arXiv:2603.00899v1 [math.CO] 1 Mar 2026

根图的强零度参数

Aida Abiad [*†] Mary Flagg [‡] H. Tracy Hall [§] Jephian C.-H. Lin [¶] Bryan Shader [‖]

摘要

图的逆特征值问题 G 研究与 G相关的矩阵可能具有的谱，包括一个重要子问题：此类矩阵可能具有的零度。迄今为止，该领域的大部分研究仅关注矩阵本身的谱，但逆特征值问题也有一些应用涉及该谱与某个极大真主子矩阵的谱之间的相互作用，换言之，即划去任意一行及其对应列后得到的交错谱。受这一更精细信息的启发，给定一个具有指定根顶点、 n 阶的图 G ，我们研究所有可能的零度对，其中第一个零度是与 G 相关的 $n \times n$ 对称矩阵的零度，第二个零度则是删除与根顶点对应的行和列后得到的阶数为$(n-1) \times (n-1)$的主子矩阵的零度。我们为满足强零度交错性质的有根图$(G,\ i)$定义了一个新参数 $\xi\xi(G,\ i)$，用以协调零度对中的两个值，并证明该图参数具有小图单调性。此外，我们证明了强零度交错性质的一个分岔引理。我们运用这些新工具，通过求出各类图的极小子式，刻画满足$\xi\xi(G,\ i) \geq s$的 $s \in \{0,1,2,3,4,5\}$。这些图类与 $\xi(G) \geq k$的极小子式有着密切联系。

关键词：逆特征值问题、强零度交错性质、强阿诺德性质、零度对、根图子式

AMS 学科分类：05C50, 05C83, 15A03, 15B57, 65F18。

*埃因霍温理工大学数学与计算机科学系，荷兰埃因霍温（a.abiad.monge@tue.nl）

†布鲁塞尔自由大学数学与数据科学系，比利时

‡圣托马斯大学数学与计算机科学系，美国德克萨斯州休斯敦（flaggm@stthom.edu）§ Hall Labs LLC，美国犹他州普罗沃（h.tracy@gmail.com）

¶国立阳明交通大学应用数学系，台湾新竹 300093（jephianlin@gmail.com）

‖怀俄明大学，美国科罗拉多州（bshader@uwyo.edu）

1 引言

设 G 是一个有 n 个顶点的图。与 G 相关联的矩阵集合记作 $\mathcal{S}(G)$，由所有满足以下条件的 $n \times n$ 实对称矩阵组成：其非对角线的（i，j）元素非零，当且仅当 $\{i, j\}$ 是 G 的一条边。这里，对角线元素可以是任意实数。图的逆特征值问题G （IEP-G）旨在刻画 $\mathcal{S}(G)$ 中的矩阵可能具有的所有谱。IEP-G 的研究受到振动理论 [9, 13–16, 18, 22] 的启发，并且通过例如 Colin de Verdi`ere 型参数 [3,4,10,11] 与图结构有着密切联系。有关 IEP-G 的更多详情，请参见专著[20]。

尽管矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$ 的谱一直是 IEP-G 的主要关注点，同时考虑极大真主子矩阵的谱也是很自然的。令 $A(i)$ 为从 A 中删去第 i 行和列所得到的子矩阵。研究 A 的特征值（记为 λ_i）和 $A(i)$ 的特征值（记为 μ_i）的（λ，μ）问题，在文献中已受到相当多的关注，参见例如 [7–9, 13–16, 18, 22]。近期，i-零度对 被定义为 (null(A)，null($A(i)$))，并被证明与根图结构 [1] 有着密切联系。

若矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$ 中只有 $X = O$ 是同时满足 $A \circ X = I \circ X = O$ 和 $AX = O$ 的对称矩阵，则称该矩阵具有强 Arnold 性质（或称具有 SAP）。Colin de Verdi`ere 利用 SAP 定义了图参数 $\mu(G)$，并证明它是小图单调的 [10, 11]；也就是说，若 $G$ 是 $H$ 的一个子式，则 $\mu(G) \leq \mu(H)$。这里，$G$ 是 $H$ 的一个子式，意指 $G$ 可通过一系列操作从 $H$ 得到，这些操作包括删除一条边、删除一个孤立顶点以及收缩一条边。受 Colin de Verdi`ere 参数 $\mu(G)$ 的启发，参数 $\xi(G)$ 被定义为具有 SAP 的矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$ 的最大零度，并且也已证明它具有小图单调性 [3]。同一篇论文还证明，$\xi(G) \geq 2$ 当且仅当 G 包含 K_3 或 K_1,3 作为子式；而 $\xi(G) \geq 3$ 当且仅当 G 包含 T_3 系列中的一个子式，如图 3 所示。

一般而言，如果图参数 $\zeta(G)$ 是小图单调的，那么如果图 G 达到 $\zeta(G) \geq k$，且 $\zeta(G) \geq k$，而 G 的任意真子式F 都满足 $\zeta(F) < k$，则称其为极小子式。因此，可以通过找出所有极小子式来刻画满足 $\zeta(G) \geq k$ 的图 G；根据图小图定理，对于每个 k，这样的极小子式只有有限多个；例如，参见 [12]。类似的思路也适用于有根图。有根图 (G, i) 是指一个简单图 G，其中指定一个顶点 i 作为根。若 (G, i) 可由有根图 (H, j) 通过删去一条边、删去一个非根顶点或收缩一条边得到，则称 (G, i) 是 (H, j) 的有根子式；若被收缩的边与原来的根关联，则收缩后得到的新顶点成为该子式的根。于是，若对于任何满足“(G, i) 是 (H, j) 的有根子式”的情形，都有 $\zeta(G, i) \leq \zeta(H, j)$，则称有根图参数 $\zeta(G, i)$ 是小图单调的。根据针对有根图的类似图小图定理 [23]，，对于任何给定的 s，$\zeta(G, i) \geq s$ 的极小子式集合也是有限的。

在 [1]，中引入了关于矩阵及其子矩阵的类似论述

并进行了研究。设 (G, i) 是一个有根图，且 A 是 $\mathcal{S}(G)$ 中的一个矩阵。如果 $X = O$ 是唯一满足恒等式 $A \circ X = I \circ X = O$ 和 $(AX)(i, :] = O$ 的对称矩阵，我们就称 A 具有 i-强零度交错性质（或称具有 i-SNIP）。这里，$(AX)(i, :]$ 表示从 A 中删去第 i 行后得到的（非方形）子矩阵。如果存在矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$，使其达到 i-零度对 (k, ℓ)（或具有 i-SNIP），则称 (G, i) 允许零度对 (k, ℓ)（或具有 i-SNIP）。 [1] 的一项结果表明，这种新的强性质保证了子式单调性：若 (G, i) 允许零度对 (k, ℓ) 并具有 i-SNIP，且是 (H, i) 的有根子式，则 (H, i) 也允许 (k, ℓ)。利用这一子式单调性定理， [1], 分别通过极小子式刻画了允许在 i-SNIP 下取值为 (0, 0)、(0, 1)、(1, 1) 或 (1, 2) 的有根图。

本文引入一个新参数 $\xi\xi(G, i)$，其定义为：对某个 $k \leq \ell$，存在矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$，具有i-零度对 (k, ℓ)、 $k \leq \ell$ 以及 i-SNIP 时， $k + \ell$ 所能取到的最大值。子式单调性可以重新表述为：每当 (G, i) 是 (H, j) 的有根子式时，便有 $\xi\xi(G, i) \leq \xi\xi(H, j)$。除子式单调性外，我们还证明了关于 $\xi\xi(G, i)$ 的分岔引理，表明直至最大值的每一个非负和均可达到：若 $k + \ell \leq \xi\xi(G, i)$ 且$k \leq \ell$，则 (G, i) 也允许带有 i-SNIP 的 i-零度 (k, ℓ)。因此，这一新参数同时协调零度对中的两个值——例如，(G, i) 允许带有 i-SNIP 的 (1, 2)，当且仅当 $\xi\xi(G, i) \geq 3$。换言之， [1] 的极小子式结果可以重新表述为：枚举刻画对 $s \in \{0, 1, 2, 3\}$ 而言 $\xi\xi(G, i) \geq s$ 的全部极小子式。在本文中，我们将 $\xi\xi(G, i) \geq s$ 的刻画推广到 $s = 4$与 $s = 5$，从而推进这些结果。 $s \in \{0, \ldots, 5\}$ 情形下 $\xi\xi(G, i) \geq s$ 的极小子式如图 1 所示。本文的另一结果是：对任意 $k \geq 0$， $\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$ 的极小子式可由$\xi\xi(G, i) \geq 2k$ 的极小子式通过在原根上附加一片叶子作为新根而得到。这一现象此前已在 $s \in \{0, 1\}$ 与 $s \in \{2, 3\}$ 情形下 $\xi\xi(G, i) \geq s$ 的极小子式中观察到，但本文证明它实际上对任意对 $s \in \{2k, 2k + 1\}$ 都成立。

本文结构安排如下。第 2 节介绍所需的背景知识和记号。第 3 节给出分岔引理及相关结果，证明允许的零度对和构成连续整数序列。在第 4 节中，我们证明， $\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$ 的极小子式可由 $\xi\xi(G, i) \geq 2k$ 的极小子式添加一个叶子得到。在第 5 节中，我们研究零度对与舒尔补构造之间的相互作用，这对接下来的章节至关重要。基于这些结果，我们在第 6 节中刻画 $\xi\xi(G, i) \geq 4$, 5的极小子式。最后，我们在第 7 节中全面研究 i-SNIP，包括分岔引理的证明、边界，以及 i-SNIP的一个等价零空间定义。最后的第 8 节包含一些结语，以及一个基于本文研究所得观察提出的开放问题。

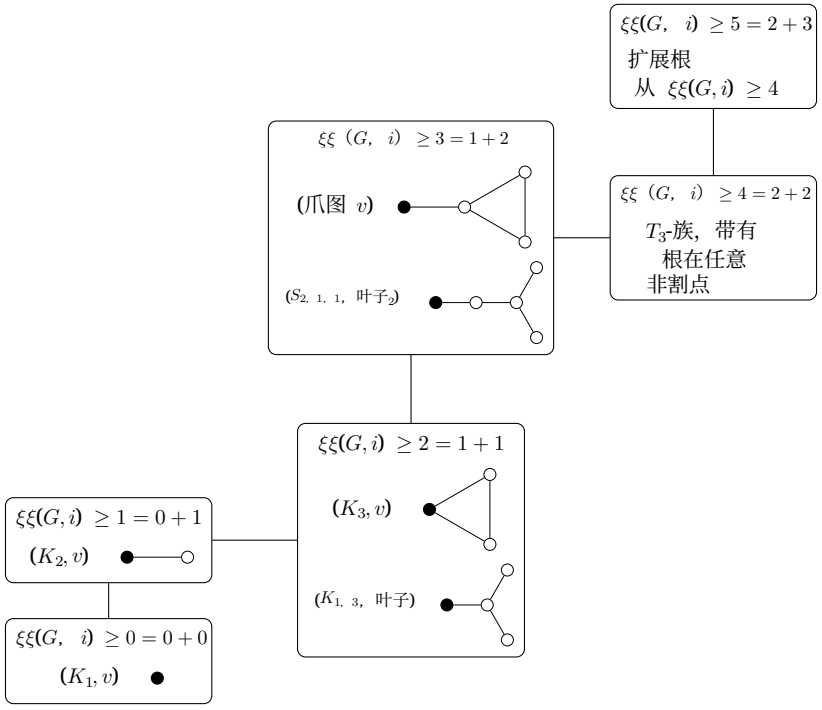

图 1： $\xi\xi$ 的极小子式。

2 预备知识

设 A 为一个实对称矩阵， i 为一个指标。已知对于每个实例，以下情形恰有一种成立（例如，见 [1, 注 2.1]）：

- 零度$(A) + 1 =$ 零度$(A(i))$,
- 零度$(A) =$零度$(A(i))$,
- 零度$(A) - 1 =$ 零度$(A(i))$.

根据这三种情况中的哪一种成立，我们分别称指标 i 为 上指标、中性或 下指标。这一刻画的一个推论是，任何零度对（null(A),null$(A(i))$ $= (k, \ell)$ 必然满足 $|k - \ell| \leq 1$。

另一方面，我们知道 (k, k) 和 $(k + 1, k)$ 这两种情况在以下意义下是等价的。

命题 2.1 ([1]的推论2.3和3.10)。设(G, i) 是一个有根图。那么(G, i) 允许零度对(k, k)（分别地，具有 i-*SNIP*），当且仅当(G, i) 允许零度对$(k + 1, k)$（分别地，具有 i-*SNIP*）。

因此，当 $k \leq \ell$ 时，我们关注零度对 (k, ℓ)，并将参数 $\xi\xi(G, i)$ 定义为满足以下条件的最大 $k + \ell$： (G, i) 允许零度对 (k, ℓ)，且 $k \leq \ell$。

此外， [1,引理 3.6] 指出，若 A 具有 i-SNIP，则 A 和 $A(i)$ 都具有 SAP。因此，若 (G,i) 允许零度对 (k,ℓ)，且具有 i-SNIP 并满足$k \le \ell$，则 $k \le \xi(G)$ 和 $\ell \le \xi(G-i) \le \xi(G)$。由此得到 $\xi\xi(G,i) \le 2\xi(G)$，这也说明了采用该记号的理由。

事实上， i-SNIP 可以通过检验适当矩阵的 SAP 得到完全刻画。用 $E_{i,i}$ 表示其 (i,i)-元为 1 而其余所有元均为 0 的 $n \times n$ 矩阵。

定理 2.2 （定理 3.9，见 [1]）。设 $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$，并设 i 为$\{1,\dots,n\}$中的一个指标。则下述刻画成立。

(a) 若 i是 A的下指标，则 A具有 *i-SNIP* 当且仅当 A具有 *SAP*。(b) 若 i 是 A 的中性指标，且 t 是使得 i为 $A + tE_{i,i}$ 的下指标的唯一值，则 A 具有 *i-SNIP* 当且仅当 $A + tE_{i,i}$ 具有 *SAP*。(c) 若 i 是 A的上指标，则 A 具有 *i-SNIP* 当且仅当 $A(i)$ 具有 *SAP*。

当 A 与 B 为实对称矩阵，且 i 是 A的指标时， [1,命题 3.5] 指出，直和 $A \oplus B$ 具有 i-SNIP 当且仅当 A具有 i-SNIP 且 B 可逆，由此得到命题 2.3。这使得我们可以将注意力限制在连通图上。

命题 2.3。设 $G \dot\cup H$ 是图 G 和图 H 的不交并，且$i \in V(G)$。那么

$$\xi\xi(G \dot\cup H, i) = \xi\xi(G,i).$$

最后，我们引入子矩阵的记号。设 A 是一个矩阵， α 是行指标的子集，β 是列指标的子集。那么 $A[\alpha,\beta]$ 表示由 A 中属于 α 的行和属于 β的列所诱导的子矩阵。与此相反， $A(\alpha,\ \beta)$ 是从 A 中删除 α 中的行和 β中的列后得到的子矩阵。 $A(\alpha,\ \beta]$ 和 $A[\alpha,\beta)$ 的含义也很直接。为方便起见，我们记 $A[\alpha] = A[\alpha,\alpha]$、 $A(\alpha) = A(\alpha,\ \alpha)$，以及 $A(i) = A(\{i\})$。记号 : 用于表示所有指标的集合，因此 $A(i,\ :]$ 是从 A中仅删除第 i 行后得到的非方形子矩阵。

3 分岔引理

由于对于任意矩阵 A 和指标 i， $|\operatorname{null}(A) - \operatorname{null}(A(i))| \le 1$，所有出现的零度对 $(k,\ \ell)$ 都是笛卡尔平面第一象限中的格点，并且位于直线 $\ell = k+1$、 $\ell = k$ 或 $\ell = k-1$ 上。

自然会提出以下问题：如果 $(G,\ i)$ 允许 $(k,\ \ell)$，这是否意味着 $(G,\ i)$ 允许 $(k-1,\ \ell)$ 或 $(k,\ \ell-1)$? 我们对这个问题给出肯定回答（证明分为三种情况），并在图 2 中加以说明。

1. 有根图 (G,i) 允许 $(k+1,k)$（分别带有 i-SNIP）当且仅当它允许 (k,k)（分别带有 i-SNIP）。（请观察图 2 中的灰色实线箭头。）

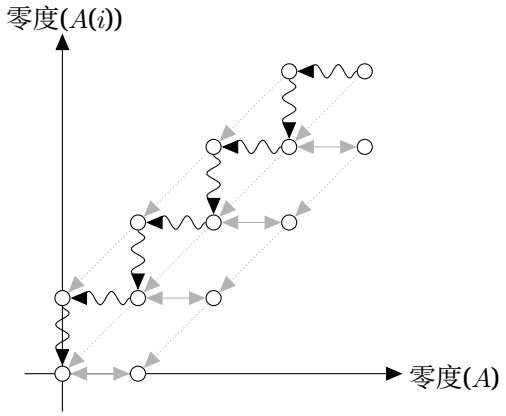

图 2：零度对阶梯。

2. 如果有根图 (G, i) 允许 $(k+1, \ell+1)$，则它允许 (k, ℓ)。（请观察图 2 中的灰色虚线箭头。）3. 如果有根图 (G, i) 允许带有 i-SNIP 的 $(k+1, k+1)$，则它允许带有 i-SNIP 的 $(k, k+1)$。类似地，如果 (G, i) 允许带有 i-SNIP 的 $(k, k+1)$，则它允许带有 i-SNIP 的 (k, k)。（请观察图 2 中的黑色波浪箭头。）

第一种情形由命题 2.1 得出。这是一个不需要 i-SNIP 的步骤，但如果原矩阵具有 i-SNIP，则它保持 i-SNIP。第二种情形中的步骤不需要 i-SNIP，并且也不一定保持 i-SNIP。第三种情形既需要也保持 i-SNIP。现在我们证明第二种情形。

定理 3.1. 对于 $k, \ell \geq 0$，若有根图 (G, i) 允许 $(k+1, \ell+1)$，则它允许 (k, ℓ)。

证明. 设 $A \in \mathcal{S}(G)$ 具有 i-零度对 $(k+1, \ell+1)$。我们首先断言，存在非零向量 $\mathbf{v} \in \ker(A)$，使得其第 i 个分量 $(\mathbf{v})_i$ 为 0。为说明这一点，我们考虑两种情形。首先，我们考虑 $k+1 \geq 2$ 的情形。由于 $\ker(A)$ 的任一基至少包含两个向量，我们可以取它们的线性组合，构造非零向量 $\mathbf{v} \in \ker(A)$，且 $(\mathbf{v})_i = 0$。其次，我们考虑 $k+1 = 1$ 且 $\ker(A) =$ 张成空间$\{\mathbf{v}\}$ 对某个向量 $\mathbf{v}$ 成立的情形。若 $(\mathbf{v})_i = 0$，则得证。否则，$(\mathbf{v})_i \neq 0$意味着 A 的列i 是其他列的线性组合。由于 A 是对称的，这意味着零度$(A(i)) =$ 零度$(A) - 1 = 0 = \ell + 1$，这与假设 $\ell \geq 0$ 矛盾。

令 $\mathbf{v} \in \ker(A)$ 为一个非零向量，且满足 $(\mathbf{v})_i = 0$。令 j 为一个指标，使得 $(\mathbf{v})_j \neq 0$。必然有 $j \neq i$。我们断言，$A' = A + E_{j,\,j}$具有 i-零度对 $(k,\ \ell)$。为此，我们注意到，$(\mathbf{v})_j \neq 0$ 意味着 A的第 j 列是其他列的线性组合，因此 $\mathrm{null}(A(j)) = \mathrm{null}(A) - 1 = k$。另一方面，对 A'进行行列变换后，第 j 列和第 j 行

剩下一个位于 $(i,\ i)$ 位置的非零元素 1。因此，$\mathrm{null}(A') = \mathrm{null}(A(j)) = k$。另一方面，令 $\mathbf{u}$ 为从 $\mathbf{v}$ 中删去元素 i后得到的向量。则$\mathbf{u} \in \ker(A(i))$ 是一个非零向量，且满足 $(\mathbf{u})_j \neq 0$。同理，我们有

$$\mathrm{null}(A'(i)) = \mathrm{null}(A(\{i,j\}) = \mathrm{null}(A(i)) - 1 = \ell.$$

□

对于第三种情形，我们需要用到分岔引理（定理 3.2），其证明将在第 7 节给出。

定理 3.2 (分岔引理)。 设 (G,i) 是一个有 n 个顶点的有根图，且 $A \in \mathcal{S}(G)$ 是一个具有 *i-SNIP* 的矩阵。那么存在一个 $\epsilon > 0$，使得对于任意满足 $\|M - A\| < \epsilon$ 的 $M \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$，都存在一个矩阵 $A' \in \mathcal{S}(G)$，它具有 *i-SNIP*，且 M 与 A' 具有相同的 *i*-零度对。

引理 3.3 (West 引理)。 对于 $k \geq 0$，如果有根图 (G,i) 在具有 *i-SNIP* 时允许零度对 $(k+1,k+1)$，那么它在具有 *i-SNIP* 时也允许零度对 $(k,k+1)$。

证明。 设 A 是 $\mathcal{S}(G)$ 中一个具有 i-SNIP 的矩阵，它对某个 $k \geq 0$ 实现了 i-零度对 $(k+1,k+1)$。为方便起见，不失一般性，我们可以假设 $i = 1$，并写作

$$A = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{bmatrix}.$$

由于 i 是 A 的中性指标，我们有 $\mathbf{b} \in \mathrm{Col}(C)$。由于 $k \geq 1$，存在一个非零向量 $\mathbf{v} \in \ker(C)$。考虑矩阵

$$M = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^\top + \epsilon\mathbf{v}^\top \\ \mathbf{b} + \epsilon\mathbf{v} & C \end{bmatrix}.$$

对于 $\epsilon \neq 0$，现在我们有 $\mathbf{b} + \epsilon\mathbf{v} \notin \mathrm{Col}(C)$，因此 i 是 M 的上指标，且 M 的 i-零度对为 $(k,k+1)$。根据分岔引理（定理 3.2），存在一个矩阵 $A' \in \mathcal{S}(G)$，它具有 i-SNIP，且达到 i-零度对 $(k,k+1)$。

□

引理 3.4 (South 引理)。 对于 $k \geq 0$，如果有根图 (G,i) 允许具有 *i-SNIP* 的 $(k,k+1)$，那么它也允许具有 *i-SNIP* 的 (k,k)。

证明。 设 A 是 $\mathcal{S}(G)$ 中具有 i-SNIP 且达到 i-零度对 $(k,k+1)$ 的一个矩阵。为方便起见，不失一般性，我们可以假设 $i = 1$，并写作

$$A = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{bmatrix}.$$

由于 i 是 A的上指标，因此 $\mathbf{b} \notin \mathrm{Col}(C)$。等价地，存在一个向量 $\mathbf{v} \in \ker(C)$，使得 $\mathbf{b}^\top\mathbf{v} \neq 0$。考虑矩阵

$$M = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C + \epsilon\mathbf{b}\mathbf{b}^\top \end{bmatrix}.$$

对于 $\epsilon \neq 0$，现在有

$$(C + \epsilon \mathbf{b}\mathbf{b}^\top)\mathbf{v} = \mathbf{0} + \epsilon(\mathbf{b}^\top \mathbf{v})\mathbf{b},$$

因此$\mathbf{b} \in \mathsf{Col}(C+\epsilon\mathbf{b}\mathbf{b}^\top)$，且 i 是 A'的下指标或中性指标。注意，添加一个小的秩一扰动至多只能使零度改变1，并且当扰动很小时，零度只能保持不变或减小。总之，$\mathsf{null}(M) \in \{k, k-1\}$且$\mathsf{null}(M(i)) \in \{k+1, k\}$。使 i成为下指标或中性指标的唯一可能是$\mathsf{null}(M) = k = \mathsf{null}(M(i))$。根据分岔引理（定理 3.2），存在矩阵 $A' \in \mathcal{S}(G)$，它具有i-SNIP，并达到与 M相同的 i-零度对，即(k, k)。 □

例 3.5. 考虑星图$K_{1,5}$。设$(K_{1,5}$,中心)和$(K_{1,5}$,叶子)是分别以中心和任意叶子为根、基于$K_{1,5}$ 的根图。若我们只关注满足 $k \leq \ell$的零度对(k, ℓ)，则由[1,命题 4.6] 可知，允许的零度对如下。

- $(K_{1,5}, \text{center})$ allows $\underline{(0,0)}$, $\underline{(0,1)}$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, and $(4,5)$.
- $(K_{1,5}, \text{leaf})$ allows $\underline{(0,0)}$, $\underline{(0,1)}$, $\underline{(1,1)}$, $(2,2)$, and $(3,3)$.

这里，下划线标出的零度对是根据 [1,定理 5.12]允许 i-SNIP 的零度对。我们注意到，$(K_{1,\ 5}$，中心)允许 (1，2)，但不允许 (1，1)，这表明引理 3.4 中必需使用 i-SNIP。另一方面，$(K_{1,\ 5}$，叶子)允许 (2，2)，但不允许 (1，2)，这表明引理 3.3 中必需使用 i-SNIP。在更大的星图中也能观察到类似的行为。

4 扩展根

如果有根图 $(G,\ i)$ 是通过扩展根 从有根图 $(H,\ j)$ 得到的，我们称之为扩展根；具体而言，G 由 H 通过将叶子 i 附加到 j 并将根重新指定为 i而得到。参见图 1，我们观察到，$\xi\xi(G,\ i)$ 的极小子式 $\geq 2k+1$ 恰好是通过扩展根从 $\xi\xi(G,\ i)$ 的极小子式 $\geq 2k$ 得到的那些有根图。根据 [1]，这一观察至少对 $k \in \{0, 1\}$ 成立。事实证明，这一观察对所有 $k \geq 0$普遍成立。

我们首先证明，$\xi\xi(G,\ i) \geq 2k+1$ 的极小子式的根总是位于叶子上。

引理 4.1。如果 (G, i) 是某个 $k \geq 0$ 的 $\xi\xi(G, i) \geq 2k+1$ 的极小子式，那么 i 就是 G的叶子。

证明。固定 $k \geq 0$，令 (G, i) 使 $\xi\xi(G, i) \geq 2k+1$ 达到一个极小子式。不失一般性，我们可以假设 $i = 1$。令 A 为$\mathcal{S}(G)$中的一个矩阵，它具有 i-SNIP，并达到 i-零度对 $(k, k+1)$。由于 $k \geq 0$ 且 $\mathsf{null}(A(i)) = k+1 \geq 1$，$G - i$至少有一个顶点，因此我们可以假设 G有$n+1$ 个顶点，且 $n \geq 0$。我们可以写作

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{bmatrix}.$$

由于 i 是一个上指标，我们有 $\mathbf{b} \notin \mathrm{Col}(C)$；等价地，存在一个向量$\mathbf{v} \in \ker(A)$，使得 $\mathbf{b}^\top \mathbf{v} \neq 0$。令 j 为 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{v}$ 均非零的一个指标，并令 $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ 为一个向量，其第 j 个分量等于 1，其他所有分量均为 0。则矩阵

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \mathbf{e}_j^\top \\ \mathbf{e}_j & C \end{bmatrix}$$

也具有 i-零度对 $(k, k+1)$，因为 $\mathbf{e}_j \notin \mathrm{Col}(C)$。

由于 i 是 A 和 A'的上指标，根据定理 2.2，A 具有 i-SNIP，当且仅当 C 具有 SAP，当且仅当 A' 具有 i-SNIP。现在令 G' 为从 G 中删除所有与 i 关联的边（$\{i, j\}$ 除外）后得到的图。于是 $A' \in \mathcal{S}(G')$，且 (G', i) 是 (G, i) 的一个有根子式，在具有 i-SNIP 的情况下，该子式允许相同的零度对 $(k, k+1)$。这意味着，如果 i 不是叶子，那么 (G, i) 就不是关于 $\xi\xi \geq 2k+1$ 的次图极小。等价地，$\xi\xi(G, i)$ 的每个极小子式 $\geq 2k+1$ 都将根置于叶子上。 □

下一个引理揭示了奇数情形与偶数情形之间的联系。

引理 4.2。设 G 是一个具有 $n+1$ 个顶点的图，设 $i \in V(G)$ 是 G 的一片叶子，其 j 为其唯一邻点，并设 $H = G - i$。设 A 是 (G) 中的一个矩阵，其中 $B = A(i)$ 是 $\mathcal{S}(H)$ 中的一个矩阵。那么，当且仅当 j 是 B 的下指标时，i 才是 A 的上指标。此外，当且仅当 B 具有 *j-SNIP* 时，A 才具有 *i-SNIP*。

证明。为方便起见，不妨设 $i = 1$、$j = 2$，并写成

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & k & \mathbf{0}^\top \\ k & a_{2,2} & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & C. \end{bmatrix}.$$

注意，$A(i, i] = k\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$。回忆一下，当且仅当 $k\mathbf{e}_j \notin \mathrm{Col}(B)$ 时，i 是 A 的上指标。现在我们研究 j 对于 B 为上指标、中性和下指标的情形。

当 j 为上指标时，我们有 $\mathbf{b} \notin \mathrm{Col}(C)$。这意味着存在 $\mathbf{v} \in \ker(C)$，使得 $\mathbf{b}^\top \mathbf{v} \neq 0$。因此，

$$B \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^\top \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

在这种情况下，$k\mathbf{e}_j \in \mathrm{Col}(B)$。

当 j 为中性时，对于某个 $\mathbf{x}$，我们有 $\mathbf{b} = C\mathbf{x}$，并且对于某个 $p \neq 0$，有 $a_{2,2} = \mathbf{x}^\top C\mathbf{x} + p$。因此我们有

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\top C\mathbf{x} + p & \mathbf{x}^\top C \\ C\mathbf{x} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

在这种情况下，$k\mathbf{e}_j \in \mathrm{Col}(B)$。

当 j 为下指标时，对某个$\mathbf{x}$ 以及$a_{2,2} = \mathbf{x}^\top C\mathbf{x}$，我们有$\mathbf{b} = C\mathbf{x}$。于是$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix}$ 属于$\ker(C)$，且 $k\mathbf{e}_j^\top \mathbf{v} = k \neq 0$。因此，在这种情形下，$k\mathbf{e}_j \notin \mathrm{Col}(B)$。

由于我们已经讨论了所有可能的情形，可知 i 是 A 的上指标当且仅当 $k\mathbf{e}_j \notin \mathrm{Col}(B)$，当且仅当 j 是 B的下指标。

最后， A 具有上指标 i 时，具有 i-SNIP，当且仅当 $A(i) = B$ 具有 SAP；而根据定理 2.2， B 具有下指标 j 时，具有 j-SNIP。 □

推论 4.3. 设(G, i) 由(H, j) 扩展根得到。那么$\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$，当且仅当 $\xi\xi(H, j) \geq 2k$。

证明。 假设 $\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$。那么 (G, i) 允许 $(k, k + 1)$ 具有 i-SNIP。根据引理 4.2，(H, j) 允许 $(k + 1, k)$ 具有 i-SNIP。根据命题 2.1，(H, j) 允许 (k, k) 具有 i-SNIP，且 $\xi\xi(H, j) \geq 2k$。

反过来，假设 $\xi\xi(H, j) \geq 2k$。那么 (H, j) 允许 (k, k) 具有 i-SNIP。根据命题 2.1，(H, j) 也允许 $(k+1, k)$ 具有 i-SNIP。根据引理 4.2，(G, i) 允许 $(k, k + 1)$ 具有 i-SNIP。 □

注意， $\xi\xi(P_3, \text{叶子}) = \xi\xi(P_2, \text{叶子}) = 1$，因此 $\xi\xi(G, i) = 2k + 1$ 并不一定意味着 $\xi\xi(H, j) = 2k$。

现在我们证明， $\xi\xi(G, i) \geq 2k$和 $\xi\xi(G, i) \geq 2k+1$ 的极小子式可以相互推导。

定理4.4。 对于每个 $k \geq 0$， $\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$ 的极小子式，恰好是通过扩展其根，从 $\xi\xi(G, i) \geq 2k$ 的极小子式得到的那些有根图。

证明。令 (G, i) 以极小子式的方式实现 $\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$。根据引理 4.1，i 是 G 的叶子。令 j 为 i 在 G 中的唯一邻点，并令 $H = G - i$。根据推论 4.3， $\xi\xi(H, j) \geq 2k$。若 (H', j') 是 (H, j) 的真根子式，则通过扩展根从 (H', j') 得到的有根图 (G', i') 是 (G, i) 的真根子式。若 $\xi\xi(H', j') \geq 2k$，则根据推论 4.3， $\xi\xi(G', i') \geq 2k + 1$，这与 (G, i) 的极小性矛盾。因此，(H, j) 以极小子式的方式实现$\xi\xi(H, j) \geq 2k$。

反过来，假设 (H, j) 将 $\xi\xi(H, j) \geq 2k$ 作为极小子式实现。设 (G, i) 是由 (H, j) 扩展根得到的。由推论 4.3，$\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$。设 (G', i') 是 (G, i) 的一个真子式。如果 i' 不是叶子，那么为了得到 (G', i')，边 $\{i, j\}$ 要么在 (G, i) 中被删除，要么被收缩。前一种情况下， $i = i'$是一个孤立顶点，并且根据命题 2.3， $\xi\xi(G', i') = 0 < 2k+1$。后一种情况下，$(G', i')$ 是 (H, j) 的一个子式，这意味着$\xi\xi(G', i') \leq \xi\xi(H, j) \leq 2k$。如果 i' 是叶子，且其唯一邻点为 j'，那么带有 $H' = G' - i'$ 的有根图 (H', j') 是 (H, j) 的一个真子式。如果$\xi\xi(G', i') \geq 2k+1$，那么根据引理 4.2， $\xi\xi(H', j') \geq 2k$，这与 (H, j) 的极小性矛盾。因此，(G, i) 将 $\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$ 作为极小子式实现。

□

5 舒尔补

本节将给出一些关于舒尔补的一般性结果，这些结果有许多应用。

设 A 为一个形式如下的实对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} Q & B^\top \\ B & C \end{bmatrix}$$

使得 Q 可逆。则 A 中 Q的舒尔补记为并定义为

$$A/Q = C - BQ^{-1}B^\top.$$

注意，舒尔补的概念一般并不限于方阵（尽管 Q 必须是方阵才能可逆），但我们只关注实对称情形。此外，舒尔补背后的直观来自行列变换

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -BQ^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & B^\top \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -Q^{-1}B^\top \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & O \\ O & A/Q \end{bmatrix}.$$

因此，我们有$\mathrm{null}(A) = \mathrm{null}(A/Q)$。

命题 5.1. 设 A 是一个 $n \times n$ 实对称矩阵，使得对某个 $\alpha \subseteq [n]$， $A[\alpha]$ 可逆。则对任意 $i \notin \alpha$， A 与 $A/A[\alpha]$ 具有相同的i-零度对。

证明。由舒尔补的性质，$\mathrm{null}(A) = \mathrm{null}(A/A[\alpha])$。不失一般性，我们可以假设 α 是前若干个指标，并记

$$A = \begin{bmatrix} A[\alpha] & B^\top \\ B & C \end{bmatrix}$$

从而 $A/A[\alpha] = C - BA[\alpha]^{-1}B^\top$。由直接计算，

$$(A/A[\alpha])(i) = C(i) - (BA[\alpha]^{-1}B^\top)(i) = A(i)/A[\alpha],$$

所以零度$((A/A[\alpha])(i)) = $ 零度$(A(i))$。总之， A 和 $A/A[\alpha]$ 具有相同的i-零度对。 □

在 [3, 引理 3.5]和 [19, 引理 3.2], 中，证明了在某些假设下， A 具有 SAP 蕴含 $A/A[\alpha]$也具有 SAP。这里我们对这一性质给出一般性陈述，并将其推广到 i-SNIP。

回顾一下，对于 G的一个顶点子集 α ，

$$N(\alpha) = \bigcup_{v \in \alpha} N(v) \setminus \alpha.$$

引理 5.2. 设 G 是一个图，且 $A \in \mathcal{S}(G)$。假设 $\alpha \subseteq V(G)$ 是顶点的一个子集，使得 $A[\alpha]$ 可逆，并且对某个图 H有 $A/A[\alpha] \in \mathcal{S}(H)$ ，其中 $N(\alpha)$ 是一个团。则 A 具有 *SAP* 蕴含 $A/A[\alpha]$ 具有 *SAP*，并且对任意给定的 $i \notin \alpha$， A 具有 *i-SNIP* 蕴含 $A/A[\alpha]$ 具有 *i-SNIP*。

证明。设 $a = |\alpha|$ 与 $b = |N(\alpha)|$。不失一般性，我们可以假设前若干行/列对应于 α，并写出

$$A = \begin{bmatrix} Q & B^\top \\ B & C \end{bmatrix}$$

与 $Q = A[\alpha]$。我们还可以假设， B 中的前 b 行对应于 $N(\alpha)$，因此 B 除前 b 行外均为零。由舒尔补可得

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -BQ^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & B^\top \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -Q^{-1}B^\top \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & O \\ O & A/Q \end{bmatrix},$$

我们将其记为 $E^\top AE = Q \oplus (A/Q)$。

设 X 是一个实对称矩阵，满足 $A/Q \circ X = I \circ X = O$。定义

$$\widehat{X} = E(O \oplus X)E^\top = \begin{bmatrix} Q^{-1}B^\top XBQ^{-1} & -Q^{-1}B^\top X \\ -XBQ^{-1} & X \end{bmatrix}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们断言 $A \circ X = I \circ X = O$。由于 $A/Q \in \mathcal{S}(H)$ 和 $N(\alpha)$ 是 H 中的一个团，因此有 $X[N(\alpha)] = O$，进而可得 $C \circ X = O$，因为 H 是 $G - \alpha$ 的超图。由于 B 除前 b 行外均为零， XB 的每一列都是 X 的前 b 列的线性组合。由 $X[N(\alpha)] = O$ 可知， X 的前 b 列的前 b 个元素均为零，因此 XB 的前 b 行为零。因此， $-XBQ^{-1}$ 的前 b 行和 $-Q^{-1}B^\top X$ 的前 b 列均为零。此外，由于 $B^\top$ 除前 b 列外均为零，且 XB 在前 b 行上为零，因此有 $B^\top XB = O$ 和 $Q^{-1}B^\top XBQ^{-1} = O$。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$综合以上观察，可得 $A \circ X = I \circ X = O$。

对于 SAP，容易看出，若 $(A/Q)X = O$，则

$$(E^\top AE)(O \oplus X) = (Q \oplus A/Q)(O \oplus X) = O$$

and

$$A\widehat{X} = AE(O \oplus X)E^\top = (E^\top)^{-1}(E^\top AE)(O \oplus X)E^\top = O.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$综上所述，若 $A/Q \circ X = I \circ X = O$ 且 $(A/Q)X = O$，则 $A \circ X = I \circ X = O\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$且 $AX = O$。假设 A 具有 SAP。则 $X = O$，这意味着 $O \oplus X = O$且 $X = O$。因此， A/Q 具有 SAP。

对于 i-SNIP，我们使用记号 $\overset{(i\ ]}{=} O_{:,:}$来表示一个矩阵除了可能的第 i 行之外均为零。按照类似的论证，若 $(A/Q)X \overset{(i\ ]}{=} O^{:,:}$，则 $(E^\top AE)(O \oplus X) \overset{(i\ ]}{=} O^{:,:}$，这意味着 $(E^\top AE)(O \oplus X)E^\top \overset{(i\ ]}{=} O^{:,:}$。由于 $(E^\top)^{-1}$ 的每一行中，元素 i 除了可能的第 i 行之外均等于 0，

$$A\widehat{X} = AE(O \oplus X)E^\top = (E^\top)^{-1}(E^\top AE)(O \oplus X)E^\top \overset{(i,:]}{=} O.$$

因此，如果 A 具有 i-SNIP，那么 A/Q 具有 i-SNIP。 □

当 $|N(\alpha)|=1$ 时，这个引理尤其有用，这意味着 $N(\alpha)$ 是 H 中的一个团。

我们以展示关于割点的 $\xi\xi(G,\ i)$ 的一些约化公式来结束本节。设 G 和 H 是两个图，且每个图中都有一个标记为 v 的顶点。那么， G 和 H 在 v处的顶点和记作$G\oplus_v H$，是通过将 G和 H中标记为 v的顶点识别为同一顶点而得到的图；在 G或 H中，其余顶点均保持不同。因此， v 是 $G\oplus_v H$的一个割点。

定理 5.3。 设 $G=G_1\oplus_i G_2$是一个图， G_1和 G_2是顶点数至少为2 的连通图。那么

$$\xi\xi(G,i)=\max\{\xi\xi(G_1,i),\xi\xi(G_2,i)\}.$$

证明。由于 G_1和 G_2是 G的子图，根据子式单调性，有 $\xi\xi(G_1,\ i)\le\xi\xi(G,\ i)$，且 $\xi\xi(G_2,\ i)\le\xi\xi(G,\ i)$。

另一方面，设 $A\in\mathcal{S}(G)$ 是一个矩阵，其 i-零度对为 $(k,\ \ell)$，其中 $k+\ell=\xi\xi(G,\ i)$。通过重新排列顶点，我们不妨设 A具有如下形式

$$A=\begin{bmatrix}C_1 & \mathbf{b}_1 & O\\ \mathbf{b}_1^\top & a_{i,i} & \mathbf{b}_2^\top\\ O & \mathbf{b}_2 & C_2\end{bmatrix}.$$

由于 A具有 i-SNIP， $A(i)=C_1\oplus C_2$具有 SAP。根据 $[3,$引理 3.1$],$， C_1和C_2中至少有一个是可逆的。若 C_1 可逆，则 $A/C_1\in\mathcal{S}(G_2)$与 A具有相同的 i-零度对，并且根据命题 5.1和引理 5.2具有 i-SNIP，这意味着$\xi\xi(G,\ i)\le\xi\xi(G_2,\ i)$。类似地，若 C_2可逆，则有 $\xi\xi(G,\ i)\le\xi\xi(G_1,\ i)$。因此所需等式成立。 □

推论 5.4。 设 G 是一个具有割点 i 的图，使得 $\xi\xi(G,i)=k$。那么，(G,i)不会将 $\xi\xi(G,i)\ge k$实现为极小子式。

证明。 不妨设 $G=G_1\oplus_i G_2$。根据定理 5.3，以下至少有一个

$$\xi\xi(G_1,i)=k\quad\text{or}\quad\xi\xi(G_2,i)=k$$

必须成立。但 $(G_1,\ i)$ 或 $(G_2,\ i)$ 都是具有相同根顶点的 G 的真子图。

□

定理 5.5。 设 $G=G_1\oplus_{v_1}G_0\oplus_{v_2}G_2$ 是一个图，其中 G_1 和 G_2 是至少有 2 个顶点的连通图。（我们允许 $v_1=v_2$。）设 $i\in V(G_0)$。那么

$$\xi\xi(G,i)=\max\{\xi\xi(K_2\oplus_{v_1}G_0\oplus_{v_2}G_2,i),\xi\xi(G_1\oplus_{v_1}G_0\oplus_{v_2}K_2,i)\}.$$

证明。 将最大值中的两个图记为 $H_1=K_2\oplus_{v_1}G_0\oplus_{v_2}G_2$ 和 $H_2=G_1\oplus_{v_1}G_0\oplus_{v_2}K_2$。由于 G_1是连通的，且包含除v_1以外的顶点，通过收缩这些顶点， H_1 是 G的有根子式。同理， H_2 是 G的有根子式。这意味着

$$\xi\xi(G,i)\ge\max\{\xi\xi(H_1,i),\xi\xi(H_2,i)\},$$

因此，只需证明以下至少一个成立： $\xi\xi(G,\ i) \leq \xi\xi(H_1,\ i)$，或 $\xi\xi(G,\ i) \leq \xi\xi(H_2,\ i)$。

设 $A \in \mathcal{S}(G)$ 是一个具有 i-SNIP 的矩阵，其达到和为 $\xi\xi(G,i)$ 的 i-零度对。我们可以按 $V(G_1 - v_1)$、 $V(G_0)$ 和 $V(G_2 - v_2)$ 对 $V(G)$ 进行划分，然后将 A写成

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & B_1 & O \\ B_1^\top & A_0 & B_2^\top \\ O & B_2 & C_2 \end{bmatrix},$$

其中，列 v_i 是 B_i 中关于 $i \in \{1,2\}$ 的唯一非零列。现在我们根据 C_1 和 C_2 的可逆性分两种情况讨论。

情况 1： C_1 和 C_2 中有一个可逆。假设 C_1 可逆。令$\alpha = V(G_1 - v_1)$。那么 $A[\alpha] = C_1$、 $A/C_1 \in \mathcal{S}(G_0 \oplus_{v_2} G_2)$ 和 $N(\alpha) = \{v_1\}$ 是 $G_0 \oplus_{v_2} G_2$ 中的一个团。由命题 5.1 和引理 5.2 可知， A/C_1 具有 i-SNIP，且达到与 A 相同的 i-零度对。因此， $\xi\xi(G,i) \leq \xi\xi(G_0 \oplus_{v_2} G_2, i) \leq \xi\xi(H_1, i)$。类似地，若 C_2 可逆，则 $\xi\xi(G,i) \leq \xi\xi(G_1 \oplus_{v_1} G_0, i) \leq \xi\xi(H_2, i)$。

情形 2：两者 C_1 和 C_2 均为奇异矩阵。假设存在非零向量$\mathbf{x}_1 \in \ker(C_1) \cap \ker(B_1^\top)$，以及$\mathbf{x}_2 \in \ker(C_2) \cap \ker(B_2^\top)$。那么矩阵

$$X = \begin{bmatrix} O & O & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^\top \\ O & O & O \\ \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^\top & O & O \end{bmatrix}$$

是一个非零实对称矩阵，满足 $A \circ X = I \circ X = O$和 $AX = O$。因此， A 不具有 SAP 或 i-SNIP，这与我们的假设矛盾。由此，$\ker(C_1) \cap \ker(B_1^\top) = \{\mathbf{0}\}$ 或 $\ker(C_2) \cap \ker(B_2^\top) = \{\mathbf{0}\}$。假设 $\ker(C_1) \cap \ker(B_1^\top) = \{\mathbf{0}\}$。由于 B_1 有唯一非零列，且 $\text{null}(B_1^\top) = |V(G_1 - v_1)| - 1$，因此 $\text{null}(C_1) = 1$。令 $\ker(C_1) = \text{span}(\{\mathbf{x}_1\})$，并令 $\mathbf{y}_1$ 为 B_1的第 v_i 列。那么 $\ker(B_1^\top) = \text{span}(\{\mathbf{y}_1\})^\perp$，且 $\ker(C_1) \cap \ker(B_1^\top) = \{\mathbf{0}\}$ 意味着 $\mathbf{y}_1^\top\mathbf{x}_1 \neq 0$，并且 $\mathbf{y}_1 \notin \text{span}(\{\mathbf{x}_1\})^\perp = \text{Col}(C_1)$。由于 $\text{null}(C_1) = 1$ 且 $\mathbf{y}_1 \notin \text{Col}(C_1)$，因此 $\text{null}(A[G_1]) = 0$。此外，由于 C_1 是对称矩阵且 $\text{null}(C_1) = 1$，存在一个顶点 $u_1 \in V(G_1 - v_1)$，使得 $C_1(u_1)$可逆。等价地， $A[\alpha] = C_1[\alpha]$ 可逆，其中$\alpha = V(G_1 - v_1 - u_1)$。因此， $A[G_1]/A[\alpha]$ 是一个 2×2 矩阵，其 v_1-零度对 $(\text{null}(A[G_1]), \text{null}(C_1)) = (0, 1)$，这意味着它的 (u_1, u_1) 项为零，而 (u_1, v_1) 项非零。通过直接计算， $A/A[\alpha]$ 的 (u_1, u_1) 项和 (u_1, v_1) 项与 $A_1[G_1]/A[\alpha]$中的对应项相同。因此， $A/A[\alpha] \in \mathcal{S}(H_1)$和 $N(\alpha) \subseteq \{u_1, v_1\}$ 是 H_1 中的一个团。根据命题 5.1 和引理 5.2， $A/A[\alpha]$ 具有 i-SNIP，且达到与 A相同的 i-零度对。因此， $\xi\xi(G,i) \leq \xi\xi(H_1, i)$。类似地，若 $\ker(C_2) \cap \ker(B_2^\top) = \{\mathbf{0}\}$，则有$\xi\xi(G,i) \leq \xi\xi(H_2, i)$。

综合这两种可能的情况，即得所需等式。 □

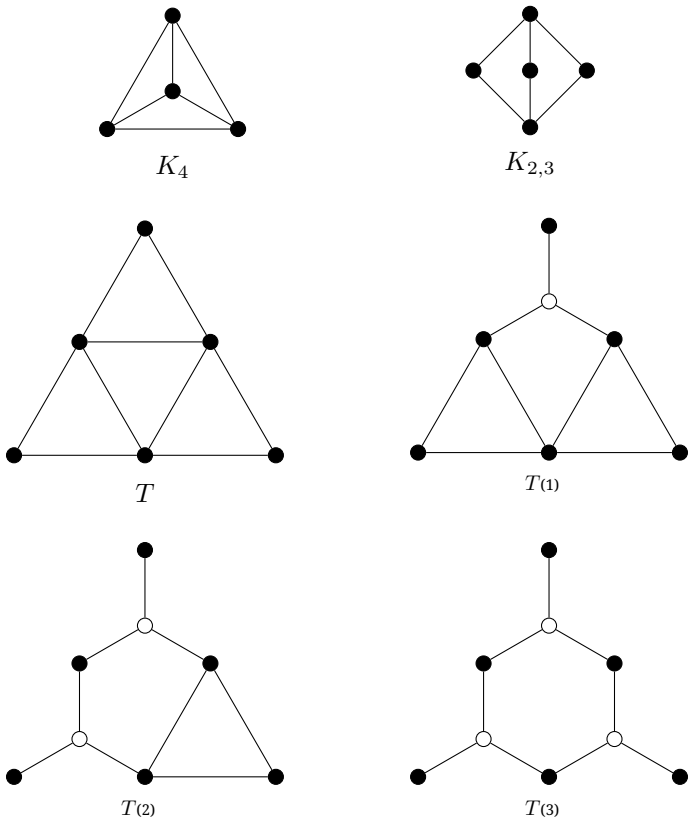

图 3: T_3-族，其中所有可能的根均标记为实心顶点。

6 $\xi\xi(G,i) \geq 4$,5的极小子式

本节刻画满足 $\xi\xi(G,i) \geq 4$ 的有根图（G,i），以及满足 $\xi\xi(G,i) \geq 5$ 的有根图。如图 3 所示， T_3-族在[19] 中被引入，作为满足 $\xi(G) \geq 3$ 的极小子式的完整列表。也就是说， $\xi(G) \geq 3$ 当且仅当 G 包含 T_3族中的一个子式。在图 3 中，每个非割点顶点均以填充表示。我们将证明：对于有根图（G,i），其中 G 属于 T_3族且 i 不是割点，其所有选择构成满足 $\xi\xi(G,i) \geq 4$ 的极小子式的完整列表。等价地，有根图（G,i）满足$\xi\xi(G,i) \geq 4$，当且仅当（G,i）包含一个以非割点为根的 T_3族中的有根子式。根据定理4.4，这也给出了满足 $\xi\xi(G,i) \geq 5$ 的极小子式的完整列表。

定义6.1。 令 $\mathcal{T}_3$ 为图 3 中所示的六个图构成的族，称为 T_3-族。令 $\mathcal{T}_{3,\ r}$ 为有根图 $(H,\ j)$ 构成的族，其中 $H \in \mathcal{T}_3$，且 j 是 H的割点。

命题 6.2。设 $(G,i)\in\mathcal{T}_{3,r}$。那么 $\xi\xi(G,i)\geq 4$。

证明。根据命题 2.1，只需对每个 (G,i) 找到具有 i-SNIP 且 i-零度对为 (2, 2) 或 (3, 2) 的矩阵 $A\in\mathcal{S}(G)$。对于 K_4 和 $K_{2,3}$，我们分别可以选取 $\mathcal{S}(K_4)$ 中的全 1 矩阵和 $K_{2,3}$ 的邻接矩阵。对于 T, $T(1)$、$T(2)$ 和 $T^{(3)}$，其边集可划分为若干包含度为 2 的顶点的 K_3，以及若干以割点为中心的 $K_{1,3}$；然后，我们选取矩阵为 $\mathcal{S}(K_3)$ 中的全 1 矩阵与这些 $K_{1,3}$ 的邻接矩阵之和，并补上适当的零元素。这种构造称为星团和，由 [24] 引入。更具体地说，对于 $k=1,2,3$，我们选择以下矩阵，使得 $A_0\in\mathcal{S}(K_4)$、$A_1\in\mathcal{S}(K_{2,3})$、$B_0\in\mathcal{S}(T)$ 和 $B_k\in\mathcal{S}(T_{(k)})$。此外，对于具有 $k=1,2,3$ 的 B_k，若存在割点，则其指标为 7、8 和 9。

$$A_0=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\qquad A_1=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_0=\begin{bmatrix}2&1&1&0&1&1\\1&1&1&0&0&0\\1&1&2&1&1&0\\0&0&1&1&1&0\\1&0&1&1&2&1\\1&0&0&0&1&1\end{bmatrix},\qquad B_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&1\\0&0&1&1&1&0&0\\1&0&1&1&2&1&0\\1&0&0&0&1&1&0\\1&1&1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&1&0&1\\1&0&0&0&1&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0\end{bmatrix},\qquad B_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\\1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

通过直接计算可以验证，这些矩阵中的每一个都达到 i-零度对 (3，2)，并且对于 $i\neq 7$，8，9 都具有 i-SNIP。因此，当 $(G,i)\in\mathcal{T}_{3,r}$ 时，它允许零度对 (2，2) 且具有 i-SNIP，这意味着 $\xi\xi(G,i)\geq 4$。□

可以通过逐个情形直接验证以下观察结果。

观察 6.3. 设 $G\in\{T_{(1)3},T_{(2)3},T_3^{(3)}\}$ 如图 3 所示，其中 i 是 G 的割点。设 i' 是 i 在 G 中的叶邻点。则通过添加一条从 i' 到除 i 以外任意顶点的边 e，所得图 $(G+e,i)$ 包含 $\mathcal{T}_{3,r}$ 中的一个有根子式。例如，设 $G=T_3^{(3)}$，i 为割点，i' 为其叶邻点。通过

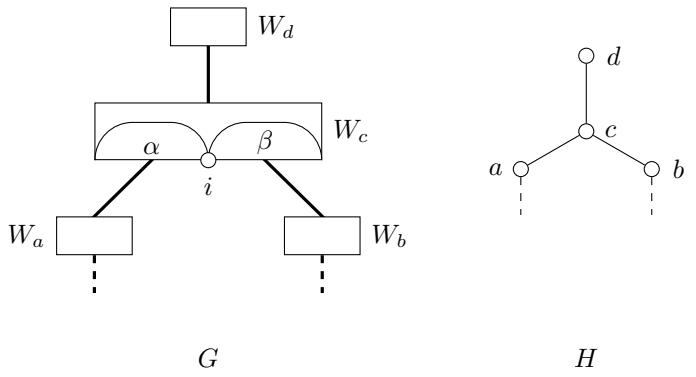

图4：引理 6.4 证明的示意图。

添加一条连接 i' 与另一叶子的边 e，$(G+e,i)$ 包含 $(H,j)\in\mathcal{T}_{3,r}$作为有根子式，其中 $H=K_{2,3}$ 且 j 是一个度为3的顶点。

引理 6.4. 设 G 是一个连通图，且 $i\in V(G)$ 是 G 中一个非割点的顶点。那么以下条件等价。

(a) (G,i) 在 $\mathcal{T}_{3,r}$ 中包含一个作为有根子式的有根图。

(b) G 包含一个以 $\mathcal{T}_3$ 为子式的图。

证明。如果 (G,i) 包含 $(H,j)\in\mathcal{T}_{3,r}$ 作为有根子式，那么 G 包含 H 作为子式，而 $H\in\mathcal{T}_3$ 根据定义成立。

反过来，设 (G,i) 是一个有根图，其中不包含 $\mathcal{T}_{3,r}$ 中任何图作为有根子式。为导出矛盾，假设 G 包含一个以 $H\in\mathcal{T}_3$ 为子式的图。那么存在一个映射φ：$W\to V(H)$，使得

- $W\subseteq V(G)$,
- 对于每个 $v\in V(H)$，$\varphi^{-1}(\{v\})\neq\emptyset$ 且导出子图 $G[\varphi^{-1}(\{v\})]$是连通的，并且
- 对于每条边 $\{u,v\}\in E(H)$，G中 $\varphi^{-1}(\{u\})$ 与 $\varphi^{-1}(\{v\})$ 之间至少有一条边。

由于 G 是连通的，我们可以选取一个映射 ϕ 使得 $W=V(G)$。为方便起见，令 $W_v=\varphi^{-1}(\{v\})$。注意，W_v 两两不相交，且它们的并集为 $W=V(G)$。令 c 为 $V(H)$ 中满足 $i\in W_c$ 的顶点。于是，根据我们的假设，c 必定是 H 中的割点，并且必然有 $H\in\{T_{(1)}T^{(2)},\ T^{(3)}\}$。令 a，b 为 H中 c 的非叶邻点，令 d 为 H中 b 的叶邻点。示意见图4。

令 α 为 W_c 中所有与 W_a 中某个顶点相邻的顶点所组成的集合；类似地，令 β 为 W_c 中所有与某个

属于 W_b 的顶点相邻的顶点所组成的集合。由于 W_c 在 G 中诱导出一个连通子图，因此 α 中任意顶点到 β 中任意顶点之间都存在一条 W_c 中的路径。令 P 为这样一条路径。如果 i 不在该路径上，那么 W_c 中存在一条从 i 到 P 的路径，由此可得 (G,i) 中的一个有根子式 $(H,\ d)$。因此，从 α 到 β 的任何路径都必须经过 i。

对于从 α 到 β 的 W_c 中任意一条路径 P 以及一个顶点 $w \in W_c \cup W_d \setminus V(P)$，由于顶点 c 和 d 在 H 中相邻，因此 $W_c \cup W_d$ 中存在一条连接 w 和 P 的路径 P'。如果 P' 首次与 P 相交于一个不同于 i 的顶点 p，那么 $(G,\ i)$ 包含 $(H,\ a)$ 或 $(H,\ b)$ 作为有根子式。因此，对于任意这样的 P 和 $w \in W_c \cup W_d \setminus V(P)$，从 w 到 P 的每条路径都经过 i。

我们声称 i 必须是一个割点，这与假设矛盾。令 $w \in W_d$ 为从 w 到 $\varphi^{-1}(V(H) - c - d)$ 的一条路径，令 P' 为此路径。设 P 是 W_c 中一条从 α 到 β 的路径。如果 P' 与 P 不相交，那么 (G,i) 包含一个有根子式 (H',c)，其中 H' 是由 H 添加一条连接 d 和 $V(H) - c - d$ 的边得到的；并且根据观察 6.3，(H',c) 在 $\mathcal{T}_{3,r}$ 中包含一个有根子式。因此，P' 在到达 $\varphi^{-1}(V(H) - c - d)$ 之前与 P 相交。此外，根据前面的论证，P' 与 P 相交时，i 是首个相交的顶点。因此，i 是 G 的一个割点，它将 W_d 与 $\varphi^{-1}(V(H) - c - d)$ 分隔开，这与我们的假设矛盾。

因此，我们关于 G包含 $\mathcal{T}_3$ 中的一个子式的假设是不可能成立的。证明至此完成。□

现在我们可以陈述主要定理了。

定理 6.5. 设 G 是一个连通图，且 $i \in V(G)$ 不是 G的割点。则下列条件等价。

(a) $\xi\xi(G,\ i) \geq 4$。

(b) (G,i) 包含一个以 $\mathcal{T}_{3,r}$ 为根的有根图，且该图是其有根子式。

(c) G 包含图 $\mathcal{T}_3$ 作为子式。

(d) $\xi(G) \geq 3$。

证明。 由引理 6.4，(b) 与 (c) 等价。此外，已知 (c) 与 (d) 等价 [19]。

由命题 6.2，(b) 推出 (a)。根据定义，$\xi\xi(G,\ i) \geq 4$ 意味着 $(G,\ i)$ 允许零度对 (2，2)，并且根据命题 2.1，也允许 (3，2)，其中 i- SNIP，因此 $\xi(G) \geq 3$。这证明了 (a) 推出 (d)，从而完成了四个陈述等价性的证明。□

推论6.6。 $\xi\xi(G,i) \geq 4$ 的极小子式为 $\mathcal{T}_{3,\ r}$，而 $\xi\xi(G,i) \geq 5$ 的极小子式则是通过扩展其根，从 $\mathcal{T}_{3,\ r}$ 得到的那些子式。

证明。设 (G,i) 使 $\xi\xi(G,i) \geq 4$ 达到极小子式。根据命题 2.3 和定理 5.3，(G,i) 是连通的，且 i 不是 G 的割点。根据 Theorem 6.5，(G,i) 在 $\mathcal{T}_{3,r}$ 中包含一个有根子式，这意味着根据 (G,i) 的极小性，$(G,i) \in \mathcal{T}_{3,r}$。在确立了 $\xi\xi(G,i) \geq 4$ 的极小子式后，根据定理4.4，$\xi\xi(G,i) \geq 5$ 的极小子式便可立即得到。□

7 i-SNIP 的诸多方面

本节将全面研究 i-SNIP 及其推论。我们证明第 3 节提出的分岔引理。我们还介绍了若干用于处理 i-SNIP 的基本工具，包括边界以及一种与之等价的零空间替代定义。

设 (G, i) 是一个有根图，且 $A \in \mathcal{S}(G)$。设 $\mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(G)$ 是 $\mathcal{S}(G)$ 的拓扑闭包，即所有满足以下条件的对称矩阵：当$\{i,j\} \notin E(G)$且 $i \neq j$时，其 i,j 项为零。注意，矩阵 $\mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(G)$ 中对应于边的项允许为零。令 $\mathrm{GL}_n^{(i)}(\mathbb{R})$ 为一般线性群的子群，其定义如下：

$$\mathrm{GL}_n^{(i)}(\mathbb{R}) := \{Q \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : \det(Q) \neq 0,\ Q[i,i) = \mathbf{0}^\top\}.$$

我们考虑两个扰动

$$A \mapsto A + B,$$
$$A \mapsto Q^\top A Q,$$

其中 $B \in \mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(G)$ 且 $Q \in \mathrm{GL}_n^{(i)}(\mathbb{R})$。第一个扰动在扰动 B足够小时保持矩阵的模式，第二个扰动则保持 i-零度对。二者都保持矩阵的对称性。

在 [1], 中，我们考虑函数

$$F(B, Q) = Q^\top A Q + B, \tag{1}$$

该函数定义在 $B \in \mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(G)$ 接近 O，且 $Q \in \mathrm{GL}_n^{(i)}(\mathbb{R})$ 接近 I时。为完整起见，我们列出从对该函数 F 的分析中在 [1] 得出的结论。

命题 7.1（命题 6.4，出自 [1]）。设 G 是一个具有 n 个顶点的图，. $A \in \mathcal{S}$（G），且 $i \in V$（G）。设 F 如方程（1）所定义，并设 F_B、F_Q 分别是在 $B = O$ 和 $Q = I$ 处的偏导数。则以下结论成立：

（a）$\dot{F}_B$ 的值域为 $= \mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(G)$。（b）$\dot{F}_Q$ 的值域 $= \{L^\top A + AL :$ $L \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ $L[i,i) = \mathbf{0}^\top\}$。（c）$\dot{F}_B$ 的值域为 $^\perp = \{X \in \mathrm{Sym}_n($ $\mathbb{R}):$ $A \circ X = O,$ $I \circ X = O\}$。（d） 的值域为 $Sym()$: $(),$ (AX) $(i, :] = O\}$。

命题 7.2 (命题 6.5，出自 [1])。设 G 是一个具有 n 个顶点的图，. $A \in \mathcal{S}(G)$，且 $i \in V$ (G)。设 F 如方程 (1) 所定义，并设 F、 F_B、

. F_Q 分别为在 $B = O$ 和 $Q = I$处的导数和偏导数。那么以下各项等价：

（a） A具有 i-$SNIP$.

(b) F 是满射。 (c) 值域(F) $=$ 值域(F_B) $+$ 值域(F_Q) $=$ 对称群$_n(\mathbb{R})$。
(d) 值域($\dot{F}_B)^\perp \cap$值域($\dot{F}_Q)^\perp = \{O\}$。

前面的结果和新结果都用到了下文所述的反函数定理。

定理 7.3（反函数定理；例如，参见 [1]中的定理 6.6）。设 U和 W 是关于 $\mathbb{R}$ 的有限维向量空间。设 F 是一个光滑函数，其定义域为 U 的一个开子集，值域为 W，且满足 F（$\mathbf{u}_0$） $= \mathbf{w}_0$。若导数 F 在$\mathbf{u}_0$ 处是满射，则存在一个包含$\mathbf{w}_0$ 的开子集 $W' \subseteq W$，以及一个光滑函数 T: $W' \to U$，使得 T（$\mathbf{w}_0$）$=\mathbf{u}_0$，并且 $F \circ T$ 是W'上的恒等映射。

为讨论分岔，我们重新定义 F，使两个扰动按相反的顺序施加，从而得到

$$F(B, Q) = Q^\top (A + B)Q \tag{2}$$

在接下来的讨论中均采用此定义。注意，当 $B = O$ 或 $Q = I$时，这两个定义给出相同的函数。因此，它们关于 B 和 Q 的偏导数在 $B = O$ 和 $Q = I$ 处相同。由此，命题 7.1 和 7.2 对于方程（2）仍然成立。

下面重新陈述分岔引理并给出其证明。

定理 3.2（分岔引理）。设（G, i）是定义在 n 个顶点上的有根图，且 $A \in \mathcal{S}$（G）是具有 i-*SNIP* 的矩阵。则存在一个 $\epsilon > 0$，使得对于任意$M \in \mathrm{Sym}_n$（$\mathbb{R}$）且满足 $\|M - A\| < \epsilon$，存在一个矩阵 $A' \in \mathcal{S}$（G），该矩阵具有 i-*SNIP*，并且 M 与 A' 具有相同的 i-零度对。

证明。设 F 如方程（ 2 F $B =$ ）中所定义，并设其在O 处以及 $Q = I$处的导数。由于 A 具有 i-SNIP，根据命题 7.2， F 是满射。根据定理 7.3，对于每个充分接近 A的矩阵 $M \in$ Sym$_n(\mathbb{R})$，存在矩阵 B'和 Q'，使得 F（B'， Q'）$= M$；也就是说，

$$F(B', Q') = Q'^\top (A + B')Q' = M.$$

因此，矩阵 $A' = A + B'$ 满足 $A' = (Q'^\top)^{-1} M (Q')^{-1}$。当 B' 和Q' 是小扰动时，A' 与 A具有相同的模式，即 $A' \in \mathcal{S}(G)$，并且A' 与 M具有相同的 i-零度对。

由于扰动很小，我们仍有

$$\{L^\top A' + A' L : L \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}),\ L[i, i) = \mathbf{0}^\top\} + \mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(G) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}).$$

因此，只要选择足够接近 A 的 M，矩阵 A' 就具有 i-SNIP。 □

接下来，我们着手推导 $\xi\xi(G,\ i)$ 的边界。类似结果见于 [17,定理 6.5] 和 [6, 推论 29]。特别地，这些结果推出了边界 $e(G)+1 \geq \binom{\xi(G)+1}{2}$，下面我们将利用这一事实，为 $\xi\xi(G,\ i)$ 推导类似的边界。我们用 $e(G)$ 表示 G 的边数。

定理 7.4. 设(G,i) 是有根图 $\xi\xi(G,i) = k+\ell$，其中 $k \leq \ell \leq k+1$。则

(a) $e(G)+1 \geq \binom{k+2}{2}$ *if* $k=\ell$, *and*

(b) $e(G-i)+1 \geq \binom{\ell+1}{2}$ *if* $k<\ell$.

总之，令 $m = \left\lceil \frac{\xi\xi(G,i)+3}{2} \right\rceil$，则界 $e(G)+1 \geq \binom{m}{2}$ 成立。

证明。若 $k=\ell$，则 (G,i) 允许通过命题 2.1 得到具有 i-SNIP 的 $(k+1,\ell)$。因此，根据定理 3.9]，$\xi(G) \geq k+1$ 且 $e(G)+1 \geq \binom{k+2}{2}$。

另一方面，若 $k<\ell$，则根据定理 3.9]，我们有 $\xi(G-i) \geq \ell$ 且 $e(G-i)+1 \geq \binom{\ell+1}{2}$。

最后，我们观察到情形 $k=\ell$ 给出

$$k+2 = \frac{\xi\xi(G,i)+4}{2}$$

而情形 $k<\ell$ 给出

$$\ell+1 = \frac{\xi\xi(G,i)+3}{2}.$$

结合 $e(G) \geq e(G-i)$，我们得到一般界

$$e(G)+1 \geq \binom{m}{2} \quad \text{where} \quad m = \left\lceil \frac{\xi\xi(G,i)+3}{2} \right\rceil.$$

□

先前的结果使我们得以导出一个Nordhaus–Gaddum 型界，即 [5, 第 3]节的类似结果。

推论 7.5. 设(G,i) 是具有 n 个顶点的有根图。则

$$\xi\xi(G,i) + \xi\xi(\overline{G},i) \leq 2\sqrt{2}n.$$

证明. 由定理 7.4，其中 m 如该处所定义，我们有

$$e(G)+1 \geq \binom{m}{2} \geq \frac{1}{8}(\xi\xi(G,i)^2 + 4\,\xi\xi(G,i) + 3).$$

设 $x = \xi\xi(G,i)$、$\overline{x} = \xi\xi(\overline{G},i)$ 和 $s = x + x$。那么我们可以将以下各项相加，

$$e(G)+1 \geq \frac{1}{8}(x^2+4x+3) \text{ and}$$
$$e(\overline{G})+1 \geq \frac{1}{8}(\overline{x}^2+4\overline{x}+3)$$

得到

$$\binom{n}{2} + 2 \geq \frac{1}{8}(x^2 + \overline{x}^2 + 4s + 6).$$

根据柯西-施瓦茨不等式,

$$(x^2 + \overline{x}^2)(1^2 + 1^2) \geq (x + \overline{x})^2 = s^2.$$

因此,

$$\binom{n}{2} + 2 \geq \frac{1}{8}(\frac{1}{2}s^2 + 4s + 6).$$

解这个不等式可得

$$s \leq -4 + \sqrt{16 + 8n(n-1)},$$

当 $n \geq 0$ 时，其上界为 $\sqrt{8n^2 \overline{=2}}\sqrt{2n}$ 。¯ □

当 ` 中定义了 Colin de Verdi`ere 参数 $\mu(G)$ 时， [10, 11]，通过某个映射的满射性，引入了 SAP 的一种等价定义。随后， [2, 21]，利用由图 G 的顶点或边导出的某些矩阵（此处称为“构成元素”）的张成空间，将其转化为一种零空间刻画。由于这种刻画只取决于子空间和图，因此也可以据此将 SAP 的变体定义在零空间以外的子空间上。

定义 7.6。设 G 是一个图，其 n 个顶点标记为 $\{1, \ldots, n\}$，且 L 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个维数为 m 的子空间。若给定一个矩阵 N，其 m 列构成 L 的一组基，且其 n 行记为 $\mathbf{u}_1^\top$，.....，$\mathbf{u}_n^\top$，则子空间 L 给出一份来自 G 的完整配方，使得以下由 $m \times m$ 个实对称构成元素组成的集合张成整个空间 $\mathsf{Sym}_m(\mathbb{R})$:

- $\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j^\top$ 对于 j 的任意顶点 G （称为顶点构件），以及
- $\mathbf{u}_j\mathbf{u}_k^\top + \mathbf{u}_k\mathbf{u}_j^\top$ for $\{j, k\}$ any edge of G (called *edge ingredients*).

我们指出，虽然完整配方的定义看起来取决于 L 的基矩阵的选择，但对于任意 L，它仍然是良定义的。假设 N_1 和 N_2 是两个基矩阵，这意味着对于某个可逆矩阵 Q，有 $N_1 = N_2Q$ 。设给定 $M \in \mathsf{Sym}_m(\mathbb{R})$。注意， M 是形如 $\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j^\top$ 和 $\mathbf{u}_j\mathbf{u}_k^\top + \mathbf{u}_k\mathbf{u}_j^\top$（来自 N_1 的成分）的矩阵的线性组合，当且仅当 $Q^\top MQ$ 是形如$Q^\top\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j^\top Q$ 和 $Q^\top\mathbf{u}_j\mathbf{u}_k^\top Q + Q^\top\mathbf{u}_k\mathbf{u}_j^\top Q$（来自 N_2 的成分）的矩阵的线性组合。注意，映射$M \mapsto Q^\top MQ$ 是从 $\mathsf{Sym}_m(\mathbb{R})$ 到其自身的双射。因此，该定义是否成立并不取决于子空间 L 的基的选择。

定理 7.7 (引理 2.1，见 [21]；引理 14，见 [2])。设 G 是一个图，且$A \in \mathcal{S}(G)$。那么， A 具有 *SAP*，当且仅当 A 的核给出了来自 G的完整配方。

这里我们证明了一个关于 i-SNIP 的类似结果。

定理 7.8. 设(G, i) 是一个有根图，且 $A \in \mathcal{S}(G)$。那么， A 具有 i-*SNIP*，当且仅当 $A(i,:]$ 的右核给出一个来自 G 的完整配方。

证明。 假设 i 是 A的一个下指标。根据定理 2.2， A 具有 i-SNIP，当且仅当 A 具有 SAP。在这种情况下， A 的第 i 行属于其余各行的张成空间，因此 ker(A) $=$ ker($A(i,:]$)。根据定理 7.7， A 具有 i-SNIP，当且仅当 ker($A(i,:]$) 给出一个来自 G 的完整配方。

假设 i 是 A的一个中性指标。那么存在唯一的 t ，使得 i 是 $A_t = A + tE_{i,i}$ 的一个下指标，并且根据定理 2.2， A 具有 i-SNIP，当且仅当 A_t 具有 SAP。类似地，ker(A_t) $=$ker($A_t(i,:]$) $=$ ker($A(i,:]$)，因此 A 具有 i-SNIP，当且仅当 ker($A(i,:]$) 给出一个来自 G 的完整配方。

假设 i 是 A的一个上指标。那么根据定理 2.2， A 具有 i-SNIP，当且仅当 $A(i)$具有 SAP。在这种情况下， $A(i,:]$ 的列 i 不在其余列的张成空间中，因此 ker($A(i,:]$)恰好是将$A(i)$的核的第 i个分量补上 0 后得到的子空间。也就是说， N 的第 i 行全为 0，而 ker($A(i)$)由 $N(i,:]$完全张成。由于 N的第 i行为 0，对于 ker($A(i,:]$)，无论是来自 i 的顶点成分，还是来自 $\{i, j\}$ 的任何边成分，在所有情况下都是零矩阵。根据定理 7.7， A具有 i-SNIP，当且仅当 ker($A(i)$) 给出来自 $G - i$的完整配方；这又当且仅当 ker($A(i,:]$)给出来自G的完整配方。□

8 结语

本文引入了一个新参数 $\xi\xi(G, i)$，作为理解零度对问题的工具。我们为 i-SNIP 建立了多项理论结果，包括分岔引理、边界，以及 i-SNIP 的零空间定义。利用这些结果，我们刻画了满足$\xi\xi(G, i) \geq s$且 $s \in \{4, 5\}$的图。图 1 总结了所有已知的 $\xi\xi(G, i) \geq s$极小子式。

问题 8.1。 在已知的、对应于取值 $k \in \{0, 1, 2\}$的 $\xi\xi(G, i) \geq 2k$极小子式中，极小子式恰好是 $\xi(G) \geq k + 1$的极小子式，其根为任意一个非割点。这个模式对 $k > 2$ 是否仍然成立?

我们证明了 $\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$ 的极小子式与 $\xi\xi(G, i) \geq 2k$ 的极小子式可以相互推出，从而将需要研究的情形减少了一半。（这尤其意味着，问题 8.1 的任何一种答案也能解决情形 $\xi\xi(G, i) \geq 2k + 1$。）

这些结果符合图 G 的逆特征值问题这一一般框架，并将其扩展至 (λ, μ)-问题；该问题研究由图描述的矩阵与删除单个根顶点后所对应的主子矩阵的同时谱。

致谢

本项目始于 2021 年在美国数学研究所 (AIM) 举办的 IEPG-ZF 虚拟研究社区，并因该社区而得以开展；该社区获得了美国国家科学基金会的支持。Aida Abiad 通过荷兰研究理事会 (NWO) 的 VI.Vidi.213.085 项目资助获得支持。Mary Flagg 和开展本研究的 AIM SQuaRE 部分获得了美国国家科学基金会 DMS 项目资助，项目编号为 2331634。J. C.-H. Lin 部分获得台湾国家科学及技术委员会的支持（项目编号：NSTC-112-2628-M-110-003 和 NSTC-113-2115-M-110-010-MY3）。感谢加州理工学院的 AIM 主办方热情接待我们。我们还感谢 Bryan Curtis 参与了为本研究成果奠定基础的研究，并进行了其他有益的讨论。

参考文献

[1] A. Abiad, B. A. Curtis, M. Flagg, H. T. Hall, J. C.-H. Lin, 和 B. Shader. 逆零度对问题与强零度交错性质。线性代数及其应用, 699:539–568, 2024.[2] M. Arav, F. S. Dahlgren, 和 H. van der Holst. 稳定最大零度至多为二的符号图。线性代数及其应用, 620:124–146, 2021.[3] F. Barioli, S. M. Fallat, 和 L. Hogben. Colin de Verdi`ere 图参数的一种变体：对图最小秩的影响。电子线性代数期刊, 13:387–404, 2005.[4] W. Barrett, S. Butler, S. M. Fallat, H. T. Hall, L. Hogben, J. C.-H. Lin, B. Shader, 和 M. Young. 图的逆特征值问题：重数与子式。组合理论杂志 *B* 辑, 142:276–306, 2020.[5] W. Barrett, S. M. Fallat, H. T. Hall, 和 L. Hogben. 关于 Colin de Verdi`ere 型参数的 Nordhaus–Gaddum 问题的注记。电子组合学杂志20:#P56, 2013.[6]W. Barrett, S. M. Fallat, H. T. Hall, L. Hogben, J. C.-H. Lin, 和 B. Shader. 强 Arnold 性质的推广，以及图的不同特征值最小数目。电子组合学杂志, 24:#P2.40, 2017.[7]W. Barrett, A. Lazenby, N. Malloy, C. Nelson, W. Sexton, R. Smith, J. Sinkovic, 和 T. Yang. 组合逆特征值问题：完全图，以及满足严格不等式的小图。电子线性代数, 26:656–672, 2013.[8] W. Barrett, C. Nelson, J. Sinkovic, 和 T. Yang. 组合逆特征值问题 II：小图的所有情形。电子线性代数杂志, 27:742–778, 2014.

[9] D. Boley 和 G. H. Golub. 矩阵逆特征值问题综述。逆问题, 3:595–622, 1987.[10] Y. Colin de Verdi`ere. 关于图的一种新不变量及平面性判据。组合理论杂志 *B* 辑, 50:11–21, 1990.[11] Y. Colin de Verdi`ere. 关于一种新的图不变量和平面性判据。载于图结构理论, 第 137–147 页，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993.[12] R. Diestel. 图论。施普林格出版社，海德堡，第 4 版，2010。电子版，2012.[13] W. E. Ferguson, Jr. 构造具有给定谱的雅可比矩阵和周期雅可比矩阵。数学计算, 35:1203–1220, 1980.[14] G. M. L. Gladwell. 振动逆问题。施普林格，荷兰，第 2 版，2005.[15] L. J. Gray 和 D. G. Wilson. 根据谱数据构造雅可比矩阵。线性代数及其应用, 14:131–134, 1976.[16] O. H. Hald. 雅可比矩阵的逆特征值问题。线性代数及其应用, 14:63–85, 1976.[17] H. T. Hall, L. Hogben, R. R. Martin, 和 B. Shader. 与图的最小秩相关参数的期望值。线性代数及其应用, 433:101–117, 2010.[18] H. Hochstadt. 根据谱数据构造雅可比矩阵。线性代数及其应用, 8:435–446, 1974.[19] L. Hogben 和 H. van der Holst. 下列图类的禁用子式G，其中 $\xi(G) \leq 2$。线性代数及其应用, 423:42–52, 2007.[20] L. Hogben, J. C.-H. Lin, 和 B. Shader. 图的逆问题与零强迫。美国数学会，普罗维登斯，2022.[21] H. van der Holst. 关于强阿诺德假设与图的连通性。电子线性代数杂志, 20, 2010.[22] K. H. Monfared 和 B. Shader. 构造具有给定图和指定交错谱数据的矩阵。线性代数及其应用, 438:4348–4358, 2013.[23] N. Robertson 和 P. Seymour. 图次要 XXIII。Nash–Williams 浸入猜想。组合理论杂志 *B* 辑, 100:181–205, 2010.[24] J. Sinkovic 和 M. Kempton. 外平面图的最小秩。线性代数及其应用, 436:3701–3720, 2012.