arXiv:2603.00894v1 [math.AP] 1 Mar 2026

环面上具有临界正则性的大初始数据下可压缩 Navier-Stokes 方程组的低马赫数极限

李赛 中华人民共和国南京市南京林业大学应用数学系，邮编 210037 电子邮箱：lsmath@njfu.edu.cn

2026年3月3日

摘要

我们研究环面上的可压缩纳维-斯托克斯方程的低马赫数极限。对于具有临界正则性的大初始数据，我们证明，只要马赫数充分小，可压缩 Navier-Stokes 方程组的解就能在相应的不可压缩 Navier-Stokes 方程组的解存在期间存在。此外，我们证明，当马赫数趋于零时，可压缩系统的解收敛到不可压缩系统的解。我们的方法结合了对密度和速度进行的高—中—低频分析，以及借助声波群的解滤波技术。本工作对 Danchin 提出的问题给出了肯定回答［《美国数学杂志》，124（2002），1153-1219]：“对于具有临界正则性的大数据，收敛是否成立？”

关键词：可压缩 Navier-Stokes 方程，低马赫数极限，大初始数据，临界空间

数学主题分类：35Q30, 35B25, 76N10,76N06

目录

1 引言 2

2 记号与主定理 62.1 记号 .62.2 主定理 .9**3 证明策略与难点 11**

4 定理2.1的完整证明

13

5 和v的衰减性质 185.1 命题 4.1 的证明.205.2 命题 4.2 的证明.30

6 $Y^{\zeta,\varepsilon}(T)$与 $X^{\varepsilon}(T)+P^{\varepsilon}(T)$之间的关系，以及对$[a^{\varepsilon},\boldsymbol{u}^{\varepsilon}]^{\zeta,h^{\varepsilon}}$、$m(T)$ 346.1 命题 4.3 的证明. 366.2 命题 4.4 的证明.39

7 附录 **45**

1 引言

我们聚焦于低马赫数流的数学理论，并研究环面 $\mathbb{T}_b^d(d\geq 2)$ 上的以下可压缩纳维-斯托克斯系统:

$$\begin{cases}\partial_t\varrho^{\varepsilon}+\operatorname{div}(\varrho^{\varepsilon}\boldsymbol{u}^{\varepsilon})=0,\\ \partial_t(\varrho^{\varepsilon}\boldsymbol{u}^{\varepsilon})+\operatorname{div}(\varrho^{\varepsilon}\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{u}^{\varepsilon})-\mu\Delta\boldsymbol{u}^{\varepsilon}-(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{\varepsilon}+\dfrac{\nabla P(\varrho^{\varepsilon})}{\varepsilon^2}=\varrho^{\varepsilon}f^{\varepsilon},\\ (\varrho^{\varepsilon},\boldsymbol{u}^{\varepsilon})|_{t=0}=(\varrho_0^{\varepsilon},\boldsymbol{u}_0^{\varepsilon}).\end{cases}\tag{1.1}$$

这里，未知量 $\varrho^{\varepsilon}(t,\ x)$ 和 $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t,\ x)$ 分别表示流体密度和速度场，其中 $t\geq 0$ 表示时间坐标，$x\in\mathbb{R}^d$ 表示空间坐标。假设 ϱ^{ε}，$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}$ 关于变量 $x_h\,(1\leq h\leq d)$ 是 $2\pi b_h$-周期的（$b_h>0$）。黏性系数 μ 和 λ 满足$\mu>0$，$\nu:=2\mu+\lambda>0$。$0<\varepsilon\leq 1$是马赫数。$P(\cdot)$ 是一个适当的光滑函数，表示标量压力；f^{ε} 是外力。

一个根本性问题是：“系统（1.1）的解如何依赖于马赫数 ε？”多年来，严格的数学分析表明，在适当的条件下，当参数 ε趋于零时，（1.1）的解收敛到不可压缩纳维-斯托克斯方程的解。

低马赫数极限的严格理论研究由 Klainerman 和 Majda 发起 [20]（关于无黏情形，参见 Ebin [10] 以及 Klainerman 和 Majda [21]），他们首次建立了系统（1.1）局部强解的收敛理论。在假设极限不可压缩纳维-斯托克斯方程具有整体解的条件下，Hagstrom 和 Lorenz [18]证明了对于某些初始数据，系统（1.1）存在整体强解，并严格论证了不可压缩极限（Hoff [17]也建立了类似的整体收敛结果）。Lions 和 Masmoudi [23] 首次在整体弱解框架下研究低马赫数极限；随后，Desjardins 和 Grenier [3]通过在全空间情形下采用色散估计，简化了 [23] 中的证明。此外，Desjardins 等人 [4]分析了具有狄利克雷边界条件的有界区域情形，而 Feireisl 等人 [11]进一步探讨了区域依赖于马赫数的情形 ε。由于本文篇幅所限，这里仅作简要回顾。关于更系统和深入的论述，读者可参阅 Feireisl 和 Novotn´y [12], 的专著、Jiang 和 Masmoudi 的综述文章 [19],以及 Schochet 的综述 [28]。

本文研究系统（1.1）在临界空间 $_1$中向不可压缩纳维-斯托克斯方程组的收敛性，其中 Danchin 已建立了这类空间中的适定性[8, 9]。不失一般性地，我们将参考密度归一化为 1，并假设压力定律满足 $P'(1)=1$。令 $\varrho_0^\varepsilon=1+\varepsilon a_0^\varepsilon$ 并引入 $a^\varepsilon:=\frac{\varrho^\varepsilon-1}{\varepsilon}$，则 $(a^\varepsilon,\ \boldsymbol{u}^\varepsilon)$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t a^\varepsilon+\dfrac{\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon}{\varepsilon}=-\mathrm{div}(a^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon),\\ \partial_t\boldsymbol{u}^\varepsilon+\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon+\dfrac{\nabla a^\varepsilon}{\varepsilon}=-\kappa a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon-\widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon)a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon-I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon+f^\varepsilon,\\ (a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)\,|_{t=0}=(a_0^\varepsilon,\boldsymbol{u}_0^\varepsilon),\end{cases}\tag{1.3}$$

其中

$$\mathcal{A}\boldsymbol{u}:=\mu\Delta\boldsymbol{u}+(\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{u},\quad I(a):=\frac{a}{1+a},\quad \frac{P'(1+a)}{1+a}=1+\kappa a+a\widetilde{K}(a)\ \text{with}\ \widetilde{K}(0)=0.$$

为简单起见，以下假设初始数据 $(a_0^\varepsilon,\ \boldsymbol{u}_0^\varepsilon)$ 和外力 f^ε 均与 ε 无关，并分别记为 $(a_0,\ \boldsymbol{u}_0)$ 和 f。初始数据的临界正则性条件为

$$(a_0,\boldsymbol{u}_0)\in\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b)\times\left(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b)\right)^d,\tag{1.4}$$

其中 $\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b)=\{g\in B^{\frac{d}{2}}_{2,1}(\mathbb{T}^d):\ \int_{\mathbb{T}^d_b}g\,\mathrm{d}x=0\}$。

设 $\mathbb{P}$ 并且 $\mathbb{Q}$ 表示分别投影到无散向量场和梯度向量场上的投影算子分别 定义为

$$\mathbb{Q}:=-\nabla(-\Delta)^{-1}\mathrm{div},\quad \mathbb{P}:=I-\mathbb{Q}.$$

可以猜想，$(a^\varepsilon,\ \boldsymbol{u}^\varepsilon)$ 收敛到 $(0,\ \mathbf{v})$，其中 $\mathbf{v}$ 满足以下不可压缩 Navier-Stokes 方程组

$$\begin{cases}\partial_t\mathbf{v}-\mu\Delta\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}+\nabla\pi=h,\quad \mathrm{div}\mathbf{v}=0\\ \mathbf{v}\,|_{t=0}=\mathbf{v}_0,\end{cases}\tag{1.5}$$

其初始数据为 $\mathbf{v}_0=\mathbb{P}\boldsymbol{u}_0$，外力为 $h=\mathbb{P}f$。

Danchin [5, 7] 证明，对于环面和全空间两种情形，只要解 $\mathbf{v}$ 存在，解 $(a^\varepsilon,\ \boldsymbol{u}^\varepsilon)$ 也存在，并收敛到 $(0,\ \mathbf{v})$，前提是初始数据满足以下任一小量条件：

$$\varepsilon\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\ll 1,\tag{1.6}$$

[1]显然，（1.1）在变换

$$(\varrho^\varepsilon(t,x),\ \boldsymbol{u}^\varepsilon(t,x))\to(\varrho^\varepsilon(l^2t,lx),\ l\boldsymbol{u}^\varepsilon(l^2t,lx)),\ l>0,\tag{1.2}$$

若压力项 P 被改为 l^2P。系统（1.1）的临界空间对于所有 l（除去无关常数外）关于变换（1.2）的范数均不变。

或具有次临界正则性的大数据。随后，Danchin 和 He [6] 将 [7] 的结果推广到了临界 L^p 空间，而 Li 和 Mu [24] 将 [5] 的定理推广到了磁流体动力学方程。然而，对于环面上满足（1.4）的大数据，其收敛性仍是未解决的问题（见 [5], 第 1162 页）；对于全空间上满足（a_0、$\boldsymbol{u}_0$）$\in \left(B^d_{2,1}(\mathbb{R}^d) \cap B^{d-1}_{2,1}(\mathbb{R}^d)\right) \times \left(B^{d-1}_{2,1}(\mathbb{R}^d)\right)^d$ 的大初始数据，该问题同样未解决（见 [7], 注 0.5）。近期，Fujii [13]通过提出一种创新的高-中-低频框架，并结合色散估计技术，解决了全空间情形下的这一问题。随后，Fujii 和 Li [14] 将该方法推广至临界 $\widehat{L^p}$ 空间上 Navier-Stokes-Korteweg 方程组的全局大解的低马赫数极限问题。进一步地，Li [22] 将 [13] 的结果推广到了 $\mathbb{R}^d$上的磁流体动力学方程，而 Ogino [26] 建立了在全空间情形下，当马赫数趋于零时，系统（1.1）中 $\partial_t \mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon$ 的发散性。

环面构型展现出与全空间情形定性上截然不同的动力学行为，尤其是在声波传播特性方面。在应用投影算子 $\mathbb{Q}$ 子系统（1.3）$_2$, 之后，我们得到如下支配声波动力学的耦合系统:

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + \dfrac{\mathrm{div}\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon}{\varepsilon} = -F, \\ \partial_t \mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon + \dfrac{\nabla a^\varepsilon}{\varepsilon} = \mathbb{Q}G \end{cases}$$

其中

$$F = \mathrm{div}(a^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon), \quad G = \mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla \boldsymbol{u}^\varepsilon - \kappa a^\varepsilon \nabla a^\varepsilon - \widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon) a^\varepsilon \nabla a^\varepsilon - I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon + f.$$

该系统会产生高度振荡的声波。在全空间设定下，这些波呈现出自然的色散现象，从而通过空间扩散促进渐近能量耗散。然而，在环面上，区域的有界性从根本上抑制了色散机制，导致持续的声学振荡，因而解仅能得到弱收敛。波传播动力学上的这一根本差异使得 Fujii [13], 的方法因关键依赖于色散估计而不适用于环面情形。

为研究这些持续的声学振荡，我们采用滤波技术；该技术已在多种情形中成功应用: Schochet [27] 针对双曲型方程组；Gallagher [15] 针对抛物型方程组；Grenier [16], 、Danchin [5], 以及 Masmoudi [25] 针对 Navier-Stokes 系统，以及其他文献。我们定义滤波算子 $\mathcal{L}(\tau) = e^{-\tau L}$，其中 L作用于 $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^d_b) \times \left(\mathcal{S}'(\mathbb{T}^d_b)\right)^d$，其作用方式为

$$L \begin{pmatrix} a \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{div}\boldsymbol{u} \\ \nabla a \end{pmatrix}.$$

令 $\mathcal{L}^1(\tau)$ 和 $\mathcal{L}^2(\tau)$ 分别表示 d 的第一个和其余 $\mathcal{L}(\tau$ 分量。设 $\boldsymbol{V}^\varepsilon := \mathcal{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) \begin{pmatrix} a^\varepsilon \\ \mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon \end{pmatrix}$。将算子 $\mathcal{L}(-\frac{t}{\varepsilon})$ 应用于系统 (1.3)，得到以下

滤波系统,

$$\begin{aligned}&\partial_t \boldsymbol{V}^\varepsilon + \mathcal{Q}_1^\varepsilon(\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon, \boldsymbol{V}^\varepsilon) + \mathcal{Q}_2^\varepsilon(\boldsymbol{V}^\varepsilon, \boldsymbol{V}^\varepsilon) - \nu\mathcal{A}_2^\varepsilon(D)\boldsymbol{V}^\varepsilon \\ &= \mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Q}(f - \mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon)a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon - I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{1.7}$$

where

$$\mathcal{A}_2^\varepsilon(D)B := \mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta(\mathcal{L}^2\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)B)\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\boldsymbol{u}, B) := \mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix} \operatorname{div}\Big(\boldsymbol{u}\mathcal{L}^1\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)B\Big) \\ \mathbb{Q}\Big(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mathcal{L}^2\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)B + \mathcal{L}^2\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)B\cdot\nabla\boldsymbol{u}\Big)\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_2^\varepsilon(A, B) := \frac{1}{2}\mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix} \operatorname{div}\Big(\mathcal{L}^1\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)A\mathcal{L}^2\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)B + \mathcal{L}^2\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)A\mathcal{L}^1\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)B\Big) \\ \nabla\Big(\mathcal{L}^2\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)A\cdot\mathcal{L}^2\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)B\Big) + \kappa\nabla\Big(\mathcal{L}^1\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)A\cdot\mathcal{L}^1\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)B\Big)\end{pmatrix}.$$

形式上， $\boldsymbol{V}^\varepsilon$ 收敛到极限系统的解 $\boldsymbol{V}$

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{V} + \mathcal{Q}_1(\mathbf{v}, \boldsymbol{V}) + \mathcal{Q}_2(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}) - \dfrac{\nu}{2}\Delta\boldsymbol{V} = 0, \\ \boldsymbol{V}|_{t=0} = \boldsymbol{V}_0.\end{cases} \tag{1.8}$$

，其初始数据为 $\boldsymbol{V}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbb{Q}\boldsymbol{u}_0\end{pmatrix}$。该极限系统的完整推导见第5节。

我们的主要目标是解决 *Danchin* 关于环面情形的未解决问题。我们预期证明，对于任意大的、满足（1.4）的初始数据，只要a^ε，$\boldsymbol{u}^\varepsilon$就存在，且当$\mathbf{v}$ 存在时，$\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon$，$\boldsymbol{V}^\varepsilon$强收敛到（$\mathbf{v}$ $\boldsymbol{V}$）。$\boldsymbol{V}^\varepsilon$ 强收敛到 $\boldsymbol{V}$，结合表示式$\begin{pmatrix} a^\varepsilon \\ \mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\end{pmatrix}_- = \mathcal{L}\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)(\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V})_- + \mathcal{L}\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\boldsymbol{V}$，意味着（$a^\varepsilon$，$\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon$）弱收敛到零。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍基本记号并陈述主定理。第3节概述证明策略，讨论遇到的困难，并介绍解决这些困难所用的方法。第4 节给出定理2.1的完整推导。第5 节专门分析 $\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V}$和 $\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon$ –$\mathbf{v}$的衰减性质。第6节建立若干能量泛函之间的控制关系，并证明高频和中频的关键估计。最后，第7 节给出分析中必不可少的一系列基本引理。

本文中，字母 C 表示一个与 ε 无关的泛正正常数，其值可能随行而变化。我们用 $C(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示一个仅依赖于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的正常数。记号 $a_1 \lesssim a_2$ 表示 $a_1 \le Ca_2$，而 $a_1 \approx a_2$ 表示 $C^{-1}a_1 \le a_2 \le Ca_1$。对于两个巴拿赫空间 B_1 和 B_2，它们交集上的范数定义为 $\|\cdot\|_{B_1\cap B_2} = \|\cdot\|_{B_1} + \|\cdot\|_{B_2}$。

2 记号与主定理

2.1 记号

设 φ 是一个对称、非负的光滑鼓包函数，其支集包含于 $\{\xi\in\mathbb{R}:\ \frac{3}{4}\le|\xi|\le\frac{8}{3}\}$ 满足二进分割统一条件:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi(2^{-j}\xi)=1 \text{ for any } \xi\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

（参见 [1] 以了解此类函数的构造）。

对于 $g\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}_b^d)$、$k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^d$ 和 $j\in\mathbb{Z}$，我们定义:

$$\hat{g}_k:=\left\langle g,\frac{e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}\right\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{T}_b^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{T}_b^d)},$$

$$\Delta_j g:=\sum_{k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^d}\varphi(2^{-j}|k|)\hat{g}_k\frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}},\quad S_j g:=\frac{\hat{g}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}+\sum_{j'\le j-1}\Delta_{j'}g,$$

其中，$\mathcal{S}(\mathbb{T}_b^d)$ 和 $\mathcal{S}'(\mathbb{T}_b^d)$ 表示由光滑函数构成的空间，这些函数关于第 h 个变量是 $2\pi b_h$-周期的（$1\le h\le d$），以及它的对偶空间，$\widetilde{\mathbb{Z}}^d:=\mathbb{Z}/b_1\times\mathbb{Z}/b_2\times\cdots\times\mathbb{Z}/b_d$ 和 $|\mathbb{T}_b^d|:=2\pi b_1\cdot 2\pi b_2\cdots 2\pi b_d$。由此得到如下分解:

$$g=\sum_{k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^d}\hat{g}_k\frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}=\frac{\hat{g}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}+\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j g.$$

我们令 $j_b:=\max\{j\in\mathbb{Z}:\ 2^{-j}\cdot\min\{\frac{1}{b_1},\cdots,\frac{1}{b_d}\}\ge\frac{8}{3}\}$，则

$$\varphi(2^{-j}|k|)=0,\ \text{if } j\le j_b,\quad k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^d.$$

由此可得

$$\Delta_j g\equiv 0,\ \text{if } j\le j_b. \tag{2.1}$$

我们定义零均值子空间 $\mathcal{S}'(\mathbb{T}_b^d):=\{g\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}_b^d):\hat{g}_0=0\}$，其投影为 $\underline{g}:=g-\frac{g_0}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}$。

对于 $1\le p,r\le\infty$ 和 $s\in\mathbb{R}$，我们引入:

$$\int_{\mathbb{T}_b^d}g\ \mathrm{d}x:=\int_{[0,2\pi b_1)\times[0,2\pi b_2)\times\cdots\times[0,2\pi b_d)}g\ \mathrm{d}x,\quad \|g\|_{L^p(\mathbb{T}_b^d)}:=\left(\int_{\mathbb{T}_b^d}|g|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|g\|_{B^s_{p,r}}:=\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jsr}\|\Delta_j g\|^r_{L^p(\mathbb{T}_b^d)}+\left\|\frac{\hat{g}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}\right\|^r_{L^p(\mathbb{T}_b^d)}\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$B^s_{p,r}(\mathbb{T}_b^d):=\left\{g\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}_b^d):\|g\|_{B^s_{p,r}}<\infty\right\},\quad \underline{B}^s_{p,r}(\mathbb{T}_b^d):=B^s_{p,r}(\mathbb{T}_b^d)\cap\underline{\mathcal{S}}'(\mathbb{T}_b^d),$$

$$H^s(\mathbb{T}_b^d) := \left\{ g \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}_b^d) : \|g\|_{H^s} : \left(|\hat{g}_0|^2 + \sum_{k\neq 0} |k|^{2s} |\hat{g}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

显然，对于 $s \in \mathbb{R}$, $B^s_{2,2}(\mathbb{T}_b^d) = H^s(\mathbb{T}_b^d)$ 和 $\|g\|_{B^s_{2,2}} \approx \|g\|_{H^s}$。

对于 $1 \le q,\ p,\ r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $0 < T \le \infty$ 以及一个取值于 Besov 空间的时间依赖函数 Ψ，我们定义:

$$\|\Psi\|_{L^q_T(B^s_{p,r})} := \left\| \|\Psi(t,\cdot)\|_{B^s_{p,r}} \right\|_{L^q(0,T)},$$

$$\|\Psi\|_{\widetilde{L}^q_T(B^s_{p,r})} := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsr} \|\Delta_j \Psi\|^r_{L^q(0,T;L^p)} + \left\| \frac{\hat{\Psi}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}} \right\|^r_{L^q(0,T;L^p)} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

第二种范数最初由 Chemin 和 Lerner 在 [2] 中引入。相应的零均值版本定义如下:

$$\|\Psi\|_{L^q_T(\underline{B}^s_{p,r})} := \|\underline{\Psi}\|_{L^q_T(B^s_{p,r})}, \quad \|\Psi\|_{L^q_T(\underline{H}^s)} := \|\underline{\Psi}\|_{L^q_T(H^s)}, \quad \|\Psi\|_{\widetilde{L}^q_T(\underline{B}^s_{p,r})} := \|\underline{\Psi}\|_{\widetilde{L}^q_T(B^s_{p,r})}.$$

由闵可夫斯基不等式可得

$$\|\Psi\|_{L^q_T(B^s_{p,r})} \le \|\Psi\|_{\widetilde{L}^q_T(B^s_{p,r})}, \ \text{if} \ r \le q; \quad \|\Psi\|_{L^q_T(B^s_{p,r})} \ge \|\Psi\|_{\widetilde{L}^q_T(B^s_{p,r})}, \ \text{if} \ r \ge q. \tag{2.2}$$

根据（2.1），对于 $1 \le p,\ q,\ r_1,\ r_2 \le \infty$ 以及 $-\infty < s_1 < s_2 < +\infty$,

$$\max\{\|\Psi\|_{L^q_T(B^{s_1}_{p,r_1})}, \|\Psi\|_{\widetilde{L}^q_T(B^{s_1}_{p,r_1})}\} \lesssim \min\{\|\Psi\|_{L^q_T(B^{s_2}_{p,r_2})}, \|\Psi\|_{\widetilde{L}^q_T(B^{s_2}_{p,r_2})}\} \tag{2.3}$$

对于 $0 \le \zeta < \eta < \infty$，我们定义

$$\|g\|^{h;\eta}_{B^s_{p,r}} := \left(\sum_{2^j \ge \eta} 2^{jsr} \|\Delta_j g\|^r_{L^p(\mathbb{T}_b^d)} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad \|g\|^{m;\zeta,\eta}_{B^s_{p,r}} := \left(\sum_{\zeta \le 2^j < \eta} 2^{jsr} \|\Delta_j g\|^r_{L^p(\mathbb{T}_b^d)} \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\|g\|^{l;\zeta}_{B^s_{p,r}} := \left(\sum_{2^j < \zeta} 2^{jsr} \|\Delta_j g\|^r_{L^p(\mathbb{T}_b^d)} + \left\| \frac{\hat{g}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}} \right\|^r_{L^p(\mathbb{T}_b^d)} \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\|\Psi\|^{h;\eta}_{L^q_T(\dot{B}^s_{p,r})} := \left\| \|\Psi\|^{h;\eta}_{B^s_{p,r}} \right\|_{L^q(0,T)},$$

$$\|\Psi\|^{m;\zeta,\eta}_{L^q_T(B^s_{p,r})} := \left\| \|\Psi\|^{m;\zeta,\eta}_{B^s_{p,r}} \right\|_{L^q(0,T)}, \quad \|\Psi\|^{l;\zeta}_{L^q_T(B^s_{p,r})} := \left\| \|\Psi\|^{l;\zeta}_{B^s_{p,r}} \right\|_{L^q(0,T)},$$

$$\|\Psi\|^{h;\eta}_{\widetilde{L}^q_T(\dot{B}^s_{p,r})} := \left(\sum_{2^j \ge \eta} 2^{jsr} \|\Delta_j \Psi\|^r_{L^q(0,T;L^p)} \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\|\Psi\|^{m;\zeta,\eta}_{\widetilde{L}^q_T(\dot{B}^s_{p,r})} := \left(\sum_{\zeta\le 2^j<\eta} 2^{jsr}\|\Delta_j\Psi\|^r_{L^q(0,T;L^p)}\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\|\Psi\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^q_T(B^s_{p,r})} := \left(\sum_{2^j<\zeta} 2^{jsr}\|\Delta_j\Psi\|^r_{L^q(0,T;L^p)} + \left\|\frac{\hat{\Psi}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}\right\|^r_{L^q(0,T;L^p)}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

相应的零均值版本定义如下：

$$\|g\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^s_{p,r}} := \|\underline{g}\|^{l;\zeta}_{B^s_{p,r}},\quad \|\Psi\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^q_T(\underline{B}^s_{p,r})} := \|\underline{\Psi}\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^q_T(B^s_{p,r})}.$$

最后，我们引入 Bony抛物乘积分解。对于 $g,h\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^d_b)$，有

$$gh = T_gh + T_hg + R(g,h) + \frac{\hat{g}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}\cdot\frac{\hat{h}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}$$

其中

$$T_gh := \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-2}g\Delta_jh,\quad R(g,h) := \sum_{|j-j'|\le 2}\Delta_jg\Delta_{j'}h.$$

我们还定义 $T'_gh := T_hg + R(g,h)$。

以下几乎正交性质是众所周知的：

$$\Delta_{j'}\Delta_jg\equiv 0,\ \text{if}\ |j'-j|\ge 2,\quad \Delta_{j'}(S_{j-2}h\Delta_jg)\equiv 0,\ \text{if}\ |j'-j|\ge 3. \tag{2.4}$$

and

$$\Delta_{j''}(\Delta_jg\Delta_{j'}h)\equiv 0,\ \text{if}\ j''-j\ge 5,\ |j'-j|\le 2. \tag{2.5}$$

注 2.1 我们引入范数 $\|\cdot\|_{L^q_T(B^s_{p,r})}$、$\|\cdot\|_{\widetilde{L}^q_T(B^s_{p,r})}$ 和 $\|\cdot\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^q_T(B^s_{p,r})}$，主要目的是消除零模的影响。由其定义可知，这些范数满足以下关系：

$$\|\Psi\|_{L^q_T(\underline{B}^s_{p,r})} = \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsr}\|\Delta_j\Psi(\cdot)\|^r_{L^p(\mathbb{T}^d_b)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^q(0,T)},$$

$$\|\Psi\|_{\widetilde{L}^q_T(\underline{B}^s_{p,r})} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsr}\|\Delta_j\Psi\|^r_{L^q(0,T;L^p)}\right)^{\frac{1}{r}},\quad \|\Psi\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^q_T(\underline{B}^s_{p,r})} = \left(\sum_{2^j<\zeta} 2^{jsr}\|\Delta_j\Psi\|^r_{L^q(0,T;L^p)}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

2.2 主要定理

设 $0 < T \le \infty$，并设 B 为 Besov 空间。我们用 $C_T(B)$ 表示连续有界的 B-值函数空间，这些函数定义在 $[0,T]$ 上（当 $0 < T < \infty$ 时），以及在 $[0,\infty)$ 上（当 $T = \infty$ 时）。此外，我们定义 $\widetilde{C}_T(B) := C_T(B) \cap \widetilde{L}^\infty_T(B)$。根据 L 的定义，$(\mathrm{Ker}L)^\perp = \{(a, \nabla g) : a \in L^2(\mathbb{T}^d_b)\ \int_{\mathbb{T}^d_b} a\,\mathrm{d}x = 0$ 且 $g \in H^1(\mathbb{T}^d_b)\}$。我们的主要结果如下

定理2.1 设 $0 < T_0 \le \infty$, $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$. 考虑满足 (1.4) 的初始数据 $(a_0, \boldsymbol{u}_0)$，外力为 $f \in L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2\,1},(\mathbb{T}^d_b))$，使得

$$\mathbb{Q}f \in C_{T_0}(H^{-S}(\mathbb{T}^d_b)) \text{ and } \partial_t \mathbb{Q}f \in L^1_{T_0}(H^{-S}(\mathbb{T}^d_b)) \text{ for some } S > 0.$$

假设具有初始数据 $\mathbf{v}_0 = \mathbb{P}\boldsymbol{u}_0$ 且强迫项为 $h = \mathbb{P}f$ 的系统 (1.5) 存在解$\mathbf{v} \in \Big(\widetilde{C}_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2\,1},(\mathbb{T}^d_b)) \cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}+1}_{2\,1},(\mathbb{T}^d_b))\Big)^d$。那么：

1. **存在性：** 系统 (1.8) 的初始数据 $\boldsymbol{V}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbb{Q}\boldsymbol{u}_0 \end{pmatrix}$ 有解 $\boldsymbol{V} \in (KerL)^\perp \cap$

$$\Big(\widetilde{C}_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b)) \cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\Big)^{d+1}.$$

2. **一致存在性、一致能量估计和密度的一致有界性：** 存在一个 $\varepsilon_0(d, \mu, \nu, a_0, \boldsymbol{u}_0, \mathbf{v}\ \boldsymbol{V}, f) > 0$，使得对于任意 $\varepsilon \le \varepsilon_0$，系统 (1.3)都有唯一解 $(a^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon)$ 满足 $\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty((0,T_0)\times\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{2}$，并且

$$(a^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon) \in \widetilde{C}_{T_0}(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b)) \times \Big(\widetilde{C}_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b)) \cap L^1_{T_0}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\Big)^d,$$

满足以下估计：

$$\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|a^\varepsilon\|^{l;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \le C(d, \mu, \nu, \mathbf{v}, \boldsymbol{V}, f),$$

其中，正常数 η_0依赖于 d 和 ν，它是引理6.2中引入的常数。

3. **衰减估计：** 该解满足：

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\|\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})\cap L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}}{\tau_\theta(\varepsilon)} + \frac{\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mathbf{v}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1-\vartheta}_{2,1})}}{\varepsilon^{\frac{\theta}{1+\theta}}}\right) \le C(\theta, d, \mu, \nu, \mathbf{v}, \boldsymbol{V}, f),$$

其中 $\tau_\vartheta(\varepsilon)$ 关于 ε单调递增，而 $\tau_\vartheta(\varepsilon)$在 ε趋于零时趋于零[2]。

[2]Danchin [5] 指出 $\tau_\vartheta(\varepsilon)$ 可能趋于零，其速度慢于任何关于 ε 的幂，具体取决于周期参数向量 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_d)$。

4. 消失极限： 此外，我们有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\right)=0.$$

注 2.2 定理 *2.1* 的二维情形尤为重要。具体而言，假设 $(a_0,\boldsymbol{u}_0)$ 满足 (1.4) 且 $f\in L^1_\infty(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))$ 具有 $d=2$，那么根据 *[7]*，中定理 *6.3* 所建立的整体适定性结果，系统 (1.5) 存在整体解 $\mathbf{v}\in\left(\widetilde{C}_\infty(B^0_{2,1}(\mathbb{T}^2_b))\cap L^1_\infty(B^2_{2,1}(\mathbb{T}^2_b))\right)^2$。此外，在附加正则性假设下，

$$\mathbb{Q}f\in C_\infty(H^{-S}(\mathbb{T}^2_b))\ \textit{and}\ \partial_t\mathbb{Q}f\in L^1_\infty(H^{-S}(\mathbb{T}^2_b))\ \textit{for some}\ S>0,$$

我们还可以证明存在性、一致存在性、一致能量估计、密度的一致界、衰减估计和消失极限，其中 (d,T_0) 替换为 $(2,\infty)$。

Re注记 2.3 关于消失极限，我们希望强调两个关键发现[3]：

- *Danchin* *[5]* 针对具有临界正则性的小初始数据，证明了量 $\|\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1-\theta}_{2,1})\cap L^2_T(B^{\frac{d}{2}-\theta}_{2,1})}$，以及量

$$\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1-\theta}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1-\theta}_{2,1})},$$

  其中 $\vartheta>0$。因此，我们的结果在初始数据的大小和空间正则性两方面推广了 *Danchin* 的结果。

- 在全空间框架中，*Ogino* *[26]*最近针对具有临界正则性的小初始数据，证明了量 $\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}$ 的消失性质。然而，该性质对具有临界正则性的大初始数据是否成立仍未知。我们的结果在周期区域情形下对这一问题给出了肯定的回答。

注 *2.4* 尽管我们主要考虑与 ε 无关的初始数据和外力 $(a_0,\boldsymbol{u}_0,f)$，但我们的方法仍适用于依赖于 ε 的情形 $(a_0^\varepsilon,\boldsymbol{u}_0^\varepsilon,f^\varepsilon)$，只要它们满足某些收敛条件。具体而言，假设 $(a_0^\varepsilon,\boldsymbol{u}_0^\varepsilon,f^\varepsilon)$ 满足与定理*2.1*中 $(a_0,\boldsymbol{u}_0,f)$ 相同的假设，并且 $\boldsymbol{V}_0\in(KerL)^\perp\cap\left(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b)\right)^{d+1}$。再假设系统 *(1.5)* 在初始数据 $\boldsymbol{v}_0\in\left(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b)\right)^d$ 满足 $div\boldsymbol{v}_0=0$ 且外力 $h\in L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))$ 满足 $divh=0$ 的条件下，存在解 $\boldsymbol{v}\in\left(\widetilde{C}_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\right)^d$。此外，假设下列收敛条件成立：

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\|\mathbb{Q}f^\varepsilon\|_{L^\infty_{T_0}(H^{-S})\cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\partial_t\mathbb{Q}f^\varepsilon\|_{L^1_{T_0}(H^{-S})}\right)<\infty,$$

[3] Fujii [13] 也针对 a^ε，$\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon$和 $\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}$ 在全空间框架下建立了类似的消失极限结果。

$$\lim_{(\zeta,\varepsilon)\to(\infty,0)} \|\mathbb{Q}f^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\|a_0^\varepsilon\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|(a_0^\varepsilon, \mathbb{Q}\boldsymbol{u}_0^\varepsilon) - \boldsymbol{V}_0\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} + \|\mathbb{P}\boldsymbol{u}_0^\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} + \|\mathbb{P}f^\varepsilon - h\|_{L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} = 0$$

且对任意 $\theta \in (0, 1/2)$，

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\|(a_0^\varepsilon, \mathbb{Q}\boldsymbol{u}_0^\varepsilon) - \boldsymbol{V}_0\|_{H^{\frac{d}{2}-1-\theta}}}{\tau_\theta(\varepsilon)} + \frac{\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}_0^\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{B^{\frac{d}{2}-1-\theta}_{2,1}}}{\varepsilon^{\frac{\theta}{1+\theta}}} + \frac{\|\mathbb{P}f^\varepsilon - h\|_{L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1-\theta}_{2,1})}}{\varepsilon^{\frac{\theta}{1+\theta}}}\right) < \infty.$$

随后，存在性、一致存在性、一致能量估计、密度的一致界、衰减估计和消失极限均仍然成立。

3 证明策略与困难

定理 2.1 的证明依赖于两个基本要点：证明 $\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}$ 趋于零（当 $\varepsilon\to 0$ 时），并在 ε 和 T 中建立关于量 $X^\varepsilon(T) + P^\varepsilon(T)$ 的一致估计，其中

$$X^\varepsilon(T) := \varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|a^\varepsilon\|^{l;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})},$$

$$P^\varepsilon(T) := \|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}.$$

处理 $\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}$ 的一种自然方法是将其分解为两部分（见 Danchin [5]），即：

$$\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \le \varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|a^\varepsilon\|^{l;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|a^\varepsilon\|^{l;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}.$$

然而，由于初始数据较大，量 $\|a^\varepsilon\|^{l;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}$ 也会变大，这一使高低频分解失效。因此，我们采用 Fujii [13] 引入的高-中-低频分析框架。具体而言，对于任意 $0 < \zeta < \frac{\eta_0}{\varepsilon}$，我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} &\le \varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|a^\varepsilon\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|a^\varepsilon\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\ &\lesssim \varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|a^\varepsilon\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + \zeta\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\end{aligned}$$

这种分解的一个直观优点是，对于任意 $\delta > 0$，我们都可以选取足够大的 ζ 和足够小的 ε，使得

$$\varepsilon\|a_0\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|a_0\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} + \zeta\varepsilon \le \delta.$$

基于我们的分解策略，为了证明$^{\varepsilon\|a^\varepsilon\|}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2},\,1}_{2})}$的消失性质，我们必须研究以下量（见引理 6.2 和引理 6.3）：

$$\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|(a^\varepsilon,\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}.$$

基于上述分析，我们构造辅助量 $D^{\zeta,\,\varepsilon}(T)$[4]：$=[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\,h^{\varepsilon},\,m}(T)+[\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}]^{\zeta,}_{l^{\varepsilon}}(T)$，并要求其低频分量保持较小。因此，在本部分中，我们处理差变量 $\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}$和 $\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}$，其中 $\boldsymbol{V}$和 $\mathbf{v}$ 分别表示系统（1.8）和（1.5）的解。这里

$$\begin{aligned}[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(T):=&\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&+\|(a^\varepsilon,\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})},\end{aligned}$$

以及对于 $W\in\mathbb{R}^{d+1}$ 和 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^d$

$$[W,\boldsymbol{u}]^{\zeta,\varepsilon}_l(T):=\|W\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\boldsymbol{u}\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}.$$

为联系量 $D^{\zeta,\,\varepsilon}(T)$ 和 $X^\varepsilon(T)+P^\varepsilon(T)$，我们引入辅助量$Y^{\zeta,\,\varepsilon}(T):=[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\,h^{\varepsilon},\,m}(T)+[(a^\varepsilon,\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\ \mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,}_{l^{\varepsilon}}(T)$。由（4.7）可得

$$Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\lesssim D^{\zeta,\varepsilon}(T)+\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}.$$

此外，命题 4.3 表明

$$X^\varepsilon(T)+P^\varepsilon(T)\lesssim\|(a_0,\boldsymbol{u}_0)\|+f+\Big(Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\Big)^2+\Big(Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\Big)^3.$$

这两个不等式共同完成了 $D^{\zeta,\,\varepsilon}(T)$ 与 $X^\varepsilon(T)+P^\varepsilon(T)$ 之间的联系。

现在，证明量 $D^{\zeta,\,\varepsilon}(T)$ 足够小（当 ζ 和 ε 足够大时）在论证中占据了核心位置。由于声波的行为复杂，直接证明量 $\|\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}\|^{l;\zeta}_{\sim\,L^\infty}$ 足够小十分困难。

$$_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}.$$

为克服这一困难，我们采用一种间接方法，利用 $\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}$在低正则性空间中的衰减性质（这也是在时间变量中选择 L^2-范数而非 L^1-范数的原因）：

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}&\lesssim\zeta^{2\vartheta}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1-2\vartheta}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_T(B^{\frac{d}{2}-2\vartheta}_{2,1})}\\&\lesssim C(\theta)\zeta^{2\vartheta}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})\cap L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})},\end{aligned}\tag{3.1}$$

[4]Fujii [13] 引入了一个类似的量 $A^{\varepsilon,\,q^{\alpha},\,e}$，但高频、中频和低频部分使用了统一的变量。这项工作也启发我们构造量 $D^{\zeta,\,\varepsilon}(T)$

其中$\|\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})\cap L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}$关于$\varepsilon$的衰减性质在命题4.1 中得到建立，并且我们在第二个不等式处使用了(2.3)。同样的方法适用于 $\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}$，并且低正则性空间中的衰减性质在命题4.2中给出。

在分析 $[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^\zeta_{,\,h^\varepsilon,\,m}(T)$ 的过程中，关键任务之一是对形如 $\int_0^T\|fg\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\mathrm{d}t.$ 的非线性项建立相应的估计。在此过程中， f 与 g 之间的频率耦合引入了若干不良项。根据引理6.1，该积分满足如下估计：

$$\begin{aligned}\int_0^T\|fg\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\mathrm{d}t&\le\int_0^T\|T_fg\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\mathrm{d}t+\int_0^T\|T_gf\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\mathrm{d}t+\int_0^T\|R(f,g)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\mathrm{d}t\\&\le R_1+R_2+R_3,\end{aligned}$$

$$R_1:=\int_0^T\|f\|_{B^{s_1}_{p_1,\,r_1}}\|g\|^{h;\zeta_2}_{B^{s_2}_{p_2,\,r_2}}\mathrm{d}t,\quad R_2:=\int_0^T\|f\|^{h;\zeta_3}_{B^{s_3}_{p_3,\,r_3}}\|g\|_{B^{s_4}_{p_4,\,r_4}}\mathrm{d}t,\quad R_3:=\int_0^T\|f\|^{h;\zeta_5}_{B^{s_5}_{p_5,\,r_5}}\|g\|^{h;\zeta_6}_{B^{s_6}_{p_6,\,r_6}}\mathrm{d}t.$$

由于$\|f\|^{l;\zeta_1}_{B^{s_1}_{p_1},\,r_1}$和$\|g\|_{B^{s_4}_{p_4},\,r_4}$的数值较大， R_1 和 R_2 项会产生不利影响。值得注意的是，与 $\int_0^T\|T_fg\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^T\|T_gf\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\mathrm{d}t$ 相比， $\int_0^T\|R(f,g)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\mathrm{d}t$ 项可以得到更好的估计（即 $\int_0^T\|R(f,g)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\mathrm{d}t\le R_3$），这一结果多少有些出人意料。通过充分利用高—中—低频结构，我们对 R_1 和 R_2 项进行更精细的频率分解，从而在命题 4.4 中为 $[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^\zeta_{,\,h^\varepsilon,\,m}(T)$ 推导出合适的估计。进一步结合命题 4.1–4.2 给出的衰减性质，可以确认 $[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^\zeta_{,\,h^\varepsilon,\,m}(T)$ 足够小。

4 定理的完整证明2.1

我们将证明分为以下六个步骤，并在下文列出相关记号。

$$X:=\|\boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})},\quad X_0:=\|a_0\|^{l;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\varepsilon\|a_0\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\mathbb{Q}\boldsymbol{u}_0\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}},P_0:=\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}_0\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}},$$

$$\mathbb{Q}_f:=\|\mathbb{Q}f\|_{L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\mathbb{Q}f\|_{L^\infty_{T_0}(H^{-S})}+\|\partial_t\mathbb{Q}f\|_{L^1_{T_0}(H^{-S})},\quad \mathbb{Q}_f(0):=\|\mathbb{Q}f(0)\|_{H^{-S}}$$

$$P^\varepsilon(T):=\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})},\quad P:=\|\mathbf{v}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})},\quad \mathbb{P}_f:=\|\mathbb{P}f\|_{L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})},$$

$$\boldsymbol{Z}^\varepsilon_\vartheta(T):=\|\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})\cap L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})},\quad \boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T):=\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})\cap L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1-\vartheta}_{2,1})}.$$

第一步。存在空间 $\boldsymbol{V}$。 由于系统（1.5）存在一个解

$$\mathbf{v}\in\Big(\widetilde{C}_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\cap L^1_{T_0}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\Big)^d,\tag{4.1}$$

由 [5] 中的定理 8.2 可知，系统（1.8）存在一个解

$$\boldsymbol{V}\in(\mathrm{Ker}L)^{\perp}\cap\Big(\widetilde{C}_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\Big)^{d+1}. \tag{4.2}$$

第二步。 $\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}$的衰减性质。以下命题给出了这一结果，详细证明见小节 5.1。

命题 4.1 设 $0<T\le T_0$，$0<\vartheta<\frac{1}{2}$和 $0<\zeta<\frac{\eta_0}{\varepsilon}$。假设系统(1.3) 存在一个解 $(a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)$，满足 $\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)}\le\frac{1}{2}$，并且

$$(a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)\in\widetilde{C}_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\times\Big(\widetilde{C}_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\cap L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}(\mathbb{T}^d_b))\Big)^d, \tag{4.3}$$

于是有以下估计：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}^\varepsilon_\vartheta(T)\le&C(\vartheta,d,\mu,\nu)e^{C(\vartheta,d,\mu,\nu)(P^2+X^2)}\bigg(\Big(D^{\zeta,\varepsilon}(T)+\|\boldsymbol{V}\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\Big)\boldsymbol{Z}^\varepsilon_\vartheta(T)\\&+\boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T)(P+Y^{\zeta,\varepsilon}(T))+\widetilde{\tau}_\vartheta(\varepsilon)\times\Big(\mathbb{Q}_f(0)+X_0+\mathbb{Q}_f+(\mathbb{Q}_f)^2+X_0^2+P_0^2+(\mathbb{P}_f)^2\\&+Y^{\zeta,\varepsilon}(T)+X^2+P^2+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T)^2+X^3+P^3+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T)^3+X^4+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^4\Big)\bigg),\end{aligned}$$

其中，函数 $\widetilde{\tau}_\vartheta(\varepsilon)$ 关于 ε 单调递增，并满足 $\widetilde{\tau}_\vartheta(\varepsilon)\to0$，当 $\varepsilon\to0$ 时。

第三步。 $\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}$ 的衰减性质。以下命题给出了这一结果，详细证明见小节 5.2。

命题 4.2 设 $0<T\le T_0$、$0<\vartheta<\frac{1}{2}$ 和 $0<\zeta<\frac{\eta_0}{\varepsilon}$。假设系统 (1.3) 存在一个解 $(a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ 满足 (4.3)，且 $\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)}\le\frac{1}{2}$。则有如下估计：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T)\le&C(\vartheta,d,\mu,\nu)e^{C(\vartheta,d,\mu,\nu)(P+X^\varepsilon(T))}\bigg(\Big(D^{\zeta,\varepsilon}(T)+\|\mathbf{v}\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\Big)\boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T)+\varepsilon^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}\Big((X_0)^2\\&+(P_0)^2+(\mathbb{P}_f)^2+(\mathbb{Q}_f)^2+P^2+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2+P^3+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3+P^4+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^4\Big)\bigg).\end{aligned}$$

第四步。量 $Y^{\zeta,\varepsilon}(T)$ 与量 $X^\varepsilon(T)+P^\varepsilon(T)$之间的控制关系。这一结果将在以下命题中确立，并在第 6.1 小节给出详细证明

命题 4.3 设 $0<T\le T_0$和 $0<\zeta<\frac{\eta_0}{\varepsilon}$。假设系统 (1.3) 存在一个解 $(a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ 满足 (4.3)，且 $\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)}\le\frac{1}{2}$。则有以下估计：

$$X^\varepsilon(T)+P^\varepsilon(T)\le C(d,\mu,\nu)\Big(X_0+P_0+\mathbb{P}_f+\mathbb{Q}_f+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3\Big).$$

第五步。量 $[a^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(T)$ 的估计。 这一结果将在以下命题中确立，详细证明见第 6.2 节。

命题 4.4 设 $0 < T \le T_0$ 和 $0 < \zeta < \frac{\eta_0}{\varepsilon}$。假设系统 (1.3) 存在一个解 $(a^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon)$ 满足 (4.3)，其中 $\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{2}$。则有以下估计：

$$
\begin{aligned}
[a^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(T) \le & C(d,\mu,\nu) e^{C(d,\mu,\nu)(Y^{\zeta,\varepsilon}(T)+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2)} \Bigg(\varepsilon \|\boldsymbol{a}_0\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|(a_0,\boldsymbol{u}_0)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} \\
& + Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \max\{\frac{1}{\zeta}, \varepsilon, \zeta\varepsilon\} Y^{\zeta,\varepsilon}(T)[a^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(T) + \|f\|^{h;\zeta}_{L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \\
& + (\zeta\varepsilon)(Y^{\zeta,\varepsilon}(T) + (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2) + [\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V}, \mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mathbf{v}]^{\zeta,\varepsilon}_l(T) Y^{\zeta,\varepsilon}(T) \Bigg).
\end{aligned}
$$

第六步。证明结束。 综合命题 4.1-4.4 的结果，适当选取参数 ζ 和 ε，并通过自举论证完成证明。

证明： 利用 (4.1)、(4.2) 以及控制收敛定理，我们得到

$$
\lim_{\zeta\to\infty} \|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} = 0. \tag{4.4}
$$

存在一个小的 $\varepsilon^* > 0$，使得对任意 $\varepsilon \le \varepsilon^*$,

$$
\varepsilon\|a_0\|_{L^\infty} \le \frac{1}{8}, \quad \varepsilon\|a_0\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + X_0 + P_0 \le C_1(X+P), \tag{4.5}
$$

其中常数 C_1 与 ε 无关。此外，还存在一个常数 C_2，与 ζ, ε, T 无关，满足

$$
\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)} \le C_2\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}, \tag{4.6}
$$

$$
Y^{\zeta,\varepsilon}(T) \le C_2\Big(D^{\zeta,\varepsilon}(T) + \|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big), \tag{4.7}
$$

$$
[\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V}, \mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mathbf{v}]^{\zeta,\varepsilon}_l(T) \le C_2\zeta^{2\vartheta}(\boldsymbol{W}^\varepsilon_\theta(T) + \boldsymbol{Z}^\varepsilon_\theta(T)), \tag{4.8}
$$

其中（4.7）和（4.8）分别由引理5.1 和（3.1）推出。因此，在本节以下内容中，记号 $C \ge 1$ 表示命题4.1-4.4中引入的正常数。

Let

$$
\begin{aligned}
T^*_\varepsilon := \sup\Big\{ & 0 < T < \infty : \text{system (1.3) admits a solution } (a^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon) \text{ satisfying (4.3)} \\
& \text{with } \inf_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} 1 + \varepsilon a^\varepsilon(t,x) > 0\Big\}.
\end{aligned}
$$

现在我们继续选取适当的参数 ζ 和 $\varepsilon_\circ$ 为此，需要引入若干重要常数。定义

$$\begin{aligned}
&\tau_\theta(\varepsilon) := \max\{\widetilde{\tau}_\theta(\varepsilon),\ \varepsilon^{\frac{\theta}{1+\theta}}\},\\
&C_3 := (C_1+C_2)(X+P),\ \ C_4 := C\Big(C_3+\mathbb{P}_f+\mathbb{Q}_f+(2C_3)^2+(2C_3)^3\Big),\\
&C_5 := Ce^{C(P+C_4)}\Big((C_3)^2+(C_3)^2+(\mathbb{P}_f)^2+(\mathbb{Q}_f)^2+P^2+(2C_3)^2\\
&\qquad +P^3+(2C_3)^3+P^4+(2C_3)^4\Big)\Big),\\
&C_6 := Ce^{C(P^2+X^2)}\Big((P+2C_3)2C_5+\mathbb{Q}_f(0)+C_3+\mathbb{Q}_f+(\mathbb{Q}_f)^2+(C_3)^2+(C_3)^2+(\mathbb{P}_f)^2\\
&+2C_3+X^2+P^2+(2C_3)^2+X^3+P^3+(2C_3)^3+X^4+(2C_3)^4\Big),
\end{aligned}$$

其中常数 C_4、C_5 和 C_6 分别根据命题 4.3、命题 4.2以及命题4.1构造。

设 $\delta_0\le 1$ 为一个足够小的正常数，使得

$$C_2\delta_0\le\frac{C_3}{4},\ \ C_2\delta_0\le\frac{1}{4},\ \ Ce^{C(P^2+X^2)}3\delta_0\le\frac{1}{4},\ \ Ce^{C(P+C_4)}3\delta_0\le\frac{1}{4}. \tag{4.9}$$

由（4.4）可知，存在一个足够大的 $\zeta_0>0$ 使得

$$\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})\|^{h;\zeta_0}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\le\delta_0,\ \ Ce^{C(2C_3+(2C_3)^2)}\frac{1}{\zeta_0}2C_3\le\frac{1}{8}, \tag{4.10}$$

$$Ce^{C(2C_3+(2C_3)^2)}\Big(\|(a_0,\boldsymbol{u}_0)\|^{h;\zeta_0}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+2C_3\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})\|^{h;\frac{\zeta_0}{16}}_{\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|f\|^{h;\zeta_0}_{L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\Big)\le\frac{\delta_0}{8}, \tag{4.11}$$

现在我们选择一个足够小的 $\varepsilon_0<\min\{\varepsilon^*,\frac{\eta_0}{\zeta_0}\}$，使得

$$Ce^{C(2C_3+(2C_3)^2)}(\varepsilon_0+\varepsilon_0\zeta_0)2C_3\le\frac{1}{8}, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
&Ce^{C(2C_3+(2C_3)^2)}\Big(\varepsilon_0\|a_0\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon_0\zeta_0(2C_3+(2C_3)^2)+C_2(\zeta_0)^2(2C_5+2C_6)2C_3\tau_\theta(\varepsilon_0)\Big)\\
&+C_2(\zeta_0)^2(2C_5+2C_6)\tau_\theta(\varepsilon_0)\le\frac{\delta_0}{8}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

定义

$$\begin{aligned}
T^{**}_\varepsilon := \sup\Big\{0<T<T^*_\varepsilon:&Y^{\zeta_0,\varepsilon}(T)\le 2C_3,\ \ \boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T)\le 2C_5\varepsilon^{\frac{\theta}{1+\theta}},\\
&\boldsymbol{Z}^\varepsilon_\vartheta(T)\le 2C_6\tau_\theta(\varepsilon),\ \ D^{\zeta_0,\varepsilon}(T)\le 2\delta_0.\Big\}.
\end{aligned}$$

由（4.5）、（4.11）和（4.13），我们得到，对于任意 $\varepsilon\le\varepsilon_0$，$T^*_\varepsilon\ge T^{**}_\varepsilon>0$。我们断言，对于每个 $\varepsilon\le\varepsilon_0$，不等式 $T^*_\varepsilon\ge T_0$ 成立。我们采用反证法证明上述推论。假设该推论不成立，则有 $T^*_\varepsilon<T_0$。接着我们声称 $T^{**}_\varepsilon=T^*_\varepsilon$。令 $0<T<T^{**}_\varepsilon$。由（4.6）和（4.9），可得

$$\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)}\le C_2\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\le C_2D^{\zeta_0,\varepsilon}(T)\le\frac{1}{2}. \tag{4.14}$$

由（4.7）和（4.9），我们推得

$$Y^{\zeta_0,\varepsilon}(T) \le C_2 D^{\zeta_0,\varepsilon}(T) + C_2(P+X) \le \frac{3}{2}C_3. \tag{4.15}$$

利用命题4.1 和 (4.9)-(4.10)，可得

$$\boldsymbol{Z}^{\varepsilon}_{\vartheta}(T) \le Ce^{C(P^2+X^2)}3\delta_0 \boldsymbol{Z}^{\varepsilon}_{\vartheta}(T) + C_6\tau_\theta(\varepsilon) \le \frac{1}{4}\boldsymbol{Z}^{\varepsilon}_{\vartheta}(T) + C_6\tau_\theta(\varepsilon),$$

这意味着

$$\boldsymbol{Z}^{\varepsilon}_{\vartheta}(T) \le \frac{4}{3}C_6\tau_\theta(\varepsilon). \tag{4.16}$$

根据命题 4.2 和 (4.9)-(4.10)，可得

$$\boldsymbol{W}^{\varepsilon}_{\vartheta}(T) \le Ce^{C(P+C_4)}3\delta_0 \boldsymbol{W}^{\varepsilon}_{\vartheta}(T) + C_5\varepsilon^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}} \le \frac{1}{4}\boldsymbol{W}^{\varepsilon}_{\vartheta}(T) + C_5\varepsilon^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}},$$

由此可得

$$\boldsymbol{W}^{\varepsilon}_{\vartheta}(T) \le \frac{4}{3}C_5\varepsilon^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}. \tag{4.17}$$

由命题 4.4、(4.8) 和 (4.10)-(4.13)，我们推得

$$D^{\zeta_0,\varepsilon}(T) \le \frac{1}{4}D^{\zeta_0,\varepsilon}(T) + \frac{\delta_0}{4},$$

这意味着

$$D^{\zeta_0,\varepsilon}(T) \le \frac{\delta_0}{3}. \tag{4.18}$$

于是，(4.15)-(4.18) 意味着 $T^{**}_{\varepsilon} = T^{*}_{\varepsilon}$。利用命题 4.3 和 (4.14)，我们得到

$$\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\|_{L^1_{T^*_\varepsilon}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} < \infty, \quad \varepsilon\|a^{\varepsilon}\|_{L^\infty_{T^*_\varepsilon}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} < \infty, \inf_{(t,x)\in[0,T^*_\varepsilon)\times\mathbb{R}^d} 1+\varepsilon a^{\varepsilon}(t,x) \ge \frac{1}{2}.$$

延拓准则（参见 [9]中的定理 2）保证解 $(a^{\varepsilon},\ \boldsymbol{u}^{\varepsilon})$ 可以延拓至 T^*_{ε}之后。这与 T^*_{ε}的定义矛盾。因此，我们得到 $T^*_{\varepsilon} \ge T_0$，我们的论证也保证 $T^{**}_{\varepsilon} \ge T_0$。

接下来我们证明消失极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\|a^{\varepsilon}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\boldsymbol{V}^{\varepsilon}-\boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^{\varepsilon}-\mathbf{v}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\right) = 0. \tag{4.19}$$

对于任意 $\delta \le \delta_0$，我们首先选取一个足够大的 $\zeta_\delta > 0$，使得将 (4.10) 和 (4.11) 中的 (δ_0,ζ_0) 替换为 (δ,ζ_δ) 后，它们仍然成立（利用 (4.4)）

$$\|\boldsymbol{V}\|^{h;\zeta_\delta}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\mathbf{v}\|^{h;\zeta_\delta}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \le \frac{2}{3}\delta.$$

接着，我们选取一个足够小的 $\varepsilon_\delta < \min\{\varepsilon_0, \frac{\eta_0}{\zeta_\delta}\}$，使得将 (4.12) 和 (4.13) 中的 $(\delta_0, \zeta_0, \varepsilon_0)$ 替换为 $(\delta, \zeta_\delta, \varepsilon_\delta)$ 后，它们仍然成立。采用与前述分析完全类似的论证，我们可得，对于任意 $\varepsilon \le \varepsilon_\delta$,

$$D^{\zeta_\delta,\varepsilon}(T_0) \le \frac{\delta}{3}.$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mathbf{v}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\
&\quad \le C^*\Big(D^{\zeta,\varepsilon}(T_0) + \|\boldsymbol{V}\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\mathbf{v}\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big),
\end{aligned}$$

其中常数 C^* 与 ε无关，ζ。因此，对于任意 $\varepsilon \le \varepsilon_\delta$,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mathbf{v}\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\
&\quad \le (1+C^*)\Big(D^{\zeta_\delta,\varepsilon}(T_0) + \|\boldsymbol{V}\|^{h;\zeta_\delta}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\mathbf{v}\|^{h;\zeta_\delta}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big) \\
&\quad \le (1+C^*)\delta,
\end{aligned}$$

这意味着 (4.19)。□

5 $\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V}$与 $\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mathbf{v}$ 的衰减性质

我们回顾一下 $(\mathrm{Ker}L)^\perp = \{(a,\ \nabla g)\colon\ a \in L^2(\mathbb{T}^d_b)\ \int_{\mathbb{T}^d_b} a\,\mathrm{d}x = 0$并且 $g \in H^1(\mathbb{T}^d_b)\}$。按照 Danchin [5] 和 Masmoudi [25], , 我们引入如下希尔伯特基 $(\Phi^\alpha_k)_{\alpha\in\{-1,1\},\ k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^d\setminus\{0\}}$属于 $(\mathrm{Ker}L)^\perp$,

$$(\Phi^\alpha_k)(x) := c_d \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha sg(k)k/|k| \end{pmatrix} e^{ik\cdot x} \quad \text{with } c_d := (2|\mathbb{T}^d_b|)^{-\frac{1}{2}}.$$

记号 $sg(k)$ 表示 $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ 上的广义符号函数：当且仅当 k 的第一个非零分量为正时，其值为 1；其他情况下为 -1 。显然，$(\Phi^\alpha_k)(x)$ 是 L 关于特征值 $-i\alpha sg(k)|k|$ 的特征向量。

由于 $\mathcal{L}(\tau) = e^{-\tau L}$，对于函数 $A = \sum \widehat{A}^\alpha_k \Phi^\alpha_k \in (\mathrm{Ker}L)^\perp$，我们有$_{\alpha,\ k}$

$$\mathcal{L}(\tau)A = \sum_{\alpha,k} \widehat{A}^\alpha_k \Phi^\alpha_k e^{i\alpha sg(k)|k|\tau}.$$

如果 $\boldsymbol{u} = \sum_{l\in\widetilde{\mathbb{Z}}^d} \hat{\boldsymbol{u}}_l \frac{e^{il\cdot x}}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}} \in \left(\mathcal{S}'(\mathbb{T}^d_b)\right)^d$ 满足对任意 $l \in \widetilde{\mathbb{Z}}^d$ 都有 $l\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_l = 0$,

则可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^\varepsilon_1(\boldsymbol{u}, B) = \frac{i}{2\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}} \sum_{m,\gamma} \Bigg(\sum_{\alpha,k+l=m} \widehat{B}^\alpha_k k\cdot\widehat{\boldsymbol{u}}_l \left(1 + \frac{\alpha\gamma sg(k)sg(m)}{|k||m|}(l+m)\cdot k\right) \\
\times e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha sg(k)|k| - \gamma sg(m)|m|)} \Bigg) \Phi^\gamma_m.
\end{aligned}$$

我们还有

$$\mathcal{Q}_2^\varepsilon(A,B)=-\frac{ic_d}{2}\sum_{m,\gamma}\Bigg[\sum_{\alpha,\beta,k+l=m}sg(m)|m|\left(\frac{\widehat{A}_k^\alpha\widehat{B}_l^\beta+\widehat{B}_k^\alpha\widehat{A}_l^\beta}{2}\right)\times\left(\beta sg(l)sg(m)\frac{l\cdot m}{|l||m|}+\frac{\gamma\kappa}{2}+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}sg(k)sg(l)\frac{k\cdot l}{|k||l|}\right)\times e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha sg(k)|k|+\beta sg(l)|l|-\gamma sg(m)|m|)}\Bigg]\Phi_m^\gamma,$$

$$\mathcal{A}_2^\varepsilon(D)B=-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\gamma,k}\alpha\gamma|k|^2\widehat{B}_k^\alpha e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha-\gamma)sg(k)|k|}\Phi_k^\gamma.$$

Danchin [5] 计算了 $\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\boldsymbol{u}、B)$、$\mathcal{Q}_2^\varepsilon(A、B)$ 和 $\mathcal{A}_2^\varepsilon(D)B$的极限，其计算基于黎曼–勒贝格引理，即

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^T\chi(t)e^{i\frac{at}{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t=0,\ \text{if } 0<T\le\infty,a\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\chi\in L^1(0,T).$$

他证明了

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\boldsymbol{u},B)=\mathcal{Q}_1(\boldsymbol{u},B):=\frac{i}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}\sum_{\gamma,m}\left(\sum_{\substack{k+l=m\\ \alpha sg(k)|k|=\gamma sg(m)|m|}}\widehat{B}_k^\alpha\frac{k\cdot\widehat{\boldsymbol{u}}_l k\cdot m}{|k||m|}\right)\Phi_m^\gamma,$$

极限 $\lim_{\varepsilon\to0}\mathcal{Q}_2^\varepsilon(A,\ B)=\mathcal{Q}_2(A,\ B)$

$$:=-ic_d\frac{\kappa+3}{4}\sum_{\gamma,m}\gamma sg(m)|m|\left(\sum_{\substack{k+l=m\\ sg(k)|k|+sg(l)|l|=\gamma sg(m)|m|}}\widehat{A}_k^\gamma\widehat{B}_l^\gamma\right)\Phi_m^\gamma,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\mathcal{A}_2^\varepsilon(D)B=\frac{1}{2}\Delta B.$$

最后，我们注意到算子 $\mathcal{L}(\tau)$ 在 H^s 或 $B^s_{2,\ 1}$ 上是同构。此外，我们有：

引理 5.1 ([5]). 对所有 α、$s\in\mathbb{R}$ 和 $q\in[1,\infty]$，算子

$$\begin{cases}\mathcal{S}'((0,T)\times\mathbb{T}^{d+1})\to\mathcal{S}'((0,T)\times\mathbb{T}^{d+1})\\ u\mapsto\mathcal{L}(\alpha t)u\end{cases}$$

~ ~在 $L^q(0,T;H^s)$、$L^q(0,T;H^s)$、$L^q(0,T;B^s_{2,1})$ 以及 $L^q(0,T;B^s_{2,1})$上是同构。

由引理 5.1 以及 $Y^{\zeta,\varepsilon}(T)$ 的定义可知，对于 $q\in[2,\infty]$,

$$\begin{aligned}&\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|(a^\varepsilon,\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{\widetilde{L}^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\qquad+\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^q_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}-1+\frac{2}{q}}_{2,1})}+\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^q_T(B^{\frac{d}{2}-1+\frac{2}{q}}_{2,1})}\lesssim Y^{\zeta,\varepsilon}(T).\end{aligned}\tag{5.1}$$

5.1 命题的证明 4.1

令 $\boldsymbol{Z}^\varepsilon=\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{W}^\varepsilon=\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}$。将（1.8）从（1.7）中相减，得到

$$\partial_t\boldsymbol{Z}^\varepsilon+\mathcal{Q}^\varepsilon_1(\mathbf{v},\boldsymbol{Z}^\varepsilon)+2\mathcal{Q}^\varepsilon_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{Z}^\varepsilon)+\mathcal{Q}^\varepsilon_2(\boldsymbol{Z}^\varepsilon,\boldsymbol{Z}^\varepsilon)-\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{Z}^\varepsilon=F^\varepsilon+R^{1,\varepsilon}+R^{2,\varepsilon}+R^{3,\varepsilon}+S^\varepsilon\tag{5.2}$$

with

$$\begin{aligned}F^\varepsilon=&-\mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix}0\\ \mathbb{Q}(\mathbf{v}\cdot\nabla\boldsymbol{W}^\varepsilon+\boldsymbol{W}^\varepsilon\cdot\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon+I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon+a^\varepsilon\widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon)\nabla a^\varepsilon)\end{pmatrix}\\&-\mathcal{Q}^\varepsilon_1(\underline{\boldsymbol{W}^\varepsilon},\boldsymbol{V}^\varepsilon)-\mathcal{Q}^\varepsilon_1(\frac{\widehat{\boldsymbol{W}^\varepsilon}_0}{\sqrt{\mathbb{T}^d_b}},\boldsymbol{V}^\varepsilon)\end{aligned}$$

$$R^{1,\varepsilon}=\mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix}0\\ \mathbb{Q}f-\mathbb{Q}(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\end{pmatrix},$$

$$R^{2,\varepsilon}=(\mathcal{Q}_1-\mathcal{Q}^\varepsilon_1)(\mathbf{v},\boldsymbol{V}),\quad R^{3,\varepsilon}=(\mathcal{Q}_2-\mathcal{Q}^\varepsilon_2)(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}),\quad S^\varepsilon=\nu(\mathcal{A}^\varepsilon_2(D)-\Delta/2)\boldsymbol{V}^\varepsilon.$$

我们以（Φ^α_k）为基，将 $(0,\ \mathbb{Q}f)^T$和 $(0,\ \mathbb{Q}(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}))^T$分解 $\alpha\in\{-\ \ \widetilde{}_{1,1}\},k\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}$,

$$(0,\mathbb{Q}f)^T=\sum_{k,\alpha}\widehat{f}^\alpha_k\Phi^\alpha_k,\quad(0,\mathbb{Q}(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}))^T=\sum_{k,\alpha}\widehat{\Lambda}^\alpha_k\Phi^\alpha_k$$

then

$$R^{1,\varepsilon}=\sum_{k,\alpha}(\widehat{f}^\alpha_k-\widehat{\Lambda}^\alpha_k)e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\alpha sg(k)|k|}\Phi^\alpha_k.$$

我们还有

$$S^\varepsilon=\frac{\nu}{2}\sum_{k,\alpha}|k|^2\widehat{\boldsymbol{V}}^{\alpha,\varepsilon}_k e^{2\frac{i\alpha t}{\varepsilon}sg(k)|k|}\Phi^{-\alpha}_k.$$

对于 $\gamma\in\{-1,1\}$ 和 $m\in\widetilde{\mathbb{Z}}^d\backslash\{0\}$，我们引入

$$\mathcal{B}^{1,\gamma}_m=\{(\alpha,k,l)\in\{-1,1\}\times\widetilde{\mathbb{Z}}^d\times\widetilde{\mathbb{Z}}^d:\alpha sg(k)|k|\neq\gamma sg(m)|m|\text{ and }k+l=m\},$$

$\mathcal{B}^{2,\ \ \gamma}_{\ m}=\{(\alpha,\ \beta,\ k,\ l)\in\{-1,1\}^2\times\widetilde{\mathbb{Z}}^d\times\widetilde{\mathbb{Z}}^d:\alpha sg(k)|k|+\beta sg(l)|l|\neq\gamma sg(m)|m|$ 以及 $k+l=m\}$，然后

$$\begin{aligned}R^{2,\varepsilon}=-\frac{i}{2\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}&\sum_{m,\gamma,(\alpha,k,l)\in\mathcal{B}^{1,\gamma}_m}\widehat{\boldsymbol{V}}^\alpha_k k\cdot\widehat{\mathbf{v}}_l\left(1+\frac{\alpha\gamma sg(k)sg(m)}{|k||m|}(l+m)\cdot k\right)\\&\times e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha sg(k)|k|-\gamma sg(m)|m|)}\Phi^\gamma_m,\end{aligned}$$

$$R^{3,\varepsilon}=\frac{ic_d}{2}\sum_{m,\gamma,(\alpha,k,l)\in\mathcal{B}_m^{2,\gamma}} sg(m)|m|\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha}\widehat{\boldsymbol{V}}_l^{\beta}\times\left(\beta sg(l)sg(m)\frac{l\cdot m}{|l||m|}+\frac{\gamma\kappa}{2}+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}sg(k)sg(l)\frac{k\cdot l}{|k||l|}\right)\times e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha sg(k)|k|+\beta sg(l)|l|-\gamma sg(m)|m|)}\Phi_m^{\gamma}.$$

~我们遵循 Danchin [5] 和 Schochet [27]，并引入函数 $\phi_M^{\varepsilon}:=\boldsymbol{Z}^{\varepsilon}-\varepsilon R_M^{\varepsilon}$，其中$\widetilde{R}_M^{\varepsilon}:=\widetilde{R}^{1,}{}_M^{\varepsilon}+\widetilde{R}^{2,}{}_M^{\varepsilon}+\widetilde{R}^{3,}{}_M^{\varepsilon}+\widetilde{S}_M^{\varepsilon}$，$M>0$ 以及

$$\widetilde{S}_M^{\varepsilon}=-\frac{i}{4}\nu\sum_{\alpha,|k|\le M}\alpha sg(k)|k|\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha,\varepsilon}e^{2\frac{i\alpha t}{\varepsilon}sg(k)|k|}\Phi_k^{-\alpha},$$

$$\widetilde{R}_M^{1,\varepsilon}=i\sum_{\alpha,|k|\le M}\alpha sg(k)|k|^{-1}(\widehat{f}_k^{\alpha}-\widehat{\Lambda}_k^{\alpha})e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\alpha sg(k)|k|}\Phi_k^{\alpha}$$

$$\widetilde{R}_M^{2,\varepsilon}=-\frac{1}{2\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}\sum_{m,\gamma,(\alpha,k,l)\in\mathcal{B}_{m,M}^{1,\gamma}}\frac{\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha}k\cdot\widehat{\mathbf{v}}_l}{\alpha sg(k)|k|-\gamma sg(m)|m|}\left(1+\frac{\alpha\gamma sg(k)sg(m)}{|k||m|}(l+m)\cdot k\right)\times e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha sg(k)|k|-\gamma sg(m)|m|)}\Phi_m^{\gamma},$$

$$\widetilde{R}_M^{3,\varepsilon}=\frac{c_d}{2}\sum_{m,\gamma,(\alpha,k,l)\in\mathcal{B}_{m,M}^{2,\gamma}}\frac{\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha}\widehat{\boldsymbol{V}}_l^{\beta}}{\alpha sg(k)|k|+\beta sg(l)|l|-\gamma sg(m)|m|}sg(m)|m|\times\left(\beta sg(l)sg(m)\frac{l\cdot m}{|l||m|}+\frac{\gamma\kappa}{2}+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}sg(k)sg(l)\frac{k\cdot l}{|k||l|}\right)\times e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha sg(k)|k|+\beta sg(l)|l|-\gamma sg(m)|m|)}\Phi_m^{\gamma}.$$

这里，$\mathcal{B}_{m}^{1,\gamma}{}_M=\{\alpha\ k\ l\ \in\mathcal{B}_m^{1,\gamma}\quad |k|\le M\ |l|\le M\}$ $\mathcal{B}_{m}^{2,\gamma}{}_M=\{\alpha\ \beta\ k\ l\ \in\mathcal{B}_m^{2,\gamma}\quad |k|\le$,,: (,,) ,: ,以及 ,,: (,,,) ,: , $|l|\le M\}$。

我们用 R_M^{ε}“ R^{ε} 的低频部分”表示：$=R^{1,\varepsilon}+R^{2,\varepsilon}+R^{3,\varepsilon}+S^{\varepsilon}$，它是通过在求和中仅保留满足 $|k|,|l|\le M$ 的指标 (k,l) 得到的，而 $R^{\varepsilon,M}:=R^{\varepsilon}-R_M^{\varepsilon}$。显然

$$\varepsilon\partial_t\widetilde{R}_M^{\varepsilon}=R_M^{\varepsilon}+\varepsilon\widetilde{R}_M^{t,\varepsilon}\tag{5.3}$$

其中 $\widetilde{R}^{t,}{}_M^{\varepsilon}:=\widetilde{R}^{1,}{}_M^{t\ \varepsilon}+\widetilde{R}^{2,,}{}_M^{t\ \varepsilon}+\widetilde{R}^{3,,}{}_M^{t\ \varepsilon}+\widetilde{S}^{t,,}{}_M^{\varepsilon}$ 以及

$$\widetilde{S}_M^{t,\varepsilon}=-\frac{i}{4}\nu\sum_{\alpha,|k|\le M}\alpha sg(k)|k|\partial_t\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha,\varepsilon}e^{2\frac{i\alpha t}{\varepsilon}sg(k)|k|}\Phi_k^{-\alpha},$$

$$\widetilde{R}_M^{1,t,\varepsilon}=i\sum_{\alpha,|k|\le M}\alpha sg(k)|k|^{-1}(\partial_t\widehat{f}_k^{\alpha}-\partial_t\widehat{\Lambda}_k^{\alpha})e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\alpha sg(k)|k|}\Phi_k^{\alpha}$$

$$\widetilde{R}^{2,t,\varepsilon}=-\frac{1}{2\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}\sum_{m,\gamma,(\alpha,k,l)\in\mathcal{B}_{m,M}^{1,\gamma}}\frac{\partial_t(\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha}k\cdot\widehat{\mathbf{v}}_l)}{\alpha sg(k)|k|-\gamma sg(m)|m|}\left(1+\frac{\alpha\gamma sg(k)sg(m)}{|k||m|}(l+m)\cdot k\right)\times e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha sg(k)|k|-\gamma sg(m)|m|)}\Phi_m^{\gamma},$$

$$\widetilde{R}^{3,t,\varepsilon}=\frac{c_d}{2}\sum_{m,\gamma,(\alpha,k,l)\in\mathcal{B}_{m,M}^{2,\gamma}}\frac{\partial_t(\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha}\widehat{\boldsymbol{V}}_l^{\beta})}{\alpha sg(k)|k|+\beta sg(l)|l|-\gamma sg(m)|m|}sg(m)|m|\times\left(\beta sg(l)sg(m)\frac{l\cdot m}{|l||m|}+\frac{\gamma\kappa}{2}+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}sg(k)sg(l)\frac{k\cdot l}{|k||l|}\right)\times e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha sg(k)|k|+\beta sg(l)|l|-\gamma sg(m)|m|)}\Phi_m^{\gamma}.$$

由式（5.2）和式（5.3），我们得到

$$\begin{aligned}&\partial_t\phi_M^{\varepsilon}+\breve{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\underline{\mathbf{v}},\phi_M^{\varepsilon})+\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\underline{\mathbf{v}},\phi_M^{\varepsilon})+\mathcal{Q}_1^{\varepsilon}(\frac{\widehat{\mathbf{v}}_0}{\sqrt{\mathbb{T}_b^d}},\phi_M^{\varepsilon})+2\mathcal{Q}_2^{\varepsilon}(\boldsymbol{V},\phi_M^{\varepsilon})-\frac{\nu}{2}\Delta\phi_M^{\varepsilon}\\&=R^{\varepsilon,M}-\varepsilon\left(\breve{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\mathbf{v},\widetilde{R}_M^{\varepsilon})+\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\mathbf{v},\widetilde{R}_M^{\varepsilon})+2\mathcal{Q}_2^{\varepsilon}(\boldsymbol{V},\widetilde{R}_M^{\varepsilon})-\frac{\nu}{2}\Delta\widetilde{R}_M^{\varepsilon}+\widetilde{R}_M^{t,\varepsilon}\right)\\&\quad-\mathcal{Q}_2^{\varepsilon}(z^{\varepsilon},z^{\varepsilon})+F^{\varepsilon},\end{aligned}\tag{5.4}$$

其中

$$\breve{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{u},B):=\mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix}\operatorname{div}\left(\boldsymbol{u}\mathcal{L}^1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)B\right)\\ \mathbb{Q}\operatorname{div}\left(\boldsymbol{u}\otimes\mathcal{L}^2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)B\right)\end{pmatrix},\quad\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{u},B):=\mathcal{Q}_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{u},B)-\breve{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{u},B).$$

由于 $\mathbf{v}\in\left(F_{T_0}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{T}_b^d)\right)^d$，由插值可推得

$$\mathbf{v}\in\widetilde{L}_{T_0}^2(\underline{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d))\quad(rather\quad than\quad\mathbf{v}\in\widetilde{L}_{T_0}^2(B_{2,1}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d))),\tag{5.5}$$

其中 $\widetilde{L}_{T_0}^2(\underline{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)):=\{f:\|f\|_{\widetilde{L}_T^2(B_{2,1}^{\frac{d}{2}})}<\infty\}$ 且 $\widetilde{L}_{T_0}^2(B_{2,1}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)):=\{f:\|f\|_{\widetilde{L}_T^2(B_{2,1}^{\frac{d}{2}})}<\infty\}$。

Du 据式 (5.5)，我们将 $\mathcal{Q}_1^{\varepsilon}(\mathbf{v}\ \phi_M^{\varepsilon})+\mathcal{Q}_1^{\varepsilon}(\mathbf{v}\ \phi_M^{\varepsilon})$ 分解为式 (5.4) 中的三个分量如下 s:

$$\begin{aligned}\breve{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\mathbf{v},\phi_M^{\varepsilon})+\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\mathbf{v},\phi_M^{\varepsilon})&=\breve{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\underline{\mathbf{v}},\phi_M^{\varepsilon})+\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\underline{\mathbf{v}},\phi_M^{\varepsilon})+\breve{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\frac{\widehat{\mathbf{v}}_0}{\sqrt{\mathbb{T}_b^d}},\phi_M^{\varepsilon})+\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\frac{\widehat{\mathbf{v}}_0}{\sqrt{\mathbb{T}_b^d}},\phi_M^{\varepsilon})\\&=\breve{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\underline{\mathbf{v}},\phi_M^{\varepsilon})+\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\underline{\mathbf{v}},\phi_M^{\varepsilon})+\mathcal{Q}_1^{\varepsilon}(\frac{\widehat{\mathbf{v}}_0}{\sqrt{\mathbb{T}_b^d}},\phi_M^{\varepsilon}).\end{aligned}$$

经过直接但繁琐的计算，我们发现，[5] 对于任意 $\varepsilon,\ M>0$,

$$\phi_M^{\varepsilon}\text{ is real-valued and }\mathcal{Q}_1^{\varepsilon}(\frac{\widehat{\mathbf{v}}_0}{\sqrt{\mathbb{T}_b^d}},\phi_M^{\varepsilon})=\mathcal{Q}_1(\frac{\widehat{\mathbf{v}}_0}{\sqrt{\mathbb{T}_b^d}},\phi_M^{\varepsilon}).\tag{5.6}$$

[5]对于定义在 $\mathbb{T}_b^d$ 上的函数 f，当且仅当对任意 $k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^d$，$\widehat{f}_k=\widehat{f}_{-k}$ 为实值。

我们回顾 [5], 中建立的消失积分性质，该性质指出，若 $\boldsymbol{V}$是一个实值函数且 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$，则

$$\int_{\mathbb{T}_b^d}\Delta_j\mathcal{Q}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{V})\cdot\Delta_j\boldsymbol{V}dx=0 \text{ for any } j\in\mathbb{Z}. \tag{5.7}$$

通过采用命题 4.1 中的证明技巧 [5], 并结合（5.6）-（5.7）和（7.1）-（7.3），我们得到以下估计：

$$\begin{aligned}
&\|\phi_M^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}+\|\phi_M^\varepsilon\|_{L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}\\
&\lesssim e^{C(\|\underline{\mathbf{v}}\|^2_{L_T^2(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\boldsymbol{V}\|^2_{L_T^2(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})})}\Big(\|R^{\varepsilon,M}\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})+L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}+\|\mathcal{Q}_2^\varepsilon(\boldsymbol{Z}^\varepsilon,\boldsymbol{Z}^\varepsilon)\|_{L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\\
&\quad+\|F^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})+L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}+\varepsilon\Big(\|\widetilde{R}_M^\varepsilon(0)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}}+\|\widetilde{\mathcal{Q}}_1^\varepsilon(\mathbf{v},\tilde{R}_M^\varepsilon)\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\\
&\quad+\|\widetilde{R}_M^{t,\varepsilon}\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})\cap L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}+\|\check{\mathcal{Q}}_1^\varepsilon(\mathbf{v},\widetilde{R}_M^\varepsilon)\|_{L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\\
&\quad+\|\mathcal{Q}_2^\varepsilon(\boldsymbol{V},\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}+\|\Delta\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\Big)\Big)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

现在我们证明 ϕ_M^ε 与 $\boldsymbol{Z}^\varepsilon$ 之间的差异很小。因此，我们需要估计$\sim\|R_M^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})\cap L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}$。我们声称 _

$$\|\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})\cap L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}\le C_M(Q_f+Y^{\zeta,\varepsilon}(T)+X^2+P^2), \tag{5.9}$$

$$\|\widetilde{R}_M^\varepsilon(0)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}}\le C_M(Q_f(0)+X_0+X_0^2+P_0^2), \tag{5.10}$$

其中， C_M 表示关于 M 的单调递增正函数，后文将对此作出精确定义。首先，我们给出一些截断估计。对于任意取值于 $\mathcal{S}'(\mathbb{T}_b^d)$的时间函数 Ψ ，任意 $g\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}_b^d)$、 $q\in[1,\infty]$、 $s\in\mathbb{R}$、 $r\in\{1,2\}$和 $M\ge1$, $\sigma>0$，我们有

$$\|\Psi_M\|_{\widetilde{L}_T^q(H^s)}\lesssim M^\sigma\|\Psi\|_{\widetilde{L}_T^q(H^{s-\sigma})},\quad \|\Psi^M\|_{\widetilde{L}_T^q(H^s)}\lesssim M^{-\sigma}\|\Psi\|_{\widetilde{L}_T^q(H^{s+\sigma})}, \tag{5.11}$$

$$\|g_M\|_{B^s_{2,r}}\lesssim M^\sigma\|g\|_{B^{s-\sigma}_{2,r}},\qquad \|g^M\|_{B^s_{2,r}}\lesssim M^{-\sigma}\|g\|_{B^{s+\sigma}_{2,r}}, \tag{5.12}$$

$$\|\mathcal{F}g_M\|_{l^1(\widetilde{\mathbb{Z}}^d)}\lesssim M^\sigma\|g\|_{H^{\frac{d}{2}-\sigma}},\qquad \|\mathcal{F}g^M\|_{l^1(\widetilde{\mathbb{Z}}^d)}\lesssim M^{-\sigma}\|g\|_{H^{\frac{d}{2}+\sigma}}, \tag{5.13}$$

其中

$$f_M:=\sum_{|k|\le M}\hat{f}_k\frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}},\quad f^M:=\sum_{|k|>M}\hat{f}_k\frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{|\mathbb{T}_b^d|}}.$$

接下来，我们逐项估计 $\widetilde{S}_M^\varepsilon$， $\widetilde{R}^{1,\varepsilon}_M$， $\widetilde{R}^{2,\varepsilon}_M$， $\widetilde{R}^{3,\varepsilon}_M$。由式（5.11）-（5.12），

$$\|\widetilde{S}_M^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})\cap L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}\lesssim M^{1-\vartheta}Y^{\zeta,\varepsilon}(T), \tag{5.14}$$

$$\|\widetilde{S}_M^{\varepsilon}(0)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}} \lesssim M^{1-\vartheta} X_0. \tag{5.15}$$

回忆一下， $\mathbb{Q}f \in C_{T_0}(H^{-S}) \cap L^1_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$ 通过插值可得， $\mathbb{Q}f \in L^2_{T_0}(H^{\frac{\frac{d}{2}-1-S}{2}})$。由式（2.3）和式（5.11），可得

$$\begin{aligned}\|\widetilde{R}_M^{1,\varepsilon}\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})} &\lesssim M^{\frac{\frac{d}{2}+S-2\vartheta+1}{2}} \|\mathbb{Q}f\|_{L^2_T(H^{\frac{\frac{d}{2}-1-S}{2}-1})} + M^{1-\vartheta}\|\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{H}^{\frac{d}{2}-1})} \\ &\lesssim M^{\frac{\frac{d}{2}+S-2\vartheta+1}{2}} \mathbb{Q}f + M^{1-\vartheta}P^2,\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{R}_M^{1,\varepsilon}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})} &\lesssim M^{\frac{d}{2}+S-1}\|\mathbb{Q}f\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{-S-\vartheta-1})} + M\|\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\|_{L^\infty_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})} \\ &\lesssim M^{\frac{d}{2}+S-1}\mathbb{Q}f + MP^2,\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\|\widetilde{R}_M^{1,\varepsilon}(0)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}} \lesssim M^{\frac{d}{2}+S-1}\mathbb{Q}f(0) + MP_0^2(T), \tag{5.18}$$

其中，空间范数 $B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty}$ 在（5.17）中特别引入，旨在统一处理 $d=2$ 和 $d>2$这两种情况。

接下来我们转而估计 $\widetilde{R}^{2,\varepsilon}_M, \widetilde{R}^{3,\varepsilon}_M$ 并引入记号

$$C_M^1 := \max_{\substack{|m|\le 2M,\gamma\in\{-1,1\}\\(\alpha,k,l)\in\mathcal{B}^{1,\gamma}_{m,M}}} |\alpha sg(k)|k| - \gamma sg(m)|m||^{-1}, \tag{5.19}$$

$$C_M^2 := \max_{\substack{|m|\le 2M,\gamma\in\{-1,1\}\\(\alpha,\beta,k,l)\in\mathcal{B}^{2,\gamma}_{m,M}}} |\alpha sg(k)|k| + \beta sg(l)|l| - \gamma sg(m)|m||^{-1}. \tag{5.20}$$

注意到 $\mathrm{div}\mathbf{v}=0$，我们有 $l\cdot\hat{\mathbf{v}}_l = 0$ 对所有 $l\in\widetilde{\mathbb{Z}}^d$均成立。因此 $\widetilde{R}^{2,\varepsilon}_M$ 可改写为

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_M^{2,\varepsilon} = -\frac{1}{2\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}} \sum_{m,\gamma,(\alpha,k,l)\in\mathcal{B}^{1,\gamma}_{m,M}} &\frac{\alpha\gamma sg(k)sg(m)\widehat{\boldsymbol{V}}^{\alpha}_k}{\alpha sg(k)|k| - \gamma sg(m)|m|} \\ &\times\left[\frac{m\cdot k}{|k||m|}k\cdot\hat{\mathbf{v}}_l + m\cdot\hat{\mathbf{v}}_l\left(\alpha\gamma sg(k)sg(m) + \frac{l\cdot k}{|k||m|}\right)\right] \\ &\times e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\alpha sg(k)|k| - \gamma sg(m)|m|)}\Phi^{\gamma}_m.\end{aligned}$$

由（2.3）、（5.12）-（5.13）以及引理 7.2，

$$\|\widetilde{R}_M^{2,\varepsilon}\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})} \lesssim \|\widetilde{R}_M^{2,\varepsilon}\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}})} \lesssim C_M^1 M^2 \|\boldsymbol{V}\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}})\cap L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1})}\|\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{H}^{\frac{d}{2}})\cap L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1})},$$

$$\|\widetilde{R}_M^{2,\varepsilon}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})} \lesssim \|\widetilde{R}_M^{2,\varepsilon}\|_{L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1})} \lesssim C_M^1 M^{2+2\vartheta} \|\boldsymbol{V}\|_{L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}\|\mathbf{v}\|_{L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})},$$

$$\|\widetilde{R}_M^{2,\varepsilon}(0)\|_{H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}} \lesssim C_M^1 M^{2+2\vartheta} X_0 P_0. \tag{5.21}$$

可得

$$\|\widetilde{R}_M^{2,\varepsilon}\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})\cap L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})} \lesssim C_M^1 M^{2+2\vartheta} XP. \tag{5.22}$$

类似的论证可得

$$\|\widetilde{R}_M^{3,\varepsilon}\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})\cap L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})} \lesssim C_M^1 M^{2+2\vartheta} X^2, \tag{5.23}$$

$$\|\widetilde{R}_M^{3,\varepsilon}(0)\|_{H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}} \lesssim C_M^1 M^{2+2\vartheta} X_0^2. \tag{5.24}$$

定义

$$C_M := C\max\{M, M^{\frac{\frac{d}{2}+S-2\vartheta+1}{2}}, M^{\frac{d}{2}+S-1}, (C_M^1+C_M^2)M^{2+2\vartheta}\}. \tag{5.25}$$

接着，由5.9）和（5.10）可由（5.14）-（5.18）和（5.21）-（5.24）推出。由（5.9）和（5.10）可得

$$\|\phi_M^\varepsilon - \boldsymbol{Z}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})\cap L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})} \le \varepsilon C_M\left(\mathbb{Q}_f + Y^{\zeta,\varepsilon}(T) + X^2 + P^2\right), \tag{5.26}$$

$$\|\phi_M^\varepsilon(0)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}} \le \varepsilon C_M\left(\mathbb{Q}_f(0) + X_0 + X_0^2 + P_0^2\right). \tag{5.27}$$

现在需要估计（5.8）右端。从（5.9）可得

$$\|\Delta\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})} \lesssim C_M\left(\mathbb{Q}_f + Y^{\zeta,\varepsilon}(T) + X^2 + P^2\right). \tag{5.28}$$

由引理5.1 和（7.3），可推得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}_2^\varepsilon(\boldsymbol{Z}^\varepsilon, \boldsymbol{Z}^\varepsilon)\|_{L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})} &\lesssim \|\boldsymbol{Z}^\varepsilon\|_{L_T^2(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{Z}^\varepsilon\|_{L_T^\infty(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\\ &\lesssim \left(D^{\zeta,\varepsilon}(T) + \|\boldsymbol{V}\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^2_{T_0}(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\right)\boldsymbol{Z}^\varepsilon_\vartheta(T).\end{aligned} \tag{5.29}$$

R^ε的M估计。

由（5.11）-（5.12），可得

$$\|S^{\varepsilon,M}\|_{L_T^2(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})} \lesssim M^{-\vartheta}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L_T^2(H^{\frac{d}{2}})} \lesssim M^{-\vartheta}Y^{\zeta,\varepsilon}(T). \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}\|R^{1,\varepsilon,M}\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})} &\lesssim M^{-\vartheta}\left(\|\mathbb{Q}f\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{\frac{d}{2}-1})} + \|\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{\frac{d}{2}-1})}\right)\\ &\lesssim M^{-\vartheta}\left(\mathbb{Q}_f + P^2\right).\end{aligned} \tag{5.31}$$

注意，

$$R^{2,\varepsilon,M} = (\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_1^\varepsilon)(\mathbf{v}, \boldsymbol{V}^M) + (\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_1^\varepsilon)(\mathbf{v}^M, \boldsymbol{V}_M).$$

根据 $\mathcal{Q}_1^\varepsilon$ 和（5.13），

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\mathbf{v},\boldsymbol{V}^M)\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}&\lesssim\|(\mathbf{v}\nabla\mathcal{L}^1(\frac{t}{\varepsilon})\boldsymbol{V}^M,\mathbf{v}\cdot\nabla\mathcal{L}^2(\frac{t}{\varepsilon})\boldsymbol{V}^M,\mathcal{L}^2(\frac{t}{\varepsilon})\boldsymbol{V}^M\nabla\mathbf{v})\|_{L^1_T(\underline{H}^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\\&\lesssim\|\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})\cap L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^M\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})\cap L^1_T(H^{\frac{d}{2}+1-\vartheta})}\\&\lesssim M^{-\vartheta}XP.\end{aligned}\tag{5.32}$$

同样,

$$\|\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\mathbf{v}^M,\boldsymbol{V}_M)\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim M^{-\vartheta}XP.\tag{5.33}$$

利用（5.12）-（5.13）以及（7.4），

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}_1(\mathbf{v},V^M)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}}&\lesssim\|\boldsymbol{V}^M\|_{H^{\frac{d}{2}-\frac{\vartheta}{2}}}\||k|^{-\frac{\vartheta}{2}}\mathcal{F}\underline{\mathbf{v}}\|_{l^1(\widetilde{\mathbb{Z}}^d)}+|\widehat{\mathbf{v}}_0|\|\boldsymbol{V}^M\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta}}\\&\lesssim M^{-\frac{\vartheta}{2}}\|\boldsymbol{V}\|_{H^{\frac{d}{2}}}\|\underline{\mathbf{v}}\|_{H^{\frac{d}{2}}}+M^{-\vartheta}\|\boldsymbol{V}\|_{H^{\frac{d}{2}+1}}\|\mathbf{v}\|_{H^{\frac{d}{2}-1}},\end{aligned}\tag{5.34}$$

$$\|\mathcal{Q}_1(\mathbf{v}^M,V_M)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}}\lesssim\|\boldsymbol{V}_M\|_{H^{\frac{d}{2}}}\||k|^{-\vartheta}\mathcal{F}\mathbf{v}^M\|_{l^1(\widetilde{\mathbb{Z}}^d)}\lesssim M^{-\vartheta}\|\boldsymbol{V}\|_{H^{\frac{d}{2}}}\|\underline{\mathbf{v}}\|_{H^{\frac{d}{2}}}.\tag{5.35}$$

于是（5.32）-（5.35）推出

$$\|R^{2,\varepsilon,M}\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim M^{-\frac{\vartheta}{2}}XP.\tag{5.36}$$

我们还注意到

$$R^{2,\varepsilon,M}=(\mathcal{Q}_2-\mathcal{Q}_2^\varepsilon)(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^M)+(\mathcal{Q}_2-\mathcal{Q}_2^\varepsilon)(\boldsymbol{V}^M,\boldsymbol{V}_M).$$

与（5.32）和（5.33）类似,

$$\|\Big(\mathcal{Q}_2^\varepsilon(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^M),\mathcal{Q}_2^\varepsilon(\boldsymbol{V}^M,\boldsymbol{V}_M)\Big)\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\lesssim M^{-\vartheta}\|\boldsymbol{V}\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.\tag{5.37}$$

由 (2.3), (5.12) 和 (7.5)-(7.6),

$$\|\mathcal{Q}_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^M)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2}}\lesssim\|\boldsymbol{V}\|_{B^{\frac{1}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{V}^M\|_{B^{\frac{d}{2}-1-\theta}_{2,1}}\lesssim M^{-\theta}\|\boldsymbol{V}\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{V}\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}},\ \text{if}\quad\frac{1}{2}<\frac{d}{2}-\theta<\frac{3}{2},$$

and

$$\|\mathcal{Q}_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^M)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2}}\lesssim\|\boldsymbol{V}\|_{B^{\frac{d}{2}-1-\theta}_{2,1}}\|\boldsymbol{V}^M\|_{B^{\frac{d}{2}-1-\theta}_{2,1}}\lesssim M^{-\theta}\|\boldsymbol{V}\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{V}\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}},\ \text{if}\quad\frac{d}{2}-\theta\geq\frac{3}{2}.$$

因此

$$\|\Big(\mathcal{Q}_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^M),\mathcal{Q}_2(\boldsymbol{V}^M,\boldsymbol{V}_M)\Big)\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\lesssim M^{-\vartheta}\|\boldsymbol{V}\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.\tag{5.38}$$

于是（5.37）和（5.38）可得

$$\begin{aligned}\|R^{3,\varepsilon,M}\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}&\lesssim M^{-\vartheta}\|\boldsymbol{V}\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\lesssim M^{-\vartheta}X^2.\end{aligned}\tag{5.39}$$

我们得出结论:

$$\|R^{\varepsilon,M}\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})+L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}\lesssim M^{-\frac{\vartheta}{2}}\left(\mathbb{Q}_f+Y^{\zeta,\varepsilon}(T)+X^2+P^2\right). \tag{5.40}$$

对 F^ε 的估计。

由引理5.1，我们有

$$\begin{aligned}\|F^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})+L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\lesssim&\|\mathbf{v}\cdot\nabla\boldsymbol{W}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}+\|\boldsymbol{W}^\varepsilon\cdot\nabla\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\\&+\|I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}+\|a^\varepsilon\widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon)\nabla a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\\&+\|\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\underline{\boldsymbol{W}^\varepsilon},\boldsymbol{V}^\varepsilon)\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}+\|\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\frac{\widehat{\boldsymbol{W}^\varepsilon}_0}{\sqrt{\mathbb{T}^d_b}},\boldsymbol{V}^\varepsilon)\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\end{aligned} \tag{5.41}$$

显然,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\cdot\nabla\boldsymbol{W}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim&\|\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})\cap L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{W}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}-\vartheta}_{2,1})\cap L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1-\vartheta}_{2,1})}\\\lesssim&P\boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T)\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\|\boldsymbol{W}^\varepsilon\cdot\nabla\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\boldsymbol{W}^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}_{2,1})}\lesssim Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T), \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}\|I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim&\|\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}+1-\vartheta}_{2,1}}\|_{L^1(0,T)}\\\lesssim&\varepsilon^\vartheta\left(\|\varepsilon a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\beta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{l;\frac{\beta_0}{\varepsilon}}_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\right)\\\lesssim&\varepsilon^\vartheta\left(Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\right)^2,\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}\|a^\varepsilon\widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon)\nabla a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim&\|\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon\|_{B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1}}\|_{L^1(0,T)}\\\lesssim&\|\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|a^\varepsilon\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|a^\varepsilon\|_{B^{\frac{d}{2}-\vartheta}_{2,1}}\|_{L^1(0,T)}\\\lesssim&\varepsilon^\vartheta\Bigg(\|\varepsilon a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\beta_0}{\varepsilon}}_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\qquad+\|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|a^\varepsilon\|^{l;\frac{\beta_0}{\varepsilon}}_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\Bigg)\\\lesssim&\varepsilon^\vartheta\left(Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\right)^3.\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\|\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\underline{\boldsymbol{W}^\varepsilon},\boldsymbol{V}^\varepsilon)\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\underline{\boldsymbol{W}^\varepsilon}\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}\lesssim Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T). \tag{5.46}$$

由（2.3）以及 $\mathcal{Q}_1^\varepsilon$ 的定义可知,

$$\|\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\frac{\widehat{\boldsymbol{W}^\varepsilon}_0}{\sqrt{\mathbb{T}_b^d}},\boldsymbol{V}^\varepsilon)\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2}}\lesssim|\widehat{\boldsymbol{W}^\varepsilon}_0|\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}}\lesssim\|\boldsymbol{W}^\varepsilon\|_{B^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}_{2,1}}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{H^{\frac{d}{2}-\vartheta}},$$

then

$$\|\mathcal{Q}_1^\varepsilon(\frac{\widehat{\boldsymbol{W}^\varepsilon}_0}{\sqrt{\mathbb{T}_b^d}},\boldsymbol{V}^\varepsilon)\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\lesssim\|\boldsymbol{W}^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}\lesssim Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T)。\tag{5.47}$$

将 (5.42)-(5.47) 代入 (5.41)，可得

$$\|F^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})+L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\lesssim(Y^{\zeta,\varepsilon}(T)+P)\boldsymbol{W}^\varepsilon_\vartheta(T)+\varepsilon^\vartheta\Big((Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3\Big).\tag{5.48}$$

$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \check{\ }\ \widetilde{\ }\qquad\qquad\widetilde{\ }\ \mathcal{Q}_1^\varepsilon$的估计$(\mathbf{v}\ R_M^\varepsilon)\ \mathcal{Q}_1^\varepsilon(\mathbf{v}\ R_M^\varepsilon)$以及 $\mathcal{Q}_2^\varepsilon(\boldsymbol{V},R_M^\varepsilon).$

与 (5.47) 类似，我们有

$$\|\check{\mathcal{Q}}_1^\varepsilon(\frac{\widehat{\mathbf{v}}_0}{\sqrt{\mathbb{T}_b^d}},\widetilde{R}_M^\varepsilon)\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\lesssim\|\mathbf{v}\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-\vartheta-1}_{2,1})}\|\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})}.\tag{5.49}$$

由引理7.3，可得

$$\|\widetilde{\mathcal{Q}}_1^\varepsilon(\mathbf{v},\tilde{R}_M^\varepsilon)\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim\|\underline{\mathbf{v}}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})},\tag{5.50}$$

$$\|\check{\mathcal{Q}}_1^\varepsilon(\underline{\mathbf{v}},\widetilde{R}_M^\varepsilon)\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\lesssim\|\underline{\mathbf{v}}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})},\tag{5.51}$$

$$\|\mathcal{Q}_2^\varepsilon(\boldsymbol{V},\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\lesssim\|\boldsymbol{V}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}.\tag{5.52}$$

利用（5.9）和（5.49）-（5.52），我们得到

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\mathcal{Q}}_1^\varepsilon(\mathbf{v},\tilde{R}_M^\varepsilon)\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}+\|\check{\mathcal{Q}}_1^\varepsilon(\mathbf{v},\widetilde{R}_M^\varepsilon)\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}+\|\mathcal{Q}_2^\varepsilon(\boldsymbol{V},\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})}\\&\lesssim C_M(X+P)(Q_f+Y^{\zeta,\varepsilon}(T)+X^2+P^2)\end{aligned}\tag{5.53}$$

对 $\widetilde{R}^t_{\ ,\ M}{}^\varepsilon$ 的估计。

$\widetilde{R}^{1,\ t,\ }_{\ M}{}^\varepsilon$，$\widetilde{R}^{2,\ t,\ }_{\ M}{}^\varepsilon$，$\widetilde{R}^{3,\ t,\ }_{\ M}{}^\varepsilon$ 的估计方法与 $\widetilde{R}^{1,\ }_{\ M}{}^\varepsilon$，$\widetilde{R}^{2,\ }_{\ M}{}^\varepsilon$，$\widetilde{R}^{3,\ }_{\ M}{}^\varepsilon$ 的估计方法类似，因此这里不再重复这一过程。所得结果如下:

$$\|\widetilde{R}^{1,t,\varepsilon}_M\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim M^{\frac{d}{2}+S-1}\|\partial_t\mathbb{Q}f\|_{L^1_T(H^{-S})}+M\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\mathbf{v}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})},$$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{R}^{2,t,\varepsilon}_M\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim C^1_M M^{2+2\vartheta}\Big(&\|\partial_t\boldsymbol{V}\|_{L^1_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}\|\mathbf{v}\|_{L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}\\&+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^1_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}\|\boldsymbol{V}\|_{L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}\Big),\end{aligned}$$

$$\|\widetilde{R}^{3,t,\varepsilon}_M\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})}\lesssim C^2_M M^{2+2\vartheta}\|\partial_t\boldsymbol{V}\|_{L^1_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}\|\boldsymbol{V}\|_{L^\infty_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}.$$

注意到 $\mathbb{Q}f \in L^2_T(H^{\frac{d}{2}-1-\frac{S}{2}})$。令 $s^* = \min\{\frac{d}{2}-2, \frac{d}{2}-1-\frac{S}{2}\}$，则由 (2.3) 和 (5.12)，可得

$$\|\widetilde{S}_M^{t,\varepsilon}\|_{L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-2})} \lesssim M^{\frac{d}{2}-1-s^*}\|\partial_t \boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L^2_T(H^{s^*-\vartheta})} \lesssim M^{\frac{d}{2}-1-s^*}\|\partial_t \boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{s^*}_{2,\infty})}.$$

容易看出，$M^{\frac{d}{2}-1-s^*} \le \max\{M, M^{\frac{d}{2}+S-1}\}$。对于时间导数，我们需要利用以下方程，

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{v} &= \mathbb{P}f + \mu\Delta\mathbf{v} - \mathbb{P}(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}),\\
\partial_t \boldsymbol{V} &= \frac{\nu}{2}\Delta\boldsymbol{V} - \mathcal{Q}_1(\mathbf{v},\boldsymbol{V}) - \mathcal{Q}_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \boldsymbol{V}^\varepsilon =& \nu\mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon \end{pmatrix} - \mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix} \operatorname{div}(a^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon) \\ \mathbb{Q}(\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon + \widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon)a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon + \kappa a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon) \end{pmatrix}\\
&- \mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Q}(I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon) \end{pmatrix} + \mathcal{L}\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Q}f \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

通过估计上述方程右端，可以得到时间导数的估计。由（5.1），

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{P}(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim \|\mathbf{v}\|_{L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\mathbf{v}\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \lesssim P^2,\\
\|\operatorname{div}(a^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})} &\lesssim \|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})\cap L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2,\\
\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})} &\lesssim \|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2,\\
\|a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})} &\lesssim \|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2,\\
\|\widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon)a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})} &\lesssim \varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})} \lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3,\\
\|I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})} &\lesssim \varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2.
\end{aligned}$$

由（7.4）和（7.7），

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}_1(\mathbf{v},\boldsymbol{V})\|_{L^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})} &\lesssim \|\boldsymbol{V}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})\cap L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\mathbf{v}\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim PX,\\
\|\mathcal{Q}_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim \|\boldsymbol{V}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim X^2.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \lesssim \mathbb{P}_f + P + P^2, \tag{5.54}$$

$$\|\partial_t\boldsymbol{V}\|_{L^1_T(H^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})} \lesssim X + PX + X^2, \tag{5.55}$$

$$\|\partial_t\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{s^*}_{2,\infty})} \lesssim \mathbb{Q}_f + Y^{\zeta,\varepsilon}(T) + (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2 + (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3. \tag{5.56}$$

现在我们可以得出结论

$$\|\widetilde{R}_M^{t,\varepsilon}\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta-1})\cap L^2_T(H^{\frac{d}{2}-\vartheta})} \le C_M\Big(\mathbb{Q}_f+\mathbb{Q}_f X+\mathbb{P}_f(P+X)+Y^{\zeta,\varepsilon}(T)+P^2+X^2 \\ +(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2+P^3+X^3+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3+X^4+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^4\Big). \tag{5.57}$$

定义 $M=\mathcal{X}^{-1}(\varepsilon^{-1})$，其中 $\mathcal{X}^{-1}$ 是 $\mathcal{X}$ 的反函数，且 $\mathcal{X}(M):=C_M M^{\frac{\vartheta}{2}}$。将 (5.10)、(5.28)-(5.29)、(5.40)、(5.48)、(5.53)、(5.57) 代入 (5.8)，再将所得表达式与 (5.26) 相加，即可得到命题 4.1，其中 $\widetilde{\tau}(\varepsilon):=\max\{(\mathcal{X}^{-1}(\varepsilon^{-1}))^{-\frac{\vartheta}{2}},\varepsilon^{\vartheta}\}$.□

5.2 命题 4.2 的证明

从系统 (1.3) 和 (1.5) 出发，并注意到 $\mathbb{P}(\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon)=0$，可推导出关于 $\boldsymbol{W}^\varepsilon$ 的以下演化方程:

$$\begin{aligned}&\partial_t\boldsymbol{W}^\varepsilon+\mathbb{P}(A^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{W}^\varepsilon+\boldsymbol{W}^\varepsilon\cdot\nabla A^\varepsilon)-\mu\Delta\boldsymbol{W}^\varepsilon\\&\quad=-\mathbb{P}(\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon+\boldsymbol{W}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{W}^\varepsilon+I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon),\end{aligned} \tag{5.58}$$

其中 $A^\varepsilon:=\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon+\mathbf{v}$。

类比于针对 $\boldsymbol{Z}^\varepsilon$ 的估计方法，我们引入函数 $\psi_M^\varepsilon:=\boldsymbol{W}^\varepsilon+\varepsilon\mathbb{P}R_M^\varepsilon$，满足

$$\widetilde{R}_M^\varepsilon(t,x):=-c_d\sum_m\left(\sum_{\substack{\alpha\in\{-1,1\},k+l=m\\|k|,|l|\le M}}\left(\frac{(l\cdot k)\widehat{\mathbf{v}}_k+(l\cdot\widehat{\mathbf{v}}_k)l}{|l|^2}\right)\widehat{\boldsymbol{V}}_l^{\alpha,\varepsilon}e^{i|l|sg(l)\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right)e^{im\cdot x}.$$

注意到

$$\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\mathbf{v}=-ic_d\sum_m\left(\sum_{k+l=m}\alpha sg(l)\frac{(l\cdot k)\widehat{\mathbf{v}}_k}{|l|}\widehat{\boldsymbol{V}}_l^{\alpha,\varepsilon}e^{ilsg(l)\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right)e^{im\cdot x},$$

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon=-ic_d\sum_m\left(\sum_{k+l=m}\alpha sg(l)\frac{(l\cdot\widehat{\mathbf{v}}_k)l}{|l|}\widehat{\boldsymbol{V}}_l^{\alpha,\varepsilon}e^{ilsg(l)\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right)e^{im\cdot x},$$

我们得到

$$\varepsilon\partial_t\widetilde{R}_M^\varepsilon=R_M^\varepsilon+\varepsilon\widetilde{R}_M^{t,\varepsilon}, \tag{5.59}$$

其中 R_M^ε 是 R^ε 的低频部分：$=\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\mathbf{v}\ +\mathbf{v}\ \cdot\nabla\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon$，它是通过仅保留满足 $|l|$、$|k|\le M$ 的指标 l 和 k 而得到的，并且

$$\widetilde{R}_M^{t,\varepsilon}(t,x):=-c_d\sum_m\left(\sum_{\substack{\alpha\in\{-1,1\},k+l=m\\ |k|,|l|\le M}}\partial_t\left(\frac{(l\cdot k)\widehat{\mathbf{v}}_k+(l\cdot\widehat{\mathbf{v}}_k)l}{|l|^2}\widehat{\boldsymbol{V}}_l^{\alpha,\varepsilon}\right)e^{i|l|sg(l)\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right)e^{im\cdot x}.$$

由方程（5.58）和（5.59），我们得到

$$\begin{aligned}&\partial_t\psi_M^\varepsilon+\mathbb{P}(A^\varepsilon\cdot\nabla\psi_M^\varepsilon+\psi_M^\varepsilon\cdot\nabla A^\varepsilon)-\mu\Delta\psi_M^\varepsilon\\&\quad=-\mathbb{P}R^{\varepsilon,M}+\varepsilon\mathbb{P}(A^\varepsilon\nabla\mathbb{P}\widetilde{R}_M^\varepsilon+\mathbb{P}\widetilde{R}_M^\varepsilon\cdot\nabla A^\varepsilon-\mu\Delta\widetilde{R}_M^\varepsilon)+\varepsilon\mathbb{P}\widetilde{R}_M^{t,\varepsilon}\\&\qquad-\mathbb{P}(\boldsymbol{W}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{W}^\varepsilon+I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\end{aligned}\tag{5.60}$$

其中 $R^{\varepsilon,\ M}:=R^\varepsilon-R_M^\varepsilon$。

在 中对系统（5.60）应用命题 7.4，可得

$$\begin{aligned}&\|\psi_M^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_T^\infty(B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})\cap L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}+1-\vartheta})}\\&\lesssim e^{C\|A^\varepsilon\|_{L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}}\\&\quad\times\Big(\|\mathbb{P}R^{\varepsilon,M}\|_{L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}+\|\boldsymbol{W}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{W}^\varepsilon\|_{L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}+\|I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}\\&\qquad+\varepsilon\Big(\|\widetilde{R}_M^\varepsilon(0)\|_{B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}}+\|\mathbb{P}\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}+1-\vartheta})}+\|A^\varepsilon\cdot\nabla\mathbb{P}\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}\\&\qquad\quad+\|\mathbb{P}\widetilde{R}_M^\varepsilon\cdot\nabla A^\varepsilon\|_{L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}+\|\mathbb{P}\widetilde{R}_M^{t,\varepsilon}\|_{L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})}\Big)\Big).\end{aligned}\tag{5.61}$$

首先，我们断言

$$\|\mathbb{P}\widetilde{R}_M^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_T^\infty(B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1-\vartheta})\cap L_T^1(B_{2,1}^{\frac{d}{2}+1-\vartheta})}\lesssim MPY^{\zeta,\varepsilon}(T)\tag{5.62}$$

为此，我们引入以下记号：

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{V}}^\varepsilon(t,x)&:=-c_d\sum_{k,\alpha}\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha,\varepsilon}e^{i|k|sg(k)\frac{\alpha t}{\varepsilon}}e^{ik\cdot x},\\\check{\boldsymbol{V}}^\varepsilon(t,x)&:=ic_d\sum_{k,\alpha}\alpha sg(k)\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha,\varepsilon}e^{i|k|sg(k)\frac{\alpha t}{\varepsilon}}e^{ik\cdot x},\\\widetilde{\boldsymbol{V}}^{t,\varepsilon}(t,x)&:=-c_d\sum_{k,\alpha}\partial_t\widehat{\boldsymbol{V}}_k^{\alpha,\varepsilon}e^{i|k|sg(k)\frac{\alpha t}{\varepsilon}}e^{ik\cdot x}.\end{aligned}$$

显然,

$$\|\mathbb{P}\widetilde{R}^{\varepsilon}_{M}\|_{\widetilde{L}^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})\cap L^{1}_{T}(B^{\frac{d}{2}+1-\vartheta}_{2,1})}\lesssim M\|\mathbb{P}\widetilde{R}^{\varepsilon}_{M}\|_{\widetilde{L}^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-2-\vartheta}_{2,1})\cap L^{1}_{T}(B^{\frac{d}{2}-\vartheta}_{2,1})} \tag{5.63}$$

and

$$\|\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\|_{\widetilde{L}^{q}_{T}(B^{s}_{2,r})}+\|\check{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\|_{\widetilde{L}^{q}_{T}(B^{s}_{2,r})}\approx\|\boldsymbol{V}^{\varepsilon}_{M}\|_{\widetilde{L}^{q}_{T}(B^{s}_{2,r})},\quad\|\widetilde{\boldsymbol{V}}^{t,\varepsilon}_{M}\|_{\widetilde{L}^{q}_{T}(B^{s}_{2,r})}\approx\|\partial_{t}\boldsymbol{V}^{\varepsilon}_{M}\|_{\widetilde{L}^{q}_{T}(B^{s}_{2,r})}, \tag{5.64}$$

其中 $1\leq q,\ r\leq\infty$ 且 $s\in\mathbb{R}$。

注意 $\widetilde{R}^{\varepsilon}_{M}$ 可表示为以下形式,

$$\widetilde{R}^{\varepsilon}_{M}=\nabla\mathbf{v}_{M}\cdot\nabla\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}+\nabla^{2}\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\cdot\mathbf{v}_{M},$$

这意味着

$$\mathbb{P}(\widetilde{R}^{\varepsilon}_{M})=\mathbb{P}\big(\nabla\mathbf{v}_{M}\cdot\nabla\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}+\nabla^{2}\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\cdot\underline{\mathbf{v}_{M}}\big)$$

由（2.3）和（5.64）可得

$$\|\nabla\mathbf{v}_{M}\cdot\nabla\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\|_{L^{1}_{T}(B^{\frac{d}{2}-\vartheta}_{2,1})}\lesssim\|\mathbf{v}_{M}\|_{L^{1}_{T}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^{\varepsilon}_{M}\|_{L^{\infty}_{T}(\underline{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}, \tag{5.65}$$

$$\|\nabla^{2}\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\cdot\underline{\mathbf{v}_{M}}\|_{L^{1}_{T}(B^{\frac{d}{2}-\vartheta}_{2,1})}\lesssim\|\mathbf{v}_{M}\|_{L^{2}_{T}(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^{\varepsilon}_{M}\|_{L^{2}_{T}(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}, \tag{5.66}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla\mathbf{v}_{M}\cdot\nabla\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\|_{\widetilde{L}^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-2-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim\|\nabla\mathbf{v}_{M}\cdot\nabla\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\|_{L^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})}\\&\lesssim\|\mathbf{v}_{M}\|_{L^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^{\varepsilon}_{M}\|_{L^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})},\end{aligned} \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla^{2}\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\cdot\underline{\mathbf{v}_{M}}\|_{\widetilde{L}^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-2-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim\|\nabla^{2}\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_{M}\cdot\underline{\mathbf{v}_{M}}\|_{L^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})}\\&\lesssim\|\mathbf{v}_{M}\|_{L^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^{\varepsilon}_{M}\|_{L^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}.\end{aligned} \tag{5.68}$$

于是（5.62）由（5.63）、（5.65）、（5.66）、（5.67）和（5.68）可得。

接下来我们来估计 ψ^{ε}_{M}。通过与（5.62）中类似的计算，可得

$$\|\mathbb{P}\widetilde{R}^{\varepsilon,M}(0)\|_{B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1}}\lesssim MX_{0}P_{0}. \tag{5.69}$$

由（5.62），我们推得

$$\begin{aligned}\|A^{\varepsilon}\cdot\nabla\mathbb{P}\widetilde{R}^{\varepsilon}_{M}\|_{L^{1}_{T}(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim\|A^{\varepsilon}\|_{L^{\infty}_{T}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\mathbb{P}\widetilde{R}^{\varepsilon}_{M}\|_{L^{1}_{T}(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1-\vartheta}_{2,1})}\\&\lesssim\Big(P+Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\Big)MPY^{\zeta,\varepsilon}(T)\end{aligned} \tag{5.70}$$

and

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}\widetilde{R}^{\varepsilon}_{M}\cdot\nabla A^{\varepsilon}\|_{L^{1}_{T}(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim\|A^{\varepsilon}\|_{L^{2}_{T}(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\mathbb{P}\widetilde{R}^{\varepsilon}_{M}\|_{L^{2}_{T}(B^{\frac{d}{2}-\vartheta}_{2,1})}\\&\lesssim\Big(P+Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\Big)MPY^{\zeta,\varepsilon}(T).\end{aligned} \tag{5.71}$$

我们观察到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\widetilde{R}^{t,\varepsilon}_M =&\mathbb{P}\Big(\nabla\partial_t\mathbf{v}_M\cdot\nabla\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_M+\nabla^2\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_M\cdot\underline{\partial_t\mathbf{v}_M}\\&+\nabla\mathbf{v}_M\cdot\nabla\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{t,\varepsilon}_M+\nabla^2\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{t,\varepsilon}_M\cdot\underline{\mathbf{v}_M}\Big).\end{aligned}$$

由（2.3）、（5.54）、（5.56）和（5.64），可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\partial_t\mathbf{v}_M\cdot\nabla\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_M\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim M\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^{\varepsilon}\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\&\lesssim MY^{\zeta,\varepsilon}(T)(\mathbb{P}_f+P+P^2),\end{aligned}\tag{5.72}$$

$$\|\nabla^2\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}_M\cdot\underline{\partial_t\mathbf{v}_M}\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}\lesssim MY^{\zeta,\varepsilon}(T)(\mathbb{P}_f+P+P^2),\tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla\mathbf{v}_M\cdot\nabla\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{t,\varepsilon}_M\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim M\|\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\partial_t\boldsymbol{V}^{\varepsilon}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}-2-\vartheta}_{2,1})}\\&\lesssim M\|\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\partial_t\boldsymbol{V}^{\varepsilon}\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}-2}_{2,\infty})}\\&\lesssim MP\Big(\mathbb{Q}_f+Y^{\zeta,\varepsilon}(T)+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3\Big),\end{aligned}\tag{5.74}$$

$$\|\nabla^2\Delta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{t,\varepsilon}_M\cdot\underline{\mathbf{v}_M}\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}\lesssim MP\Big(\mathbb{Q}_f+Y^{\zeta,\varepsilon}(T)+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3\Big).\tag{5.75}$$

由（5.72）—（5.75）可知

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}\widetilde{R}^{t,\varepsilon}_M\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}\lesssim&M\Big((\mathbb{P}_f)^2+(\mathbb{Q}_f)^2+P^2+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2\\&+P^3+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3+P^4+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^4\Big).\end{aligned}\tag{5.76}$$

通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{W}^{\varepsilon}\cdot\nabla\boldsymbol{W}^{\varepsilon}\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim\|\boldsymbol{W}^{\varepsilon}\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\|\boldsymbol{W}^{\varepsilon}\|_{L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}+1-\vartheta}_{2,1})}\\&\lesssim\left(D^{\zeta,\varepsilon}(T)+\|\mathbf{v}\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_{T_0}(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\right)\boldsymbol{W}^{\varepsilon}_{\vartheta}(T).\end{aligned}\tag{5.77}$$

类似于（5.44），我们有

$$\|I(\varepsilon a^{\varepsilon})\mathcal{A}\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}\lesssim\varepsilon^{\vartheta}\left(Y^{\zeta,\varepsilon}(T)\right)^2.\tag{5.78}$$

注意，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R^{\varepsilon,M})=\mathbb{P}\Big(&\nabla\mathbf{v}^M\cdot\nabla|D|^{-1}\check{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}+\nabla\mathbf{v}_M\cdot\nabla|D|^{-1}\check{\boldsymbol{V}}^{M,\varepsilon}\\&+\nabla^2|D|^{-1}\check{\boldsymbol{V}}^{\varepsilon}\cdot\mathbf{v}^M+\nabla^2|D|^{-1}\check{\boldsymbol{V}}^{M,\varepsilon}\cdot\underline{\mathbf{v}_M}\Big).\end{aligned}$$

直接计算可得,

$$\begin{aligned}\|\nabla \mathbf{v}^M\cdot\nabla|D|^{-1}\check{\boldsymbol{V}}^\varepsilon\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim \|\mathbf{v}^M\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}-\vartheta}_{2,1})}\|\check{\boldsymbol{V}}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\lesssim M^{-\vartheta}\|\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})},\\\|\nabla \mathbf{v}_M\cdot\nabla|D|^{-1}\check{\boldsymbol{V}}^{M,\varepsilon}\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim M^{-\vartheta}\|\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla^2|D|^{-1}\check{\boldsymbol{V}}^\varepsilon\cdot\mathbf{v}^M\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim \|\check{\boldsymbol{V}}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\mathbf{v}^M\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}-\vartheta}_{2,1})}\\&\lesssim M^{-\vartheta}\|\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})},\\\|\nabla^2|D|^{-1}\check{\boldsymbol{V}}^{M,\varepsilon}\cdot\underline{\mathbf{v}_M}\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}&\lesssim M^{-\vartheta}\|\mathbf{v}\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{V}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\|\mathbb{P}R^{\varepsilon,M}\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1-\vartheta}_{2,1})}\lesssim M^{-\vartheta}PY^{\zeta,\varepsilon}(T). \tag{5.79}$$

我们选取 $M=\varepsilon^{-\frac{1}{1+\vartheta}}$ 并将其代入（5.63）、（5.69）-（5.71）以及（5.76）-（5.79）中（5.61）。将所得表达式加到（5.63）上，即完成命题 4.2的证明。 □

6 $Y^{\zeta,\varepsilon}(T)$ 与 $X^\varepsilon(T)+P^\varepsilon(T)$之间的关系，以及对 $[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,h}_{\varepsilon,m}(T)$ 的估计

命题 4.4 的证明基于以下三个引理。对于 $0<\beta<\infty$, $j\in\mathbb{Z}$, $\mathbf{1}_{h;\beta}(j)$, 定义如下:

$$\mathbf{1}_{h;\beta}(j)=1,\ \text{if } 2^j\geq\beta,\quad \mathbf{1}_{h;\beta}(j)=0,\ \text{if } 2^j<\beta.$$

引理 6.1 设 $s,s_1,s_2\in\mathbb{R}$, $s+\frac{d}{2}=s_1+s_2$, $1\leq r\leq\infty$, $0<\zeta<\infty$, $f\in\dot{B}^{s_1}_{2,1}(\mathbb{R}^d)$ 以及 $g\in\dot{B}^{s_2}_{2,r}(\mathbb{R}^d)$。若 $s_1\leq\frac{d}{2}$，则

$$\|T_fg\|^{h;\zeta}_{B^s_{2,r}}\lesssim\|f\|_{B^{s_1}_{2,1}}\|g\|^{h;\frac{\zeta}{4}}_{B^{s_2}_{2,r}}; \tag{6.1}$$

若 $s>-\frac{d}{2}$，则

$$\|R(f,g)\|^{h;\zeta}_{\dot{B}^s_{2,r}}\lesssim\|f\|^{h;\frac{\zeta}{64}}_{\dot{B}^{s_1}_{2,1}}\|g\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{\dot{B}^{s_2}_{2,r}}. \tag{6.2}$$

证明： 对于满足条件 $\Delta_j(T_fg)$ 的二进块 $\zeta\le 2^j$，由式（2.1）和式（2.4）可得

$$\begin{aligned}&2^{js}\|\Delta_j(T_fg)\|_{L^2}\\&\lesssim 2^{js}\sum_{|j-j'|\le 2}\|S_{j'-2}f\|_{L^\infty}\mathbf{1}_{h;2^{j_b}}(j')\|\Delta_{j'}g\|_{L^2}\\&\lesssim\sum_{|j-j'|\le 2}2^{(j-j')s}\mathbf{1}_{h;\frac{\zeta}{4}}(j')2^{j's_2}\|\Delta_{j'}g\|_{L^2}\mathbf{1}_{h;2^{j_b}}(j')2^{j'(s_1-\frac{d}{2})}\|S_{j'-2}f\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

对二进块 $\zeta\le 2^j$ 取 l^r-范数，并应用杨氏不等式，可得 [6]

$$\begin{aligned}\|T_fg\|^{h;\zeta}_{\dot B^s_{2,r}}&\lesssim\Big\|\mathbf{1}_{h;2^{j_b}}(j)2^{j(s_1-\frac{d}{2})}\|S_{j-2}f\|_{L^\infty}\Big\|_{l^\infty}\|g\|^{h;\frac{\zeta}{4}}_{B^{s_2}_{2,r}}\\&\lesssim\|f\|_{B^{s_1-\frac{d}{2}}_{\infty,1}}\|g\|^{h;\frac{\zeta}{4}}_{B^{s_2}_{2,r}}\lesssim\|f\|_{B^{s_1}_{2,1}}\|g\|^{h;\frac{\zeta}{4}}_{B^{s_2}_{2,r}}.\end{aligned}$$

对于满足 $\zeta\le 2^j$ 的二进块 $\Delta_jR(f,g)$，我们发现

$$\begin{aligned}2^{js}\|\Delta_jR(f,g)\|_{L^2}&\lesssim 2^{j(s+\frac{d}{2})}\|\Delta_jR(f,g)\|_{L^1}\lesssim 2^{j(s+\frac{d}{2})}\sum_{j-j'\le 4}\sum_{|k-j'|\le 2}\|\Delta_{j'}g\|_{L^2}\|\Delta_kf\|_{L^2}\\&\lesssim\sum_{j-j'\le 4}2^{(s+\frac{d}{2})(j-j')}\mathbf{1}_{h;\frac{\zeta}{16}}(j')2^{j's_2}\|\Delta_{j'}g\|_{L^2}\sum_{k\ge j-6}\mathbf{1}_{h;\frac{\zeta}{64}}(k)2^{ks_1}\|\Delta_kf\|_{L^2}.\end{aligned}$$

对这些二进块取 l^r-范数并应用杨氏不等式，可得（6.2）。□

引理 6.2 ([13]). 设 $0<T\le\infty$。假设系统 (1.3) 存在一个解

$$(a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)\ \textit{satisfying}\ (4.3)\quad\textit{with}\quad\inf_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^d}1+\varepsilon a^\varepsilon(t,x)>0.$$

那么存在正常数 $\eta_0=\eta_0(d,\nu)$，使得对任意 $\varepsilon\le 1$ 和 $t\in(0,\ T]$，以下估计成立，

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde L^\infty_t(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde L^\infty_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_t(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&\lesssim\left(\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}(0)+\|\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}(0)\right)+\|(F,\mathbb{Q}G,\mathbb{Q}(\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\&\quad+\varepsilon\sum_{2^j\ge\frac{\eta_0}{\varepsilon}}2^{j\frac{d}{2}}\left(\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_ja^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,t)}+\|\Delta_jF+S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_ja^\varepsilon\|_{L^1(0,t;L^2)}\right),\end{aligned}\tag{6.3}$$

其中

$$F=-\mathrm{div}(a^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon),\quad G=-\kappa a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon-\widetilde K(\varepsilon a^\varepsilon)a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon-I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon+f^\varepsilon.$$

[6] 我们观察到 $S_jf=\frac{f_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}+\sum_{j'\le j-1}\Delta_{j'}f$。为处理项 $\frac{f_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}$，我们引入示性函数 $\mathbf{1}_{h;2^{j_b}}(j)$。

我们强调，尽管引理 6.2 最初是在全空间 $\mathbb{R}^d$中证明的，但其结论无需任何修改即可直接推广到周期区域。

引理 6.3 ([5])。设 $0<T\le\infty$。假设系统 (1.3) 存在一个解

$$(a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)\ satisfying\ (4.3)\quad with\quad \inf_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^d}1+\varepsilon a^\varepsilon(t,x)>0.$$

那么，对于任意 $0\le\zeta\prec\frac{\eta_0}{\varepsilon}$和 $t\in(0,T]$，有

$$\begin{aligned}
&\|(a^\varepsilon,\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|(a^\varepsilon,\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(a^\varepsilon,\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon)(0)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\|\mathbb{Q}G\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\sum_{\zeta\le2^j<\frac{\eta_0}{\varepsilon}}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\Big(\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,t)}\\
&\quad+\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,t)}+\|\Delta_j F+S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^1(0,t;L^2)}\\
&\quad+\|\Delta_j\mathbb{Q}(\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\Delta_j\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^1(0,t;L^2)}\Big),
\end{aligned}\tag{6.4}$$

其中

$$F=-\mathrm{div}(a^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon),\quad G=-\kappa a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon-\widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon)a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon-I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon+f^\varepsilon.$$

6.1 命题 4.3 的证明

由引理 6.2 和引理 6.3 (令 $\zeta=0$)，可得

$$\begin{aligned}
X^\varepsilon(T)\lesssim&X_0+\|\mathbb{Q}G\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|(F,\mathbb{Q}(\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\varepsilon\|(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon,a^\varepsilon\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&+\|(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon,a^\varepsilon\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon,\mathbb{Q}(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon))\|^{l;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+R_1+R_2,
\end{aligned}\tag{6.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
R_1=&\varepsilon\sum_{2^j\ge\frac{\eta_0}{\varepsilon}}2^{j\frac{d}{2}}\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,T)}\\
&+\sum_{2^j<\frac{\eta_0}{\varepsilon}}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\Big(\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,T)}+\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,T)}\Big)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
R_2=&\varepsilon\sum_{2^j\ge\frac{\eta_0}{\varepsilon}}2^{j\frac{d}{2}}\|\Delta_j(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon)-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2)}+\sum_{2^j<\frac{\eta_0}{\varepsilon}}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\\
&\Big(\|\Delta_j(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon)-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2)}+\|\Delta_j\mathbb{Q}(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_j\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2)}\Big).
\end{aligned}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{Q}G\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim (1+\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})})\|a^\varepsilon\|^2_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\mathbb{Q}f\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\&\quad+\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{l;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3+\mathbb{Q}_f,\end{aligned}\tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}\|F\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim \|\mathrm{div}(a^\varepsilon\underline{\boldsymbol{u}}^\varepsilon)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\mathrm{div}(a^\varepsilon\frac{\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}})\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\&\lesssim \|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\&\lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2,\end{aligned}\tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbb{Q}(\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim \|\underline{\boldsymbol{u}}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\frac{\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\&\lesssim \|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^2_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\&\lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2,\end{aligned}\tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\|(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon,a^\varepsilon\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} &\lesssim \varepsilon\Big\|\|a^\varepsilon\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big\|_{L^1(0,T)}\\&\lesssim \varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{l;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2,\end{aligned}\tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\|(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon,a^\varepsilon\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon,\mathbb{Q}(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon))\|_{L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim (\|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})})\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\lesssim (Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2,\end{aligned}\tag{6.10}$$

$$R_1\lesssim\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2.\tag{6.11}$$

根据 [7], 中的引理 7.5，我们得到

$$\begin{aligned}\|\Delta_j(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon)-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^2}\lesssim\sum_{|j-j'|\le2}\Big(&\|S_{j'-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}2^{j'}\|\Delta_{j'}a^\varepsilon\|_{L^2}\\&+\|\nabla S_{j'-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_{j'}a^\varepsilon\|_{L^2}\Big)\end{aligned}\tag{6.12}$$

$$\|\Delta_j\mathbb{Q}(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_j\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}\lesssim\sum_{|j-j'|\leq2}\Big(\|S_{j'-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}2^{j'}\|\Delta_{j'}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}$$
$$+\|\nabla S_{j'-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_{j'}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}\Big)\tag{6.13}$$

由此可得

$$\begin{aligned}R_2&\lesssim\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+(\|a^\varepsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})})\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\lesssim(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2.\end{aligned}\tag{6.14}$$

将（6.6）–（6.11）和（6.14）代入（6.5），得到

$$X^\varepsilon(T)\lesssim X_0+\mathbb{Q}f+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^3.\tag{6.15}$$

We 现在转而分析 $\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon$。对系统（ $\mathbb{P}$ 1.3）应用算子$_2$, ，可得

$$\partial_t\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon+\mathbb{P}(\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)-\mu\Delta\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon=\mathbb{P}f-\mathbb{P}(I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon).$$

运用标准能量方法，我们推导得出[7]

$$\begin{aligned}P^\varepsilon(T)\lesssim P_0&+\|(\mathbb{P}f,\mathbb{P}(I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{L^1_T(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\mathbb{P}(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{L^1_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\Big\|(\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon})_0\Big\|_{L^1(0,T)}\\&+\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\Big(\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,T)}\\&\qquad+\|\Delta_j\mathbb{P}(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\Delta_j\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2)}\Big).\end{aligned}\tag{6.16}$$

注意到

$$(\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon})_0\lesssim\sum_{k\neq0}|k||\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon}_k||\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon}_{-k}|\lesssim\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\underline{H}^0}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\underline{H}^1}\lesssim\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}.$$

由此可得

$$\Big\|(\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon})_0\Big\|_{L^1(0,T)}\lesssim\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^2_{L^2_T(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.\tag{6.17}$$

其余计算与前面的分析类似。因此，我们得到以下估计

$$P^\varepsilon(T)\lesssim P_0+\mathbb{P}f+(Y^{\zeta,\varepsilon}(T))^2.\tag{6.18}$$

命题4.3由（6.15）和（6.18）得出。 □

[7]这里我们使用性质 $\widehat{\mathbb{P}f}_0=\widehat{f}_0$ ，该性质对定义在 $\mathbb{T}^d_b$ 上的任意函数 f 都成立。

命题4.4的证明

我们首先估计不可压缩分量。与（6.16）类似，我们推导得 t

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{\tilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_t(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} &\lesssim \|\mathbb{P}\boldsymbol{u}_0\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} + R_1(t)\\ &\quad + \|(\mathbb{P}f, \mathbb{P}(I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon), \mathbb{P}(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon))\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \end{aligned} \tag{6.19}$$

其中

$$\begin{aligned}R_1(t) = \sum_{2^j\geq\zeta} 2^{j(\frac{d}{2}-1)}\Big(&\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,t)}\\ &+ \|\Delta_j\mathbb{P}(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon) - S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\Delta_j\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^1(0,t;L^2)}\Big).\end{aligned}$$

将 $\mathbb{Q}$ 代入 $\mathbb{P}$ （6.13）得

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\mathbb{P}(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon) - S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_j\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2} &\lesssim \sum_{|j-j'|\leq 2}\Big(\|S_{j'-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon - S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}2^{j'}\|\Delta_{j'}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}\\ &\quad + \|\nabla S_{j'-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_{j'}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}\Big).\end{aligned} \tag{6.20}$$

由此可得

$$\begin{aligned}R_1(t) &\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{4}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\ &\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V}, \mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mathbf{v})(\tau)\|^{m;\frac{\zeta}{4},\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})(\tau)\|^{m;\frac{\zeta}{4},\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\ &\quad + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau.\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}&C\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau\\ &\leq \frac{4C^2}{\|}\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau + \frac{1}{16}\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau\end{aligned} \tag{6.21}$$

而项 $\frac{1}{16}\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}$ 最终可由（6.19）和（6.26）左端的各项吸收。因此，我们可以舍去这一项，从而得到

$$\begin{aligned}R_1(t) &\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{4}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\ &\quad + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon - \boldsymbol{V}, \mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mathbf{v})(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\end{aligned} \tag{6.22}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}(I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon)|_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim \int_0^t \varepsilon\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau \\ &\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau + (\varepsilon\zeta)\int_0^t \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\end{aligned} \tag{6.23}$$

利用引理 6.1 并按照与 (6.22) 中类似的计算，可得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau \\ &\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau \\ &\quad + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v})(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\end{aligned} \tag{6.24}$$

将 (6.22)-(6.24) 代入 (6.19可得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_t(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} &\lesssim \|\mathbb{P}\boldsymbol{u}_0\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} + \|\mathbb{P}f\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau \\ &\quad + \int_0^t \Big(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v})(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau \\ &\quad + (\varepsilon\zeta)\int_0^t \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\end{aligned} \tag{6.25}$$

接下来估计可压缩分量。由引理 6.2 和引理 6.3，可得

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|a^\varepsilon\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_t(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_t(B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\ &\lesssim \left(\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}(0) + \|(a^\varepsilon,\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}(0)\right) + \varepsilon\|(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon, a^\varepsilon\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \\ &\quad + \|(\mathbb{Q}G,\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon a^\varepsilon, T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon, T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon, \mathbb{Q}(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon), \mathbb{Q}(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon))\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + R_2(t) + R_3(t),\end{aligned} \tag{6.26}$$

其中

$$R_2(t) = \varepsilon\sum_{2^j\geq\frac{\eta_0}{\varepsilon}} 2^{j\frac{d}{2}}\left(\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,t)} + \|\Delta_j(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon) - S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^1(0,t;L^2)}\right)$$

$$R_3(t)=\sum_{\zeta\le 2^j<\frac{\eta_0}{\varepsilon}}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\bigg(\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,t)}+\Big\|\|\nabla S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\Delta_j\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^2}\Big\|_{L^1(0,t)}$$
$$+\|\Delta_j(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon)-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\nabla\Delta_j a^\varepsilon\|_{L^1(0,t;L^2)}+\|\Delta_j\mathbb{Q}(T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)-S_{j-2}\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\Delta_j\mathbb{Q}\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{L^1(0,t;L^2)}\bigg).$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\varepsilon\|(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon,a^\varepsilon\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{L^1_t(\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}&\lesssim\int_0^t\varepsilon\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau\\&\lesssim\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau+(\varepsilon\zeta)\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\end{aligned}\tag{6.27}$$

由引理6.1，我们推得

$$\begin{aligned}\|a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}&\lesssim\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{l;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\&\lesssim\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\bigg(\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V})(\tau)\|^{m;\frac{\zeta}{16},\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{V}(\tau)\|^{m;\frac{\zeta}{16},\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\\&\quad+\Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\Big)^{\frac12}\Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big)^{\frac12}+\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\bigg)d\tau\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&C\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\Big)^{\frac12}\Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big)^{\frac12}d\tau\\&\le 4C^2\int_0^{\frac{\eta_0}{\varepsilon}}\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau+\frac{1}{16}\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau\end{aligned}\tag{6.28}$$

而项 $\frac{1}{16}\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau$ 最终可被等式（6.26）左端的项吸收。因此，我们可以舍去这一项，从而得到

$$\begin{aligned}\|a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}&\lesssim\int_0^t\Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau\\&\quad+\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big(\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V})(\tau)\|^{l;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{V}(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)d\tau\end{aligned}\tag{6.29}$$

我们还有

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{K}(\varepsilon a^\varepsilon)a^\varepsilon\nabla a^\varepsilon, I(\varepsilon a^\varepsilon)\mathcal{A}\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim \int_0^t \varepsilon\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}(\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}})d\tau\\ &\lesssim \int_0^t (\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}})[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau\\ &\quad + (\varepsilon\zeta)\int_0^t \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d \end{aligned}\tag{6.30}$$

于是 (6.29) 和 (6.30) 可得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{Q}G\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim \int_0^t \Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} + \frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau + \|\mathbb{Q}f\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\ &\quad + \int_0^t \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V})(\tau)\|^{l;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau + \int_0^t \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{V}(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\ &\quad + (\varepsilon\zeta)\int_0^t \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau. \end{aligned}\tag{6.31}$$

注意到

$$T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon = T_{\underline{\boldsymbol{u}^\varepsilon}}\nabla a^\varepsilon + \frac{\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}\nabla a^\varepsilon \quad\text{and}\quad T_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon = T_{\underline{\boldsymbol{u}^\varepsilon}}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon + \frac{\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon.$$

显然

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}\nabla a^\varepsilon\Big\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\ &\lesssim \frac{1}{\zeta}\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau + \varepsilon\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau \end{aligned}\tag{6.32}$$

and

$$\Big\|\mathbb{Q}\Big(\frac{\widehat{\boldsymbol{u}^\varepsilon}_0}{\sqrt{|\mathbb{T}^d_b|}}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon\Big)\Big\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \lesssim \frac{1}{\zeta}\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau.\tag{6.33}$$

类似于 (6.31)，我们推得

$$
\begin{aligned}
&\|T_{\underline{\boldsymbol{u}}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&\quad\lesssim\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\
&\quad\lesssim\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big(\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V})(\tau)\|^{m;\frac{\zeta}{16},\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{V}(\tau)\|^{m;\frac{\zeta}{16},\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)d\tau\\
&\qquad+\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\Big)^{\frac12}\Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big)^{\frac12}d\tau\\
&\qquad+(\varepsilon\zeta)\int_0^t\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau\qquad(6.34)\\
&\qquad+\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\Big)^{\frac12}\Big(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big)^{\frac12}d\tau\\
&\quad\lesssim\int_0^t\Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau+\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{V}(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\
&\qquad+(\varepsilon\zeta)\int_0^t\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau+\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V})(\tau)\|^{l;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|(\mathbb{Q}(T_{\underline{\boldsymbol{u}}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon),\mathbb{Q}(T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon))\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&\quad\lesssim\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\
&\quad\lesssim\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau+\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V},\mathbf{v})(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\
&\qquad+\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v})(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau,\qquad(6.35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|T'_{\boldsymbol{u}^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}&\lesssim\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\
&\lesssim\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau+\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v})(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\\
&\qquad+\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(\boldsymbol{V},\mathbf{v})(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau.\qquad(6.36)
\end{aligned}
$$

利用引理 6.1、(6.36) 和 (6.34)，可得

$$
\begin{aligned}
&\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon a^\varepsilon\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} d\tau + \int_0^t \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} d\tau\\
&\lesssim \int_0^t \Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau + (\varepsilon\zeta)\int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} d\tau\\
&\quad + \int_0^t \Big(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)\|(\boldsymbol{V},\mathbf{v})(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} d\tau \qquad (6.37)\\
&\quad + \int_0^t \Big(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v})(\tau)\|^{l;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} d\tau.
\end{aligned}
$$

根据 (6.12)-(6.13)，可得

$$
\begin{aligned}
R_2(t) &\lesssim \int_0^t \varepsilon\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} d\tau \qquad (6.38)\\
&\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} [a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau + (\varepsilon\zeta)\int_0^t \|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} d\tau
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
R_3 &\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{4}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{4}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)d\tau\\
&\lesssim \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)d\tau.
\end{aligned}
$$

由 (6.35)-(6.34)，可知

$$
\begin{aligned}
R_3 &\lesssim \int_0^t \Big(\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \|(\boldsymbol{V},\mathbf{v})(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} d\tau \qquad (6.39)\\
&\quad + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v})(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} d\tau + (\varepsilon\zeta)\int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} d\tau.
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\varepsilon\|a^\varepsilon\|_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|a^\varepsilon\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + (\zeta\varepsilon)\|a^\varepsilon\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}. \qquad (6.40)
$$

代入 tuting（6.27）和（6.31）-（6.39）代入（6.26），并将所得表达式加到（6.2 5)

以及（6.40），我们得到

$$
\begin{aligned}
[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(t)\lesssim&\left(\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}(0)+\|(a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}(0)\right)+R_{\zeta,\varepsilon}(t)\\
&+\int_0^t\left(\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\right)\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v})(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\qquad(6.41)\\
&+\int_0^t\left(\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\right)[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(\tau)d\tau,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
R_{\zeta,\varepsilon}(t)=&\int_0^t\left(\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\right)\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})(\tau)\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau+\|f\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&+\max\{\frac{1}{\zeta},\varepsilon,\zeta\varepsilon\}\int_0^t\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|a^\varepsilon(\tau)\|^{m;\zeta,\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\right)d\tau\\
&+(\varepsilon\zeta)\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau+(\zeta\varepsilon)\|a^\varepsilon\|^{l;\zeta}_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}
\end{aligned}
$$

根据格朗沃尔不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
&[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(t)\\
&\le Ce^{\int_0^t\|a^\varepsilon(\tau)\|^2_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^2_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+\frac{1}{\varepsilon}\|a^\varepsilon(\tau)\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau}\left(\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}(0)+\|(a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}(0)\right.\\
&\left.+R_{\zeta,\varepsilon}(t)+\int_0^t\left(\|a^\varepsilon(\tau)\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(\tau)\|_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\right)\|(\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v})(\tau)\|^{l;\zeta}_{\underline{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau\right)\\
&\le Ce^{C(Y^{\zeta,\varepsilon}(t)+(Y^{\zeta,\varepsilon}(t))^2)}\left(\varepsilon\|a^\varepsilon\|^{h;\frac{\eta_0}{\varepsilon}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}(0)+\|(a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|^{h;\zeta}_{B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}(0)+Y^{\zeta,\varepsilon}(t)\|(\mathbf{v},\boldsymbol{V})\|^{h;\frac{\zeta}{16}}_{\widetilde{L}^2_t(B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\right.\\
&+\max\{\frac{1}{\zeta},\varepsilon,\zeta\varepsilon\}Y^{\zeta,\varepsilon}(t)[a^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon]^{\zeta,\varepsilon}_{h,m}(t)+(\zeta\varepsilon)(Y^{\zeta,\varepsilon}(t)+(Y^{\zeta,\varepsilon}(t))^2)\\
&\left.+[\boldsymbol{V}^\varepsilon-\boldsymbol{V},\mathbb{P}\boldsymbol{u}^\varepsilon-\mathbf{v}]^{\zeta,\varepsilon}_l(t)Y^{\zeta,\varepsilon}(t)+\|f\|^{h;\zeta}_{L^1_t(B^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\right).\ \square
\end{aligned}
$$

7 附录

引理 7.1 （[5]）。设 G 是定义在开区间 $I\subset\mathbb{R}$ 上的光滑函数，在 0 处为零，满足 $(-R,R)\subset I$，其中存在某个 $R>0$。若 $s>0$，则对于任意满足$\|f\|_{L^\infty}<R$ 的 $f\in\dot{B}^s_{2,1}(\mathbb{T}^d)$，存在正常数 $C=C(d,s,R,G)$，使得

$$
\|G(f)\|_{\dot{B}^s_{2,1}}\le C\|f\|_{\dot{B}^s_{2,1}}.
$$

引理 7.2 （[5]）。设 A 是定义在 $\widetilde{\mathbb{Z}}^d \times \widetilde{\mathbb{Z}}^d$ 上的函数，且对某些 $\alpha \in \mathbb{R}$， β， $\gamma \geq 0$，有

$$|A(k,m)| \leq K|m|^{\alpha}|k|^{\beta}|m-k|^{\gamma}.$$

Let

$$\mathcal{Q}(u,v) = A(k,m)\hat{u}_k\hat{v}_{m-k}e^{im\cdot x}.$$

则以下不等式成立：

$$\|\mathcal{Q}(u,v)\|_{H^{\sigma-\alpha}} \lesssim K\left(\|\mathcal{F}u\|_{l^1(\widetilde{\mathbb{Z}}^d)}\|v\|_{H^{\sigma+\beta+\gamma}} + \|\mathcal{F}v\|_{l^1(\widetilde{\mathbb{Z}}^d)}\|u\|_{H^{\sigma+\beta+\gamma}}\right) \text{ if } \sigma \geq 0,$$

$\|\mathcal{Q}(u, v)\|_{H^{\sigma-\alpha}} \lesssim K\left(\|\mathcal{F}u\|_{l^1(\widetilde{\mathbb{Z}}^d)}\|v\|_{H^{\sigma+\beta+\gamma}} + \|\mathcal{F}v\|_{l^1(\widetilde{\mathbb{Z}}^d)}\|u\|_{H^{\sigma+\beta+\gamma}}\right)$ 若 $\sigma \geq 0$ 且 $\sigma+\beta+\gamma > 0$.

引理 7.3 （[5]）。设 A、$B \in (KerL)^{\perp}$、$0 < s < 1 + \frac{d}{2}$，以及 $0 < \theta < 1$。则以下估计成立：

$$\|\check{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}, B)\|_{H^{s-2}} \lesssim \|\boldsymbol{u}\|_{L^{\infty}\cap H^{\frac{d}{2}}}\|B\|_{H^{s-1}} \tag{7.1}$$

$$\|\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}, B)\|_{H^{\frac{d}{2}-1-\theta}} \lesssim \|\boldsymbol{u}\|_{\underline{H}^{\frac{d}{2}}}\|B\|_{H^{\frac{d}{2}-\theta}}, \tag{7.2}$$

$$\|\mathcal{Q}_2^{\varepsilon}(A, B)\|_{H^{s-2}} \lesssim \min\{\|A\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|B\|_{H^{s-1}}, \|B\|_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|A\|_{H^{s-1}}\}. \tag{7.3}$$

引理 7.4 （[5]）。设 A、$B \in (KerL)^{\perp}$。则以下估计成立：

$$\|\mathcal{Q}_1(\boldsymbol{u}, A)\|_{H^{\sigma-1}} \lesssim \|A\|_{H^{\sigma+\gamma}}\||k|^{-\gamma}\mathcal{F}\underline{\boldsymbol{u}}\|_{l^1(\widetilde{\mathbb{Z}}^d)} + |\hat{\mathbf{v}}_0|\|A\|_{H^{\sigma}} \quad \text{if} \quad \sigma, \gamma \geq 0, \tag{7.4}$$

$$\|\mathcal{Q}_2(A, B)\|_{H^{\sigma-2}} \lesssim \min\{\|A\|_{B^{\frac{1}{2}}_{2,1}}\|B\|_{B^{\sigma-1}_{2,1}}, \|B\|_{B^{\frac{1}{2}}_{2,1}}\|A\|_{B^{\sigma-1}_{2,1}}\}, \quad \text{if} \quad \frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{2}, \tag{7.5}$$

$$\|\mathcal{Q}_2(A, B)\|_{H^{\sigma-2}} \lesssim \|A\|_{B^{\sigma-1}_{2,1}}\|B\|_{B^{\sigma-1}_{2,1}}, \quad \text{if} \quad \frac{3}{2} \leq \sigma, \tag{7.6}$$

$$\|\mathcal{Q}_2(A, A)\|_{B^{\sigma-1}} \lesssim \|A\|_{B^{\frac{1}{2}}_{2,1}}\|A\|_{B^{\sigma}_{2,1}}, \quad \text{if} \quad -\frac{1}{2} < \sigma. \tag{7.7}$$

致谢

我谨向孙永忠教授致以最诚挚的谢意，感谢他在整个研究过程中给予我宝贵的鼓励与指导。我也衷心感谢李阳教授在学术上的指导，尤其感谢他推荐了具有开创性的著作 [13, 14]。最后，我还要感谢审稿人就参考文献、记号以及论文整体结构提出的宝贵建议。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性声明

本文不适用数据共享声明，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] Bahouri, H., Chemin, J.-Y., Danchin, R.：傅里叶分析与非线性偏微分方程。数学科学基本原理丛书 [数学科学基本原理], 343。Springer，海德堡，2011。[2] Chemin, J.-Y., Lerner, N.：非利普希茨向量场的流与纳维-斯托克斯方程。《微分方程杂志》。**121**，314-328（1995）[3] Desjardins, B., Grenier, E.：全空间中粘性可压缩流的低马赫数极限。R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **455**，2271-2279（1999）[4] Desjardins, B., Grenier, E., Lions, P.-L., Masmoudi, N.：具有狄利克雷边界条件的等熵纳维-斯托克斯方程解的不可压缩极限，《纯粹与应用数学杂志》**78**，461-471（1999）[5] Danchin, R.：具有周期边界条件的可压缩流的零马赫数极限。《美国数学杂志》**124**，1153-1219（2002）[6] Danchin, R., He, L.：Lp型临界空间中的不可压缩极限。Math. Ann. **366**，1365-1402（2016）[7] Danchin, R.：可压缩纳维-斯托克斯方程在临界空间中的零马赫数极限。Ann. Sci. $\acute{E}$cole Norm. Sup. (4),**35**，27-75（2002）[8] Danchin, R.：可压缩纳维-斯托克斯方程在临界空间中的整体存在性。Invent. Math.**141**，579-614（2000）[9] Danchin, R.：密度并非真正常数的正压粘性流体在临界空间中的适定性。Comm. Partial Differential Equations. **32**，1373-1397（2007）[10] Ebin, D. G.：将轻微可压缩流体的运动视为受强约束力作用的运动，《数学年刊》，**105**，141-200（1977）[11] Feireisl, E., Karper, T., Kreml, O., Stebel, Jan.：可压缩粘性流体低马赫数极限相对于区域的稳定性。Math. Models Methods Appl. Sci.**23**，2465-2493（2013）[12] Feireisl, E., Novotn´y, A.：粘性流体热力学中的奇异极限，第二版，《数学流体力学进展》，Birkh¨auser/Springer，沙姆，2017。[13] Fujii, M.：临界贝索夫空间中大数据可压缩 Navier-Stokes 方程组整体解的低马赫数极限。Math. Ann. **388**，4083-4134（2024）[14] Fujii, M., Li, Y.：临界框架 L^p 下二维纳维–$\widehat{}$斯托克斯–Korteweg 方程组全局大解的低马赫数极限。Calc. Var. Partial Differential Equations.**64**，第29篇（2025）[15] Gallagher, I.：Schochet 方法在抛物方程中的应用。《纯粹与应用数学杂志》**77**，989-1054（1998）

[16] Grenier, E.：纳维–斯托克斯方程的振荡扰动，《纯粹与应用数学杂志》**76**，477-498（1997）。[17] Hoff, D.：可压缩流的零马赫数极限。《数学物理通讯》**192**，543-554（1998）[18] Hagstrom, T., Lorenz, J.：弱可压缩流经典解的全时存在性。《工业与应用数学学会数学分析杂志》**29**，652-672（1998）[19] Jiang, N., Masmoudi, N.：低马赫数极限与声波，《黏性流体力学中的数学分析手册》，2018，第2721-2770页。[20] Klainerman, S., Majda, A.：具有大参数的拟线性双曲系统的奇异极限与可压缩流体的不可压缩极限，《纯粹与应用数学通讯》**35**，629-651（1982）[21] Klainerman, S., Majda, A.：可压缩流体与不可压缩流体，《纯粹与应用数学通讯》**35**（1982），629-651（1982）[22] Li, S.：临界 Besov 空间中大初始数据的可压缩磁流体力学方程整体解的不可压缩极限。《数学物理学杂志》**66**，071508（2025）[23] Lions, P.-L., Masmoudi, N.：黏性可压缩流体的不可压缩极限。《纯粹与应用数学杂志》**77**，585-627（1998）[24] Li, F. C., Mu, Y. M.：周期区域中可压缩磁流体力学方程的低马赫数极限。《离散与连续动力系统》**38**，1669-1705（2018）[25] Masmoudi, N.：可压缩 Navier-Stokes 方程组的不可压缩无黏极限。《高等科学研究院亨利·庞加莱分析研究所年鉴》。非线性分析。**18**，199-224（2001）[26] Ogino, S.：尺度临界空间中可压缩纳维-斯托克斯方程低马赫数极限的强收敛。《数学与流体力学杂志》**27**，40（2025）[27] Schochet, S.：双曲型偏微分方程的快速奇异极限。《微分方程杂志》**114**，476-512（1994）[28] Schochet, S.：流体动力学中不可压缩极限的数学理论，《数学流体力学手册》第IV卷，2007，第123-157页。