 使得 $x = yz$。容易验证， τ 是 $S_c(W)$ 上的偏序，与乘法相容，并且在此偏序下，乘法零元 0 是最大元。此外，我们将证明，由 τ 在 $S_c(W)$ 上诱导的偏序是半格序，并且相对于由$x + y = \sup\{x, y\}$定义的加法，它构成一个 ai-半环。为此，我们考虑一个更一般的情形。

首先考虑带零元的自由交换幺半群 $(X_c^+)^0$, , 它配备了整除序。很容易验证，该序是一个半格序，与乘法相容，并且相对于诱导出的加法，0 是最大元。事实上，对于 $\mathbf{u},\mathbf{v} \in X_c^+$，记作

$$\mathbf{u} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}, \qquad \mathbf{v} = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_m^{t_m},$$

其中 $k_i, t_i \geqslant 0$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant m$。那么很容易验证

$$\sup\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = x_1^{\max\{k_1,t_1\}} x_2^{\max\{k_2,t_2\}} \cdots x_m^{\max\{k_m,t_m\}}.$$

若定义加法为 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \sup\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$，则乘法对加法满足分配律，并且 $(X_c^+, +, \cdot)$ 成为一个 ai-半环。

现在，对于 X_c^+ 的任意非空子集 W，令 $I_W = (X_c^+)^0 \backslash W^{\leqslant}$，容易看出， I_W 既是乘法吸收理想，也是相对于 $+$ 的序论滤子。理想商半环 $(X_c^+)^0/I_W$ 记作 $S_c^*(W)$。

根据定义，容易验证半环 $S_c^*(W)$ 与 $S_c(W)$ 具有相同的乘法结构。 $S_c^*(W)$ 上诱导的加法运算如下给出：0 是吸收元，并且对于 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{\leqslant}$,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{cases} \sup\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}, & \text{if } \sup\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in W^{\leqslant}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由该加法诱导的半格序与半群 $S_c(W)$ 上的整除关系 τ 完全一致。这证明了 $S_c(W)$ 在关于 τ 的半格序下构成一个 ai- 半环。若在此构造中允许空字 1，则 1 同时成为加法单位元和乘法单位元。此时我们使用记号 $M_c^*(W)$。

注 4.1. 对于任意交换半群 S，定义二元关系 τ，使得 $(a,b) \in \tau$ 当且仅当 $b = ac$ 对某个 $c \in S^1$ 成立。容易验证，τ 是 S 上的相容拟序。此外，τ 是偏序当且仅当 S 是 $\mathcal{J}$-平凡的（即对于所有 $a, b \in S$，$S^1aS^1 = S^1bS^1$ 蕴含 $a = b$）。这一观察自然引出了另外两个问题:

(i) 在什么条件下，τ 会在 S 上诱导出半格序? (ii) 如果存在这样的半格序，还需要满足什么条件，才能使所得结构成为 ai-半环? 也就是说，诱导出的加法和乘法何时满足分配律?

容易看出，$M_c^*(1)$ 与 M_2 同构，$M_c^*(a)$ 与 S_{53} 同构，而 $M_c^*(\{a\}^+)$ 与最大加半环 $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 最大值 $+)$ 同构，其中加法定义为取数值的最大值，乘法定义为通常的数值乘法，而 ∞ 是加法和乘法的吸收元。Aceto 等人 [1] 证明了最大加半环 $\mathbb{N}$ 是非有限基的。然而，$\mathsf{V}(\mathbb{N})$中的成员以及它的极小非有限基子簇仍未得到明确刻画。利用 的理想商，我们得到

引理 4.2。 最大加半环 $\mathbb{N}$ 同构于族 $\{M_c^*(a^k)\}_{k\geq 0}$的次直积。因此，对于每个 $k \geq 0$，$M_c^*(a^k)$ 都属于簇$\mathsf{V}(\mathbb{N})$。

证明。 对于每个 $k \geq 0$，注意到 $\mathbb{N}_{\geq k}$ 既是 $\mathbb{N}$的乘法理想，也是一个序滤子，而商 $\mathbb{N}/\mathbb{N}_{\geq k}$ 同构于 $M_c^*(a^k)$。由于 $\bigcap_{k\geq 0} \mathbb{N}_{\geq k} = \varnothing$，自然映射 $\varphi\colon \mathbb{N} \to \prod_{k\geq 0} \mathbb{N}/\mathbb{N}_{\geq k}$ 由 $\varphi(n) = (n/\mathbb{N}_{\geq k})_{k\geq 0}$ 定义，是一个次直嵌入。因此，结论成立。□

注 4.3。 如果将 $\mathbb{N}_{\geq k}$ 替换为 $\mathbb{N}_{\geq k} \cup \{\infty\}$，很容易验证，最大加半环 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 也同构于族$\{M_c^*(a^k)\}_{k\geq 0}$的次直积。因此，最大加半环 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 生成同一个簇。本节末尾将给出这一事实的另一种证明。

接下来，我们将证明 S_{53} 和 $\mathbb{N}$属于类型 $2^{\aleph_0}$。首先，我们给出 [27, 命题 2.6], 的一个类似版本，该命题指出，对于每个 $n \geq 1$，平坦半环$S_c(a_1 \cdots a_n)$ 都属于簇 $\mathsf{V}(S_7)$。

引理 4.4. 对于每个 $n \geq 1$，半环 $S_c^*(a_1 \cdots a_n)$ 都属于簇 $\mathsf{V}(S_{53})$。

证明。 对于任意正整数 n，令 S_n 表示 n 个 S_{53} 的直积，并令 A_n 为由这些 n 个元素生成的子半环

$$\alpha_1 = (a, 1, 1, \ldots, 1),\ \alpha_2 = (1, a, 1, \ldots, 1),\ \ldots,\ \alpha_n = (1, 1, \ldots, 1, a).$$

令 J_n 为 A_n 中所有至少有一个坐标等于 0 的元素组成的集合。那么 J_n既是乘法理想，也是 A_n的序论滤子。

经过常规验证可知，理想商 A_n/J_n 由 J_n 以及与 $a_1 \cdots a_n$的每个子词对应的单元素集组成。因此，A_n/J_n 是

在由 $a_i \mapsto\{\alpha_i\}$ 确定的自然同态下，与 $S_c^*(a_1\cdots a_n)$同构，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$。因此， $S_c^*($ $a_1\cdots a_n) \in \mathsf{V}(S_{53})$，如所需。□

定理 4.5. 对于每个 $k \geq 3$，令$\mathbf{N}_{k+1}$ 为由$\mathsf{V}(S_{53})$ 中的$(k+1)$-幂零恒等式所确定的子簇。那么，区间 $[\mathsf{V}(S_c^*(a_1\cdots a_k)), \mathbf{N}_{k+1}]$ 的基数为连续统。特别地， S_{53} 是一个类型为 $2^{\aleph_0}$的有有限基底的有限半环。

证明。首先，由引理 4.4 可知 $S_c^*(a_1\cdots a_n) \in \mathsf{V}(S_{53})$ 对每个正整数n均成立。然后，由定理 3.4可知，ai-半环 S_{53} 的类型为 $2^{\aleph_0}$。

回顾定理 3.4 的证明，我们使用族 $\{A_{k,p}\}_{p\in P}$ 将幂集 $\mathcal{P}(P)$ 嵌入$\mathbf{N}_{k+1}$中，使其成为一个格。为了证明对于每个 $k \geq 3$， $[\mathsf{V}(S_c^*(a_1\cdots a_k)), \mathbf{N}_{k+1}]$ 的基数均为连续统，只需证明对于每个素数 p， $S_c^*(a_1\cdots a_k)$ 是 $A_{k,p}$ 的子代数。

确实，取字 $a_1a_2\cdots a_{kp}$，并选取 k 个两两不相交的子词

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k,$$

每个长度为 p。（例如，可以取 $\mathbf{u}^i = a_{(i-1)p+1}a_{(i-1)p+2}\cdots a_{ip}$，其中$i = 1$，……，$k$。）容易验证，在 $A_{k,\ p}$ 中由{$\mathbf{u}_1$，……，$\mathbf{u}_k$}生成的子半环与 $S_c^*(a_1\cdots a_k)$ 同构；因此， $S_c^*(a_1\cdots a_k)$ 是$A_{k,\ p}$的一个子代数。

因此，定理 3.4 中构造的格嵌入限制为 $\mathcal{P}(P)$ 到区间 $[\mathsf{V}(S_c^*(a_1\cdots a_k))$， $\mathbf{N}$ $_{k+1}]$中的一个嵌入，这迫使该区间具有基数 $2^{\aleph_0}$。□

由于对于每个 $p \in P$， $S_c^*(a_1\cdots a_k)$ 都是 $A_{k,\ p}$ 的一个子半环，因此由（4）可知，恒等式 $\{\sigma_{k,p}\}_{p\in P}$ 均由 $S_c^*(a_1\cdots a_k)$ 满足。此外，这组恒等式在 N_{k+1} 中是不可约的；也就是说，对于每个 $q \in P$，$\mathsf{Id}(\mathbf{N}_{k+1})$ 与 $\{\sigma_{k,p} \mid p \in P \setminus \{q\}\}$ 合在一起并不能推出恒等式 $\sigma_{k,\ q}$。

这是因为 $A_{k,\ q}$ 属于 $\mathbf{N}_{k+1}$，满足每个恒等式 $\sigma_{k,\ p}$ 其中 $p \neq q$，但不满足 $\sigma_{k,\ q}$。

这表明， $\{\sigma_{k,p}\}_{p\in P}$的不同子集定义了$\mathbf{N}_{k+1}$中的不同子簇。因此，我们得到一个格嵌入

$$\psi\colon \mathcal{P}(P) \to \big[\mathsf{V}(S_c^*(a_1\cdots a_k)), \mathbf{N}_{k+1}\big], \quad Q \mapsto \mathsf{Mod}(\sigma_{k,p} \mid p \in Q) \cap \mathbf{N}_{k+1}. \tag{5}$$

此外，由于 $\mathbf{N}_{k+1}$ 本身是有限基的，设 $\mathbf{N}_{k+1} = \mathsf{Mod}(\Sigma)$，其中 Σ 是某个有限的恒等式集合，因此我们有

$$\psi(Q) = \mathsf{Mod}\big(\Sigma \cup \{\sigma_{k,p} \mid p \in Q\}\big).$$

通过从 Σ中删去冗余恒等式，我们可以提取出一个子集 $\Sigma_Q \subset \Sigma$，使得 $\Sigma_Q \cup \{\sigma_{k,p} \mid p \in Q\}$ 构成 $\psi(Q)$的不可约基。

令 $\mathcal{P}_{\mathrm{inf}}(P)$表示 P的所有无限子集所组成的族。由于 $\mathcal{P}_{\mathrm{inf}}(P)$本身具有连续统基数，我们得到了以下结果。

命题 4.6。 对于每个整数 $k \geq 3$，区间 $[\mathsf{V}(S_c^*(a_1\cdots a_k))$，$\mathbf{N}_{k+1}]$包含连续统多个簇 $\{\psi(Q)\}_{Q\in\mathcal{P}_{\mathrm{inf}}(P)}$，且每个簇都具有一个无限不可约基。

注记 4.7. 事实上，通过上述分析，我们得出了一个一般性结论：只要我们通过恒等式构造出一个格嵌入 ψ，将某个无限集合 I 的幂集 $\mathcal{P}(I)$ 嵌入某个子簇格（如

在（5）中），那么 ψ 下 $\{\mathcal{P}_{\inf}(I)\}$ 中每个元素的像都是非有限基的。此外，如果簇 $\mathcal{V}$ 本身有有限基，那么它的每个像也都具有一个由恒等式构成的无限不可约基。

根据引理 4.2 和定理 4.5，我们立即得到

命题 4.8。最大加半环 $(\mathbb{N}, \max, +)$ 属于类型 $2^{\aleph_0}$。

本节最后，我们以半环的正则化作结。注意，根据注记4.3，最大加半环 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 生成相同的簇。为考察它们之间的关系，我们引入一般情形。对于半环 S，记 S^∞ 为通过添加一个新元素 ∞得到的半环，其中该元素是加法和乘法的吸收元。以下观察将 S^∞ 生成的簇与 S 和 M_2生成的簇联系起来。

命题 4.9。对于任意半环 S，$\mathsf{V}(S^\infty) = \mathsf{V}(S, M_2)$。

证明。根据构造，S 是 S^∞的子半环。此外，设 ρ 表示与 S^∞的划分 $\{S, \{\infty\}\}$ 对应的等价关系。容易验证，ρ 是 S^∞上的同余，且商 S^∞/ρ 与M_2同构。因此，S 和 M_2 属于$\mathsf{V}(S^\infty)$，这意味着$\mathsf{V}(S, M_2) \subseteq \mathsf{V}(S^\infty)$。

对于反向包含，假设恒等式 $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ 在 S 与 M_2中同时成立。于是 $c(\mathbf{u}) = c(\mathbf{v})$。设 $\varphi : c(\mathbf{u}) \to S^\infty$ 为任一赋值。若对某个变量 $x \in c(\mathbf{u})$ 有 $\varphi(x) = \infty$，则 ∞ 的吸收性质迫使 $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v}) = \infty$。否则，$\varphi$ 将所有变量映入 S；把 φ 视为到 S 中的一个赋值，由 S 满足 $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ 可得 $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$。因此，$S^\infty$ 满足在 S 与 M_2 中成立的每一条恒等式，从而 $\mathsf{V}(S^\infty) \subseteq \mathsf{V}(S, M_2)$。

因此，$\mathsf{V}(S^\infty) = \mathsf{V}(S, M_2)$。 □

命题 4.9 因此表明，S^∞ 所满足的恒等式恰好是 S所满足的正则恒等式。在此意义下，S^∞ 可视为正则化 之 S。此外，我们有如下推论。

推论 4.10。对于任意半环 S，$\mathsf{V}(S)$ =$\mathsf{V}(S^\infty)$ 当且仅当 $M_2 \in \mathsf{V}(S)$。

结合引理 4.2 和推论 4.10，可得

命题 4.11。最大加半环 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 $\mathbb{N}$ 生成相同的半环簇。

事实上，根据 [20, 定理 1], 若 $M_2 \notin \mathsf{V}(S)$，则 $\mathsf{V}(S^\infty)$ 覆盖 $\mathsf{V}(S)$ 在半环簇中。因此，我们得到以下结果。

命题 4.12。对于任意半环 S，区间 $[\mathsf{V}(S), \mathsf{V}(S^\infty)]$中至多有两个成员。

5. 平坦半环 B_0

本节中，我们介绍另一个可能的有有限基底的有限半环的例子，类型为 $2^{\aleph_0}$，即 B_2^1 的子半环 $B_0 = \{0, e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$。Shaprynskiĭ [38]证明了 B_0 有有限基。通过分析 B_0 的乘法半群，他观察到，对于赋值 $\varphi : X \to B_0$，等式 $\varphi(\mathbf{p}) = e_{12}$ 成立

当且仅当 $\mathbf{p}$ 具有如下形式：$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 x \mathbf{p}_2$，其中某个 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in X^*$ 满足 $\mathrm{occ}(x, \mathbf{p}_1) = \mathrm{occ}(x, \mathbf{p}_2) = 0$，并且

$$\varphi(y) = \begin{cases} e_{11}, & y \in c(\mathbf{p}_1), \\ e_{12}, & y = x, \\ e_{22}, & y \in c(\mathbf{p}_2). \end{cases}$$

这一刻画直接推出以下引理。

引理 5.1. 设$\mathbf{p}$、$\mathbf{q} \in X^+$满足$\mathbf{p} \preceq_{B_0} \mathbf{q}$。那么$\mathrm{occ}(x, \mathbf{q}) = 1$意味着$\mathrm{occ}(x, \mathbf{p}) = 1$对所有 $x \in X$均成立。

证明。设 $\mathrm{occ}(x, \mathbf{q}) = 1$，并将$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 x \mathbf{q}_2$写作$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in X^*$。定义赋值 $\varphi\colon X \to B_0$ 如下：

$$\varphi(y) = \begin{cases} e_{11}, & y \in c(\mathbf{q}_1), \\ e_{12}, & y = x, \\ e_{22}, & y \in c(\mathbf{q}_2), \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

那么 $\varphi(\mathbf{q}) = e_{12}$。由于 $\varphi(\mathbf{p}) \preceq \varphi(\mathbf{q}) = e_{12}$ 在的加法序中 B_0，我们必有 $\varphi(\mathbf{p}) = e_{12}$（因为只有 e_{12} 它本身低于图 所示序中的 1）。

根据上文提到的刻画，$\varphi(\mathbf{p}) = e_{12}$ 意味着$\mathbf{p}$ 可写为$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 x \mathbf{p}_2$，其中某个 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in X^*$ 满足 $\mathrm{occ}(x, \mathbf{p}_1) = \mathrm{occ}(x, \mathbf{p}_2) = 0$。因此，$\mathrm{occ}(x, \mathbf{p}) = 1$，证毕。□

命题 5.2. 每个线性词都是 B_0 的等式项。

证明。我们只需证明每个线性词 $x_1 \cdots x_n$ 对于 B_0 都是极小的。假设 $\mathbf{p} \preceq_{B_0} x_1 \cdots x_n$，其中 $\mathbf{p} \in X^+$。由于 M_2 同构于 B_0 的子半环 $\{0, e_{11}\}$，因此 $\mathbf{p} \preceq_{M_2} x_1 \cdots x_n$，从而 $c(\mathbf{p}) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$。

另一方面，由引理 5.1，$\mathrm{occ}(x_i, \mathbf{p}) = 1$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 均成立。因此$\mathbf{p} = x_{i_1} \cdots x_{i_n}$，其中 $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$。若 $\mathbf{p} \neq x_1 \cdots x_n$，则存在$1 \leq s < t \leq n$ 使得 $i_s > i_t$。定义一个赋值 $\varphi\colon X \to B_0$ 使得

$$\varphi(x) = \begin{cases} e_{11}, & x \in \{x_1, \ldots, x_{s-1}\}, \\ e_{12}, & x = x_s, \\ e_{22}, & x \in \{x_{s+1}, \ldots, x_n\}. \end{cases}$$

那么 $\varphi(x_1 \cdots x_n) = e_{12}$ 但 $\varphi(\mathbf{p}) = 0$，这就产生了矛盾。因此 $\mathbf{p} = x_1 \cdots x_n$，所以每个线性词都是 B_0 的等式项。□

根据引理 2.1 和命题 5.2，我们立即得到

命题 5.3。对于每个正的 n，平坦半环 $S(a_1 \cdots a_n)$ 都属于簇 $\mathsf{V}(B_0)$。

推论 5.4。子簇格 $\mathcal{L}(\mathsf{V}(B_0))$ 是无限的。更准确地说，它包含一条无限严格递增链

$$\mathsf{V}(S(a_1)) \subsetneq \mathsf{V}(S(a_1 a_2)) \subsetneq \mathsf{V}(S(a_1 a_2 a_3)) \subsetneq \cdots.$$

证明。对于每个正整数 n，很容易看出 $S(a_1 \cdots a_n)$ 是 $S(a_1 \cdots a_{n+1})$ 的子半环。此外，$S(a_1 \cdots a_n)$ 满足 $(k+1)$-幂零恒等式，其中 $k \geqslant n$；但 $S(a_1 \cdots a_{n+1})$ 不满足 $(n+1)$-幂零恒等式。总之，$\mathsf{V}(S(a_1 \cdots a_n))$ 是 $\mathsf{V}(S(a_1 \cdots a_{n+1}))$ 的真子簇，因此结论成立。□

注 5.5。 如果我们能够得到定理 3.4 的一个非交换版本，即用 $S_c(a_1 \cdots a_n)$ 替换为 $S(a_1 \cdots a_n)$，同时结论仍然成立，那么我们就可以得出 B_0 也是一个有限基有限 ai-半环，其类型为$2^{\aleph_0}$。这仍是未来研究的课题。

6. 结论

我们证明了，3 元有限基 ai-半环 S_{53} 生成了一个含有连续统多个子簇的簇，由此给出了首个已知的类型为 $2^{\aleph_0}$的有限有限基半环的例子。借助理想商，我们还证明了 S_{53} 属于簇 V(ℕ)；因此，最大加半环ℕ同样属于类型 $2^{\aleph_0}$。

Gao 等人 [11] 彻底解决了V(S_7)的子簇的有限基问题。特别是，V$(S_c(abc))$是 V(S_7) 中唯一的极小非有限基子簇（参见 [11, 推论 3。20]）。尽管命题4.6利用句法方法给出了V(S_{53})的连续统多个子簇，每个子簇都不是有限基的，且拥有无限不可约恒等式基，但我们仍无法指出V(S_{53}) 中具体的非有限基有限半环。类比于 S_7 的情形，自然会提出以下问题：

问题 6.1。 $S_c^*(abc))$ 是否是 V(S_{53}) 的极小非有限基子簇？

另一方面，半环 $S_c(W)$ 的有限基问题（其中 W 是有限词集）已在 [27, 42] 中得到彻底解决。这自然引出了以下相关问题：

问题 6.2。 对于哪些有限词集 W，半环 $S_c^*(W)$ 是有限基的？

最后，我们回顾一下：对于任意半环 S，半环簇格中，簇 V(S^∞) 覆盖 V(S)，当且仅当 $M_2 \notin$ V(S)。特别地，只要 S^∞ 是有限基的， S 就是有限基的。然而，反过来仍是一个未决问题：

问题 *6.3*。 *</style}*半环 S^∞ 是否只要 S 是有限基的，就也是有限基的？

致谢。 作者谨向 Xianzhong Zhao 教授和 Miaomiao Ren 教授致以诚挚谢意，感谢他们对本文提出的宝贵意见和建议。

参考文献

[1] Aceto, L., Ésik, Z., Ingólfsdóttir, A.：《自然数的最大加代数没有有限方程基》。理论计算机科学 **293**，169–188（2003）[2] Alsulami, T., Jackson, M.：《正组合代数与指数代数的有限模型》。伦敦数学会通报 **57**，3380–3400（2025）[3] Bonomo-Braberman, F., Dourado, M.C., Valencia-Pabon, M., Vera, J.C.：《关于 Kneser 超图同态的一则注记》。应用数学与计算 **366**，124764（2020）[4] Burris, S., Sankappanavar, H.P.：《普遍代数教程》。施普林格，纽约（1981）[5] Connes, A., Consani, C.：《绝对代数几何：仿射情形》。数学进展 **390**，107909（2021）[6] Dolinka, I.：《一个非有限基有限半环》。国际代数与计算杂志**17**，1537–1551（2007）[7] Dolinka, I.：《半环簇格中的一个不可数区间》。塞格德数学科学学报**74**，85–93（2008）[8] Dolinka, I.：《一类本质上非有限基半环》。《普遍代数》**60**，19–35（2009）

[9] Dolinka, I., Gusev, S.V., Volkov, M.V.：《有限半格自同态半环的有限基》。比利时数学会 Simon Stevin 通报 32，657–674（2025）[10] El Bashir, R., Kepka, T.：《同余单半环》。《半群论坛》75，588–608（2007）[11] Gao, Z.D., Jackson, M., Ren, M.M., Zhao, X.Z.：《与 S_7相关的加法幂等半环的有限基问题》。预印本 arXiv:2501.19049[12] Gao, Z.D., Jackson, M., Ren, M.M., Zhao, X.Z.：《半环簇格中的一个连续统：区间 [V(S), V(S^0)]》。准备中的手稿。[13] Gao Z.D., Ren M.M.：《乘法约化幂零的平坦半环》。预印本 arXiv:2506.23047[14] Gao Z.D., Ren M.M., Yue M.Y.：《半环簇区间 [V(S_7), V(B_2^1)] 的基数为连续统基数》。预印本 arXiv:2601.07116[15] Ghosh, S., Pastijn, F., Zhao, X.Z.：《有序带生成的簇 I》。Order 22，109–128（2005）[16] Glasson, D.：《Rees 商幺半群生成了一个具有不可数多个子簇的簇》。《半群论坛》109，476–481（2024）[17] Głazek, K.：《半环及其在数学与信息科学中的应用文献指南》。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特-波士顿-伦敦（2001）[18] Golan, J.S.：《半环理论及其在数学与理论计算机科学中的应用》。Longman Scientific and Technical，哈洛（1992）[19] Godsil, C., Royle, G.：《代数图论》。数学研究生教材 207，施普林格，纽约（2001）[20] Graczyńska, E.：《关于正则恒等式》。《普遍代数》17，369–375（1983）[21] Gusev, S.V.：《生成具有不可数多个子簇的簇的小幺半群》。《半群论坛》110，255–259（2025）[22] Gusev, S.V., Volkov, M.V.：《幂群的半环恒等式与对合恒等式》。澳大利亚数学会杂志 115，354–374（2023）[23] Gusev, S.V., Volkov, M.V.：《有限逆半群的半环恒等式》。《半群论坛》106，403–420（2023）[24] Gusev, S.V., Volkov, M.V.：《有限链自同态半环的有限基问题》。国际代数与计算杂志（即将出版）。预印本 arXiv:2312 01770 。[25] Jackson, M.：《其簇具有不可数多个子簇的有限半群》。《代数杂志》228，512–535（2000）[26] Jackson, M., Lee, E.W.H.：《具有极端性质的幺半群簇》。美国数学会汇刊 370，4785–4812（2018）[27] Jackson, M., Ren, M.M., Zhao, X.Z.：《乘法约化有限基的非有限基加法幂等半环》。《代数杂志》611，211–245（2022）[28] Maclagan, D., Sturmfels, B.：《热带几何导论》。数学研究生丛书 161，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（2015）[29] Pastijn, F.：《有序带生成的簇 II》。Order 22，129–143（2005）[30] Perkins, P.：《半群方程理论的基》。《代数杂志》11，298–314（1969）[31] Ren, M.M., Jackson, M., Zhao, X.Z., Lei, D.L.：《群的平坦扩张与加法幂等半环的极限簇》。《代数杂志》623，64–85（2023）[32] Ren, M.M., Liu, J.Y., Zeng, L.L., Chen, M.L.：《四阶加法幂等半环的有限基问题 I》。《半群论坛》110，422–457（2025）[33] Ren, M.M., Liu, Z.X., Yue, M.Y., Chen, Y.Z.：《四阶加法幂等半环的有限基问题 III》。《半群论坛》110，601–634（2025）。https://doi.org/ 10 1007 00233 025 10584 5 。/s - - - Ren, M.M., Zhao, X.Z.：[34]《满足 $x^3 \approx x$ 和 $xy \approx yx$的半格序半群簇》。匈牙利数学期刊 72，158–170（2016）[35] Ren, M.M., Zhao, X.Z., Volkov, M.V.：《将周期群准簇格嵌入加法幂等半环簇格：一种代数证明》。预印本 arXiv:2507.09141[36] Ren, M.M., Zhao, X.Z., Wang, A.F.：《关于满足 $x^3 \approx x$的加法幂等半环簇》。《普遍代数》 77，395–408 （ 2017 ）[37] Shao, Y., Ren, M.M.：《关于由二阶加法幂等半环生成的簇》。《半群论坛》91，171–184（2015）[38] Shaprynskiĭ, V.Y.：《半群 B_0中的半环恒等式》。《半群论坛》109，693–705（2024）

[39] Trahtman, A.N.：六元半群生成了具有不可数多个子簇的簇。载于《代数系统及其簇》，斯维尔德洛夫斯克，第138–143页（1988）。（俄文）[40] Volkov, M.V.：Brandt幺半群的半环恒等式。《普遍代数》**82**，42（2021）[41] Wang, A.F.、Wang, L.L.：关于由所有二阶半环生成的簇。预印本 arXiv:2507.08381[42] Wu, Y.N.、Zhao, X.Z.、Ren M.M.：关于平坦幂零半环的簇。《半群论坛》**106**，271 284 2023–（ ）[43] Yue, M.Y.、Ren, M.M.、Zeng, L.L.、Shao, Y.：四阶加法幂等半环的有限基问题，II。《普遍代数》**86**，33（2025）[44] Zhao, X.Z.、Ren, M.M.、Crvenković, S.、Shao, Y.、Đapić, P.：由一个三阶ai-半环生成的簇。《乌拉尔数学杂志》**6**，117–132（2020）

西北大学数学学院，中华人民共和国陕西省西安市，邮编 710127电子邮箱：zidonggao@yeah.net