arXiv:2603.00928v1 [math.RT] 1 Mar 2026

# 博雷尔与移位范畴 $\mathcal{O}$

DAVID HERNANDEZ 与 ANDREI NEGUT.

Abstract. 我们证明了可对称化 Kac-Moody 李代数的 Borel 范畴 $\mathcal{O}$ 与移位范畴 $\mathcal{O}$ 中的简单模之间存在精确关系。

Contents

1. 引言 2 1.1. 博雷尔范畴 $\mathcal{O}$ 2
1.2. 移位范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 3 1.3. $QQ$-系统 4 1.4. 洗牌代数 4 1.5. 致谢 5 2. 博雷尔范畴 $\mathcal{O}$ 5 2.1. 基本记号 6 2.2. 量子仿射代数 6 2.3. 量子环代数 7 2.4. Kac-Moody 李代数 8 2.5. 大洗牌代数 10 2.6. Hopf 代数 12 2.7. （小）洗牌代数 14 2.8. 斜率子代数与范畴 $\mathcal{O}$ 15 2.9. 简单模 16 2.10. 简单模的分解 17 2.11. 留数 18 3. 移位范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 19 3.1. 移位量子环代数 19 3.2. 移位范畴 $\mathcal{O}$ 和简单模 21 3.3. 技术性结果 21 3.4. 再论留数 25 4. Grothendieck 环与扩展的 $QQ$-系统 29 4.1. 归一化因子 29 4.2. 余积 30 4.3. Grothendieck 环 30 4.4. 有限长度 31 4.5. 有限型的 $QQ$-系统 32 4.6. 一般型的 $QQ$-系统 33 参考文献 33

## 1. Introduction

**1.1. 博雷尔范畴** $\mathcal{O}$。考虑一个可对称化 Kac-Moody 李代数$\mathfrak{g}$，其单根集合为 $I$。我们将与 $\mathfrak{g}$相关的对称化广义 Cartan 矩阵记为（$d_{ij}$）$_{i,\ j\in I}$，见（15）。固定一个 $q \in \mathbb{C}^*$ （不是单位根）以及根格的扩张 $\mathfrak{h} \supseteq \mathbb{C}^I$，如注释 2.1 所述；后者是一项技术性要求，用于确保 Cartan 子代数上的双线性型非退化。量子环代数的表示论

(1)
$$U_q(L\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\Big\langle e_{i,d}, f_{i,d}, \varphi^+_{i,d'}, \varphi^-_{i,d'}, \kappa_{\mathbf{a}} \Big\rangle_{i\in I, d\in\mathbb{Z}, d'\geq 0, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}} \Big/ \Big(\text{relations in Def. 2.5, 2.7}\Big)$$

长期以来，人们从各种角度对其进行研究，参见例如 [5, 25] 以及 [24] 中关于有限型 $\mathfrak{g}$ 的众多参考文献，还有 [22, 33] 中关于一般可对称化型 $\mathfrak{g}$ 的参考文献。博雷尔范畴 $\mathcal{O}$ （由 Jimbo 和第一作者定义）包含简单模

$$\Big(\text{Borel subalgebra of } U_q(L\mathfrak{g})\Big) \curvearrowright L(\boldsymbol{\psi}) \tag{2}$$

这些简单模由所谓的最高 $\ell$-权 [1]编目

$$\boldsymbol{\psi} = \left(\psi_i(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{\psi_{i,d}}{z^d} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]^\times\right)_{i\in I} \tag{3}$$

这些函数是有理的，即每个 $\psi_i(z)$都是有理函数关于 $z$ 在 $\infty$处的幂级数展开 [2]。

令$\mathbf{r}$ =**阶** $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{Z}^I$ 表示记录有理函数 $\psi_i(z)$在 $z = 0$处极点阶数的 $I$元组，并称其为 $\boldsymbol{\psi}$的阶。于是存在一个向量空间同构（[33, 34]）

$$L(\boldsymbol{\psi}) \cong L^{\mathbf{r}} \otimes L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) \tag{4}$$

这构成了如下的 $q$-特征分解的基础（当 $\mathfrak{g}$ 为有限型 [19, 15, 26, 12, 23, 16]时，特殊情形下早已为人所知）：

$$\chi_q(L(\boldsymbol{\psi})) = \chi^{\mathbf{r}} \cdot \chi_q(L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})) \tag{5}$$

因子 $\chi^{\mathbf{r}}$ 是普通特征（而非 $q$-特征），仅取决于 $\mathbf{r} = \mathbf{ord}\ \boldsymbol{\psi}$；按照 [30, 38]的猜想，它已在 [34], 中计算出来。特别地，我们恢复了有限型 $\mathfrak{g}$ 中已知的两个极限情形：

- 如果 $L(\boldsymbol{\psi})$ 是整个量子环代数的有限维表示，那么根据 [19], 只有一个因子 $\chi_q(L(\boldsymbol{\psi})) = \chi_q(L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}))$。
- 如果 $\boldsymbol{\psi}$ 是 $z^{-1}$中的一个多项式，那么 $\chi_q(L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})) = [\boldsymbol{\psi}]$ 仅由[15], 得到一项，因此 $\chi_q(L(\boldsymbol{\psi})) = \chi_{\mathbf{r}}[\boldsymbol{\psi}]$。

[1]如果按照注 2.1 扩大 Cartan 子代数，那么简单模如注 2.18 中所述，由 $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\omega})$ 编号，而不仅仅由 $\boldsymbol{\psi}$ 编号。不过，为简洁起见，我们选择不在记号中包含 $\boldsymbol{\omega}$。[2]我们注意到，为确保我们的 $z$ 与洗牌代数的变量之间的一致性，我们采用的约定是将 $\ell$-权在 $z^{-1}$ 中展开，而不是使用更常见的 $z$，参见（40）。

我们的主要兴趣在于：通过理解向量空间 $L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})$ 本身，计算式（5）中的第二个因子，其中 $\ell$为任意最高权、 $\boldsymbol{\psi}$为相应的权。我们处理一般的可对称化 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$，但对于$\mathfrak{g}$ 有限型的情形，我们的结果也具有新意，因为我们处理范畴 $\mathcal{O}$中的所有简单模。

**1.2. 移位范畴 $\mathcal{O}^{\mathbf{sh}}$。** 类比于博雷尔范畴 $\mathcal{O}$，第一作者引入了移位范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ ，它由移位量子圈代数的模构成

(6)
$$U_q(L\mathfrak{g})^{\mu} = \mathbb{C}\Big\langle e_{i,d}, f_{i,d}, \varphi^{+}_{i,d'}, \varphi^{-}_{i,d'}, \kappa_{\mathbf{a}} \Big\rangle_{i\in I, d\in\mathbb{Z}, d'\geq 0, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}} \Big/ \Big(\text{relations in Definition 3.1}\Big)$$

博雷尔范畴 $\mathcal{O}$ 凭借转移矩阵构造 [15, 16], , 非常适合研究量子可积模型；移位范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 则与簇范畴化 [20]的框架十分契合。相比之下，目前尚不清楚如何为 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 中的任意模赋予转移矩阵，而且难以从整个范畴 $\mathcal{O}$ 直接得到簇范畴化（因为 $\mathcal{O}$ 中的简单模的张量积并非总是有限长度）。因此，在这一背景下，理解这两个模范畴之间的确切关系十分重要。

代数 (6) 在 [14] 中对任意整余权作了定义

$$\mu = \sum_{i\in I} r_i \omega_i^{\vee} \tag{7}$$

其中 $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I$。此外，对于有限型的 $\mathfrak{g}$ ，以及任意满足 $\mathbf{r} = \mathbf{ord}\ \boldsymbol{\psi}$ 的有理 $\ell$-权$\boldsymbol{\psi}$ ，一个简单模

$$U_q(L\mathfrak{g})^{\mu} \curvearrowright L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}) \tag{8}$$

在 [23] 中被构造（根据同上所引， $U_q(L\mathfrak{g})^{\mu}$ 具有非平凡有限维模，当且仅当 $\mu$ 是余支配的）。在本文中，此类简单模将对任意可对称化 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$加以定义。

当 $\mathfrak{g}$ 为有限型且 $L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$为有限维时，人们很快在 [23] 中认识到 $\chi_q(L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}))$与(5)式右边的第二个因子相匹配。在本文中，我们通过将其从数值等式提升为向量空间同构，对一般的 $L(\boldsymbol{\psi})$确立了这一事实。

**定理 1.1.** 对任意可对称化 *Kac-Moody* 李代数 $\mathfrak{g}$ 以及任意有理$\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$，我们有一个向量空间同构

$$L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) \cong L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}) \tag{9}$$

它保持两侧由 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^I$ 与 $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}}$ 给出的自然分次（见(96) 与(134)）。因此，(9) 下降为 $q$-特征的一个等式

$$\chi_q(L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})) = \chi_q(L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})). \tag{10}$$

上述结果不仅适用于任意可对称化 Kac-Moody 李代数$\mathfrak{g}$，而且对于 $\mathfrak{g}$ 有限型的情形也是新的，因为该结果适用于任意简单模$L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$（特别地， $\mu$不一定是余支配的）。我们所采用的方法也不同于文献中的方法，参见例如 [25, 23]。

向量空间同构（9）提升为如下模的同构：

$$U_q^-(L\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\Big\langle f_{i,d} \Big\rangle_{i\in I, d\in\mathbb{Z}} \Big/ \Big(\text{relations}\Big)$$

它是 (1) 和 (6) 共有的子代数。然而，由于 (1) 和 (6) 这两个代数中正半部与负半部之间的粘合方式不同，我们无法进一步提升同构 (9)。

1.3. **$QQ$-系统**。我们的结果的另一项重要应用是由˜与 $QQ$-系统中的 $Q$变量相对应的简单模 [16]。

回顾一下，ODE/IM 对应揭示了与薛定谔微分算子相关的函数和称为“量子 KdV”的量子系统谱之间一种出人意料的联系。Feigin-Frenkel [11] 从朗兰兹对偶的角度提出了这一对应的一种广义理论。这个开放猜想是重要的灵感来源。特别是，人们发现某些仿射 opers [29]的解的谱行列式满足一组非凡的关系（即 $QQ$-系统）。随后，受 Feigin-Frenkel 一般猜想的启发，文献 [16]证明了该 $QQ$-系统在博雷尔范畴的格罗滕迪克群中有一个解 $\mathcal{O}$ （当底层李代数为有限型时）。该解由简单类描述，精确到乘法常数（即有待计算的重整化因子）。

我们的结果给出了精确的重整化因子，从而能够在博雷尔范畴的格罗滕迪克环中写出 $QQ$-系统 $\mathcal{O}$。事实上，在范畴 $\mathcal{O}^{\text{sh}}$ 中存在一个 $QQ$-系统的解，无需任何重整化因子 [23]。我们在此建立的移位量子环代数表示与博雷尔代数之间的关系，正是计算重整化因子所缺少的关键一环。

请注意， $QQ$-系统与量子可积系统中的 Bethe Ansatz 关系 [29] 以及某些簇代数幺半范畴化中的交换关系 [20]密切相关。因此，本文所建立的范畴 $\mathcal{O}$ 格罗滕迪克群中的精确 $QQ$-系统，也为这些方向上的新进展开辟了道路。

更一般地，我们建立了 $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{O}^{\text{sh}}$的格罗滕迪克环之间的环同构。这使得我们能够用博雷尔范畴 $\mathcal{O}$的术语来表述 [17] 中关于广义$QQ$-系统的猜想。

有鉴于此，我们的结果的主要应用之一是定理 4.11：在博雷尔范畴中， $QQ$-系统有一个显式解 $\mathcal{O}$。这一结果将 [16] 的结论从有限型推广到任意可对称化 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$。

1.4. **洗牌代数**。建立定理 1.1 需要完成许多工作：为任意可对称化 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$定义 $U_q(L\mathfrak{g})$ 的 Borel 子代数，明确构造向量空间 $L(\psi)$、 $L^{\neq 0}(\psi)$ 和 $L^{\text{sh}}(\psi)$，并证明后两个空间一致。所有这些工作都可以利用洗牌代数（[10, 13]）的技术来完成。简而言之，存在一个子空间

$$\mathcal{S}^- \subseteq \mathcal{V} = \bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^I} \frac{\mathbb{C}[z_{i1}^{\pm 1}, \dots, z_{in_i}^{\pm 1}]_{i\in I}^{\text{sym}}}{\prod_{i\neq j,a,b}^{\text{unordered}} (z_{ia} - z_{jb})}$$

使得 $\mathcal{S}^- \cong U_q^-(L\mathfrak{g})$，以及一个子代数

$$\mathcal{S}^-_{<\mathbf{0}} \subset \mathcal{S}^-$$

使得 $\mathcal{S}^-_{<\mathbf{0}} \cong U_q^-(L\mathfrak{g}) \cap U_q(\widehat{\mathfrak{b}^+})_{c=1}$ 在有限型中成立。这使得第二作者证明了以下同构（见 [33, 34]）

$$L(\boldsymbol{\psi}) = \mathcal{S}^-_{<\mathbf{0}} \Big/ J(\boldsymbol{\psi}) \tag{11}$$

$$L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) = \mathcal{S}^-_{<\mathbf{0}} \Big/ J^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) \tag{12}$$

其中，$J(\boldsymbol{\psi})$ 和 $J^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})$ 是有理函数的某些子集，我们将在第 2.9 小节回顾。我们还有

$$L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) \cong \mathcal{S}^- \Big/ \bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) \tag{13}$$

其中 $\bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})$ 在引理 2.19 中定义。我们的主要技术结果如下

**定理 1.2.** 对于任意可对称化 *Kac-Moody* 李代数 $\mathfrak{g}$ 以及任意有理$\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$，设 $\mu$ 与$\mathbf{r} = \mathbf{ord}\ \boldsymbol{\psi}$ 满足关系式(7)。则

$$L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}) = \mathcal{S}^- \Big/ J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}) \tag{14}$$

（其中 $J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$ 由定义 *3.6* 给出）是一个在同构意义下唯一的简单$U_q(L\mathfrak{g})^\mu$-模，由单个向量 $|\varnothing\rangle$ 生成，并满足关系(128)-(129)。

以下事实并非显而易见

$$\bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) = J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$$

，并将在（131）中证明。比较（13）与（14）即可推出定理 1.1。

1.5. **致谢**。第一作者谨此感谢法国国家研究署的资助（项目编号 ANR-24-CE40-3389）。第二作者谨此感谢瑞士国家科学基金会项目 10005316 的资助。

## 2. The Borel category $\mathcal{O}$

我们回顾复半单李代数$\mathfrak{g}$的 $U_q(L\mathfrak{g})$及其 Borel 子代数，然后将这些概念推广到任意可对称化 Kac-Moody 李代数。接着，我们回顾文献 [25, 33], 中定义的 Borel 范畴 $\mathcal{O}$ ，以及如何根据同上文献中的内容，在该范畴中显式构造简单模。

2.1. **基本记号**。 在本文中，集合 $\mathbb{N}$始终包含 0。固定 $q \in \mathbb{C}^*$，且它不是单位根。我们固定满足 $q = e^h$ 的 $h \in \mathbb{C}$，使得$q$ 的复数幂有定义。对于一个有限集 $I$ 和一个 Cartan 矩阵

$$C = \left( c_{ij} = \frac{2d_{ij}}{d_{ii}} \in \mathbb{Z} \right)_{i,j \in I} \tag{15}$$

可以关联一个复半单李代数 $\mathfrak{g}$。对于$i \neq j$，数值 $d_{ij} = d_{ji}$ 必须是非正整数，而数值 $d_{ii}$ 必须是正偶数。我们记

$$d_i = \frac{d_{ii}}{2}$$

对所有 $i \in I$。下文将李代数 $\mathfrak{g}$ 的根格与 $\mathbb{Z}^I$ 等同，并记

$$\mathbb{C}^I \otimes \mathbb{C}^I \xrightarrow{(\cdot,\cdot)} \mathbb{C}, \qquad (\boldsymbol{\varsigma}^i, \boldsymbol{\varsigma}^j) = d_{ij} \tag{16}$$

为复化对称不变双线性形式，其中

$$\boldsymbol{\varsigma}^i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{1 \text{ on } i\text{-th position}} \in \mathbb{N}^I$$

表示第 $i$个单根。我们将考虑标准偏序

$$\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{n} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{n} - \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^I$$

并在 $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{n}$ 且 $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n}$ 时记作 $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$。令 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$、 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ 以及

$$|\boldsymbol{m}| = \sum_{i \in I} m_i$$

对所有 $\boldsymbol{m} = (m_i)_{i \in I}$。

**注 2.1.** 在本文后续部分，我们将把复半单李代数推广到可对称化 *Kac-Moody* 李代数。在这一一般性层面上，$\widehat{\ }$存在某些情形（例如类型 $A_2$），此时 *Cartan* 矩阵 (15) 是奇异的，因此双线性型 (16) 是退化的。在这种情况下，我们按照 [28]扩展双线性型：选取一个复向量空间 $\mathfrak{h}$ 以及一个非退化配对

$$\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \xrightarrow{(\cdot,\cdot)} \mathbb{C} \tag{17}$$

该配对相对于此后固定的包含 $\mathbb{C}^I \hookrightarrow \mathfrak{h}$ 扩展了(16)（我们滥用记号，将 $\boldsymbol{\varsigma}^i$ 记作 $\mathfrak{h}$中第 $i$ 个标准基向量的像）。众所周知，这种最小扩张 $\mathfrak{h}$ 的维数为 $2|I| - \mathrm{rank}(C)$。

2.2. **量子仿射代数**。 我们将关注 $\mathfrak{g}$的量子仿射$\widehat{\ }$代数，其中中心元平凡。若令 $I = I \sqcup 0$，则该代数定义为

$$U_q(\widehat{\mathfrak{g}})_{c=1} = \mathbb{C}\Big\langle e_i, f_i, \kappa_i^{\pm 1} \Big\rangle_{i \in \widehat{I}} \Big/ \Big( [\kappa_i, \kappa_j] = 0 \text{ and other relations} \Big) \tag{18}$$

右侧所施加的“其他关系”在本文中不会用到，感兴趣的读者可在 [25, 第 2.1] 小节中找到。代数 (18) 有一个 Borel 子代数

$$U_q(\widehat{\mathfrak{b}}^+)_{c=1} \subset U_q(\widehat{\mathfrak{g}})_{c=1}$$

由 $\{e_i, \kappa_i^{\pm 1}\}_{i\in\widehat{I}}$ 生成。

**定义 2.2.** *(*[25]*)* 考虑复表示范畴 $\mathcal{O}$

$$U_q(\widehat{\mathfrak{b}}^+)_{c=1} \curvearrowright V \tag{19}$$

它们容许一个分解

$$V = \bigoplus_{\boldsymbol{\omega}\in\cup_{s=1}^{t}(\boldsymbol{\omega}^s-\mathbb{N}^I)} V_{\boldsymbol{\omega}} \tag{20}$$

对于有限多个 $\boldsymbol{\omega}^1$，.....，$\boldsymbol{\omega}^t \in \mathbb{C}^I$，使得每个权空间

$$V_{\boldsymbol{\omega}} = \left\{ v \in V \middle| \kappa_i \cdot v = q^{(\boldsymbol{\omega}, \varsigma^i)} v,\ \forall i \in I \right\} \tag{21}$$

是有限维的。若 $v \in V_{\boldsymbol{\omega}}$ 如上所述，则称 $\boldsymbol{\omega}$ 为 $v$的权。

2.3. **量子环代数**。为了给定义 2.2 的范畴 $\mathcal{O}$ 中的简单模建立指标，我们追随 [5] 的足迹，并考虑非平凡同构（由 [9] 构造并由 [1, 7]证明）

$$\Phi : U_q(\widehat{\mathfrak{g}})_{c=1} \xrightarrow{\sim} U_q(L\mathfrak{g}) \tag{22}$$

其中右侧的对象是量子环代数

$$U_q(L\mathfrak{g}) = \left\langle e_{i,d}, f_{i,d}, \varphi^+_{i,d'}, \varphi^-_{i,d'} \right\rangle_{i\in I, d\in\mathbb{Z}, d'\geq 0} \Big/ \Big( [\varphi^{\pm}_{i,s}, \varphi^{\pm'}_{j,t}] = 0 \text{ and other relations} \Big). \tag{23}$$

我们将在定义 2.5 和 2.7 中回顾 $U_q(L\mathfrak{g})$ 中的全部关系。对我们而言，同构 (22) 的以下性质最为重要:

$$\Phi(\kappa_i) = \varphi^+_{i,0}$$

$$\Phi\left(U_q(\widehat{\mathfrak{b}}^+)_{c=1}\right) \supset \{\varphi^+_{i,0}, \varphi^+_{i,1}, \dots\}_{i\in I} \cup \{e_{i,0}, e_{i,1}, \dots\}_{i\in I}.$$

因此，我们可以考察范畴 $\mathcal{O}$ 中的模，并探究它们的权空间如何进一步分解为交换族自同态 $\{\varphi^+_{i,0}, \varphi^+_{i,1}, \dots\}_{i\in I}$ 的广义特征空间。以下概念最适合用来系统化地描述这一点。

**定义 2.3**。一个 $\ell$-权 是一个由可逆幂级数组成的 $I$ 元组

$$\boldsymbol{\psi} = \left( \psi_i(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{\psi_{i,d}}{z^d} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]^{\times} \right)_{i\in I} \tag{24}$$

如果每个 $\psi_i(z)$ 都是某个有理函数的展开式，那么 $\boldsymbol{\psi}$ 称为有理的。

因此，给定一个 $\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$，我们可以做两件事:

• 对于任意模 $U_q(\widehat{\mathfrak{b}}^+)_{c=1} \curvearrowright V$，考虑广义特征空间

$$V_{\boldsymbol{\psi}} = \left\{ v \in V \middle| \left( \varphi^+_{i,d} - \psi_{i,d} \cdot \mathrm{Id}_V \right)^N (v) = 0 \text{ for any } i, d \text{ and for } N \gg 0 \right\} \tag{25}$$

• 考虑简单模

$$U_q(\widehat{\mathfrak{b}}^+)_{c=1} \curvearrowright L(\boldsymbol{\psi}) \tag{26}$$

由单个向量 $|\varnothing\rangle$ 生成，并满足以下关系

$$e_{i,d} \cdot |\varnothing\rangle = 0 \qquad \text{and} \qquad \varphi^+_{i,d} \cdot |\varnothing\rangle = \psi_{i,d}|\varnothing\rangle \tag{27}$$

对所有 $i \in I$， $d \geq 0$。已有证明表明，简单模 (26) 存在，且在同构意义下唯一 [25], ，这一结果建立在 [5] 关于有限维模的工作之上。此外，我们有以下结论。

**定理 2.4**。 [25]表示 $L(\boldsymbol{\psi})$ 属于范畴 $\mathcal{O}$ ，当且仅当 $\boldsymbol{\psi}$ 是有理数。

此后我们只考虑有理的 $\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$。

简单模的特征（即权空间维数的生成级数 (21)）不足以区分不同的 $L(\boldsymbol{\psi})$。然而，Frenkel-Reshetikhin 的 $q$-特征（[19, 25], 即 $\ell$-权空间维数的生成级数 (25)）能够区分它们。对于范畴 $\mathcal{O}$中的任意 $V$，我们将这些 $q$-特征记作如下

$$\chi_q(V) = \sum_{\ell\text{-weights } \boldsymbol{\psi}} \dim_{\mathbb{C}} (V_{\boldsymbol{\psi}}) \, [\boldsymbol{\psi}] \tag{28}$$

其中， $[\boldsymbol{\psi}]$ 是按分量（作为 $I$-元组）相乘的形式符号。

2.4. **Kac-Moody 李代数**。下文中，我们将假设 $\mathfrak{g}$ 是一个可对称化的 Kac-Moody 李代数，或者等价地说，去掉对 Cartan 矩阵（15）的正定性要求。在这一层次的普遍性下，我们没有

$$U_q(\widehat{\mathfrak{g}})_{c=1} \text{ and its Borel subalgebra } U_q(\widehat{\mathfrak{b}}^+)_{c=1}.$$

然而，存在一个关于 $U_q(L\mathfrak{g})$ 的概念，我们将使用洗牌代数工具为其关联一个 Borel 子代数的替代对象。我们首先分两步定义与 $\mathfrak{g}$相关的量子环代数。在下文中，我们记

$$e_i(z) = \sum_{d=-\infty}^{\infty} \frac{e_{i,d}}{z^d}, \qquad f_i(z) = \sum_{d=-\infty}^{\infty} \frac{f_{i,d}}{z^d}, \qquad \varphi^{\pm}_i(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{\varphi^{\pm}_{i,d}}{z^{\pm d}}.$$

以及 $q_i = q^{d_i}$。我们假设给定了如注 2.1 中的扩张 $\mathfrak{h} \supseteq \mathbb{C}^I$ ，并定义如下概念（它与 [33] 的概念不同之处在于，它具有更大的 Cartan 子代数；符号 $\{\kappa_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a}\in\mathfrak{h}}$ 将始终被视为$\mathbb{C}$-可加的，即满足公式

$$\kappa_{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}} = \kappa^{\alpha}_{\mathbf{a}} \kappa^{\beta}_{\mathbf{b}} \tag{29}$$

对所有 $\alpha$， $\beta \in \mathbb{C}$ 以及 $\mathbf{a}$， $\mathbf{b}$ $\in \mathfrak{h}$; 在我们将要考虑的所有表示中，所有的 $\kappa_{\mathbf{a}}$'s 都将以非零复数特征值对角作用）。对于所有 $i$， $j \in I$，令

$$\zeta_{ij}(x) = \frac{x - q^{-d_{ij}}}{x - 1}. \tag{30}$$

**定义 2.5**。与 $\mathfrak{g}$ 相关联的预量子环代数为

$$\widetilde{U}_q(L\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\Big\langle e_{i,d}, f_{i,d}, \varphi^+_{i,d'}, \varphi^-_{i,d'}, \kappa_{\mathbf{a}} \Big\rangle_{i\in I, d\in\mathbb{Z}, d'\geq 0, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}} \Big/ relations\ (31)\text{-}(35)$$

其中，我们对所有 $i$、$j \in I$、$\mathbf{a} \in \mathfrak{h}$、$\pm$、$\pm' \in \{+,-\}$施加以下关系：

$$e_i(x)e_j(y)\zeta_{ji}\left(\frac{y}{x}\right) = e_j(y)e_i(x)\zeta_{ij}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{31}$$

$$\varphi^{\pm}_j(y)e_i(x)\zeta_{ij}\left(\frac{x}{y}\right) = e_i(x)\varphi^{\pm}_j(y)\zeta_{ji}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{32}$$

$$\kappa_{\mathbf{a}} e_i(x) = e_i(x)\kappa_{\mathbf{a}} q^{(\mathbf{a},\boldsymbol{\varsigma}^i)} \tag{33}$$

$$\varphi^{\pm}_i(x)\varphi^{\pm'}_j(y) = \varphi^{\pm'}_j(y)\varphi^{\pm}_i(x), \quad \varphi^{\pm}_{i,0} = \kappa_{\pm\boldsymbol{\varsigma}^i} \tag{34}$$

以及将 $e$ 替换为 $f$ 后的相反关系 [3]，最后还有关系

$$[e_i(x), f_j(y)] = \frac{\delta_{ij}\delta\left(\frac{x}{y}\right)}{q_i - q_i^{-1}}\Big(\varphi^+_i(x) - \varphi^-_i(y)\Big). \tag{35}$$

在公式 (31) 中，我们清除分母，并通过令左右两边所有 $x^{-d}y^{-d'}$ 的系数相等来得到关系；而在 (32) 中，我们按 $y^{\pm 1}$ 的非正幂展开，然后令系数相等。

请注意，我们不假设预量子环代数中成立任何 Drinfeld-Serre 型关系，而是在下文定义 2.7 中纳入此类关系（的广义版本）。更具体地说，量子环代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ 将被定义为预量子环代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ 的一个特定商模；我们将使用洗牌代数的语言来引入该代数。

对于所有$\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I$，我们有以下移位自同构

$$\sigma_{\mathbf{r}} : \widetilde{U}_q(L\mathfrak{g}) \to \widetilde{U}_q(L\mathfrak{g}), \quad e_{i,d} \mapsto e_{i,d+r_i}, f_{i,d} \mapsto f_{i,d-r_i}, \varphi^{\pm}_{i,d} \mapsto \varphi^{\pm}_{i,d}, \kappa_{\mathbf{a}} \mapsto \kappa_{\mathbf{a}} \tag{36}$$

**注 2.6.** 我们注意到，不同作者对 *Cartan* 元素采用了不同的归一化方式，现将它们进行比较。在本文中，我们写作

$$\varphi^{\pm}_j(y) = \kappa^{\pm 1}_{\boldsymbol{\varsigma}^j} \exp\left(\sum_{u=1}^{\infty} \frac{p_{j,\pm u}}{u y^{\pm u}}\right) \tag{37}$$

根据该式，(32) 可推出

$$[p_{j,u}, e_i(x)] = e_i(x)x^u\left(q^{ud_{ij}} - q^{-ud_{ij}}\right) \tag{38}$$

˜因此，[23,第 9 节2] 中的生成元 $p_{j,u}$ 与 $h_{i,u}$ 之间的比较由下式给出，其中对所有 $j \in I$ 和 $u \in \mathbb{Z}\backslash 0$ 均成立

$$p_{j,u} = u(q - q^{-1})\sum_{i\in I} \tilde{h}_{i,u} C_{ij}(q^u)$$

其中

$$C_{ij}(x) = \frac{x^{d_{ij}} - x^{-d_{ij}}}{x^{d_i} - x^{-d_i}} \tag{39}$$

[3]换句话说，我们将任意乘积 $\ldots e\varphi e'\varphi'\ldots$ 替换为 $\ldots\varphi' f'\varphi f\ldots$。

是修正量子卡当矩阵（对于有限型 $\mathfrak{g}$，它与通常的量子卡当矩阵相同，其对角线上的元素为 $x^{d_i}+x^{-d_i}$，非对角线上的元素为 $[c_{ij}]_x$）。

**2.5. 大洗牌代数**。现在我们回顾与 Kac-Moody 李代数$\mathfrak{g}$相关的 Feigin-Odesskii 洗牌代数[13]的三角版本（[10]）。考虑任意多个变量的有理函数所构成的向量空间

$$\mathcal{V}=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^I}\mathcal{V}_{\boldsymbol{n}},\quad \text{where}\quad \mathcal{V}_{(n_i\geq 0)_{i\in I}}=\frac{\mathbb{C}[z_{i1}^{\pm 1},\dots,z_{in_i}^{\pm 1}]_{i\in I}^{\mathrm{sym}}}{\prod_{i\neq j}^{\mathrm{unordered}}\prod_{a=1}^{n_i}\prod_{b=1}^{n_j}(z_{ia}-z_{jb})} \tag{40}$$

上文中的“sym”指颜色对称有理函数，也就是说，对每个 $i\in I$而言，变量 $z_{i1}$、...、$z_{in_i}$分别是对称的（这一术语的灵感来自 $i\in I$ 被称为变量 $z_{ia}$的颜色）。我们通过以下洗牌乘积将向量空间 $\mathcal{V}$ 赋予 $\mathbb{C}$代数结构：

$$E(z_{i1},\dots,z_{in_i})_{i\in I}*E'(z_{i1},\dots,z_{in_i'}')_{i\in I}=\frac{1}{\boldsymbol{n}!\boldsymbol{n}'!}\cdot \tag{41}$$

$$\mathrm{Sym}\left[E(z_{i1},\dots,z_{in_i})E'(z_{i,n_i+1},\dots,z_{i,n_i+n_i'}')\prod_{i,j\in I}\prod_{\substack{1\leq a\leq n_i\\ n_j<b\leq n_j+n_j'}}\zeta_{ij}\left(\frac{z_{ia}}{z_{jb}}\right)\right]$$

式（41）中的“Sym”表示关于以下对象的对称化：

$$(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}')!:=\prod_{i\in I}(n_i+n_i')!$$

对每个 $i$而言，变量 $\{z_{i1},\dots,z_{i,n_i+n_i'}'\}$的置换彼此独立。公式（41）的原因是确保存在代数同态

$$\widetilde{\Upsilon}^+:\widetilde{U}_q^+(L\mathfrak{g})\to\mathcal{V},\qquad e_{i,d}\mapsto z_{i1}^d\in\mathcal{V}_{\boldsymbol{\varsigma}^i} \tag{42}$$

$$\widetilde{\Upsilon}^-:\widetilde{U}_q^-(L\mathfrak{g})\to\mathcal{V}^{\mathrm{op}},\qquad f_{i,d}\mapsto z_{i1}^d\in\mathcal{V}^{\mathrm{op}}_{\boldsymbol{\varsigma}^i} \tag{43}$$

其中

$$\widetilde{U}_q^+(L\mathfrak{g})=\mathbb{C}\Big\langle e_{i,d}\Big\rangle_{i\in I,d\in\mathbb{Z}}\Big/(\text{relation (31)})$$

$$\widetilde{U}_q^-(L\mathfrak{g})=\mathbb{C}\Big\langle f_{i,d}\Big\rangle_{i\in I,d\in\mathbb{Z}}\Big/(\text{opposite of relation (31)})$$

根据关于三角分解的标准结果，我们有

$$\widetilde{U}_q(L\mathfrak{g})=\widetilde{U}_q^+(L\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}\left[\varphi_{i,1}^{\pm},\varphi_{i,2}^{\pm},\dots,\kappa_{\mathbf{a}}\right]_{i\in I,\mathbf{a}\in\mathfrak{h}}\otimes\widetilde{U}_q^-(L\mathfrak{g})$$

在生成元的自然识别下。注意，$\widetilde{\Upsilon}^{\pm}$ 与移位自同构（36）交织，

$$\sigma_{\mathbf{r}}:\mathcal{V}\to\mathcal{V},\qquad R(z_{i1},\dots,z_{in_i})\mapsto R(z_{i1},\dots,z_{in_i})\prod_{i\in I}\prod_{a=1}^{n_i}z_{ia}^{r_i}, \tag{44}$$

$$\sigma_{\mathbf{r}}:\mathcal{V}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}^{\mathrm{op}},\qquad R(z_{i1},\dots,z_{in_i})\mapsto R(z_{i1},\dots,z_{in_i})\prod_{i\in I}\prod_{a=1}^{n_i}z_{ia}^{-r_i}. \tag{45}$$

**定义 2.7**。若令

$$U_q^{\pm}(L\mathfrak{g}) = \widetilde{U}_q^{\pm}(L\mathfrak{g}) \Big/ \operatorname{Ker}\, \widetilde{\Upsilon}^{\pm} \tag{46}$$

于是量子环代数定义为

$$U_q(L\mathfrak{g}) = U_q^+(L\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}\left[\varphi_{i,1}^{\pm}, \varphi_{i,2}^{\pm}, \ldots, \kappa_{\mathbf{a}}\right]_{i\in I, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}} \otimes U_q^-(L\mathfrak{g}) \tag{47}$$

其关系由(31)-(35)诱导。注意， $U_q(L\mathfrak{g})$ 继承了移位(36)。

**例 2.8.** 对于有限型的 $\mathfrak{g}$， [36] 证明了(46)与 *Drinfeld* 在 [9] 中定义、*Beck* 在~[1] 中研究以及 *Damiani* 在 [7] 中研究的原始量子环代数一致。换言之，理想 $\operatorname{Ker}\ \Upsilon^+$的一组生成元由 *Drinfeld-Serre* 关系给出

$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \binom{1-c_{ij}}{k}_q \operatorname{Sym}\left[e_i(z_1)\ldots e_i(z_k)e_j(w)e_i(z_{k+1})\ldots e_i(z_{1-c_{ij}})\right] = 0 \tag{48}$$

~对所有 $i \neq j$ 均成立；对于$\operatorname{Ker}\ \Upsilon^-$，利用 $f$ 流也有类似结论。上文中，Sym 表示关于变量 $z_1$、.....、 $z_{1-c_{ij}}$ 的对称化。

**例 2.9.** 更一般地，若

$$d_{ij} \in \{0, -\max(d_i, d_j)\}$$

对所有 $i \neq j$，那么我们称 $\mathfrak{g}$ 是一个强可对称化*Kac-Moody* 李代数。~在这种情况下，由 [32, 35] 可知，核 $\Upsilon^+$ 仍由关系(48)生成，因此

$$U_q(L\mathfrak{g}) = \widetilde{U}_q(L\mathfrak{g}) \Big/ (\textit{Drinfeld-Serre relations } (48))$$

**例 2.10**。 对于任意单边 *Kac-Moody* 李代数 $\mathfrak{g}$ （即 $d_{ii} = 2, \forall i \in_{\sim} I$），文献 [31] 已证明，核 $\Upsilon^+$ 由下文的关系(49) 生成。为建立这些关系，考虑任意 $i \neq j \in I$ 以及任意公比为 *2* 的等差数列 $s, \ldots, t$ 和 $s', \ldots, t'$，满足 $s + t = s' + t'$，如下有向图

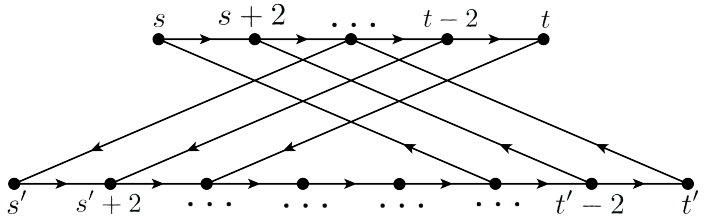



FIGURE 1. 一个特定之字形 $Z$

其中对角边向左指向 $-d_{ij}$ 步。然后我们施加以下关系

$$\sum \Big(a \textit{ certain polynomial}\Big) \prod_{\substack{\textit{vertices } c \textit{ in} \\ \textit{descending order}}} \Big(e_i(z_c) \textit{ or } e_j(z_c)\Big) \tag{49}$$

其中求和遍历图*1*中所有不含有向环的子图（任何此类子图都会在顶点集上诱导出一个良定义的阶，我们据此可以计算(49)中的乘积），并且根据顶点 $c$ 位于图*1*的顶行还是底行，分别使用流 $e_i(z_c)$ 或流$e_j(z_c)$ 。对于(49)中的具体多项式，有兴趣的读者可参阅 [31] 。

2.6. **Hopf 代数**。现在让我们回顾（47）相对于关系（31）-（35）为何是一个良定义的代数。其原因是如下众所周知的事实：

$$\widetilde{U}_q^{\geq}(L\mathfrak{g}) = \widetilde{U}_q^{+}(L\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}\left[\varphi_{i,1}^{+}, \varphi_{i,2}^{+}, \ldots, \kappa_{\mathbf{a}}\right]_{i\in I, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}} \tag{50}$$

$$\widetilde{U}_q^{\leq}(L\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\left[\varphi_{i,1}^{-}, \varphi_{i,2}^{-}, \ldots, \kappa_{\mathbf{a}}\right]_{i\in I, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}} \otimes \widetilde{U}_q^{-}(L\mathfrak{g}) \tag{51}$$

（分别利用关系（31）-（34）及其相反关系做成代数）实际上是关于 Drinfeld 余乘积的拓扑Hopf代数，其取值于张量平方的拓扑完备化：

$$\Delta(\varphi_i^{\pm}(z)) = \varphi_i^{\pm}(z) \otimes \varphi_i^{\pm}(z), \quad \Delta(\kappa_{\mathbf{a}}) = \kappa_{\mathbf{a}} \otimes \kappa_{\mathbf{a}} \tag{52}$$

$$\Delta(e_i(z)) = \varphi_i^{+}(z) \otimes e_i(z) + e_i(z) \otimes 1 \tag{53}$$

$$\Delta(f_i(z)) = 1 \otimes f_i(z) + f_i(z) \otimes \varphi_i^{-}(z) \tag{54}$$

对所有 $i \in I$,$\mathbf{a} \in \mathfrak{h}$，以及对极 $S$ 由下式给出

$$S\left(\varphi_i^{\pm}(z)\right) = \left(\varphi_i^{\pm}(z)\right)^{-1}, \quad S(\kappa_{\mathbf{a}}) = \kappa_{\mathbf{a}}^{-1} \tag{55}$$

$$S\left(e_i(z)\right) = -\left(\varphi_i^{+}(z)\right)^{-1} e_i(z) \tag{56}$$

$$S\left(f_i(z)\right) = -f_i(z)\left(\varphi_i^{-}(z)\right)^{-1}. \tag{57}$$

对所有 $i \in I$,$\mathbf{a} \in \mathfrak{h}$。类似地，我们可以通过适当地用元素 $\varphi_i^{+}{}_{,d}$ 和$\varphi_i^{-}{}_{,d}$ 分别扩充 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ ，从而将它们提升为拓扑Hopf代数。具体而言，我们有如下余乘公式，见 [33, 小节 3.7]:

$$\Delta(E) = \sum_{\mathbf{0}\leq \boldsymbol{m}\leq \boldsymbol{n}} \frac{\prod_{m_j<b\leq n_j}^{j\in I} \varphi_j^{+}(z_{jb}) E(z_{i1}, \ldots, z_{im_i} \otimes z_{i,m_i+1}, \ldots, z_{in_i})}{\prod_{1\leq a\leq m_i}^{i\in I} \prod_{m_j<b\leq n_j}^{j\in I} \zeta_{ji}\left(\frac{z_{jb}}{z_{ia}}\right)} \tag{58}$$

$$\Delta(F) = \sum_{\mathbf{0}\leq \boldsymbol{m}\leq \boldsymbol{n}} \frac{F(z_{i1}, \ldots, z_{im_i} \otimes z_{i,m_i+1}, \ldots, z_{in_i}) \prod_{1\leq b\leq m_j}^{j\in I} \varphi_j^{-}(z_{jb})}{\prod_{1\leq a\leq m_i}^{i\in I} \prod_{m_j<b\leq n_j}^{j\in I} \zeta_{ij}\left(\frac{z_{ia}}{z_{jb}}\right)} \tag{59}$$

对所有 $E \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{n}}$、 $F \in \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}}$。为使公式（58）和（59）的右端有意义，我们将分母在范围 $|z_{ia}| \ll |z_{jb}|$ 内展开为幂级数，并把 $z_{ia}$ 的所有幂次置于 $\otimes$ 符号的左侧，把 $z_{jb}$ 的所有幂次置于 $\otimes$ 符号的右侧（对所有 $i, j \in I$、 $1 \leq a \leq m_i$、 $m_j < b \leq n_j$）。同态$\widetilde{\Upsilon}^{\pm}$ 保持上述 Hopf 代数结构，因此

$$U_q^{\geq}(L\mathfrak{g}) = U_q^{+}(L\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}\left[\varphi_{i,1}^{+}, \varphi_{i,2}^{+}, \ldots, \kappa_{\mathbf{a}}\right]_{i\in I, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}}$$

$$U_q^{\leq}(L\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\left[\varphi_{i,1}^{-}, \varphi_{i,2}^{-}, \ldots, \kappa_{\mathbf{a}}\right]_{i\in I, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}} \otimes U_q^{-}(L\mathfrak{g})$$

继承 Hopf 代数结构。此外，还存在一个 Hopf 配对

$$U_q^{\geq}(L\mathfrak{g}) \otimes U_q^{\leq}(L\mathfrak{g}) \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} \mathbb{C} \tag{60}$$

由以下指定生成

$$\Big\langle e_i(x), f_j(y) \Big\rangle = \frac{\delta_{ij}\delta\left(\frac{x}{y}\right)}{q_i^{-1} - q_i} \tag{61}$$

$$\Big\langle \varphi_i^+(x), \varphi_j^-(y) \Big\rangle = \frac{xq^{d_{ij}} - y}{x - yq^{d_{ij}}}, \qquad \langle \kappa_{\mathbf{a}}, \kappa_{\mathbf{b}} \rangle = q^{-(\mathbf{a},\mathbf{b})} \tag{62}$$

在以下条件下，对所有 $a$， $a_1$， $a_2 \in U_q^{\geq}(L\mathfrak{g})$ 以及 $b$， $b_1$， $b_2 \in U_q^{\leq}(L\mathfrak{g})$

$$\Big\langle a, b_1 b_2 \Big\rangle = \Big\langle \Delta(a), b_1 \otimes b_2 \Big\rangle \tag{63}$$

$$\Big\langle a_1 a_2, b \Big\rangle = \Big\langle a_1 \otimes a_2, \Delta^{\mathrm{op}}(b) \Big\rangle \tag{64}$$

（$\Delta^{\mathrm{op}}$ 是与 $\Delta$ 相反的余乘法）并且

$$\Big\langle S(a), S(b) \Big\rangle = \Big\langle a, b \Big\rangle. \tag{65}$$

如 [32], 所示，我们有

$$U_q(L\mathfrak{g}) \text{ is the Drinfeld double } \frac{U_q^{\geq}(L\mathfrak{g}) \otimes U_q^{\leq}(L\mathfrak{g})}{(\kappa_{\mathbf{a}} \otimes 1 - 1 \otimes \kappa_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in \mathfrak{h}}}. \tag{66}$$

上文回顾一下，德林费尔德双中的乘法由以下关系控制

$$\begin{aligned} & ba = \Big\langle a_1, S(b_1) \Big\rangle a_2 b_2 \Big\langle a_3, b_3 \Big\rangle \\ \Leftrightarrow \quad & ab = \Big\langle a_1, b_1 \Big\rangle b_2 a_2 \Big\langle a_3, S(b_3) \Big\rangle \end{aligned} \tag{67}$$

对所有 $a \in U_q^{\geq}(L\mathfrak{g})$ 和 $b \in U_q^{\leq}(L\mathfrak{g})$，其中我们使用 Sweedler 记号

$$\Delta^{(2)}(x) = (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(x) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3,$$

为避免写出隐含的求和号。

**注 2.11**。 关于 $U_q(L\mathfrak{g})$ 的上述观点在技术上有显著优势。例如，直接证明 *Drinfled* 新余乘法 (52)、(53)、(54)满足 *Drinfeld-Serre* 关系 (48) 是一项颇具挑战的计算（例如参见 [8]）。然而，同态的复合

$$\widetilde{\Upsilon}^+ : \widetilde{U}_q^+(L\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U_q^+(L\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{V}$$

$\widetilde{\ }$保持余乘法不变，使我们得以断定 $\Delta$从 $U_q(L\mathfrak{g})$ 下降到 $U_q(L\mathfrak{g})$。

[4]请注意，我们的 $q$ 和 $\kappa_i$ 是量子群理论中的通常 $q^{-1}$ 和 $K_i^{-1}$。

**2.7.（小）洗牌代数。** 我们将把其中任意一个称为

$$\mathcal{S}^{\pm} = \mathrm{Im}\ \widetilde{\Upsilon}^{\pm} \tag{68}$$

作为"洗牌代数"，即由 $\{z_{i1}^d \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{\varsigma}^i}\}_{i\in I, d\in\mathbb{Z}}$生成的 $\mathcal{V}$ 或 $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ 的子代数。根据定义，我们有

$$U_q^{\pm}(L\mathfrak{g}) \cong \mathcal{S}^{\pm} \tag{69}$$

明确地说， $\mathcal{S}^-$ 是有理函数的 $\mathbb{C}$-线性张成空间，这些有理函数具有如下形式

$$\mathrm{Sym}\left[z_1^{d_1}\dots z_n^{d_n} \prod_{1\le a<b\le n} \zeta_{i_b i_a}\left(\frac{z_b}{z_a}\right)\right] \tag{70}$$

当 $i_1, \dots, i_n$遍历 $I$且 $d_1, \dots, d_n$遍历 $\mathbb{Z}$时（在上述表达式中，我们将每个变量 $z_a$ 与记号（40）中某个形如 $z_{i_a \bullet_a}$ 的变量视为相同；由于存在对称化，只要当 $a \neq b$ 时有 $\bullet_a \neq \bullet_b$， $\bullet_a \in \{1, 2, \dots\}$的取值便无关紧要， $i_a = i_b$）。 $\mathcal{S}^+$ 的描述与（70）类似，但乘积遍历 $a > b$。洗牌代数 $\mathcal{S}^{\pm}$按 $\pm\mathbb{N}^I$分级，其中

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{n}} = \mathcal{S}^+ \cap \mathcal{V}_{\boldsymbol{n}} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}} = \mathcal{S}^- \cap \mathcal{V}^{\mathrm{op}}_{\boldsymbol{n}}$$

并且它们从 (44)-(45) 继承移位自同构 $\sigma_{\mathbf{r}}$： $\mathcal{S}^{\pm} \to \mathcal{S}^{\pm}$。此外，

$$\mathcal{S}^{\geq} = \mathcal{S}^+ \otimes \mathbb{C}\left[\varphi^+_{i,1}, \varphi^+_{i,2}, \dots, \kappa_{\mathbf{a}}\right]_{i\in I, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}}$$

$$\mathcal{S}^{\leq} = \mathbb{C}\left[\varphi^-_{i,1}, \varphi^-_{i,2}, \dots, \kappa_{\mathbf{a}}\right]_{i\in I, \mathbf{a}\in\mathfrak{h}} \otimes \mathcal{S}^-$$

从扩张的 $\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ 继承拓扑 Hopf 代数结构（见 (58)-(59)）。同时，配对 (60) 在同构 (69) 下取如下形式：

$$\mathcal{S}^{\geq} \otimes \mathcal{S}^{\leq} \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} \mathbb{C} \tag{71}$$

由公式 (62) 连同 [5]

$$\left\langle e_{i_1,d_1} * \dots * e_{i_n,d_n}, F \right\rangle = \int_{|z_1|\gg\dots\gg|z_n|} \frac{z_1^{d_1}\dots z_n^{d_n} F(z_1, \dots, z_n)}{\prod_{1\le a<b\le n} \zeta_{i_b i_a}\left(\frac{z_b}{z_a}\right)} \tag{72}$$

对所有 $F \in \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}}$，任意 $d_1$，……， $d_n \in \mathbb{Z}$ 以及任意 $i_1$，……， $i_n \in I$，使得 $\boldsymbol{\varsigma}^{i_1} + \dots + \boldsymbol{\varsigma}^{i_n} = \boldsymbol{n}$ （(72) 右端的记号依照 (70) 定义）。积分号下的下标表示变量在以原点为中心的同心圆上取值，这些圆彼此相距很远，并按 $\gg$ 符号所规定的顺序排列。体积形式 $\prod_{a=1}^n \frac{dz_a}{2\pi i z_a}$ 将隐含于我们所有的积分之中，尽管我们不会将其显式写出。

**例 2.12.** 对于有限型的 $\mathfrak{g}$，我们有如下明确描述

$$\mathcal{S}^+ = \left\{ \frac{\rho \ satisfying \ (74)}{\prod_{i\neq j}^{unordered} \prod_{a,b} (z_{ia} - z_{jb})} \right\} \tag{73}$$

其中 $\rho$ 遍历满足所谓 *Feigin-Odesskii* 轮条件的颜色对称劳朗多项式，对所有 $i \neq j \in I$均成立

$$\rho(\dots, z_{ia}, \dots, z_{jb}, \dots)\Big|_{(z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{i,1-c_{ij}}) \mapsto (z_{j1}q^{d_{ij}}, z_{j1}q^{d_{ij}+d_{ii}}, \dots, z_{j1}q^{-d_{ij}})} = 0 \tag{74}$$

[5]在配对的公式中，我们会滥用记号，写作 $e_{i,\ d}$ 而不是 $z_{i1}^d$，参见（42）。

(73) 的包含关系 $\subseteq$ 是基于开创性工作 [13],在 [10] 中确立的，而(73)的包含关系 $\supseteq$ 则在 [36]中得到了证明。与例 *2.8* 比较。

**例 2.13.** 对于 $\mathfrak{g}$ 强可对称化（见例 *2.9*），公式 (73)和 (74) 也如所述成立，证明见 [35,引理 3。23]。

**例 2.14.** 对于任意单边可对称化 *Kac-Moody* 李代数 $\mathfrak{g}$ （即$d_{ii}=2\forall i\in I$），文献 [31] 证明了

$$\mathcal{S}^{+}=\left\{\frac{\rho\ satisfying\ (76)}{\prod_{i\neq j}^{unordered}\prod_{a,b}(z_{ia}-z_{jb})}\right\} \tag{75}$$

其中 $\rho$ 遍历满足以下条件的颜色对称劳朗多项式：对于任意 $i\neq j$属于 $I$以及任意 $t-st'-s'\in 2\mathbb{N}$，使得 $s-t'=s'-t\equiv d_{ij}$模 *2*，

$$(x-y)^{\frac{t-s'+d_{ij}}{2}+1} \tag{76}$$

整除 $\rho$ 在处的特化值

$$z_{i1}=xq^{s},\quad z_{i2}=xq^{s+2},\quad \dots\quad z_{i,\frac{t-s}{2}}=xq^{t-2},\quad z_{i,\frac{t-s}{2}+1}=xq^{t} \tag{77}$$

$$z_{j1}=yq^{s'},\quad z_{j2}=yq^{s'+2},\quad \dots\quad z_{j,\frac{t'-s'}{2}}=yq^{t'-2},\quad z_{j,\frac{t'-s'}{2}+1}=yq^{t'} \tag{78}$$

参见例 *2.10*。

2.8. **斜率子代数与范畴** $\mathcal{O}$。 以下是斜率子代数的特例，这些子代数已在 [33]中研究。令

$$\mathcal{S}_{\geq\mathbf{0}|\boldsymbol{n}}=\left\{E\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{n}}\Big|\lim_{\xi\to 0}E(\xi z_{i1},\dots,\xi z_{im_i},z_{i,m_{i+1}},\dots,z_{in_i})<\infty,\forall\mathbf{0}<\boldsymbol{m}\leq\boldsymbol{n}\right\}$$

$$\mathcal{S}_{<\mathbf{0}|-\boldsymbol{n}}=\left\{F\in\mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}}\Big|\lim_{\xi\to 0}F(\xi z_{i1},\dots,\xi z_{im_i},z_{i,m_{i+1}},\dots,z_{in_i})=0,\forall\mathbf{0}<\boldsymbol{m}\leq\boldsymbol{n}\right\}$$

不难证明

$$\mathcal{S}^{+}_{\geq\mathbf{0}}=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^I}\mathcal{S}_{\geq\mathbf{0}|\boldsymbol{n}}$$

$$\mathcal{S}^{-}_{<\mathbf{0}}=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^I}\mathcal{S}_{<\mathbf{0}|-\boldsymbol{n}}$$

相对于洗牌乘积，它们分别是 $\mathcal{S}^{+}$ 和 $\mathcal{S}^{-}$ 的子代数。

**命题 2.15**。子空间

$$\mathcal{A}^{\geq}=\mathcal{S}^{+}_{\geq\mathbf{0}}\otimes\mathbb{C}\left[\varphi^{\pm}_{i,1},\varphi^{\pm}_{i,2},\dots,\kappa_{\mathbf{a}}\right]_{i\in I,\mathbf{a}\in\mathfrak{h}}\otimes\mathcal{S}^{-}_{<\mathbf{0}}$$

$U_q(L\mathfrak{g})$ 是一个子代数。若 $\mathfrak{g}$ 是有限型的，则同构

$$U_q(\widehat{\mathfrak{g}})_{c=1}\xrightarrow{\sim}U_q(L\mathfrak{g})$$

将 *Borel* 子代数 $U_q\left(\widehat{\mathfrak{g}}\right)_{c=1}$ 同构地映射到 $\mathcal{A}^{\geq}$。

**注 2.16**。 如 [34],中所述，存在一个分解

$$\mathcal{A}^{\geq} = \prod_{\mu \in (-\infty, \infty]}^{\rightarrow} \mathcal{B}_\mu$$

其中 $\mathcal{B}_\mu \subset \mathcal{A}^{\geq}$ 是一个子代数，其所有元素都满足恒等式

$$\mu(\text{vdeg } X) = |\text{hdeg } X|$$

（因此， $\mu = \infty$ 包含生成元 $e_{i,\ 0} \in \mathcal{S}^+$，而 $\mu = 0$ 对应于环卡当子代数的正半部分）。每个 $\mathcal{B}_\mu$ 的分次维数由猜想中的 [34, 公式 (90)]，中的指数决定，这些指数在有限型 $\mathfrak{g}$ 中是已知的。与此同时，不同代数 $\mathcal{B}_\mu$ 中一般元素之间的交换关系，即使在有限型中也尚不清楚；关于一种经典情形，参见 [2] $\widehat{\ }$，它与本文的 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_1$ 类比密切相关。

上述构造为定义 2.2 的以下推广提供了依据，该推广适用于所有可对称化的 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$。

**定义 2.17**。 *([33])* 考虑复表示范畴 $\mathcal{O}$

$$\mathcal{A}^{\geq} \curvearrowright V \tag{79}$$

它们具有如下分解

$$V = \bigoplus_{\boldsymbol{\omega} \in \cup_{s=1}^t (\boldsymbol{\omega}^s - \mathbb{N}^I)} V_{\boldsymbol{\omega}} \tag{80}$$

对于有限多个 $\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^t \in \mathfrak{h}$，使得每个权空间

$$V_{\boldsymbol{\omega}} = \left\{ v \in V \middle| \kappa_{\mathbf{a}} \cdot v = q^{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a})} v,\ \forall \mathbf{a} \in \mathfrak{h} \right\} \tag{81}$$

均为有限维。若 $v \in V_{\boldsymbol{\omega}}$ 如上所述，则称 $\boldsymbol{\omega}$ 为 $v$ 的权。

2.9. **简单模**。 对于任意有理 $\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$，我们将 $\mathbf{r}$ =**阶** $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{Z}^I$记作 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_i(z))_{i \in I}$ 在 $z = 0$ 处的极点阶数元组。考虑以下$-\mathbb{N}^I$ 分次向量空间，它们在 [33, 34] 中首次引入

$$L(\boldsymbol{\psi}) = \mathcal{S}^-_{<\mathbf{0}} \Big/ J(\boldsymbol{\psi})$$
$$L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) = \mathcal{S}^-_{<\mathbf{0}} \Big/ J^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})$$
$$L^{\mathbf{r}} = \mathcal{S}^-_{<\mathbf{0}} \Big/ J^{\mathbf{r}}$$

在上述公式中，我们定义

$$J(\boldsymbol{\psi}) = \bigoplus_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^I} J(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{n}}$$
$$J^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) = \bigoplus_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^I} J^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{n}} \qquad \subseteq \qquad \bigoplus_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^I} \mathcal{S}_{<\mathbf{0}|-\boldsymbol{n}} = \mathcal{S}^-_{<\mathbf{0}}$$
$$J^{\mathbf{r}} = \bigoplus_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^I} J^{\mathbf{r}}_{\boldsymbol{n}}$$

由满足以下条件的元素 $F = F(z_{i1}, \dots, z_{in_i})_{i\in I} \in \mathcal{S}_{<\mathbf{0}|-\boldsymbol{n}}$ 组成：

$$\left\langle E(z_{i1}, \dots, z_{in_i}) \prod_{i\in I} \prod_{a=1}^{n_i} \psi_i(z_{ia}), S(F) \right\rangle = 0, \quad \forall E \in \mathcal{S}_{\geq \mathbf{0}|\boldsymbol{n}} \tag{82}$$

$$\left\langle E(z_{i1}, \dots, z_{in_i}) \prod_{i\in I} \prod_{a=1}^{n_i} \psi_i(z_{ia}), S(F) \right\rangle = 0, \quad \forall E \in \sigma_{N\mathbf{1}}(\mathcal{S}_{\geq \mathbf{0}|\boldsymbol{n}}), N \gg 0 \tag{83}$$

$$\left\langle E(z_{i1}, \dots, z_{in_i}) \prod_{i\in I} \prod_{a=1}^{n_i} z_{ia}^{-r_i}, S(F) \right\rangle = 0, \qquad \forall E \in \mathcal{S}_{\geq \mathbf{0}|\boldsymbol{n}} \tag{84}$$

分别（在右端， $S$ 表示我们无需回顾的反极）。 [33] 的主要结果之一是存在一个作用

$$\mathcal{A}^{\geq} \curvearrowright L(\boldsymbol{\psi}) \tag{85}$$

关于该作用，右端是由单个向量 $|\varnothing\rangle$生成的唯一（在同构意义下）简单 $\mathcal{A}^{\geq}$-模，该向量满足关系

$$\varphi^{+}_{i,d} \cdot |\varnothing\rangle = \psi_{i,d}|\varnothing\rangle \tag{86}$$

$$e_{i,d} \cdot |\varnothing\rangle = 0 \tag{87}$$

对所有 $i \in I$ 和 $d \geq 0$。

**注 2.18.** 如果我们像注 *2.1* 那样使用扩大的 *Cartan* 子代数，则我们实际上对所有

$$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\omega})$$

其中 $\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{h}$ 具有如下性质：对所有 $i \in I$， $\psi_{i,0} = q^{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varsigma}^i)}$ ，如 [21]中所述。这样的简单模也满足该关系

$$\kappa_{\mathbf{a}} \cdot |\varnothing\rangle = q^{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a})}|\varnothing\rangle \tag{88}$$

对所有$\mathbf{a} \in \mathfrak{h}$，在(86) 和(87)的基础上。为使表述简洁，我们在记号中省略$\boldsymbol{\omega}$ ，仍仅将简单模记作 $L(\boldsymbol{\psi})$。

**2.10. 简单模的分解。** 文献 [33]指出，**(85)** 是经典构造的类比：将不可约 $\mathfrak{g}$-表示表示为 $U(\mathfrak{n})$ 除以 Shapovalov 形式的核所得的商模； $\mathcal{S}^{-}_{<\mathbf{0}}$起到 $U(\mathfrak{n})$ 的作用，而 $J(\boldsymbol{\psi})$ 起到反变形式之核的作用。此外，文献 [34, 的命题 4.8]证明了以下向量空间分解

$$L(\boldsymbol{\psi}) \cong L^{\mathbf{r}} \otimes L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) \tag{89}$$

上面的同构被证明与正环 Cartan 子代数（由 $\varphi^{+}_{i\,d,}$ 生成）的作用相容，因此推出了以下 $q$-特征的乘积公式（专家们早已知晓该公式在有限型情形下成立）

$$\chi_q(L(\boldsymbol{\psi})) = \chi^{\mathbf{r}} \cdot \chi_q(L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})) \tag{90}$$

**(90)** 右侧的因子 $\chi^{\mathbf{r}}$ 是一个普通特征（即由常数有理 $\ell$权组合而成），它是根据 [30, 38]的一个猜想在 [34]中计算得出的。本文主要关注第二个因子，或者等价地说，关注 **(89)** 的第二个张量因子。首先，以下简单结论已在 [34, 评注 4.5]中得到证明。

**引理 2.19**。 $\mathcal{S}^-_{<\mathbf{0}} \subset \mathcal{S}^-$ 的包含诱导出一个同构

$$L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) \cong \mathcal{S}^- \Big/ \bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) \tag{91}$$

其中我们记作 $\bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) = \{F \in \mathcal{S}^- \text{ 满足 } (83)\}$。

**2.11. 留数**。 我们希望将 $L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})$ 描述为一个向量空间。根据引理 2.19，这个向量空间和 $\mathcal{S}^-$ （见 (70) 及例 2.12、2.13 和 2.14）以及 $\bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})$ 一样明确。为描述后一个向量空间，我们将称

$$i_1, \dots, i_n \in I \quad \text{an ordering of} \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^I$$

若 $\boldsymbol{\varsigma}^{i_1} + \dots + \boldsymbol{\varsigma}^{i_n} = \boldsymbol{n}$，见 (70)。在此情形下，对于任意 $F \in \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}}$，我们将使用

$$F(z_1, \dots, z_n)$$

表示这样一个事实：每个变量 $z_a$ 都代入 $F$ 的变量 $z_{i_a \bullet_a}$ 之一（由于 $F$ 的颜色对称性，$\bullet_1, \dots, \bullet_n \in \{1, 2, \dots\}$ 的选择无关紧要，只要当 $a \neq b, i_a = i_b$ 时，$\bullet_a \neq \bullet_b$ 即可）。如 [33, 34], 中所证明的，我们有

$$F \in \bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{z_1} \cdots \int_{z_n} \frac{z_1^{d_1} \dots z_n^{d_n} F(z_1, \dots, z_n)}{\prod_{1 \leq a < b \leq n} \zeta_{i_b i_a}\left(\frac{z_b}{z_a}\right)} \prod_{a=1}^{n} \psi_{i_a}(z_a) = 0 \tag{92}$$

对 $\boldsymbol{n}$ 的所有排序 $i_1$、.....、$i_n$ 以及所有 $d_1$、.....、$d_n \in \mathbb{Z}$。在上面的公式中，积分路径沿着两个圆的差集运行：一个圆以 $\infty$ 为中心，另一个以 0 为中心（其中 $z_n$ 比这两个奇点离 $z_1$ 近得多）。因此，根据留数定理，我们得出

$$\bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{n}} = \bigcap_{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}}} \bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} \tag{93}$$

其中，对任意

$$\boldsymbol{x} = (x_{i1}, \dots, x_{in_i})_{i \in I} \in (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}} = \prod_{i \in I} (\mathbb{C}^*)^{n_i} / S_{n_i} \tag{94}$$

我们定义

$$\bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} = \tag{95}$$

$$\left\{ F \in \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}} \Big| \operatorname*{Res}_{z_n = x_n} \dots \operatorname*{Res}_{z_1 = x_1} \frac{z_1^{d_1} \dots z_n^{d_n} F(z_1, \dots, z_n)}{\prod_{1 \leq a < b \leq n} \zeta_{i_b i_a}\left(\frac{z_b}{z_a}\right)} \prod_{a=1}^{n} \psi_{i_a}(z_a) = 0, \ \forall d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

上文中，我们令 $x_1, \dots, x_n$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 各项的任意一种排列，与 $\boldsymbol{n}$ 的任意一种排列 $i_1, \dots, i_n$ 相对应。由上面的公式可知，当且仅当 $F$ 的导数的有限个线性组合在点 (94) 处消失时，$F \in \bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}}$。因此，$\mathcal{S}^- / \bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}}$ 是一个有限维环，它被点 $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}}$ 的极大理想的某个充分高次幂所湮灭。由于只有有限个点 $\boldsymbol{x}$ 会在公式 (95) 中产生非平凡的留数（这是因为有理函数 $\psi_i$ 和 $\zeta_{ij}$ 只能产生有限个极点），因此我们从 (93) 得出

$$L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{n}} = \bigoplus_{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}}} L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} \tag{96}$$

其中

$$L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} = \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}} \Big/ \bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} \tag{97}$$

分解 (96) 正是按圈嘉当子代数 $\{\varphi_{i,0}^{+}, \varphi_{i,1}^{+}, \dots\}_{i\in I}$ 的特征值进行的分解；事实上，如 [33] 所示，我们有

$$\chi_q(L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})) = [\boldsymbol{\psi}] \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^I} \sum_{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}}} \dim_{\mathbb{C}} \left(L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}}\right) \prod_{i\in I} \prod_{a=1}^{n_i} A_{i,x_{ia}}^{-1} \tag{98}$$

其中 $A_{i,\ x}$ 表示众所周知的 $\ell$-权 [19, 18]。按照我们的约定，它由以下有理函数的 $I$ 元组给出

$$A_{i,x}^{-1} = \left[ \left( \frac{z - xq^{d_{ij}}}{zq^{d_{ij}} - x} \right)_{j\in I} \right] \tag{99}$$

因此，向量空间 (97) 的维数给出了简单模的 $q$-特征在 $A_{i\ x}^{-1}{}_{,}$'s 的单项式基下展开时的系数。

## 3. The shifted category $\mathcal{O}^{\mathrm{SH}}$

下文中，可对称化 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathbf{r}\in\mathbb{Z}^I$ 将是任意的。我们固定上述的 $\mathbf{r}=(r_i)_{i\in I}$，并与之关联整余权

$$\mu = \sum_{i\in I} r_i \omega_i^{\vee} \tag{100}$$

我们将考虑 [14] 的移位量子环代数 $U_q(L\mathfrak{g})^{\mu}$。类比前一节，我们构造一个简单模

$$U_q(L\mathfrak{g})^{\mu} \curvearrowright L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$$

对于任意具有 $\mathbf{r}=\mathbf{ord}$ $\boldsymbol{\psi}$ 的 $\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$。我们将证明 $L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$ 与移位范畴 $\mathcal{O}$ 中同名的简单模同构，该移位范畴定义于 [23], ，随后证明定理 1.1 和 1.2。

### 3.1. 移位量子环代数。

众所周知，移位量子环代数 $U_q(L\mathfrak{g})^{\mu}$ 与 $U_q(L\mathfrak{g})$ 具有相同的正、负和 Cartan 子代数，但它们的粘合方式不同。事实上，我们可以将移位量子环代数定义为移位德林费尔德双，具体如下。我们回顾一下，$\mathbf{r}$ 和 $\mu$始终通过公式（100）相关联。

**定义 3.1**。对于任意可对称化 *Kac-Moody* 李代数 $\mathfrak{g}$ 以及任意 $\mathbf{r}\in\mathbb{Z}^I$，我们考虑 $\mu$ 移位德林费尔德双

$$U_q(L\mathfrak{g})^{\mu} = U_q^{\geq}(L\mathfrak{g}) \otimes U_q^{\leq}(L\mathfrak{g}) \tag{101}$$

其中，右侧向量空间上的乘法由以下关系的平移版本控制(67)

$$\begin{aligned} ba &= \Big\langle \sigma_{-\mathbf{r}}(a_1), S(b_1) \Big\rangle a_2 b_2 \Big\langle a_3, b_3 \Big\rangle \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad ab &= \Big\langle \sigma_{-\mathbf{r}}(a_1), b_1 \Big\rangle b_2 a_2 \Big\langle a_3, S(b_3) \Big\rangle \end{aligned} \tag{102}$$

其中 $\sigma_{\mathbf{r}}$ 为自同构$e_{i,d}\mapsto e_{i,d+r_i}$，$f_{i,d}\mapsto f_{i,d-r_i}$，$\varphi_i^{\pm}{}_{,d}\mapsto \varphi_{i\,d,}^{\pm}$，$\kappa_{\mathbf{a}}^{\pm}\mapsto\kappa_{\mathbf{a}}^{\pm}$。

我们将 $U_q^{\geq}(L\mathfrak{g})$和 $U_q^{\leq}(L\mathfrak{g})$中的Cartan 元素分别记为 $\kappa_{\mathbf{a}}^+$和 $\kappa_{\mathbf{a}}^-$，并且不要求它们如(50)-(51)中那样被设为彼此相等。这一约定的结果是，通常的量子环代数与移位量子环代数的关系由

$$U_q(L\mathfrak{g}) = U_q(L\mathfrak{g})^0 \Big/ (\kappa_{\mathbf{a}}^+ = \kappa_{\mathbf{a}}^-)_{\mathbf{a}\in\mathfrak{h}}$$

作为关系 (102) 的推论，关系 (35) 的移位类似式为

$$[e_i(x), f_j(y)] = \frac{\delta_{ij}\delta\left(\frac{x}{y}\right)}{q_i - q_i^{-1}}\left(\varphi_i^+(x) - y^{-r_i}\varphi_i^-(y)\right) \tag{103}$$

但关系 (31)-(34)（以及将 $e$ 替换为 $f$ 时的相应类似关系）仍如所述成立。因此，我们将其留作读者练习，以验证存在一个同构

$$U_q(L\mathfrak{g})^\mu \cong \mathcal{U}_{0,\mu}\left(\widehat{\mathfrak{g}}\right) \tag{104}$$

其中右端是 [23, 第 3.1] 小节中定义的代数。注意，我们的嘉当流 $\varphi_i^\pm(z)$ 与 前引文献 中的相应流相差坐标变换 $z \to z^{-1}$ 以及一次整体重整化，从而保证我们的 $\varphi_i^\pm(z)$ 从 $z^0$ 开始。

**注记 3.2.** 在 前引文献中，(104) 右端的代数仅针对有限型 $\mathfrak{g}$ 加以考虑，因此才施加了 *Drinfeld-Serre* 关系 (48) （见[23, 公式 (3.6)]）。对于一般的可对称化 *Kac-Moody* 李代数 $\mathfrak{g}$，该关系必须替换为 $\mathrm{Ker}\ \widetilde{\Upsilon}^\pm$ 的一组生成元，例如对单边情形 $\mathfrak{g}$ 见关系 (49)。

由于 $U_q(L\mathfrak{g})^\mu$ 的正半部与负半部和 $U_q(L\mathfrak{g})$ 的相同，我们仍将采用第 2.7 小节的洗牌代数实现，并将分别由 $\{e_{i,d}\}$ 和 $\{f_{i,d}\}$ 生成的子代数记为

$$U_q^\pm(L\mathfrak{g})^\mu \cong \mathcal{S}^\pm. \tag{105}$$

将 Cartan 元素 $\{\varphi_{i,d}^\pm\}_{d\geq 0}^{i\in I}$ 替换为 $\{\kappa_{\mathbf{a}}^\pm, p_{i,u}\}_{i\in I}^{\mathbf{a}\in\mathfrak{h}},\ u\in\mathbb{Z}\setminus 0$ 会更方便，替换方式如下

$$\varphi_i^\pm(x) = \kappa_{\pm\mathbf{s}^i}^\pm \exp\left(\sum_{u=1}^\infty \frac{p_{i,\pm u}}{u x^{\pm u}}\right). \tag{106}$$

这是因为这些新的 Cartan 元素与 $\mathcal{S}^\pm \cong U_q^\pm(L\mathfrak{g})$ 之间的交换关系可以更简洁地写成

$$\kappa_{\mathbf{a}}^+ X = X\kappa_{\mathbf{a}}^+ q^{(\pm\boldsymbol{n},\mathbf{a})}, \quad \kappa_{\mathbf{a}}^- X = X\kappa_{\mathbf{a}}^- q^{(\pm\boldsymbol{n},\mathbf{a})} \tag{107}$$

$$[p_{i,u}, X] = \pm X \sum_{j\in I}\left(z_{j1}^u + \cdots + z_{jn_j}^u\right)(q^{ud_{ij}} - q^{-ud_{ij}}) \tag{108}$$

对任意 $X(z_{j1}, \ldots\ldots, z_{jn_j})_{j\in I} \in \mathcal{S}_{\pm\boldsymbol{n}}$。与之前一样，这些关系在移位和非移位情形中形式相同，而 $\mu = \sum_{i\in I} r_i\omega_i^\vee$ 仅在（103）中起作用。

3.2. **移位范畴 $\mathcal{O}$ 与简单模**。对于一般的可对称化 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$，第一作者构造了以下定义 2.17 的类比。

**定义 3.3**。 *([23])* 考虑复表示范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$

$$U_q(L\mathfrak{g})^{\mu} \curvearrowright V \tag{109}$$

其允许分解 (80)，且具有有限维权空间 (81)。

在 [23], 中，第一作者为任意有理 $\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$ （阶$\mathbf{r}$；回顾记号 $\mu=\sum_{i\in I} r_i\omega_i^{\vee}$）构造了一个唯一的简单模

$$U_q(L\mathfrak{g})^{\mu} \curvearrowright L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}) \tag{110}$$

由单个向量 $|\varnothing\rangle$ 生成，该向量满足

$$\begin{aligned} &\varphi_i^{+}(z)\cdot|\varnothing\rangle=\psi_i(z)|\varnothing\rangle \qquad \text{expanded near } z\sim\infty\\ &\varphi_i^{-}(z)\cdot|\varnothing\rangle=z^{r_i}\psi_i(z)|\varnothing\rangle \quad \text{expanded near } z\sim 0 \end{aligned} \tag{111}$$

对所有 $i\in I$，并且

$$e_{i,d}\cdot|\varnothing\rangle=0 \tag{112}$$

对所有 $i\in I$, $d\in\mathbb{Z}$。

**定理 3.4**。 表示 $L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$ 属于 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$，当且仅当 $\boldsymbol{\psi}$ 是有理的。

这一陈述在 [23, 定理 4.12] 中的证明依赖于 [21,定理 4.9] 和 [4, 节 5]中针对通常量子仿射化的论证；这些论证适用于有限型或一般型 Cartan 矩阵（如 [22]中所述）。因此， [23]中的证明适用于一般型（它不涉及 (46) 中施加的关系，而这些关系在一般可对称化型中并未明确给出）。

利用 Drinfeld 的拓扑余乘积，为范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ ([23]) 中的单表示构造了融合积。相应的证明也可从有限型推广到一般可对称化型。

请注意， $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 中的表示不一定具有有限长度，也不一定满足 Jordan-H¨older 性质。不过，范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 中一个对象里的简单模的重数是良定义的，因此（拓扑）Grothendieck 环也是良定义的。在有限型中，有限长度模的范畴在融合积下封闭（见 [27] 和下文的定理 4.3），但对于一般可对称化型，相应的结论尚不明确。

3.3. **技术结果**。 现在我们将给出简单模 (110) 的类似 Verma 模的描述，以便将其与上一节中考虑的对象 $L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})$ 进行比较。我们从以下与技术结果 [33,定义 4.3 和命题 4.5], 类似的结果开始。参见 (82)。

**定义 3.5.** 对于任意阶为 $\mathbf{r}$ 的有理 $\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$，考虑由

$$U_q(L\mathfrak{g})^{\mu} \curvearrowright W^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}) \tag{113}$$

单个向量 $|\varnothing\rangle$ 生成的表示，模去以下关系

$$\begin{aligned} &\varphi_i^+(z)\cdot|\varnothing\rangle=\psi_i(z)|\varnothing\rangle \qquad expanded\ near\ z\sim\infty \\ &\varphi_i^-(z)\cdot|\varnothing\rangle=z^{r_i}\psi_i(z)|\varnothing\rangle \quad \text{在 } z\sim 0 \text{ 附近展开} \\ &\kappa_{\mathbf{a}}^{\pm}\cdot|\varnothing\rangle=q^{(\boldsymbol{\omega},\mathbf{a})}|\varnothing\rangle \end{aligned} \tag{114}$$

对于所有 $i\in I$，一个 $\in\mathfrak{h}$ (在第三个方程中，$\boldsymbol{\omega}\in\mathfrak{h}$ 是一个权，如注 *2.18* 所述，尽管我们没有将它纳入记号)，并且

$$e_{i,d}\cdot|\varnothing\rangle=0 \tag{115}$$

对于所有 $i\in I, d\in\mathbb{Z}$。

根据 Drinfeld 双构造的本质，我们有一个三角分解（线性同构）

$$U_q(L\mathfrak{g})^\mu=\mathcal{S}^+\otimes\mathbb{C}\left[\varphi_{i,1}^{\pm},\varphi_{i,2}^{\pm},\ldots,\kappa_{\mathbf{a}}^{\pm}\right]_{i\in I,\mathbf{a}\in\mathfrak{h}}\otimes\mathcal{S}^-. \tag{116}$$

我们有一个向量空间同构

$$W^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})\cong\mathcal{S}^- \tag{117}$$

因此，$W^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$ 继承了 $\mathcal{S}^-$ 上的 $(-\mathbb{N}^I)$-分次。

**定义 3.6**。对于任意 $\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$（其阶为 $\mathbf{r}$），考虑线性子空间

$$J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^I}J(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{n}}\subseteq\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^I}\mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}}=\mathcal{S}^- \tag{118}$$

它由满足以下条件的 *shuffle* 元素 $F(z_{i1},\ldots,z_{in_i})_{i\in I}\in\mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}}$ 组成：

$$\left\langle E(z_{i1},\ldots,z_{in_i})_{i\in I}\prod_{i\in I}\prod_{a=1}^{n_i}\psi_i(z_{ia}),F_1*S(F_2)\right\rangle=0,\quad\forall E\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{n}} \tag{119}$$

其中，在右边我们用 *Sweedler* 记号 [6]将余乘法 (59) 记为 $\Delta(F)=F_1\otimes F_2$。比较 (119)与 (82)。

我们来说明，为何对于任意给定的 $E$ 和 $F$，即使 $F_1\otimes F_2$ 是无穷和，(119) 中的配对仍然是良定义的。由 (59) 中的展开可知，除有限多个以外，所有求和项 $F_1\otimes F_2$ 都满足：$F_1$ 的齐次次数有下界，而 $F_2$ 的齐次次数小于等于任意给定的数。由于只有当 $E$ 和 $F$ 的齐次次数之和为 0 时，$\langle E,F\rangle\neq 0$ 才成立，因此 (120) 中的展开选择意味着，$E\prod_{i\in I}\prod_{a=1}^{n_i}\psi_i(z_{ia})$ 与除有限多个 $F_1*S(F_2)$ 外的所有项配对均为零。

**命题 3.7**。$J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})|\varnothing\rangle$ 是$W^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$的唯一极大分次子模 $U_q(L\mathfrak{g})^\mu$。

---

[6]若我们将 $F_1(z_{i1},\ldots,z_{im_i})_{i\in I}$ 与 $F_2(z_{i,m_i+1},\ldots,z_{in_i})_{i\in I}$ 记为出现在 $\Delta(F)=F_1\otimes F_2$ 的两个张量因子中的变量，则务必牢记：(119) 中的有理函数 $\psi_i$ 必须在该范围内展开

$$|z_{i1}|,\ldots,|z_{im_i}|\ll|z_{i,m_i+1}|,\ldots,|z_{in_i}| \tag{120}$$

这正是 (119) 并不恒为零的原因，尽管由于对极的性质，$F_1*S(F_2)=0$ 在任何拓扑霍普夫代数中都成立。

证明。 我们需要证明子空间 $J^{\mathrm{sh}}(\psi)|\varnothing\rangle \subseteq W^{\mathrm{sh}}(\psi)$ 在作用下保持不变

(1) 左乘 $\mathcal{S}^-$，(2) 左乘 $\{\kappa^{\pm}_{\mathbf{a}}, p_{i,u}\}_{\mathbf{a}\in\mathfrak{h},\ i\in I,\ u\neq 0}$,
(3) 左乘 $\mathcal{S}^+$。

为证明 (1)，考虑任意的 $F'\in\mathcal{S}^-$、 $F''\in J^{\mathrm{sh}}(\psi)$ 和 $E\in\mathcal{S}^+$。由余乘法是同态、对极是反同态以及性质 (63) 可知,

$$\begin{aligned}&\Big\langle E\prod\psi, (F'*F'')_1 * S\left((F'*F'')_2\right)\Big\rangle\\ =&\Big\langle E\prod\psi, F_1'*F_1''*S(F_2'')*S(F_2')\Big\rangle\\ =&\Big\langle \Delta^{(3)}(E\prod\psi), F_1'\otimes F_1''\otimes S(F_2'')\otimes S(F_2')\Big\rangle\end{aligned}\tag{121}$$

其中 $E\prod\psi$ 是 $E(z_{i1},\ldots,z_{in_i})_{i\in I}\prod_{i\in I}\prod_{a=1}^{n_i}\psi_i(z_{ia})$ 的简写。以下断言可由 (64) 和 (65) 轻易推出，留作读者练习（参见 [33] 中的类似陈述）。

**断言 3.8**。 如果(119) 对所有 $E\in\mathcal{S}^+$ 都成立，那么它对所有 $E\in\mathcal{S}^{\geq}$ 也成立。

由上述断言以及 $F''\in J^{\mathrm{sh}}(\psi)$ 可知，(121) 右侧的四个张量因子中第二个和第三个的配对为 0。因此，(121) 中的整个配对为 0，从而 $F'*F''\in J^{\mathrm{sh}}(\psi)$，这正是所需结论。

为证明 (2)，回顾 (107) 和 (108)，可知对 $F$、 $\kappa^{\pm}_{\mathbf{a}}$ 和 $p_{i,\ u}$进行交换，等同于将 $F$ 乘以一个标量或一个颜色对称劳朗多项式 $\rho(z_{ia})$。由于 (119) 中的配对是将某个围道积分应用于 $E$、 $F$ 和 $\psi$的乘积所得，参见一般公式 (72)，将 $F$ 乘以 $\rho$ 对配对的作用，与将 $E$ 乘以 $\rho$ 的作用相同。由于 $\mathcal{S}^+$ 在乘以颜色对称劳朗多项式后保持不变，故得 (2)。

对于断言 (3)，我们对任意 $E\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{n}}$ 和 $F\in\mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}}$ 应用 (102):

$$E*F=\Big\langle\sigma_{-\mathbf{r}}(E_1),F_1\Big\rangle F_2*E_2\Big\langle E_3,S(F_3)\Big\rangle\tag{122}$$

其中 $\Delta^{(2)}(E)=E_1\otimes E_2\otimes E_3\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{n}'}\otimes\mathcal{S}_{\boldsymbol{n}''}\otimes\mathcal{S}_{\boldsymbol{n}'''}$。将 (122) 应用于$|\varnothing\rangle\in W^{\mathrm{sh}}(\psi)$ 时，只有 $\boldsymbol{n}''=\mathbf{0}$ 项保留下来，事实上我们得到

$$E\,(F|\varnothing\rangle)=F_2|\varnothing\rangle\cdot\Big\langle\sigma_{-\mathbf{r}}(E_1),F_1\Big\rangle\Big\langle E_2\prod\psi,S(F_3)\Big\rangle\tag{123}$$

第二个配对中 $\psi$ 的乘积是由 Cartan 元素作用于 $\Delta^{(2)}(E)$ 的中间张量因子中的真空而产生的。我们必须证明 $F\in J^{\mathrm{sh}}(\psi)$ 蕴含 (123) 的右端属于 $J^{\mathrm{sh}}(\psi)|\varnothing\rangle$。下面展开 (123) 的右端。由 (59)，我们有

$$\Delta^{(2)}(F)=F'(z_{ia})\otimes F''(z_{jb})\prod_{i,a}\varphi_i^-(z_{ia})\otimes F'''(z_{kc})\prod_{i,a}\varphi_i^-(z_{ia})\prod_{j,b}\varphi_j^-(z_{jb}),\tag{124}$$

对于各种 $F',F'',F'''\in\mathcal{S}^-$，其变量我们将分别记为 $z_{ia},z_{jb},z_{kc}$。据此，公式 (123) 为

$$E\,(F|\varnothing\rangle)=\tag{125}$$

$$= F'' \prod_{i,a} \varphi_i^-(z_{ia})|\varnothing\rangle \cdot \Big\langle \sigma_{-\mathbf{r}}(E_1), F' \Big\rangle \Big\langle E_2 \prod \psi, S(F''' \prod_{i,a} \varphi_i^-(z_{ia}) \prod_{j,b} \varphi_j^-(z_{jb})) \Big\rangle =$$

$$= F''|\varnothing\rangle \cdot \Big\langle E_1 \prod \psi, F' \Big\rangle \Big\langle E_2 \prod \psi, S(F''' \prod_{i,a} \varphi_i^-(z_{ia}) \prod_{j,b} \varphi_j^-(z_{jb})) \Big\rangle$$

后两行之间的等式由 (114) 的中间方程得出。为证明底行的表达式属于 $J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})|\varnothing\rangle$, 我们必须证明对所有 $E' \in \mathcal{S}^+$ 都有 [7]

$$0 = \Big\langle E_1 \prod \psi, F_1 \Big\rangle \Big\langle E' \prod \psi, F_2 * S(F_3) \Big\rangle \Big\langle E_2 \prod \psi, S(F_4) \Big\rangle \tag{126}$$

由 (63), 等式 (126) 变为

$$0 = \Big\langle E_1 \prod \psi, F_1 \Big\rangle \Big\langle E_1' \prod \psi, F_2 \Big\rangle \Big\langle E_2', S(F_3) \Big\rangle \Big\langle E_2 \prod \psi, S(F_4) \Big\rangle$$

$$\overset{(64)}{=} \Big\langle E_1' * E_1 \prod \psi, F_1 \Big\rangle \Big\langle E_2' * E_2 \prod \psi, S(F_2) \Big\rangle \overset{(63)}{=} \Big\langle E' * E \prod \psi, F_1 * S(F_2) \Big\rangle.$$

由于假设 $F \in J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$, 后者确实是一个等式。

已证明 $J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})|\varnothing\rangle$ 是 $W^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$ 的分次 $U_q(L\mathfrak{g})^\mu$ 子模, 接下来需要证明它是唯一的此类极大分次子模。为此, 任取 $F \in \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}} \backslash J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{n}}$, 这意味着存在 $E \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{n}}$ 使得

$$\Big\langle E(z_{i1}, \dots, z_{in_i})_{i \in I} \prod_{i \in I} \prod_{a=1}^{n_i} \psi_i(z_{ia}), F_1 * S(F_2) \Big\rangle =: \alpha \neq 0$$

由 (124), 公式 (123) 恰好推出 $EF|\varnothing\rangle = \alpha|\varnothing\rangle$。因此, 任何严格包含 $J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})|\varnothing\rangle$ 的 $W^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$ 的分次子模都必须包含最高权向量 $|\varnothing\rangle$, 因而必定是整个 $W^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$。

□

**推论 3.9**。*(定理 1.2)* 对于任意 $\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$, 其阶为 $\mathbf{r}$, 商模

$$L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}) = W^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}) \Big/ J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})|\varnothing\rangle \tag{127}$$

是由单个向量 $|\varnothing\rangle$ 生成的、满足这些性质的唯一（在同构意义下）单分次 $U_q(L\mathfrak{g})^\mu$ 模

$$\begin{aligned} &\varphi_i^+(z) \cdot |\varnothing\rangle = \psi_i(z)|\varnothing\rangle \qquad \textit{expanded near } z \sim \infty \\ &\varphi_i^-(z) \cdot |\varnothing\rangle = z^{r_i} \psi_i(z)|\varnothing\rangle \quad \textit{expanded near } z \sim 0 \\ &\kappa_{\mathbf{a}}^\pm \cdot |\varnothing\rangle = q^{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a})}|\varnothing\rangle \end{aligned} \tag{128}$$

对所有 $i \in I$, $\mathbf{a} \in \mathfrak{h}$ 以及

$$e_{i,d} \cdot |\varnothing\rangle = 0 \tag{129}$$

[7]在等式 (126) 右端的中间配对中，我们利用了如下事实:

$$F_2 * S(F_3) = F_1'' \prod_{i,a} \varphi_i^-(z_{ia}) * S\Big(F_2'' \prod_{i,a} \varphi_i^-(z_{ia})\Big) =$$

$$= F_1'' \prod_{i,a} \varphi_i^-(z_{ia}) * \prod_{i,a} \varphi_i^-(z_{ia})^{-1} S(F_2'') = F_1'' * S(F_2'')$$

其中, $F_2 \otimes F_3$ 表示式（124）中间张量因子的余乘法 $\Delta\left(F'' \prod_{i,a} \varphi_i^-(z_{ia})\right)$。

对所有 $i \in I$、 $d \in \mathbb{Z}$。

**3.4.再论留数**。以下技术性断言类似于 [33,引理3.10], ，并将在本小节末尾证明。

**引理3.10**。 对于任意 $i_1$、.. . 、 $i_n \in I$ 以及 $d_1$、.. . 、 $d_n \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\left\langle e_{i_1,d_1} * \cdots * e_{i_n,d_n} \prod_{i\in I} \prod_{a=1}^{n_i} \psi_i(z_{ia}), F_1 * S(F_2) \right\rangle = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \tag{130}$$

$$\sum_{\{1,\ldots,n\}=\{a_1<\cdots<a_m\}\sqcup\{b_1<\cdots<b_{n-m}\}} \int_{|z_{a_m}|\ll\cdots\ll|z_{a_1}|\ll 1\ll|z_{b_1}|\ll\cdots\ll|z_{b_{n-m}}|} \frac{z_1^{d_1}\ldots z_n^{d_n} F(z_1,\ldots,z_n)}{\prod_{1\le a<b\le n} \zeta_{i_b i_a}\left(\frac{z_b}{z_a}\right)} \prod_{a=1}^{n} \psi_{i_a}(z_a)$$

对所有 $F \in \mathcal{S}_{-\boldsymbol{\varsigma}^{i_1}-\cdots-\boldsymbol{\varsigma}^{i_n}}$均成立。在底行，记号 $F(z_1, \ldots, z_n)$ 表示将每个符号 $z_a$ 代入 $F$中形如$z_{i_a \bullet_a}$ 的变量，见(72)。

在证明引理3.10之前，我们先用它完成定理 1.1的证明。

定理 *1.1*的证明： 由于 $\mathcal{S}^+$ 由$e_{i,\ d} = z_{i1}^d \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{\varsigma}^i}$的洗牌积张成，因此我们得出，$F \in \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}}$ 属于 $J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})$，当且仅当对于所有 $i_1$、.....、 $i_n \in I$和 $d_1$、.....、 $d_n \in \mathbb{Z}$，(130)的左端为0。然而，这一条件等价于(130)的右端为0，而这显然与条件(92)相同。由此得出向量空间相等

$$\bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi}) = J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}) \tag{131}$$

这与 (91) 一起蕴含 (9)。与 (93) 中相同的分析表明

$$J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{n}} = \bigcap_{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}}} J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} \tag{132}$$

其中

$$J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} = \left\{ F \in \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}} \Big| \operatorname*{Res}_{z_n=x_n} \ldots \operatorname*{Res}_{z_1=x_1} \frac{F(z_1,\ldots,z_n)(\text{any polynomial})}{\prod_{1\le a<b\le n} \zeta_{i_b i_a}\left(\frac{z_b}{z_a}\right)} \prod_{a=1}^{n} \psi_{i_a}(z_a) = 0 \right\}$$

将上述公式与 (95) 比较，我们看到

$$J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} = \bar{J}^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} \tag{133}$$

对所有 $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}}$。我们得出如下与 (96) 类似的结论

$$L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{n}} = \bigoplus_{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}}} L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} \tag{134}$$

其中

$$L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} = \mathcal{S}_{-\boldsymbol{n}} \Big/ J^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}} \tag{135}$$

由（131）可知，所有带有上标“sh”的向量空间都同构于第2.11小节中相应的、带有上标“$\neq 0$”的向量空间。因此，我们得出 $q$-特征满足

$$\chi_q(L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})) = [\boldsymbol{\psi}] \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^I} \sum_{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{n}}} \dim_{\mathbb{C}} \left(L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{x}}\right) \prod_{i\in I} \prod_{a=1}^{n_i} A_{i,x_{ia}}^{-1} = \chi_q(L^{\neq 0}(\boldsymbol{\psi})) \tag{136}$$

这确立了（10），恰如 [23]所预测的那样。

□

引理*3.10*的证明：让我们回顾（59）中 $\Delta(F) = F_1 \otimes F_2$的公式，并将其简记为

$$\Delta(F) = F' \otimes F'' \varphi$$

其中 $F', F'' \in \mathcal{S}^-$ 且 $\varphi$ 是关于$\varphi_{j,k}^-$的多项式。我们可以利用（63）写出

$$\text{LHS of (130)} = \left\langle \Delta(e_{i_1,d_1}) \dots \Delta(e_{i_n,d_n}) \prod_{i\in I} \prod_{a=1}^{n_i} \psi_i(z_{ia}), F' \otimes S(F''\varphi) \right\rangle \tag{137}$$

公式（53）为 $\Delta(e_{i,d}) = e_{i,d} \otimes 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{i,k}^+ \otimes e_{i,d-k}$，因此（137）变为

$$\text{LHS of (130)} = \sum_{\{1,\dots,n\} = \{a_1 < \dots < a_m\} \sqcup \{b_1 < \dots < b_{n-m}\}} \sum_{k_1,\dots,k_{n-m}=0}^{\infty} \tag{138}$$

$$\left\langle (e_{i_1,d_1} \text{ or } \varphi_{i_1,k_1}^+) \dots (e_{i_n,d_n} \text{ or } \varphi_{i_n,k_n}^+) \prod \psi, F' \right\rangle \left\langle \prod_{y=1}^{n-m} e_{i_{b_y},d_{b_y}-k_{b_y}} \prod \psi, S(F''\varphi) \right\rangle$$

其中在每个括号（$e_{i_x,d_x}$ 或$\varphi_{i_x,k_x}^+$）中，我们规定：若 $x \in \{a_1, \dots, a_m\}$ 则选取$e_{i_x,d_x}$，若 $x \in \{b_1, \dots, b_{n-m}\}$则选取$\varphi_{i_x,k_x}^+$。利用公式（32），我们有

$$\varphi_j^+(y) e_i(x) = e_i(x) \varphi_j^+(y) \frac{\zeta_{ji}\left(\frac{y}{x}\right)}{\zeta_{ij}\left(\frac{x}{y}\right)} \Rightarrow \varphi_{j,k}^+ e_{i,d} = \sum_{\ell=0}^{k} \gamma_{ij}^{(\ell)} e_{i,d+\ell} \varphi_{j,k-\ell}^+ \tag{139}$$

其中复数 $\gamma_{ij}^{(\ell)}$ 定义为

$$\frac{\zeta_{ji}\left(\frac{y}{x}\right)}{\zeta_{ij}\left(\frac{x}{y}\right)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma_{ij}^{(\ell)} \frac{x^\ell}{y^\ell} \tag{140}$$

我们可以利用（139）将关系式（138）第二行中的所有 $\varphi$ 移到所有 $e$ 的右侧，从而得到

$$\text{LHS of (130)} = \sum_{\{1,\dots,n\} = \{a_1 < \dots < a_m\} \sqcup \{b_1 < \dots < b_{n-m}\}} \sum_{k_1,\dots,k_{n-m}=0}^{\infty} \sum_{\{\ell_{x,y} \geq 0\}_{\forall a_x > b_y}} \tag{141}$$

$$\prod_{1\leq x\leq m, 1\leq y\leq n-m}^{a_x > b_y} \gamma_{i_{a_x} i_{b_y}}^{(\ell_{x,y})} \left\langle \prod_{x=1}^{m} e_{i_{a_x}, d_{a_x} + \sum_{1\leq y\leq n-m}^{a_x > b_y} \ell_{x,y}} \prod_{y=1}^{n-m} \varphi^+_{i_{b_y}, k_{b_y} - \sum_{1\leq x\leq m}^{a_x > b_y} \ell_{x,y}} \prod \psi, F' \right\rangle$$

$$\left\langle \prod_{y=1}^{n-m} e_{i_{b_y}, d_{b_y} - k_{b_y}} \prod \psi, S(F''\varphi) \right\rangle$$

对于任意 $E \in \mathcal{S}^+$、$F \in \mathcal{S}^-$，以及任意的 $\varphi^+$、$\varphi^-$（分别关于 $\varphi_{j\,k}^+$、、$\varphi_j^-$、$_k$ 的）多项式，我们有如下恒等式

$$\begin{aligned}\left\langle E\varphi^+, F\varphi^-\right\rangle &\overset{(63)}{=} \left\langle \Delta(E)\Delta(\varphi^+), F\otimes\varphi^-\right\rangle \overset{(58)}{=} \left\langle (E\otimes 1)(\varphi_1^+\otimes\varphi_2^+), F\otimes\varphi^-\right\rangle \\ &= \left\langle E\varphi_1^+, F\right\rangle\left\langle \varphi_2^+, \varphi^-\right\rangle \overset{(64)}{=} \left\langle E\otimes\varphi_1^+, \Delta^{\mathrm{op}}(F)\right\rangle\left\langle \varphi_2^+, \varphi^-\right\rangle \overset{(59)}{=} \left\langle E\otimes\varphi_1^+, F\otimes 1\right\rangle\left\langle \varphi_2^+, \varphi^-\right\rangle \\ &= \langle E, F\rangle\,\varepsilon(\varphi_1^+)\left\langle \varphi_2^+, \varphi^-\right\rangle = \langle E, F\rangle\left\langle \varphi^+, \varphi^-\right\rangle \end{aligned} \tag{142}$$

其中我们用 Sweedler 记号写作 $\Delta(\varphi^+) = \varphi_1^+\otimes\varphi_2^+$，并令 $\varepsilon$ 表示余单位。特别地，若 $\varphi^- = 1$，则除非 $\varphi^+$ 是关于 $\varphi_{j\,0}^+$ 的多项式，否则上述配对为零。因此，当且仅当对所有 $y\in\{1,\dots,n-m\}$ 都有 $k_{b_y} = \sum_{1\le x\le m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}$ 时，(141) 的第二行等于 1；否则等于 0。由此可将 (141) 改写为

$$\begin{aligned}\text{LHS of (130)} = &\sum_{\{1,\dots,n\}=\{a_1<\cdots<a_m\}\sqcup\{b_1<\cdots<b_{n-m}\}} \\ &\sum_{\{\ell_{x,y}\ge 0\}_{\forall a_x>b_y}}\prod_{1\le x\le m,1\le y\le n-m}^{a_x>b_y}\gamma_{i_{a_x}i_{b_y}}^{(\ell_{x,y})}\left\langle\prod_{x=1}^{m} e_{i_{a_x},d_{a_x}+\sum_{1\le y\le n-m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}}\prod\psi, F'\right\rangle \\ &\left\langle\prod_{y=1}^{n-m} e_{i_{b_y},d_{b_y}-\sum_{1\le x\le m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}}\prod\psi, S(F''\varphi)\right\rangle\end{aligned} \tag{143}$$

利用性质 (65) 以及对极是反同态这一事实，我们可以将上面的表达式改写为

$$\begin{aligned}\text{LHS of (130)} = &\sum_{\{1,\dots,n\}=\{a_1<\cdots<a_m\}\sqcup\{b_1<\cdots<b_{n-m}\}} \\ &\sum_{\{\ell_{x,y}\ge 0\}_{\forall a_x>b_y}}\prod_{1\le x\le m,1\le y\le n-m}^{a_x>b_y}\gamma_{i_{a_x}i_{b_y}}^{(\ell_{x,y})}\left\langle\prod_{x=1}^{m} e_{i_{a_x},d_{a_x}+\sum_{1\le y\le n-m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}}\prod\psi, F'\right\rangle \\ &\left\langle\prod_{y=n-m}^{1} S^{-1}\left(e_{i_{b_y},d_{b_y}-\sum_{1\le x\le m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}}\right)\prod\psi, F''\varphi\right\rangle\end{aligned} \tag{144}$$

其中 $\prod_{y=n-m}^{1}$ 表示乘积中最左侧的因子对应于 $y=n-m$，而最右侧的因子对应于 $y=1$。若将 $S^{-1}$ 应用于 (56)，则可观察到，对所有 $i\in I$ 和 $d\in\mathbb{Z}$

$$S^{-1}(e_i(z)) = -e_i(z)\bar{\varphi}_i^+(z) \quad\Rightarrow\quad S^{-1}(e_{i,d}) = -\sum_{k=0}^{\infty} e_{i,d-k}\bar{\varphi}_{i,k}^+$$

其中我们将 $\left(\varphi_i^+(z)\right)^{-1} =$ 写作：$\bar{\varphi}_i^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\underline{\bar{\varphi}_i^+}\cdot z^{k}$。因此，(144) 变为

$$\begin{aligned}\text{LHS of (130)} = &\sum_{\{1,\dots,n\}=\{a_1<\cdots<a_m\}\sqcup\{b_1<\cdots<b_{n-m}\}} \\ &\sum_{\{\ell_{x,y}\ge 0\}_{\forall a_x>b_y}}\prod_{1\le x\le m,1\le y\le n-m}^{a_x>b_y}\gamma_{i_{a_x}i_{b_y}}^{(\ell_{x,y})}\left\langle\prod_{x=1}^{m} e_{i_{a_x},d_{a_x}+\sum_{1\le y\le n-m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}}\prod\psi, F'\right\rangle \\ &(-1)^{n-m}\sum_{k_1,\dots,k_{n-m}=0}^{\infty}\left\langle\prod_{y=n-m}^{1}\left(e_{i_{b_y},d_{b_y}-k_y-\sum_{1\le x\le m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}}\bar{\varphi}_{i,k_y}^+\right)\prod\psi, F''\varphi\right\rangle\end{aligned} \tag{145}$$

利用公式 (32)，我们得到

$$\bar{\varphi}_j^+(y)e_i(x) = e_i(x)\bar{\varphi}_j^+(y)\frac{\zeta_{ij}\left(\frac{x}{y}\right)}{\zeta_{ji}\left(\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow \bar{\varphi}_{j,k}^+ e_{i,d} = \sum_{\ell=0}^{k} \bar{\gamma}_{ij}^{(\ell)} e_{i,d+\ell}\bar{\varphi}_{j,k-\ell}^+ \tag{146}$$

其中，复数 $\bar{\gamma}_{ij}^{(\ell)}$ 定义为

$$\frac{\zeta_{ij}\left(\frac{x}{y}\right)}{\zeta_{ji}\left(\frac{y}{x}\right)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \bar{\gamma}_{ij}^{(\ell)} \frac{x^\ell}{y^\ell} \tag{147}$$

我们可以利用 (146) 将 $\bar{\varphi}$ 移至 (145) 第三行的右侧，因此得到

$$\text{LHS of (130)} = (-1)^{n-m} \sum_{\{1,\dots,n\}=\{a_1<\dots<a_m\}\sqcup\{b_1<\dots<b_{n-m}\}} \tag{148}$$

$$\sum_{\{\ell_{x,y}\geq 0\}_{\forall a_x>b_y}} \prod_{1\leq x\leq m, 1\leq y\leq n-m}^{a_x>b_y} \gamma_{i_{a_x}i_{b_y}}^{(\ell_{x,y})} \left\langle \prod_{x=1}^{m} e_{i_{a_x}, d_{a_x}+\sum_{1\leq y\leq n-m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}} \prod \psi, F' \right\rangle$$

$$\sum_{k_1,\dots,k_{n-m}=0}^{\infty} \sum_{\{\bar{\ell}_{y,y'}\geq 0\}_{1\leq y<y'\leq n-m}} \prod_{1\leq y<y'\leq n-m} \bar{\gamma}_{i_{b_y}i_{b_{y'}}}^{(\bar{\ell}_{y,y'})}$$

$$\left\langle \prod_{y=n-m}^{1} \bar{\varphi}^+_{i_{b_y}, k_y-\sum_{y'=1}^{y-1}\bar{\ell}_{y',y}}, \varphi \right\rangle \left\langle \prod_{y=n-m}^{1} e_{i_{b_y}, d_{b_y}-k_y-\sum_{1\leq x\leq m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}+\sum_{y'=y+1}^{n-m}\bar{\ell}_{y,y'}} \prod \psi, F'' \right\rangle$$

最后一行中我们使用了 (142)。回顾 (59)，可知

$$F' \otimes F''\varphi = \frac{F(z_{i1}, \dots, z_{im_i} \otimes z_{i,m_i+1}, \dots, z_{in_i})_{i\in I} \prod_{1\leq b\leq m_j}^{j\in I} \varphi_j^-(z_{jb})}{\prod_{1\leq a\leq m_i}^{i\in I} \prod_{m_j<b\leq n_j}^{j\in I} \zeta_{ij}\left(\frac{z_{ia}}{z_{jb}}\right)} \tag{149}$$

其中变量展开为 $|z_{i1}|$、.....、$|z_{im_i}| \ll |z_{i,\ m_i+1}|$、.....、$|z_{in_i}|$（我们省略了隐含的求和号）。

因此，我们使用公式 (62) 和 (72) 来计算上面第二行和第三行中的表达式，得到

$$\text{LHS of (130)} = (-1)^{n-m} \sum_{\{1,\dots,n\}=\{a_1<\dots<a_m\}\sqcup\{b_1<\dots<b_{n-m}\}} \sum_{\{\ell_{x,y}\geq 0\}_{\forall a_x>b_y}} \tag{150}$$

$$\prod_{\substack{1\leq x\leq m\\ 1\leq y\leq n-m}}^{a_x>b_y} \gamma_{i_{a_x}i_{b_y}}^{(\ell_{x,y})} \int_{1\gg|z_{a_1}|\gg\dots\gg|z_{a_m}|} \frac{\prod_{x=1}^{m} z_{a_x}^{d_{a_x}+\sum_{1\leq y\leq n-m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}} F'(z_{a_1}, \dots, z_{a_m})}{\prod_{1\leq x<x'\leq m}\zeta_{i_{a_{x'}}i_{a_x}}\left(\frac{z_{a_{x'}}}{z_{a_x}}\right)} \prod_{x=1}^{m} \psi_{i_{a_x}}(z_{a_x})$$

$$\sum_{y_1,\dots,y_{n-m}=0}^{\infty} \sum_{\{\bar{\ell}_{y,y'}\geq 0\}_{1\leq y<y'\leq n-m}} \prod_{1\leq y<y'\leq n-m} \bar{\gamma}_{i_{b_y}i_{b_{y'}}}^{(\bar{\ell}_{y,y'})} \prod_{1\leq x\leq m, 1\leq y\leq n-m} \frac{\zeta_{i_{a_x}i_{b_y}}\left(\frac{z_{a_x}}{z_{b_y}}\right)}{\zeta_{i_{b_y}i_{a_x}}\left(\frac{z_{b_y}}{z_{a_x}}\right)}$$

$$\int_{1\ll|z_{b_1}|\ll\dots\ll|z_{b_{n-m}}|} \frac{\prod_{y=1}^{n-m} z_{b_y}^{d_{b_y}-\sum_{y'=1}^{y-1}\bar{\ell}_{y',y}-\sum_{1\leq x\leq m}^{a_x>b_y}\ell_{x,y}+\sum_{y'=y+1}^{n-m}\bar{\ell}_{y,y'}} F''(z_{b_1}, \dots, z_{b_{n-m}})}{\prod_{1\leq y<y'\leq n-m}\zeta_{i_{b_y}i_{b_{y'}}}\left(\frac{z_{b_y}}{z_{b_{y'}}}\right)} \prod_{y=1}^{n-m} \psi_{i_{b_y}}(z_{b_y})$$

如果我们回顾(140)和(147)中系数 $\gamma$ 与 $\bar{\gamma}$ 的定义，我们得到 n

$$\text{LHS of (130)} = (-1)^{n-m} \sum_{\{1,\dots,n\}=\{a_1<\dots<a_m\}\sqcup\{b_1<\dots<b_{n-m}\}} \tag{151}$$

$$\int_{|z_{a_m}|\ll\cdots\ll|z_{a_1}|\ll 1\ll|z_{b_1}|\ll\cdots\ll|z_{b_{n-m}}|} \prod_{1\le x\le m,1\le y\le n-m}^{a_x<b_y} \frac{\zeta_{i_{a_x}i_{b_y}}\left(\frac{z_{a_x}}{z_{b_y}}\right)}{\zeta_{i_{b_y}i_{a_x}}\left(\frac{z_{b_y}}{z_{a_x}}\right)}$$

$$\frac{\prod_{x=1}^{m} z_{a_x}^{d_{a_x}} F'(z_{a_1},\dots,z_{a_m})}{\prod_{1\le x<x'\le m}\zeta_{i_{a_{x'}}i_{a_x}}\left(\frac{z_{a_{x'}}}{z_{a_x}}\right)} \frac{\prod_{y=1}^{n-m} z_{b_y}^{d_{b_y}} F''(z_{b_1},\dots,z_{b_{n-m}})}{\prod_{1\le y<y'\le n-m}\zeta_{i_{b_{y'}}i_{b_y}}\left(\frac{z_{b_{y'}}}{z_{b_y}}\right)} \prod_{x=1}^{m}\psi_{i_{a_x}}(z_{a_x}) \prod_{y=1}^{n-m}\psi_{i_{b_y}}(z_{b_y})$$

一旦我们回顾公式(149)，上述公式的右端恰好与(130)的右端相同，从而完成了引理3.10的证明。

□

## 4. Grothendieck rings and extended $QQ$-systems

我们建立了 $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 的 Grothendieck 环之间的环同构，该同构也与重整化相容。这使得我们能够用博雷尔范畴 $\mathcal{O}$ 的术语来表述关于广义 $QQ$-系统的猜想 [17] 。作为应用，我们还在博雷尔范畴 $\mathcal{O}$ 中给出了 $QQ$-系统的显式解。这将 [16] 的结果从有限型推广到了任意可对称化 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$。

**4.1. 归一化因子。** 回顾一下在式 (5) 中出现的归一化因子 $\chi^{\mathbf{r}}$，在本节中将记作 $\chi^{\mu}$（相对于对应关系 $\mathbf{r}\leftrightarrow\mu$，该对应关系定义为

$$\mathbf{r}=(r_i\in\mathbb{Z})_{i\in I} \quad\leftrightarrow\quad \mu=\sum_{i\in I} r_i\omega_i^{\vee}$$

（该对应关系在本节中始终沿用）。因子 $\chi^{\varsigma^i}=\chi^{\omega_i^{\vee}}$ 是正准基本模的特征，它对应于一个预基本 $\ell$-权

$$\boldsymbol{\psi}_{i,a}=\Big(1,\dots,1,1-\frac{a}{z},1,\dots,1\Big) \tag{152}$$

其中非平凡项位于第 $i$ 个位置。当 $\mathfrak{g}$ 为有限型时，该结果是利用 Kirillov-Reshetikhin 模的极限在 [25] 中计算得出的。另一方面，在 [30], 中，有人猜想这一因子可由关于正根的显式乘积公式给出（该猜想已在多篇论文中按类型逐一证明，除 $E_8$ 外）。上述公式后来由 [38] 推广为以下猜想

$$\chi^{\mu}=\prod_{\alpha\in\Delta_+}\left(\frac{1}{1-[-\alpha]}\right)^{\max(0,(\mu,\alpha))} \tag{153}$$

其中 $\Delta_+$ 是有限型李代数 $\mathfrak{g}$ 的正根集合，并且

$$[-\alpha]=\left[\left(q^{-(\alpha,\varsigma^i)}\right)_{i\in I}\right]$$

是常数幂级数的一个 $I$元组。公式(153)已在 [34]中得到证明。事实上，同上表明，对所有可对称化卡茨–穆迪李代数 $\mathfrak{g}$，我们有

$$\chi^{\mu}=\prod_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^I}\left(\frac{1}{1-[-\boldsymbol{n}]}\right)^{\text{certain exponents}} \tag{154}$$

其中这些指数具有洗牌代数解释，并且预期仅依赖于水平子代数 $\mathcal{B}_0 \subset U_q(L\mathfrak{g})$（详见 [34, 第1.4节和第3.1] 节，以及关于Kac-Moody型中指数的一个猜想）。

4.2. **余积**。对于有限型 $\mathfrak{g}$，令 $\Delta'$ 为 $U_q(L\mathfrak{g}) \cong U_q(\widehat{\mathfrak{g}})_{c=1}$ 上的 Drinfeld-Jimbo余积；而对于任意可对称化 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$，我们令

$$\Delta' : U_q(L\mathfrak{g}) \to U_q(L\mathfrak{g}) \mathbin{\widehat{\otimes}} U_q(L\mathfrak{g}) \tag{155}$$

为 [35] 中定义的新新拓扑余积（该定义是明确无误的，因为正如同上文献 所示，新新余积在有限型情形下与 Drinfeld-Jimbo余积一致）。我们不再回顾式 (155) 所需的具体完备化，只需指出，它由此给出了一个定义良好的作用

$$V, W \in \mathcal{O} \quad \rightsquigarrow \quad V \otimes W \in \mathcal{O}.$$

对于所有 $i \in I$，我们有以下公式

$$\Delta'(\varphi_i(z)) \in \varphi_i(z) \otimes \varphi_i(z) + U_q^-(L\mathfrak{g}) \otimes U_q^+(L\mathfrak{g}) \tag{156}$$

该公式在 [6] 中针对有限型 $\mathfrak{g}$ 得到证明，在 [35] 中针对任意可对称化 Kac-Moody$\mathfrak{g}$ 得到证明。式 (156) 表明，$\varphi_i(z)$ 以分块三角的方式作用于 $V \otimes W$（相对于不同 $\ell$-权 $\boldsymbol{\psi}$，$\boldsymbol{\psi}'$），其对角块上为 $\varphi_i(z) \otimes \varphi_i(z)$。因此，根据 [19], 的论证，我们得出

$$\chi_q(V \otimes W) = \chi_q(V) \cdot \chi_q(W) \tag{157}$$

对所有 $V$，$W \in \mathcal{O}$。

4.3. **Grothendieck 环**。考虑 Grothendieck 环 $K_0(\mathcal{O})$、$K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$。范畴 $\mathcal{O}$ 和范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 的$q$-特征态射均为单射，且像相同（第 [20, 节 9.1] 和 [37, 定理 4.19] 中的论证适用于任意可对称化 Kac-Moody 李代数）。

**命题 4.1**。存在一个拓扑环的自然同构

$$I : K_0(\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}),$$

它与 $q$-特征态射相容。

注意，对于 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$，乘法结构的定义方式不同：前者使用新的新余乘积 $\Delta'$，后者则使用由 Drinfeld 余乘积 $\Delta$导出的融合过程，参见 [23]。在范畴 $\mathcal{O}$层面比较这两种运算将会很有意思。

回顾 $\mathcal{E}$ 的 Grothendieck 环，它对应于 $\mathcal{O}$ 的子范畴，该子范畴由具有常值 $\ell$-权的模组成（例如参见第 [17, 节 2.3] ）。在 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$中也有一个类似（且等价）的子范畴。其单对象是一维可逆表示 $[\omega]$，由权 $\omega$参数化。因此，如同第 [28, 节 9.7], 中那样，我们将把 $\mathcal{E}$ 的元素视为形式和

$$c = \sum_{\omega \in \mathrm{Supp}(c)} c(\omega)[\omega].$$

乘法由 $[\omega][\omega'] = [\omega + \omega']$ 给出，且 $\mathcal{E}$ 被视为$K_0(\mathcal{O})$（分别为 $K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$）的子环。

(154) 中的每个 $\chi^\mu$ 都可以看作 $\mathcal{E}$的一个元素，我们可以考虑它们生成的子环 $A$ 。接着，我们可以将 $A$实现为 $K(\mathcal{O})$和$K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$的子环。这使得 $K_0(\mathcal{O})$和 $K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$成为 $A$-模。态射 $I$ 实际上是 $A$-模的一个同构。

公式 (5) 推出如下结论（回忆一下， $\chi^\mu = \chi^{\mathbf{r}}$ 与 $\mu = \sum_{i\in I} r_i\omega_i^\vee$）。

**定理 4.2**。 对于 $\mathcal{O}$ 中对应移位为 $\mu$的 $L(\psi)$ 简单对象，有

$$I([L(\psi)]) = \chi^\mu[L^{\mathrm{sh}}(\psi)].$$

特别地， $I$ 是一个保持简单类基（相差 $A$中的可逆因子）的环同构。

**4.4. 有限长度**。 假设在本小节中， $\mathfrak{g}$ 均为有限型。回忆如下结论。

**定理 4.3**。 [27] $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 中有限长度模组成的子范畴 $\mathcal{O}_f^{\mathrm{sh}}$在 $\mathfrak{g}$ 为有限型时对融合积封闭。

换言之，由简单类生成的 $K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$ 的子群是一个子环。记作 $K_0(\mathcal{O}_f^{\mathrm{sh}})$。注意，类似的结论在 $\mathcal{O}$ 中并不成立：例如，正准基本模$L(\psi_{i,\ a})$（量子仿射 Borel 代数的）的张量积与负预基本模 $L(\psi_j^{-1}{}_{,\ b})$ 的张量积并非有限长度。然而，根据我们的结果，我们得到 $\mathcal{O}$ 的 Jordan–H¨older 性质的如下类似结论。

**定理 4.4**。 由简单类生成的 $K_0(\mathcal{O})$ 的子 $A$-模是 $K_0(\mathcal{O})$ 的子环。

考虑由 $\chi^{-\mu}[L(\Psi)]$, 生成的 $K_0(\mathcal{O})$ 的子群 $K_0(\mathcal{O})$，其中 $\Psi$ 遍历 $\ell$-权，且 $\mu = \sum_{i\in I} r_i\omega_i^\vee$ 对于 $\mathbf{r}$ = **阶** $\psi$。我们还得到如下结论。

**定理 4.5.** $K_0(\mathcal{O})$ 是 $K_0(\mathcal{O})$ 的一个子环，同构于 $K_0(\mathcal{O}_f^{\mathrm{sh}})$。

我们将 $K_0(\mathcal{O})$ 称为范畴 $\mathcal{O}$ 的重整化 Grothendieck 环。它使我们能够在同等基础上研究移位情形与博雷尔情形中的环结构。例如，在单边类型中，我们也可以借助 $\mathcal{O}$重新表述 [20] 关于 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 的幺半范畴化猜想。在同上 中证明了，存在无限秩簇代数 $\mathcal{A}$ 到 $K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$ 的一个嵌入

$$i : \mathcal{A} \to K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}).$$

此外， $i$ 的像的闭包是 $K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$（更精确地说，应当使用整子范畴 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{sh}}$来代替 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$，但我们将滥用记号并使用同一符号）。根据上述讨论，我们也有一个嵌入

$$I^{-1} \circ i : \mathcal{A} \to K_0(\mathcal{O}).$$

[20] 的主要猜想指出， $\mathcal{A}$ 中的簇单项式应当对应于 $K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$ 中的简单类。现在可以将其重新表述如下。

**猜想 4.6.** $I^{-1} \circ i$ 对 $\mathcal{A}$ 中的簇单项式所取的像，除去因子 $\chi^\mu$ 后是简单类，并属于 $K_0(\mathcal{O})$。

4.5. $QQ$-**有限型系统**。 仍假设 $\mathfrak{g}$ 是有限型，回顾 Grothendieck 环$K_0(\mathcal{O}) \simeq K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$中的 $QQ$-系统 [16] 及其扩展版本 [17] 。这是一组代数关系

$$\begin{aligned}(158)\qquad &\mathcal{Q}_{ws_i(\omega_i^\vee),aq_i}\mathcal{Q}_{w(\omega_i^\vee),aq_i^{-1}} - [-w(\alpha_i)]\mathcal{Q}_{ws_i(\omega_i^\vee),aq_i^{-1}}\mathcal{Q}_{w(\omega_i^\vee),aq_i} \\ &= [-w(\alpha_i)]_+ \prod_{j\neq i}\prod_{s\in\{c_{ij}+1,c_{ij}+3,\dots,-c_{ij}-3,-c_{ij}-1\}} \mathcal{Q}_{w(\omega_j^\vee),aq_i^s}\end{aligned}$$

其中变量 $\mathcal{Q}_{w(\omega_i^\vee)\,a}$ 取决于 $i \in I$、 $a \in \mathbb{C}^*$ 以及 Weyl 群元素 $w$（这里我们考虑底层李代数的 Weyl 群；它与其 Langlands 对偶李代数的 Weyl 群同构）。我们还使用记号$[-w(\alpha_i)]_+ = 1$ ，若 $w(\alpha_i) \in \Delta_+$ ；以及记号 $[-w(\alpha_i)]_+ = -[-w(\alpha_i)]$ ，若 $w(\alpha_i) \in \Delta_-$，其中$\Delta_\pm$ 指的是 $\mathfrak{g}$的正根/负根的一种选取。

[17] 中为 $QQ$-系统构造了一个解，具体如下：回顾一下预基本 $\ell$-权

$$(159)\qquad \boldsymbol{\psi}_{\omega_i^\vee,a} = \boldsymbol{\psi}_{i,a} = \Big(1,\dots,1,1-\frac{a}{z},1,\dots,1\Big)$$

其非平凡项位于第 $i$ 个位置。虽然我们不再回顾该公式，但对于任意 Weyl 群元素 $w \in W$，都可以定义一个 $\ell$-权

$$(160)\qquad \boldsymbol{\psi}_{w(\omega_i^\vee),a}$$

如 [17] （简而言之，$\boldsymbol{\psi}_{w(\omega_i^\vee)\ a}$ 是在 [17] 中通过扩展 Chari 辫群作用 [3]构造的；与此 $\ell$-权相关的移位为 $w(\omega_i^\vee)$）。

**猜想 4.7**。 [17, 猜想 6。11] 对于任意 $i \in I$、 $a \in \mathbb{C}^*$、 $w \in W$，我们有

$$\mathcal{Q}_{w(\omega_i^\vee),a} = [L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}_{w(\omega_i^\vee),a})]$$

在 $K_0\,(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$ 中。

上一节的结果使我们能够推断，猜想 4.7 等价于以下命题。

**猜想 4.8**。 对于任意 $i \in I$、 $a \in \mathbb{C}^*$、 $w \in W$，我们有关系

$$\mathcal{Q}_{w(\omega_i^\vee),a} = (\chi^{w(\omega_i^\vee)})^{-1}[L(\boldsymbol{\psi}_{w(\omega_i^\vee),a})]$$

在 $\overline{K_0}(\mathcal{O})$ 中。

猜想 4.8 是关于 $QQ$-系统的猜想解的一种更精确表述，它是用量子仿射 Borel 代数的表示论来刻画的。此外，关于 $L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}_{w(\omega_i^\vee)\ a})$ 的特征的 [17, 猜想 6.8] 的第二部分可以改述如下。回顾在 [17] 中引入的级数 $\chi_{w(\omega_i^\vee)}$ 。

**猜想 4.9**。 对于 $w \in W$、 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^*$，我们有

$$\chi(L(\boldsymbol{\psi}_{w(\omega_i^\vee),a})) = \chi^{w(\omega_i^\vee)}\chi_{w(\omega_i^\vee)}.$$

对于 $w = s_i$ 简单反射，由于我们通过[23, 例 5.2], 已知 $L^{\mathrm{sh}}(\boldsymbol{\psi}_{s_i(\omega_i^\vee)\ a})$ 的 $q$-特征，因此可以得到 $q$-特征以及 $L(\boldsymbol{\psi}_{s_i(\omega_i^\vee)\ a})$ 的特征。特别地，我们有

$$\chi(L(\boldsymbol{\psi}_{s_i(\omega_i^\vee),a})) = \chi^{s_i(\omega_i^\vee)}\frac{1}{1-[-\alpha_i]}.$$

因此，猜想 4.9 对 $w = s_i$ 已得证。此外，这使得我们能够确定 [16] 中建立的 $QQ$-系统的所有常数。考虑简单类

$$Q_{i,a} = [L(\boldsymbol{\psi}_{i,a})] \quad \text{and} \quad \tilde{Q}_{i,a} = [L(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{i,aq_i^{-2}})]$$

沿用 [16] 中的记号。事实上，同上已证明，在$K_0(\mathcal{O})$中我们有如下关系

$$\begin{aligned} &\tilde{Q}_{i,aq_i} Q_{i,aq_i^{-1}} - [-\alpha_i] \tilde{Q}_{i,aq_i^{-1}} Q_{i,aq_i} \\ &= \chi \prod_{j \neq i} \prod_{s \in \{c_{ij}+1, c_{ij}+3, \ldots, -c_{ij}-3, -c_{ij}-1\}} Q_{w(\omega_j^\vee), aq_i^s} \end{aligned} \tag{161}$$

其中 $\chi$为常数。

**定理 4.10**。 *$QQ$-系统 (161) 中的常数等于*

$$\chi = \chi^{\omega_i^\vee} \chi^{s_i(\omega_i^\vee)} (\chi^{s_i(\omega_i^\vee)+\omega_i^\vee})^{-1}. \tag{162}$$

4.6. *$QQ$*一般型的-系统。 现在假设 $\mathfrak{g}$是任意的可对称化 Kac-Moody 李代数。我们猜想，前一节中的所有公式在这一更一般的情形下仍然成立。具体而言，我们写作（见 (99)）

$$A_{i,a}^{-1} = \frac{\left[\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{i,aq_i^{-2}} \boldsymbol{\psi}_{i,a}^{-1}\right]}{\left[\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{i,a} \boldsymbol{\psi}_{i,aq_i^2}^{-1}\right]} \tag{163}$$

其中 $\ell$-权

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{i,a} \quad \text{has } j\text{-component} \quad \begin{cases} \prod_{s \in \{c_{ij}+2, c_{ij}+4, \ldots, -c_{ij}-2, -c_{ij}\}} \left(1 - \frac{aq_i^s}{z}\right) & \text{if } j \neq i \\ \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1} & \text{if } j = i \end{cases}$$

并且可以直接运用 [15, 16, 17] 的全部方法，无需修改。特别地，我们将 [16] 的主要结果推广到了任意可对称化 Kac-Moody 李代数。

**定理 4.11.** *对于任意可对称化 Kac-Moody 李代数，我们在 $K_0(\mathcal{O})$ 中得到了 $QQ$-关系 (161) 的一个解，由简单类 $Q_{i,a} = [L(\boldsymbol{\psi}_{i,a})]$ 和 $Q_{i,a} = [L(\boldsymbol{\psi}_{i,aq_i^{-2}})]$ 给出。常数 $\chi$ 由 (162) 给出。*

证明。 我们首先在 $K_0(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}})$ 中证明不含常数的 $QQ$-关系 *without constant*，其中 $Q_{i,a}, \tilde{Q}_{i,a}$ 对应于单表示。只要关键关系 (163) 成立，证明就与 [23, 第 5 节4], 中的相同。然后利用定理 4.2 得出结论。 □

## References


[1] Beck J., *Braid group action and quantum affine algebras*,《数学物理通讯》165 (1994), 第3期, 555-568.[2] Burban I., Schiffmann O., *On the Hall algebra of an elliptic curve, I* 杜克数学杂志 161(7): 1171-1231.[3] Chari V., *Braid group actions and tensor products*, 国际数学研究通报 2002 (2002) 357-382.[4] Chari V. and Pressley A.,

*Quantum affine algebras and their representation*, 加拿大数学会 Conf. Proc. 16 (1994), 59–78. [5] Chari V., Pressley A., *A guide to quantum groups*, 剑桥大学出版社 (1995).

[6] Damiani I., *La R-matrice pour les algèbres quantiques de type affine non tordu*, 高等师范学校科学年刊 31 (1998), 第4期, 493-523. [7] Damiani I., *From the Drinfeld realization to the Drinfeld-Jimbo presentation of affine quantum algebras : Injectivity* 51 2015 131 171 , 数学科学研究所刊物 ( ), – . [8] Damiani I., 关于 Drinfeld 余乘积. 纯粹与应用数学季刊 20 (2024), 第1期, 171–232. [9] Drinfeld V., *A new realization of Yangians and of quantum affine algebras*, （俄文）苏联科学院通报 296 (1987), 第1期, 13–17；译文载于《苏联数学通报》36 (1988), 第2期, 212–216. [10] Enriquez B., *On correlation functions of Drinfeld currents and shuffle algebras*, 变换群 5 (2000), 第2期, 111-120. [11] Feigin B., Frenkel E., *Quantization of soliton systems and Langlands duality*, 载于数学进展 61, 185-274 日本数学会，东京，2011年。[12] Feigin B., Jimbo M., Miwa T. and Mukhin E., *Finite type modules and Bethe Ansatz equations* ´ 18 2017 2543 2579 , Ann. Henri Poincare ( ) – . [13] Feigin B., Odesskii A., *Quantized moduli spaces of the bundles on the elliptic curve and their applications* 35, 123 137, , 北约科学丛书第二辑：数学、物理与化学, - 克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，2001年。[14] Finkelberg M., Tsymbaliuk A., *Multiplicative slices relativistic Toda and shifted quantum affine algebras* 330 2019 133 304 , , 载于数学进展 ( ), – . [15] Frenkel E., Hernandez D., *Baxter's relations and spectra of quantum integrable models*, 杜克数学杂志 164 (2015), 第12期, 2407-2460. [16] Frenkel E., Hernandez D., *Spectra of quantum KdV Hamiltonians Langlands duality and affine opers* 362 2018 2, 361 414 , , , 《数学物理通讯》 ( ), 第 – 期. [17] Frenkel E., Hernandez D., *Baxter's relations and spectra of quantum integrable models* 405 2024 190 , 《数学物理通讯》 ( ), . [18] Frenkel E., Mukhin E., *Combinatorics of q-characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras* 216, 23 57 2001 , 《数学物理通讯》 - ( ). [19] Frenkel E., Reshetikhin N., *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W-Algebras*, 载于《量子仿射代数及相关主题的最新进展》, 《当代数学》248 (1999), 163-20. [20] Geiss C., Hernandez D., Leclerc B., *Representations of shifted quantum affine algebras and cluster algebras I. The simply-laced case* 3 129 2024 , 伦敦数学会会刊 ( ) ( ), 第3期, 论文编号 e12630.[21] Hernandez D., *Representations of quantum affinizations and fusion product*, 变换群 10 (2005), 第2期, 163–200. [22] Hernandez D., *Drinfeld coproduct, quantum fusion tensor category and applications*, 伦敦数学会会刊 (3) 95 (2007), 第3期, 567–608. [23] Hernandez D., *Representations of shifted quantum affine algebras*, 国际数学研究通报，第2023卷，第13期，第11035-11126页。[24] Hernandez D., *Representations and characters of quantum affine algebras at the crossroads between cluster categorification and quantum integrable models*, 即将发表于2026年国际数学家大会论文集（arXiv:2510.06437）。[25] Hernandez D., Jimbo M., *Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions*, 计算数学 2012; 148(5):1593-1623. [26] Hernandez D., Leclerc B., *Cluster algebras and category O for representations of Borel subalgebras of quantum affine algebras* 10 9 2015 2052 2016 , 代数与数论 ( ): - ( ). [27] Hernandez D., Zhang H., *Jordan-Hölder property for shifted quantum affine algebras*, 预印本 arXiv:2501.16859. [28] Kac V., *Infinite dimensional Lie algebras*, 第三版，剑桥大学出版社，剑桥、纽约，1990年。[29] Masoero D., Raimondo A., Valeri D., *Bethe Ansatz and the Spectral Theory of affine Lie algebra valued connections* 344 2016 719 750 , 《数学物理通讯》 ( ) – . [30] Mukhin E., Young C., *Affinization of category O for quantum groups*, 美国数学会汇刊 366 (2014), 第9期, 4815-4847. [31] Negut A., *Quantum loop groups for symmetric Cartan matrices*, 《纯粹与应用数学杂志》 (2026).

[32] Negut, A., *Quantum loop groups for arbitrary quivers*, 从表示论到数学物理再返回, 287–324. 《当代数学》, 817, 美国数学会, 罗德岛州普罗维登斯, 2025. [33] Negut, A., *Category $\mathcal{O}$ for quantum loop algebras*, arχiv:2501.00724. [34] Negut, A., *Characters of quantum loop algebras*, arχiv:2503.17518. [35] Negut, A., *A new new coproduct on quantum loop algebras*, arχiv:2602.01130. [36] Negut, A., Tsymbaliuk A., *Quantum loop groups and shuffle algebras via Lyndon words*, 《数学进展》 439 (2024), 109482, 69页. [37] Wang K. *QQ-systems for twisted quantum affine algebras*, 《数学物理通讯》 400 (2023), 1137–1179. [38] Wang K., *Weyl group twists and representations of quantum affine Borel algebras*, 《代数与表示论》 (2025).

Université Paris Cité、 Sorbonne Université、 CNRS、 IMJ-PRG、 F-75013 Paris、 France*Email address*: david.hernandez@imj-prg.fr

École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)、 Lausanne、 Switzerland
Simion Stoilow Institute of Mathematics (IMAR)、 Bucharest、 Romania
*Email address*: andrei.negut@gmail.com