arXiv:2603.00929v1 [math.PR] 1 Mar 2026

二次维纳泛函

—变换与二次型—

Setsuo TANIGUCHI [1]

February 20, 2026年

[1]电子邮箱：se2otngc@kyudai.jp

目录

1 二次型 **1**

1.1 二次型的级数展开.1 1.2 L´evy 和 Kac 的级数展开.7

2 从变换到二次型 11

2.1 一阶变换.11 2.2 一阶逆变换.18 2.3 线性变换.22

3 从二次型到变换 29

3.1 满射性——寻找 κ 使 $\eta(\kappa) = \eta$ .29 3.2 双射性.34 3.3 谐振子型二次维纳泛函.35 3.4 吉尔萨诺夫定理的推导.38

4 线性适应变换 41

4.1 线性适应变换.41 4.2 Feynman-Kac 密度函数.58 4.3 二步幂零李群上的热核.67 4.4 欧拉、伯努利与欧拉多项式.71 4.5 KdV方程.77

5 平方根变换的应用 93

5.1 自分解性.93 5.2 钉住测度.96 5.3 Pl¨ucker 坐标.98 5.4 示例.102

A 分析或代数断言 **121**

A.1 泛函分析引理.121 A.2 特殊因式分解.123 A.3 常系数矩阵值线性常微分方程.125 A.4 柯西恒等式与拉格朗日恒等式.132

B 不使用 Malliavin 微积分 135

C 特征值展开 143

前言

维纳空间 (,) 上的积分

$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}} d\mu$ $\mathcal{W}$ μ $\mathbb{R} \ni$（或拉普拉斯变换）出现在许多场合。例如，可以想到薛定谔算子的费曼-卡茨公式、吉尔萨诺夫-丸山变换，以及采用风险中性概率测度的定价公式（数理金融）等。计算该积分是随机分析中的基本问题之一。此外，若将求值全纯延拓，就会得到傅里叶变换$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \int_{\mathcal{W}} f e^{\mathrm{i}\lambda\mathfrak{q}} d\mu$，其中 $\mathrm{i}^2 = -1$。当 $f = 1$ 时，它恰好是 $\mathfrak{q}$ 的特征函数（概率论中的一个基本对象）。

$\lambda \mapsto \int_{\mathcal{W}} f e^{\lambda\mathfrak{q}} d\mu$

从历史上看，对二次 $\mathfrak{q}$ 积分的求值研究（ $\mathfrak{q}$ 是阶数小于或等于二的维纳混沌直和中的一个元素），可追溯到 20 世纪中期 R.H. Cameron、W.T. Martin [1, 2], 、M. Kac [20], 和 P. Lévy[22] 的开创性工作。Cameron 和 Martin 研究了一维维纳过程样本路径的加权平方范数。Kac 研究了一维维纳过程样本路径的平方范数，这对应于谐振子的薛定谔算子。Lévy 研究了二维维纳过程所围成的随机面积，这与恒定磁场下的薛定谔算子有关。他们的方法各不相同，也分别对应着以他们名字命名的著名成果。Cameron 和 Martin 在维纳空间上应用线性变换；这是卡梅伦-马丁公式的推广。Kac 在时间区间上利用 L^2-空间中的傅里叶级数展开；这种方法与费曼-卡茨公式相关。Lévy 利用了维纳过程在 $\mathcal{W}$ 中的展开，这种方法最初由 N. Wiener 用于构造维纳测度 μ，后来由 K. Itō 和 M. Nisio [19] 加以推广。Lévy 对拉普拉斯变换的求值称为 Lévy 随机面积公式。此后，出现了大量关于二次$\mathfrak{q}$的研究。作者也作出了一些贡献 [13–15, 17, 23, 24, 26, 27, 34–47]。

在本专著中，我们利用维纳空间上的变换，对积分 $\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}} d\mu$ 及二次 $\mathfrak{q}$ 进行系统研究，从而建立一个统一框架来处理此类积分，并通过应用该统一框架重新审视作者的贡献。

引言

设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $T > 0$。记 $\mathcal{W}$ 为从 $[0,T]$ 到 $\mathbb{R}^d$ 的连续函数空间，其中的函数在 0 处取值为 0；记 μ 为 $\mathcal{W}$ 上的维纳测度。对于 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，令 $\mathcal{C}_n$ 表示 n 阶维纳混沌。我们称 $\mathcal{C}_2$ 的一个元素为二次型，称直和 $\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$ 的一个元素为二次维纳泛函。回顾一下，每个二次型都可表示为

$$\mathfrak{q}_\eta \equiv \int_0^T \left\langle \int_0^t \eta(t,s) d\theta(s), d\theta(t) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^d \int_0^T \left(\int_0^t \eta_j^i(t,s) d\theta^j(s) \right) d\theta^i(t),$$

其中 $\eta = \left(\eta_j^i\right)_{1 \le i,\ j \le d}$ 是定义在 $[0,T]^2$ 上、取值于 $\mathbb{R}^{d \times d}$ 的平方可积函数（$\equiv$ 为 $d \times d$ 实矩阵的空间），且满足 $\eta_i^j(t,\ s) = \eta_j^i(s,\ t)$，对于 $1 \le i,\ j \le d$ 成立，并且 $(t,\ s) \in [0,T]^2$ （见 [29] 或下文的定理（ 1.1.5 ））。这里及下文中，

(i) $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 是欧几里得内积，

(ii) 认为 $\mathbb{R}^d$ 中的每个元素都是列向量，并且 $\mathbb{R}^{d \times d}$ 从左侧作用于 $\mathbb{R}^d$

$$\text{as } Mx = \left(\sum_{j=1}^d M_j^i x^j \right)_{1 \le i \le d} \text{ for } M = (M_j^i)_{1 \le i,j \le d} \in \mathbb{R}^{d \times d} \text{ and } x = (x^i)_{1 \le i \le d} \in \mathbb{R}^d,$$

(iii) $\{\theta(t) = (\theta^1(t) \ldots,\ \theta^d(t))\}_{t \in [0,T]}$ 是 $\mathcal{W}$ 上的坐标过程，即，对于 $t \in [0,T]$ 和 $w \in \mathcal{W}$，$\theta(t)(w) = w(t)$，

(iv) 每个 $d\theta^i(t)$ 表示关于 $\{\theta^i(t)\}_{t \in [0,T]}$ 的伊藤积分；并且

(v) $d\theta(t) = (d\theta^1(t), \ldots, d\theta^d(t))$.

类似地，每个二次维纳泛函都表示为 $\mathfrak{q}_\eta + \int_0^T \langle f(t)\ d\theta(t) \rangle + c$，其中 f 平方可积：$[0,T] \to \mathbb{R}^d$ 和 $c \in \mathbb{R}$（见 [29]）。

令 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{W}$ 的 Cameron-Martin子空间：由具有平方可积导数 h'（定义在 $[0,T]$ 上）的绝对连续$h \in \mathcal{W}$构成的空间。$\mathcal{H}$中的内积 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ 定义为

$$\langle h, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \langle h'(t), g'(t) \rangle dt \quad \text{for } h, g \in \mathcal{H}.$$

其范数表示为 $\| \cdot \|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle \cdot,\ \cdot \rangle_{\mathcal{H}}}$。记 D 为 Malliavin 微积分意义下的 $\mathcal{H}$ 导数，D^* 为其伴随算子（参见 [27, 第 5] 章）。

在第1章中，我们建立了二次型的级数展开，如下所示

$$\mathfrak{q}_\eta = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^\infty \langle B_\eta h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} \{(\mathrm{D}^* h_n)(\mathrm{D}^* h_m) - \delta_{nm}\}$$

对于 $\mathcal{H}$ 的任意标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $B_\eta:\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是核为 η 的希尔伯特-施密特算子，即其定义为

$$\langle B_\eta h, g\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \left\langle \int_0^T \eta(t,s)h'(s)ds, g'(t)\right\rangle dt \quad \text{for } h,g\in\mathcal{H}.$$

在级数展开中，将 h_n 视为取值于 $\mathcal{H}$的常值维纳泛函，并对其应用 $\mathbf{D}^*$，由此定义 $\mathbf{D}^*h_n$；对于 $p\in(1,\ \infty)$，该级数在每个关于 μ 的 L^p空间中收敛。通过应用 Malliavin 微积分，特别是将 $\mathfrak{q}_\eta$ 表示为$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^*)^2B_\eta$ 并利用伴随算子 $\mathbf{D}^*$ 的连续性，可以得到这一级数展开。作为级数展开的应用，我们重新考察 L´evy（[22]）和 Kac（[20]）对二次维纳泛函的推导。

第2章致力于研究一阶变换 $\iota+F_\kappa$：恒等映射 $\iota:\mathcal{W}\to\mathcal{W}$ 与维纳泛函 F_κ 的和，其中 F_κ 由平方可积的 $\kappa:\ [0,T]^2\to\mathbb{R}^{d\times d}$确定，如下所示

$$\langle F_\kappa, h\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \left\langle \int_0^T \kappa(t,s)d\theta(s), h'(t)\right\rangle dt \quad \text{for } h\in\mathcal{H}.$$

定义 $\eta(\kappa):\ [0,T]^2\to\mathbb{R}^{d\times d}$ 如下

$$\eta(\kappa)(t,s) = -\left\{\kappa(t,s)+\kappa(s,t)^\dagger + \int_0^T \kappa(u,t)^\dagger\kappa(u,s)du\right\} \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2,$$

其中 $M^\dagger$ 是 $M\in\mathbb{R}^{d\times d}$的转置。利用第1章中所建立的二次型展开，我们将看到，一阶变换 $\iota+F_\kappa$ 会给出一个二次型$\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}$，作为变量替换公式的拉东-尼科迪姆密度的指数；若$\sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1}\langle B_{\eta(\kappa)}h,h\rangle_{\mathcal{H}}<1$，则成立

$$|\det{}_2(I+B_\kappa)|\int_{\mathcal{W}} f(\iota+F_\kappa)e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}}d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2}\int_{\mathcal{W}} f d\mu \quad \text{for every } f\in C_b(\mathcal{W}),$$

其中$\det_2$ 表示正则化行列式，而 $C_b(\mathcal{W})$是定义在 $\mathcal{W}$ 上、取值于 $\mathbb{R}$的有界连续函数空间。参见定理 (2.1.3)。顺便还将证明，$\mathfrak{q}_\eta$ 指数可积的充要条件是$\sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1}\langle B_\eta h,h\rangle_{\mathcal{H}}<1$。

若 κ 满足$\sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1}\langle B_{\eta(\kappa)}h,h\rangle_{\mathcal{H}}<1$，则 $I+B_\kappa$ 具有连续逆（见注（2.1.5））。在同一章中，令 $\widehat{\kappa}$ 为希尔伯特-施密特算子 $(I+B_\kappa)^{-1}-I$ 的核，我们将证明 $\iota+F_{\widehat{\kappa}}$是 $\iota+F_\kappa$ 的逆变换，并且变量替换公式变为

$$|\det{}_2(I+B_\kappa)|\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}}d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2}\int_{\mathcal{W}} f(\iota+F_{\widehat{\kappa}})d\mu.$$

参见定理（2.2.1）。在本章末尾，我们将上述结果应用于 Cameron 和 Martin 研究的线性变换 [2]。我们还将讨论我们的结果与他们的结果之间的比较。

在第3章中，我们将证明以下四个条件等价。
(i) $e^{\mathfrak{q}_\eta} \in L^1(\mu)$，(ii) $\Lambda(B_\eta) < 1$，(iii) 存在一个满足 $\det_2(I + B_\tau) \neq 0$ 且 $\tau \in \mathscr{S}_2$ 的

$$\eta(t,s) = -2\tau(t,s) - \int_0^T \tau(t,u)\tau(u,s)du \quad \text{for a.e. } (t,s) \in [0,T]^2,$$

and
(iv) 存在一个 $\rho \in \mathscr{S}_2$ 满足

$$\eta(t,s) = \rho(t,s) - \int_{t\vee s}^T \rho(t,u)\rho(u,s)du \quad \text{for a.e. } (t,s) \in [0,T]^2,$$

其中，我们用缩写“a.e.”表示相对于二维勒贝格测度而言的“几乎处处”，并用 $t \vee s$ 表示 $\max\{t,s\}$。定义 $\kappa_A(\rho) \in \mathscr{L}_2$ 为

$$\kappa_A(\rho)(t,s) = -\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\rho(t,s) \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2,$$

将证明，如果这些条件成立，那么

$$\eta(\tau) = \eta(\kappa_A(\rho)) = \eta$$

并且以下两类变量替换公式成立：

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta} d\mu &= \{\det\nolimits_2(I - B_\eta)\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{\tau}})d\mu \\ &= e^{\frac{1}{4}\|\rho\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{\kappa_A(\rho)}})d\mu \quad \text{for every } f \in C_b(\mathcal{W}).\end{aligned}$$

参见定理（3.1.1）。此外，通过限制定义域，我们将看到映射 $\mathscr{L}_2 \ni \kappa \mapsto \eta(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ 的两类双射性。同一章中还将说明，Girsanov定理可由变换 $\iota + F_{\widehat{\kappa_A\,\rho\,()}}$ 推出。

在第4章中，我们研究将 $\mathcal{W}$ 映射到自身的变换 $\iota + F_{\kappa_A(\rho)}$，它们是连续线性算子。具体而言，对于连续的 $\phi, \sigma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times d}$，定义 $G_\phi : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$ 和 $\mathfrak{p}_\sigma : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$如下：

$$\langle G_\phi, h\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^T \langle \phi(t)\theta(t), h'(t)\rangle dt \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \quad \text{and} \quad \mathfrak{p}_\sigma = \int_0^T \langle \sigma(t)\theta(t), d\theta(t)\rangle.$$

G_ϕ 等于$F_{\kappa_A(\rho)}$，其中 $\rho \in \mathscr{S}_2$ 定义如下：

$$\rho(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\phi(t) + \mathbf{1}_{(t,T]}(s)\phi(s)^\dagger \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

应用上一章的结果，我们将证明 $e^{\mathfrak{p}_\sigma}$ 的可积性与黎卡提常微分方程（简称 ODE）在经典意义下的可解性等价

$$\boldsymbol{R}' = -\boldsymbol{R}^2 - \sigma^\dagger \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}\sigma - \sigma^\dagger\sigma, \quad \boldsymbol{R}(T) = 0.$$

当 σ 属于 C^1 类时，可解性还等价于 $\mathbb{R}^{d\times d}$ 值二阶常微分方程的解 $\boldsymbol{S}$ 的非奇异性

$$\boldsymbol{S}'' - 2\sigma_A \boldsymbol{S}' - \sigma' \boldsymbol{S} = 0, \quad \boldsymbol{S}(T) = I_d,\ \boldsymbol{S}'(T) = \sigma(T),$$

其中，我们称 $\boldsymbol{S}$ 是非奇异的，如果对于任意 $t \in [0,T]$，都有 $\det \boldsymbol{S}(t) \neq 0$。利用这些 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$，我们将得到拉普拉斯变换 $\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{p}_\sigma} d\mu$ 的另一种显式表达式。该表达式将用于求值二步幂零李群上的 Feynman-Kac 密度函数和核。此外，我们还将利用它获得代数或解析对象的随机表示：(a) 欧拉、伯努利和欧拉多项式；(b) 无反射势以及 KdV方程的孤子解。

在第5章中，我们考虑 $\iota + F_\tau$ 在上述条件 (ii) 中出现的 $\tau \in \mathscr{S}_2$ 的应用。首先，我们研究维纳泛函

$$\int_0^T \left\langle x, \int_0^T \kappa(t,s) d\theta(s) \right\rangle^2 dt \quad \text{with } x \in \mathbb{R}^d \text{ and } \kappa \in \mathscr{L}_2.$$

当 $d = 1$、$T = 1$、$x = 1$ 和 $\kappa(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)$ 对于 $(t,s) \in [0,1]^2$ 时，这等于 Kac [20] 研究的维纳泛函。接下来，我们计算 $\mathfrak{q}_\eta$ 的特征函数的对数，并证明 $\mathfrak{q}_\eta$ 的分布是自分解的。第三，我们将把拉普拉斯变换的求值推广到由非退化维纳泛函对狄拉克测度作拉回而得到的钉扎测度。第四，我们还将说明求值如何随钉扎的变化而相应改变。这种变化用 Pl¨ucker 坐标来描述。最后，本章最后一节将给出几个关于 Pl¨ucker 坐标显式表达式的示例。

第 A、B 和 C 章是附录。第 A 章介绍了第 1 至第 5 章中用到的分析或代数断言。第 B 章专门在不使用 Malliavin 微积分的情况下证明第 1 章和第 2 章中的结果。第 C 章则利用与二次型相关的希尔伯特-施密特算子的特征值展开，在不使用一阶变换的情况下，给出了带有 $h = 0$ 的变量替换公式（3.1.4）的另一种证明。

本专著中频繁出现的记号列表列于参考文献之前。

第1章

二次型

借助Malliavin微积分，证明了 $\mathcal{H}$ 上的二次型与对称希尔伯特-施密特算子之间的双射对应。该对应被用于在 L^p空间中发展二次型。利用这些进展，重新审视了L´evy与Kac在20世纪中期的工作。

1.1. 二次型的级数展开

我们继续使用引言中介绍的符号 $\mathcal{W}$、 μ 和 $\mathcal{H}$： $\mathcal{W}$ 表示 $[0,T]$上的d维维纳空间， μ 表示 $\mathcal{W}$上的维纳测度，而 $\mathcal{H}$ 表示 Cameron-Martin子空间。对于实可分希尔伯特空间 E，令 $L^p(\mu; E)$表示 $\mathcal{W}$ 上关于 μ的 p次可积 E值函数空间。对于 $L^p(\mu;\mathbb{R})$，我们简记为$L^p(\mu)$。

用 $\mathscr{L}_2$ 表示 $[0,T]^2$ 上关于二维勒贝格测度的 $\mathbb{R}^{d\times d}$值平方可积函数空间。令

$$\mathscr{S}_2 = \left\{\eta \in \mathscr{L}_2 \,\middle|\, \eta(t,s)^\dagger = \eta(s,t) \text{ for } (t,s) \in [0,T]^2\right\},$$

其中 $M^\dagger$ 是 $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$的转置。对于$\eta = \left(\eta_j^i\right)_{1\le i,j\le d} \in \mathscr{S}_2$, $\mathfrak{q}_\eta$： $\mathcal{W} \to \mathbb{R}$ 在引言中定义为

$$\mathfrak{q}_\eta = \int_0^T \left\langle \int_0^t \eta(t,s)d\theta(s), d\theta(t)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^d \int_0^T \left(\int_0^t \eta_j^i(t,s)d\theta^j(s)\right) d\theta^i(t).$$

如果我们设

$$\|\kappa\|_2 = \left(\int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)|^2 dsdt\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } \kappa \in \mathscr{L}_2,$$

则由 Itô 积分的等距，我们有

$$\int_{\mathcal{W}} \mathfrak{q}_\eta^2 d\mu = \frac{1}{2}\|\eta\|_2^2.$$

对于 $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $p \in (1,\infty)$，以及实可分希尔伯特空间 E，记 $\mathbb{D}^{k,p}(E)$ 为 Malliavin 微积分意义下取值于 E、 $\mathcal{H}$ 次可微的维纳泛函空间，其中可微阶数为 k

微积分，其 $\mathcal{H}$ 阶导数在所有不超过 k 的阶数上相对于 μ 均为 p 次可积。令

$$\mathbb{D}^{\infty}(E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \bigcap_{p\in(1,\infty)} \mathbb{D}^{k,p}(E).$$

我们简记 $\mathbb{D}^{k,p}$ 和 $\mathbb{D}^{\infty}$ 分别表示 $\mathbb{D}^{k,p}(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R})$。符号 D 和 D^* 分别表示 $\mathcal{H}$-导数及其伴随算子。关于 Malliavin 微积分，参见 [27, 第5]章。令 $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ 为从 $\mathcal{H}$到其自身的希尔伯特-施密特算子空间，并定义

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2}) = \{B \in \mathcal{H}^{\otimes 2} \mid B^* = B\},$$

其中 B^* 是 B的伴随算子。对于 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，定义 $B_\kappa \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ 如下：

$$\langle B_\kappa h, g\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \left\langle \int_0^T \kappa(t,s)h'(s)ds, g'(t) \right\rangle dt \quad \text{for } h, g \in \mathcal{H}.$$

本节的首要目标是利用 B_η 刻画 $\mathfrak{q}_\eta$，并对每个 $p \in (1,\infty)$，给出它在 $L^p(\mu)$ 中的级数展开。

(1.1.1) 定理。设 $\eta \in \mathscr{S}_2$。
(i)有

$$\mathfrak{q}_\eta = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^*)^2 B_\eta,$$

其中，右侧的项定义为：将 $B_\eta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$ 视为 $\mathbb{D}^{\infty}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$中的常数维纳泛函，并对其应用$\mathrm{D}^*$ 两次。

(ii) 对于任意标准正交基（简称 *ONB*） $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ *of* $\mathcal{H}$，都有

$$\mathfrak{q}_\eta = \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\eta h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}}\{(\mathrm{D}^* h_n)(\mathrm{D}^* h_m) - \delta_{nm}\}, \tag{1.1.2}$$

其中，该级数对每个 $p \in (1,\infty)$ 都在 $L^p(\mu)$ 中收敛；$\mathrm{D}^* h_n$ 的定义是将 h_n 视为 $\mathbb{D}^{\infty}(\mathcal{H})$ 中的常数维纳泛函，并作用以 D^*。

为证明这一点，我们先准备一个引理，它将在本专著中频繁使用。对 $h, g \in \mathcal{H}$，定义 $h \otimes g \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$

$$(h \otimes g)k = \langle h, k\rangle_{\mathcal{H}}\, g \quad \text{for } k \in \mathcal{H}.$$

回顾一下， $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ 中的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}$ 由下式给出

$$\langle B, B'\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Bh_n, B'h_n\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for } B, B' \in \mathcal{H}^{\otimes 2},$$

其中 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$的一个（也是任意一个）标准正交基，由此可知

$$\langle B, h \otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \langle Bh, g\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for } B \in \mathcal{H}^{\otimes 2} \text{ and } h, g \in \mathcal{H}$$

and

$$\|B_\kappa\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \|\kappa\|_2 \quad \text{for } \kappa \in \mathscr{L}_2, \tag{1.1.3}$$

[1]其中 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \langle\cdot,\ \cdot\rangle^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}$。

(1.1.4) 引理。 若 $\mathrm{D}^3\Phi = 0$ 对 $\Phi \in \mathbb{D}^\infty$成立，则 $\mathrm{D}^2\Phi$ 是一个常数，记为 $= B$，且有

$$\Phi = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^*)^2 B + \mathrm{D}^* h + c, \quad where\ h = \int_{\mathcal{W}} \mathrm{D}\Phi d\mu\ and\ c = \int_{\mathcal{W}} \Phi d\mu.$$

证明。 见 [27, 命题 5.7.4]。 □

定理（*1.1.1*）的证明。 (i) 由于 $\eta \in \mathscr{S}_2$，根据 Malliavin 微积分中的一个简单练习（[27]），我们可得

$$\langle \mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta, g\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \left\langle \int_0^t \eta(t,s)g'(s)ds, d\theta(t) \right\rangle + \int_0^T \left\langle \int_0^t \eta(t,s)d\theta(s), g'(t) \right\rangle dt$$

and

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{D}^2\mathfrak{q}_\eta, h\otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} &= \int_0^T \left\langle \int_0^t \eta(t,s)g'(s)ds, h'(t) \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle \int_0^t \eta(t,s)h'(s)ds, g'(t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \left\langle \int_0^T \eta(t,s)h'(s)ds, g'(t) \right\rangle dt = \langle B_\eta, h\otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\end{aligned}$$

对于 $h,\ g \in \mathcal{H}$。因此有

$$\int_{\mathcal{W}} \mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta d\mu = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{D}^2\mathfrak{q}_\eta = B_\eta.$$

此外，注意到

$$\int_{\mathcal{W}} \mathfrak{q}_\eta d\mu = 0,$$

由引理（1.1.4），我们得到所需的恒等式。
(ii) 设 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$的一个标准正交基。将 B_η 在 $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ 中展开为

$$B_\eta = \sum_{n,m=1}^\infty \langle B_\eta h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} h_n \otimes h_m.$$

对于 $N \in \mathbb{N}$，令

$$B_\eta^{(N)} = \sum_{n,m=1}^N \langle B_\eta h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} h_n \otimes h_m.$$

于是 $B_\eta^{(N)}$在 $\mathcal{H}^{\otimes 2}$中收敛到 B_η。由于D^*的连续性，对任意 $p \in (1,\infty)$，$(\mathrm{D}^*)^2 B_\eta^{(N)}$在 $L^p(\mu)$中收敛到$(\mathrm{D}^*)^2 B_\eta$。注意到

$$(\mathrm{D}^*)^2(h_n\otimes h_m) = (\mathrm{D}^* h_n)(\mathrm{D}^* h_m) - \delta_{nm} \quad \text{for } n,m \in \mathbb{N}$$

（见 [27, (5.7.2)]），我们有

$$(\mathrm{D}^*)^2 B_\eta^{(N)} = \sum_{n,m=1}^N \langle B_\eta h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \{(\mathrm{D}^* h_n)(\mathrm{D}^* h_m) - \delta_{nm}\}.$$

根据断言（i），令 $N \to \infty$，我们得到恒等式（1.1.2），以及该级数在 $L^p(\mu)$ 中对任意 $p \in (1,\infty)$ 的收敛。 □

回顾：二阶维纳混沌 $\mathcal{C}_2$ 是 $L^2(\mu)$ 中由满足 $n,m\in\mathbb{N}$ 的 $(\mathbb{D}^*h_n)(\mathbb{D}^*h_m)-\delta_{nm}$ 的线性组合所张成之子空间的闭包，其中 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。容易看出，$\mathcal{C}_2$ 与 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ 的选取无关。尽管下述事实广为人知（[29]），我们仍借助定理（1.1.1）给出一个证明。

(1.1.5) 定理。 $\mathcal{C}_2=\{\mathfrak{q}_\eta\mid\eta\in\mathscr{S}_2\}$。

为证明这一结果，我们先准备一个引理，它将在本专著中反复使用。我们称 κ 和 κ' 在 $\mathscr{L}_2$ 中等价，当且仅当 $\|\kappa-\kappa'\|_2=0$，记作 $\kappa\overset{(\mathscr{L}_2)}{=}\kappa'$。对于$x=(x^1,\dots,x^d)$ $y=(y^1,\dots,y^d)\in\mathbb{R}$，$x\otimes y$表示由下式给出的矩阵

$$x\otimes y=\left(y^ix^j\right)_{1\le i,j\le d}=\begin{pmatrix}y^1x^1 & \dots & y^1x^d\\ \vdots & & \\ y^dx^1 & \dots & y^dx^d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{d\times d}.$$

(1.1.6) 引理。 对于 $\kappa,\kappa'\in\mathscr{L}_2$，$B_\kappa=B_{\kappa'}$，当且仅当 $\kappa\overset{(\mathscr{L}_2)}{=}\kappa'$。映射 $\mathscr{L}_2\ni\kappa\mapsto B_\kappa\in\mathcal{H}^{\otimes2}$ 是双射，其中单射性意味着，对于满足$B_{\kappa_1}=B_{\kappa_2}$的 $\kappa_1,\kappa_2\in\mathcal{L}_2$，有 $\kappa_1\overset{(\mathscr{L}_2)}{=}\kappa_2$。最后，若 $\eta\in\mathscr{S}_2$，则 $B_\eta\in\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes2})$，且限制映射$\mathscr{S}_2\ni\eta\mapsto B_\eta\in\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes2})$也是双射。

根据引理，对于每个 $B\in\mathcal{H}^{\otimes2}$，在 $\mathscr{L}_2$ 中存在唯一的 $\kappa\in\mathscr{L}_2$（在等价意义下），使得 $B=B_\kappa$。我们称这个 κ 为 B的核 。

证明。第一个断言由恒等式（1.1.3）得出。该断言还蕴含映射 $\kappa\mapsto B_\kappa$的单射性。为证明该映射的满射性，设 $B\in\mathcal{H}^{\otimes2}$。取 $\mathcal{H}$的一组标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$。对于 $N\in\mathbb{N}$，定义 $\kappa_N\in\mathscr{L}_2$ 如下:

$$\kappa_N(t,s)=\sum_{n,m=1}^N\langle Bh_n,h_m\rangle_{\mathcal{H}}[h_n'(s)\otimes h_m'(t)]\quad\text{for }(t,s)\in[0,T]^2.$$

由于

$$\|\kappa_N-\kappa_M\|_2^2=\sum_{M<n\vee m\le N}\langle Bh_n,h_m\rangle_{\mathcal{H}}^2\quad\text{for }N,M\in\mathbb{N}\text{ with }M<N$$

and

$$\sum_{n,m=1}^\infty\langle Bh_n,h_m\rangle_{\mathcal{H}}^2=\sum_{n=1}^\infty\|Bh_n\|_{\mathcal{H}}^2=\|B\|_{\mathcal{H}^{\otimes2}}^2<\infty,$$

存在一个 $\kappa\in\mathscr{L}_2$，使得 $\|\kappa_N-\kappa\|_2\to0$ 是 $N\to\infty$。因此

$$\|B_{\kappa_N}-B_\kappa\|_{\mathcal{H}^{\otimes2}}=\|\kappa_N-\kappa\|_2\to0\quad\text{as }N\to\infty.$$

此外，若用 π_N表示 $\mathcal{H}$ 在由 $h_1,\dots,h_N$张成的子空间上的正交投影，则 $B_{\kappa_N}=\pi_NB\pi_N$，这意味着

$$\|B_{\kappa_N}-B\|_{\mathcal{H}^{\otimes2}}\to0\quad\text{as }N\to\infty.$$

因此 $B=B_\kappa$。由此可得该映射的满射性。

对于 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，定义 $\kappa^* \in \mathscr{L}_2$，使得 $\kappa^*(t,s) = \kappa(s,t)^\dagger$ 对于 $(t,s) \in [0,T]^2$。由于 $B^*_\kappa = B_{\kappa^*}$，若 $\eta \in \mathscr{S}_2$，则 $B_\eta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$。受限映射 $\eta \mapsto B_\eta$ 继承了原映射的单射性。令 $B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$。根据原映射的满射性，存在一个 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，使得 $B_\kappa = B$。于是 $B_{\kappa^*} = B^*_\kappa = B$。令 $\eta = \frac{1}{2}\{\kappa + \kappa^*\}$。则 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 且 $B_\eta = B$。因此，受限映射是满射的。□

定理（*1.1.5*）的证明。由定理（1.1.1），$\mathfrak{q}_\eta \in \mathcal{C}_2$ 对每个 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 均成立。

为证明逆命题，令 $\mathfrak{q} \in \mathcal{C}_2$。由于

$$\int_{\mathcal{W}} \{(\mathrm{D}^* h_n)(\mathrm{D}^* h_m) - \delta_{nm}\}\{(\mathrm{D}^* h_p)(\mathrm{D}^* h_q) - \delta_{pq}\} d\mu$$
$$= \begin{cases} 2 & \text{if } n = m = p = q, \\ 1 & \text{if } n \neq m,\ p \neq q, \text{ and } \{n,m\} = \{p,q\}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

存在 $a_{nm} \in \mathbb{R}$、$1 \leq m \leq n < \infty$ 使得 $\sum_{1 \leq m \leq n < \infty} a_{nm}^2 < \infty$ 且

$$\mathfrak{q} = \sum_{1 \leq m \leq n < \infty} a_{nm}\{(\mathrm{D}^* h_n)(\mathrm{D}^* h_m) - \delta_{nm}\},$$

其中级数在 $L^2(\mu)$ 中收敛。

对 n，$m \in \mathbb{N}$ 定义 $b_{nm} \in \mathbb{R}$ 为

$$b_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{nm} & \text{if } m < n, \\ a_{nn} & \text{if } m = n, \\ \frac{1}{2} a_{mn} & \text{if } m > n. \end{cases}$$

于是，$\mathfrak{q}$ 的级数可改写为

$$\mathfrak{q} = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm}\{(\mathrm{D}^* h_n)(\mathrm{D}^* h_m) - \delta_{nm}\},$$

其中该级数在 $L^2(\mu)$ 中收敛。定义 $B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$ 为

$$B = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} h_n \otimes h_m.$$

通过对 B 采用我们用于证明定理（1.1.1）(ii) 的同样逼近论证，我们得到 $\mathfrak{q} = (\mathrm{D}^*)^2 B$。根据引理（1.1.6），存在一个 $\eta \in \mathscr{S}_2$，使得 $B_\eta = 2B$。根据定理（1.1.1），我们有 $\mathfrak{q} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^*)^2 B_\eta = \mathfrak{q}_\eta$。□

我们将给出一个二次维纳泛函的例子，其形式与二次型的定义略有不同。对于 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，定义维纳泛函 $\mathfrak{h}(\kappa; x)$ 和 $\mathfrak{h}(\kappa)$ 如下：

$$\mathfrak{h}(\kappa; x) = \frac{1}{2}\int_0^T \left\langle x, \int_0^T \kappa(t,s) d\theta(s) \right\rangle^2 dt \quad \text{and} \quad \mathfrak{h}(\kappa) = \frac{1}{2}\int_0^T \left| \int_0^T \kappa(t,s) d\theta(s) \right|^2 dt.$$

如果对于 $(t,s) \in [0,T]$, $\bar{}d = 1$ 和 $\kappa(t,s) = \sqrt{2}\mathbf{1}_{[0,t)}(s)$, 其中 $\mathbf{1}_S$ 是集合 S 的示性函数, 那么 $\mathfrak{h}(\kappa;1) = \mathfrak{h}(\kappa) = \int_0^T \theta(t)^2 dt$, 这与谐振子 $-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ 有关。谐振子是基本的薛定谔算子之一（[27, §§5.8.1]）。因此, 我们称 $\mathfrak{h}(\kappa;x)$ 和 $\mathfrak{h}(\kappa)$ 为谐振子型二次维纳泛函。在 KdV 方程（[13, 40]）的随机方法中, $\mathfrak{h}(\kappa;x)$ 起着基础性作用, 其中 κ 具有如下形式: 对于 $(t,s) \in [0,T]^2$, $\kappa(t,s) = \mathrm{diag}[e^{(t-s)p_1}, \dots, e^{(t-s)p_d}]$, 其中 $p_1, \dots, p_d \in \mathbb{R}$, 而 $\mathrm{diag}[a_1, \dots, a_d]$ 是 d 维对角矩阵, 其第 i 个对角元为 a_i。另见第 4.5 节。

(1.1.7) 命题。设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$。定义 $c(\kappa;x)\ c(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ 为

$$c(\kappa;x)(t,s) = \int_0^T \big[(\kappa(u,s)^\dagger x) \otimes (\kappa(u,t)^\dagger x)\big] du \quad \textit{and} \quad c(\kappa)(t,s) = \int_0^T \kappa(u,t)^\dagger \kappa(u,s) du$$

对于 $(t,s) \in [0,T]^2$。于是有

$$\mathfrak{h}(\kappa;x) = \mathfrak{q}_{c(\kappa;x)} + \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)^\dagger x|^2 ds dt$$

and

$$\mathfrak{h}(\kappa) = \mathfrak{q}_{c(\kappa)} + \frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2. \tag{1.1.8}$$

证明。 有

$$\langle \mathrm{D}\mathfrak{h}(\kappa;x), g\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \left\langle x, \int_0^T \kappa(t,s) d\theta(s) \right\rangle \left\langle x, \int_0^T \kappa(t,u) g'(u) du \right\rangle dt$$

and

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{D}^2\mathfrak{h}(\kappa;x)), h\otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} &= \int_0^T \left\langle x, \int_0^T \kappa(t,s) h'(s) ds \right\rangle \left\langle x, \int_0^T \kappa(t,u) g'(u) du \right\rangle dt \\ &= \langle B_{c(\kappa;x)}, h\otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\end{aligned}$$

对于 $h,\ g \in \mathcal{H}$。因此我们有

$$\int_{\mathcal{W}} \mathrm{D}\mathfrak{h}(\kappa;x) d\mu = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{D}^2\mathfrak{h}(\kappa;x) = B_{c(\kappa;x)}.$$

将 $\left\langle x,\ \int_0^T \kappa(t,\ s) d\theta(s)\right\rangle$ 改写为 $\int_0^T \langle \kappa(t,\ s)^\dagger x,\ d\theta(s)\rangle$, 可得

$$\int_{\mathcal{W}} \mathfrak{h}(\kappa;x) d\mu = \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)^\dagger x|^2 ds dt.$$

由引理（1.1.4）和定理（1.1.1）, 我们得到 $\mathfrak{h}(\kappa;x)$ 的恒等式。

令 $e_1, \dots, e_d$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的标准正交基。注意,

$$\mathfrak{h}(\kappa) = \sum_{i=1}^d \mathfrak{h}(\kappa;e_i).$$

由于

$$\sum_{i=1}^d c(\kappa;e_i) = c(\kappa) \ \text{ and } \ \sum_{i=1}^d \int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)^\dagger e_i|^2 ds dt = \|\kappa\|_2^2,$$

$\mathfrak{h}(\kappa)$的恒等式可由 $\mathfrak{h}(\kappa;e_i)$s.的恒等式推出。 □

注意到 $B_{c(\kappa)} = B_\kappa^* B_\kappa$。因此， $B_{c(\kappa)}$ 是迹类且半正定的，即$\langle B_{c(\kappa)}h,\ h\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$ 对任意 $h \in \mathcal{H}$ 成立。由 (1.1.8)， $\mathfrak{h}(\kappa)$与 $\mathfrak{q}_\eta$ 仅相差一个常数，其中 B_η是迹类且半正定的。反向命题也成立。

(1.1.9) 命题。 设 $\eta \in \mathscr{S}_2$，并假设 B_η 是迹类且半正定的。那么存在一个 $\kappa \in \mathscr{S}_2$，使得

$$\mathfrak{q}_\eta = \mathfrak{h}(\kappa) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}B_\eta.$$

证明。 根据平方根引理（引理（A.1.5））， 存在一个连续线性映射 $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$， 使得 $C^* = C$ 且 $C^2 = B_\eta$。 由于 B_η 是迹类，我们有

$$\|C\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ch_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle B_\eta h_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{tr}B_\eta, \tag{1.1.10}$$

其中 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。因此 $C \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$。由引理（1.1.6），存在一个 $\kappa \in \mathscr{S}_2$，使得 $C = B_\kappa$。于是由（1.1.10）可得

$$\|\kappa\|_2^2 = \|B_\kappa\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 = \|C\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 = \mathrm{tr}B_\eta.$$

由于 $c(\kappa) = B_\kappa^* B_\kappa = C^2 = B_\eta$，根据（1.1.8），我们得到所需的恒等式。 □

1.2. L´evy 和 Kac 的级数展开

在本节中，我们应用定理（1.1.1），重新探讨 L´evy（[22]）和 Kac（[20]）关于二次 Wiener 函数泛函的级数展开。

(1.2.1) 例。 设 $d = 2$ 和 $T = 2\pi$。L´evy 引入的随机面积 $\mathfrak{s}$ 定义为

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \langle J\theta(t), d\theta(t)\rangle, \quad \text{where } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 为

$$\eta(t,s) = \frac{1}{2}\{\mathbf{1}_{[0,t)}(s) - \mathbf{1}_{(t,2\pi]}(s)\}J \quad \text{for } (t,s) \in [0,2\pi]^2,$$

我们有

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{q}_\eta.$$

L´evy（[22]）得到了 $L^2(\mu)$ 中的级数展开：

$$\mathfrak{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big\{\xi_n(\eta_n' - \eta'\sqrt{2}) - \eta_n(\xi_n' - \xi'\sqrt{2})\big\}, \tag{1.2.2}$$

其中 $\{\xi_n, \xi_n', \xi', \eta_n, \eta_n', \eta' \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是服从正态分布 $N(0,1)$ 的一族独立同分布随机变量。他的推理如下。

(i) 关于一致收敛范数，将 $\{\theta(t) = (\theta^1(t)\ \theta^2(t))\}_{t\in[0,2\pi]}$ 中的坐标过程展开为

$$\theta^1(t) = \frac{\xi' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \Big\{ \xi_n \big(\cos(nt) - 1\big) + \xi'_n \sin(nt) \Big\},$$
$$\theta^2(t) = \frac{\eta' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \Big\{ \eta_n \big(\cos(nt) - 1\big) + \eta'_n \sin(nt) \Big\} \quad \text{for } t \in [0, 2\pi].$$

（ii）形式上对 $\theta^1(t)$和 $\theta^2(t)$求导，得到

$$d\theta^1(t) = \left(\frac{\xi'}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big\{ -\xi_n \sin(nt) + \xi'_n \cos(nt) \Big\} \right) dt,$$
$$d\theta^2(t) = \left(\frac{\eta' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big\{ -\eta_n \sin(nt) + \eta'_n \cos(nt) \Big\} \right) dt.$$

（iii）将这些代入 $\mathfrak{s}$ 的定义，并计算三角函数乘积在 $[0, 2\pi]$上的积分。

他说，随机微积分使形式上的求导有了依据。

应用定理（1.1.1），我们证明（1.2.2）。为此，设 e_1, e_2 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准正交基，并定义 $h_{h;i} \in \mathcal{H}$，其中 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 且 $i = 1,2$，定义如下：

$$h_{0;i}(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e_i, \quad h_{2n;i}(t) = \frac{\cos(nt) - 1}{n\sqrt{\pi}} e_i, \quad \text{and} \quad h_{2n-1;i}(t) = \frac{\sin(nt)}{n\sqrt{\pi}} e_i$$

对于 $t \in [0, 2\pi]$ 和 $n \in \mathbb{N}$。 $\{h_{n;i} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2\}$ 是 $\mathcal{H}$的标准正交基。注意，

$$(B_\eta h)'(t) = J \left\{ h(t) - \frac{1}{2} h(2\pi) \right\} \quad \text{for } t \in [0, 2\pi].$$

通过直接计算可知，对于 $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$以及 $i = 1,2$，所有 $\langle B_\eta h_{n;i}, h_{m;i} \rangle_{\mathcal{H}}$ 均为零，

$$\langle B_\eta h_{0;1}, h_{2n;2} \rangle_{\mathcal{H}} = -\langle B_\eta h_{2n;1}, h_{0;2} \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\sqrt{2}}{n},$$
$$\langle B_\eta h_{2n;1}, h_{2m-1;2} \rangle_{\mathcal{H}} = -\langle B_\eta h_{2n-1;1}, h_{2m;2} \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{n} \delta_{nm} \quad \text{for } n, m \in \mathbb{N},$$

以及其他 $\langle B_\eta h_{n;1},\ h_{m;2} \rangle_{\mathcal{H}}$s 也都为零。由 B_η 的自伴性，根据 (1.1.2)，我们得到 (1.2.2)，其中

$$\xi_n = \mathrm{D}^* h_{2n;1}, \quad \xi'_n = \mathrm{D}^* h_{2n-1;1}, \quad \xi' = \mathrm{D}^* h_{0;1},$$
$$\eta_n = \mathrm{D}^* h_{2n;2}, \quad \eta'_n = \mathrm{D}^* h_{2n-1;2}, \quad \eta' = \mathrm{D}^* h_{0;2} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}.$$

(1.2.3) 例。 设 $d = 1$ 和 $T = 1$。 定义 $\mathfrak{h} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathfrak{h} = \int_0^1 \theta(t)^2 dt.$$

若设

$$\kappa(t,s)=\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\quad \text{for } (t,s)\in[0,1]^2,$$

则 $\mathfrak{h}=2\mathfrak{h}(\kappa)$。由于 $\|\kappa\|_2^2=\frac{1}{2}$，根据命题（1.1.7），我们有

$$\mathfrak{h}=2\mathfrak{q}_{c(\kappa)}+\frac{1}{2}. \tag{1.2.4}$$

Kac（[20, 21]）在 $L^2(\mu)$ 中得到了 $\mathfrak{h}$ 的级数展开，使得

$$\mathfrak{h}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}H_n^2, \tag{1.2.5}$$

其中 $\{H_n\mid n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ 是一族服从正态分布 $N(0,1)$ 的独立同分布随机变量。他以下述方式得到了级数展开。

(i) 令

$$\varphi_n(t)=\sqrt{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)\quad \text{for } t\in[0,1] \text{ and } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

则 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $L^2([0,1];\mathbb{R})$ 的标准正交基。这里，对于 a，$b\in\mathbb{R}$，其中 $a<b$ 且 E 是实可分希尔伯特空间，$L^p([a,b];E)$ 表示由关于一维勒贝格测度定义在 $[a,b]$ 上的 E 值函数组成的 L^p 空间。

(ii) 令

$$L_n=\int_0^1\theta(t)\varphi_n(t)dt\quad \text{for } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

由普朗歇尔定理，成立

$$\mathfrak{h}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^2.$$

(iii) 定义 $C\colon\ L^2([0,1];\mathbb{R})\to L^2([0,1];\mathbb{R})$ 为

$$(Cf)(t)=\int_0^1(t\wedge s)f(s)ds\quad \text{for } f\in L^2([0,1];\mathbb{R}) \text{ and } t\in[0,1].$$

则成立

$$C\varphi_n=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\varphi_n\quad \text{for } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

(iv) 注意到

$$\int_{\mathcal{W}}L_nL_m d\mu=\int_0^1\varphi_n(t)(C\varphi_m)(t)dt=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\delta_{nm}\quad \text{for } n,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

因此 $\{L_n\mid n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ 是一族独立随机变量，每个 L_n服从正态分布 $N\big(0,\ \{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2\}^{-1}\big)$。若我们令

$$H_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi L_n\quad \text{for } n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

则（1.2.5）成立。

我们应用定理（1.1.1）来证明（1.2.5）。注意

$$c(\kappa)(t,s)=\int_0^1 \kappa(u,t)\kappa(u,s)du = 1-(t\vee s) \quad \text{for } (t,s)\in[0,1]^2.$$

因此成立

$$(B_{c(\kappa)}h)'(t)=\int_t^1 h(s)ds \quad \text{for } h\in\mathcal{H} \text{ and } t\in[0,1].$$

这表明 $B_{c(\kappa)}h=0$ 当且仅当 $h=0$。设 $\lambda\neq 0$ 为 $B_{c(\kappa)}$ 的一个特征值，且$h\in\mathcal{H},\neq 0$ 为相应的特征向量。方程 $B_{c(\kappa)}h=\lambda h$ 等价于常微分方程

$$\lambda h''=-h, \quad h(0)=0, \quad h'(1)=0.$$

由于 $B_{c(\kappa)}=B_\kappa^* B_\kappa$，我们有

$$\lambda\langle h,h\rangle_{\mathcal{H}}=\langle B_{c(\kappa)}h,h\rangle_{\mathcal{H}}=\|B_\kappa h\|_{\mathcal{H}}^2.$$

因此 $\lambda>0$。求解该常微分方程，我们看到

$$\lambda=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \quad \text{and} \quad h=c\varphi_n \quad \text{for some } n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ and } c\in\mathbb{R},\neq 0.$$

若我们令

$$h_n=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}\varphi_n \quad \text{for } n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

则 $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基，并且我们有

$$B_{c(\kappa)}=\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}h_n\otimes h_n.$$

由于

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

由（1.1.2），我们得到

$$\mathfrak{q}_{c(\kappa)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}(\mathrm{D}^*h_n)^2-\frac{1}{4}.$$

Plug将其代入 (1.2.4)，即可得到 (1.2.5)，其中 $H_n=\mathrm{D}^*h_n$ 当 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

第2章

从变换到二次型

本文证明，一阶变换可通过维纳空间上的变量替换公式导出指数可积二次型，且此类变换具有逆变换。作为应用，本文研究了线性变换，并将由此得到的变量替换公式与 Cameron 和 Martin 在20世纪40年代得到的公式进行了比较。

2.1. 一阶变换

维纳泛函 $F_\kappa \in \mathbb{D}^\infty(\mathcal{H})$ 和函数 $\eta(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ （ $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 的情形）已在引言中定义如下:

$$\langle F_\kappa, h\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \left\langle \int_0^T \kappa(t,s)d\theta(s), h'(t)\right\rangle dt \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \tag{2.1.1}$$

and

$$\eta(\kappa)(t,s) = -\left\{\kappa(t,s) + \kappa(s,t)^\dagger + \int_0^T \kappa(u,t)^\dagger \kappa(u,s)du\right\} \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2. \tag{2.1.2}$$

在那里，我们称 $\iota + F_\kappa$ 为一阶变换。这是因为 $\int_0^T \kappa(t,s)d\theta(s)$ 的每个分量都属于一阶维纳混沌。本节旨在说明，一阶变换会产生一个指数可积二次型。

Put

$$\Lambda(B) = \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \langle Bh, h\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for } B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2}).$$

如果将 $B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$ 展开为 $B = \sum a_n h_n \otimes h_n$ ，其中序列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ 由平方可和实数组成，且 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基，那么我们有:

$$\Lambda(B) = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，我们知道

$$\Lambda(B) \geq 0.$$

(2.1.3) 定理。 设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，并假设 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$。则有

$$|\det_2(I+B_\kappa)| \int_{\mathcal{W}} f(\iota+F_\kappa) e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}} d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f d\mu \quad \textit{for every } f \in C_b(\mathcal{W}), \tag{2.1.4}$$

其中 行列式$_2$ 表示正则化行列式（*[5]*），而 I 表示 $\mathcal{H}$上的恒等映射。

(2.1.5) 注。 (i) 有

$$B_{\eta(\kappa)} = -(B_\kappa + B_\kappa^* + B_\kappa^* B_\kappa). \tag{2.1.6}$$

因此，我们有

$$\inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \|(I+B_\kappa)h\|_{\mathcal{H}}^2 = \inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \{1 - \langle B_{\eta(\kappa)}h, h\rangle_{\mathcal{H}}\} = 1 - \Lambda(B_{\eta(\kappa)}).$$

若 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$，则由引理（A.1.1），$I+B_\kappa$ 有连续逆，这意味着 $\det_2(I+B_\kappa) \neq 0$（[5, 定理 XII.1.1]）。反之，若 $\det_2(I+B_\kappa) \neq 0$，则 $I+B_\kappa$有连续逆。由（$I+B_\kappa$）$^{-1}$ 的有界性所导致的不等式可得

$$\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|(I+B_\kappa)^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2 \|(I+B_\kappa)h\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{for } h \in \mathcal{H},$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示算子范数，我们可得

$$\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) \leq 1 - \|(I+B_\kappa)\|_{\mathrm{op}}^{-2} < 1.$$

因此，我们得到

$$\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1 \quad \text{if and only if} \quad \det_2(I+B_\kappa) \neq 0. \tag{2.1.7}$$

多亏了这一等价关系，$\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$ 当且仅当 $\|B_\kappa\|_{\mathrm{op}} < 1$。由 (2.1.6) 还可得，若对于 $(t,s) \in [0,T]^2$，有 $\kappa(t,s)^\dagger = -\kappa(s,t)$，也就是说，$B_\kappa = -B_\kappa^*$，那么 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) \leq 0 < 1$。(ii) 取 $b, c \in \mathbb{R}$，使得 $b^2 + c^2 > 0$，且 $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ 正交归一。定义 $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathscr{L}_2$ 为

$$\begin{aligned}
\kappa_1(t,s) &= b\{h_1'(s) \otimes h_1'(t) + h_2'(s) \otimes h_2'(t)\}, \\
\kappa_2(t,s) &= c\{h_1'(s) \otimes h_2'(t) - h_2'(s) \otimes h_1'(t)\} \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.
\end{aligned}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\|\kappa_1 - \kappa_2\|_2^2 = 2(b^2+c^2) > 0, \\
&\eta(\kappa_1)(t,s) = -(2b+b^2)\{h_1'(s) \otimes h_1'(t) + h_2'(s) \otimes h_2'(t)\}, \\
&\eta(\kappa_2)(t,s) = -c^2\{h_1'(s) \otimes h_1'(t) + h_2'(s) \otimes h_2'(t)\} \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.
\end{aligned}$$

假设 $1 + c^2 = (1+b)^2$。那么 $\eta(\kappa_1) = \eta(\kappa_2)$。此外，还有

$$\langle B_{\eta(\kappa_i)}h, h\rangle_{\mathcal{H}} = -c^2\{\langle h_1, h\rangle_{\mathcal{H}}^2 + \langle h_2, h\rangle_{\mathcal{H}}^2\} \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \text{ and } i = 1,2.$$

因此，对于 $i = 1,2$，$\Lambda(B_{\eta(\kappa_i)}) \leq 0 < 1$。所以，映射 $\mathscr{L}_2 \ni \kappa \mapsto \eta(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ 不是单射，即使满足定理中的假设也是如此。

（iii）根据下文的引理（2.1.13），$e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}} \in L^1(\mu)$ 当且仅当 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$。

为证明该定理，我们先准备一些引理。

(2.1.8) 引理。 设 E 为实可分希尔伯特空间，且 $\Phi \in \mathbb{D}^\infty(E)$。若 $\mathrm{D}\Phi = 0$，则 $\Phi = \int_{\mathcal{W}} \Phi d\mu$。

Proof. 由 [27, 命题5.2.9]， Φ 是常函数。因此 $\Phi = \int_{\mathcal{W}} \Phi d\mu$. □

(2.1.9) 引理。 设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$。则有

$$F_\kappa = \mathrm{D}^* B_\kappa.$$

此外，对 $\mathcal{H}$的任意标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ ，有

$$F_\kappa = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\eta h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} (\mathrm{D}^* h_n) h_m,$$

其中该级数在 $L^p(\mu; \mathcal{H})$ 中对每个 $p \in (1, \infty)$收敛。

证明。 由 (2.1.1) 可得

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{D}F_\kappa, h \otimes g \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \langle \mathrm{D}(\langle F_\kappa, g \rangle_{\mathcal{H}}), h \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^T \left\langle \int_0^T \kappa(t,s) h'(s) ds, g'(t) \right\rangle dt \\ &= \langle B_\kappa h, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle B_\kappa, h \otimes g \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \quad \text{for } h, g \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

由此我们看到

$$\mathrm{D}F_\kappa = B_\kappa. \tag{2.1.10}$$

对于 $h, g \in \mathcal{H}$ 和 $\Phi \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R})$，成立

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{W}} \langle \mathrm{D}(\mathrm{D}^* B_\kappa), h \otimes g \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \Phi d\mu = \int_{\mathcal{W}} \langle B_\kappa, \mathrm{D}(\mathrm{D}^*(\Phi h)) \otimes g \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} d\mu \\ &= \int_{\mathcal{W}} \langle B_\kappa(\mathrm{D}(\mathrm{D}^*(\Phi h))), g \rangle_{\mathcal{H}} d\mu = \int_{\mathcal{W}} \langle \Phi h, \mathrm{D}(\mathrm{D}^*(B_\kappa^* g)) \rangle_{\mathcal{H}} d\mu = \int_{\mathcal{W}} \langle h, B_\kappa^* g \rangle_{\mathcal{H}} \Phi d\mu \\ &= \int_{\mathcal{W}} \langle B_\kappa, h \otimes g \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \Phi d\mu, \end{aligned}$$

其中，为看出第四个等式，我们使用了恒等式 ([27, (5.1.9)])，即 $D(D^* h) = h$对 $h \in \mathcal{H}$成立。因此

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}^* B_\kappa) = B_\kappa. \tag{2.1.11}$$

由 (2.1.10) 和 (2.1.11)，$\mathrm{D}(F_\kappa - \mathrm{D}^* B_\kappa) = 0$。由引理（2.1.8），成立

$$F_\kappa - \mathrm{D}^* B_\kappa = \int_{\mathcal{W}} (F_\kappa - \mathrm{D}^* B_\kappa) d\mu.$$

由 (2.1.1) 可知

$$\int_{\mathcal{W}} F_\kappa d\mu = 0.$$

如果我们将 $h \in \mathcal{H}$ 视为 $\mathbb{D}^\infty(\mathcal{H})$ 中的常数维纳泛函，那么 $\mathrm{D}h = 0$。因此有

$$\left\langle \int_{\mathcal{W}} (\mathrm{D}^* B_\kappa) d\mu, h \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{W}} \langle \mathrm{D}^* B_\kappa, h \rangle_{\mathcal{H}} d\mu = \int_{\mathcal{W}} \langle B_\kappa, \mathrm{D}h \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} d\mu = 0 \quad \text{for } h \in \mathcal{H}.$$

因此我们看到

$$\int_{\mathcal{W}} (\mathrm{D}^* B_\kappa) d\mu = 0.$$

因此我们得到

$$F_\kappa - \mathrm{D}^* B_\kappa = 0,$$

即，$F_\kappa = \mathrm{D}^* B_\kappa$。

为证明第二个恒等式，令

$$B_\kappa^{(N)} = \sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\kappa h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} h_n \otimes h_m \quad \text{for } N \in \mathbb{N}.$$

于是，由 $N \to \infty$ 可得 $B_\kappa^{(N)} \to B_\kappa$ in $\mathcal{H}^{\otimes 2}$。根据 D^* 的连续性，对于每个 $p \in (1, \infty)$，都有 $\mathrm{D}^* B_\kappa^{(N)} \to \mathrm{D}^* B_\kappa$ in $L^p(\mu; \mathcal{H})$。由于 $(\mathrm{D}^*)(h_n \otimes h_m) = (\mathrm{D}^* h_n) h_m$ ([27, (5.7.3)])，我们有

$$\mathrm{D}^* B_\kappa^{(N)} = \sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\kappa h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} (\mathrm{D}^* h_n) h_m.$$

因此我们得到第二个恒等式，并且该级数在任意 $L^p(\mu; \mathcal{H})$ 中收敛。 □

(2.1.12) 注。 由 (2.1.10)，对任意 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，$\mathrm{D}^2 F_\kappa = 0$。反之，对于满足 $\mathrm{D}^2 F = 0$ 的 $F \in \mathbb{D}^\infty(\mathcal{H})$，存在 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 和 $h \in \mathcal{H}$，使得 $F = F_\kappa + h$。事实上，由引理（1.1.6）和（2.1.8），这样的 F 有一个满足 $\mathrm{D}F = B_\kappa$ 的 $\kappa \in \mathscr{L}_2$。由 (2.1.10)，$\mathrm{D}(F - F_\kappa) = B_\kappa - B_\kappa = 0$。由于 $\int_{\mathcal{W}} F_\kappa d\mu = 0$，再次由引理（2.1.8），令 $h = \int_{\mathcal{W}} F d\mu$，可得 $F - F_\kappa = h$。

(2.1.13) 引理。 对于 $\eta \in \mathscr{S}_2$，下列结论成立。

(i) 如果 $\Lambda(B_\eta) < 1$，那么有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta} d\mu \le \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\Lambda(B_\eta)}{3(1 - \Lambda(B_\eta))^3} \right\} \|\eta\|_2^2 \right).$$

（ii）$e^{\mathfrak{q}_\eta} \in L^1(\mu)$ 当且仅当 $\Lambda(B_\eta) < 1$。

在上述不等式中，请记住 $\Lambda(B_\eta) \ge 0$。

证明。 (i) 由于 $B_\eta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$（引理（1.1.6））， 存在一个 $\mathcal{H}$ 的标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$，使得

$$B_\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \otimes h_n, \tag{2.1.14}$$

$_\infty$其中 $a_n \in \mathbb{N}$ 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\sum a_n^2 < \infty_\circ$ 根据定理（1.1.1），存在一个递增的 $_{n=1}$ 序列 $\{N_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{N}$，使得

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_m} a_n\{(\mathrm{D}^* h_n)^2 - 1\} \to \mathfrak{q}_\eta \text{ as } m \to \infty \quad \mu\text{-a.s.}$$

由于 $\sup a_n = \Lambda(B_\eta) < 1$ 且 $\{\mathrm{D}^* h_n\}_{n=1}^\infty$ 是服从$_{n\in\mathbb{N}}$正态分布 $N(0,\ 1)$的独立同分布序列，根据法图引理，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta} d\mu &\le \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathcal{W}} \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_m} a_n\{(\mathrm{D}^* h_n)^2 - 1\}\right) d\mu \\ &= \liminf_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{N_m} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}a_n\{x^2-1\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right) \\ &= \left\{\limsup_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{N_m} (1-a_n)e^{a_n}\right\}^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

$\log(1-a)$ 在 $a = 0$ 处的泰勒展开意味着

$$\log(1-a) + a + \frac{a^2}{2} = -\int_0^a \int_0^b \int_0^c \frac{2}{(1-u)^3} du dc db \ge -\frac{0 \vee a}{3\{1 - (0 \vee a)\}^3} a^2$$

当 $a < 1$ 时。由于 $a_n \le \Lambda(B_\eta) < 1$ 对于 $n \in \mathbb{N}$，我们得到

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N_m} (1-a_n)e^{a_n} &= \exp\left(\sum_{n=1}^{N_m} \left\{\log(1-a_n) + a_n + \frac{a_n^2}{2}\right\}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_m} a_n^2\right) \\ &\ge \exp\left(-\frac{\Lambda(B_\eta)}{3(1-\Lambda(B_\eta))^3} \sum_{n=1}^{N_m} a_n^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_m} a_n^2\right).\end{aligned}$$

因此我们有

$$\limsup_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{N_m} (1-a_n)e^{a_n} \ge \exp\left(-\left\{\frac{1}{2} + \frac{\Lambda(B_\eta)}{3(1-\Lambda(B_\eta))^3}\right\} \|B_\eta\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2\right).$$

由于 $\|B_\eta\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \|\eta\|_2$，将这个下界估计代入 (2.1.15)，即可得到所需的上界估计。

（ii）由（i）可知，只需证明 $e^{\mathfrak{q}_\eta} \notin L^1(\mu)$ 当 $\Lambda(B_\eta) \ge 1_\circ$ 我们继续采用上述关于 B_η 的推导，并假设 $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \Lambda(B_\eta) \ge 1_\circ$ 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，存在一个$n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $a_{n_0} \ge 1_\circ$ 定义 $\eta' \in \mathscr{S}_2$为 $B_{\eta'} = \sum_{n\ne n_0} a_n h_n \otimes h_{n\circ}$ 由定理（1.1.1），$_{n\ne n_0}$我们得到

$$\mathfrak{q}_{\eta'} = \frac{1}{2}\sum_{n\ne n_0} a_n\{(\mathrm{D}^* h_n)^2 - 1\} \quad \text{and} \quad \mathfrak{q}_\eta = \frac{1}{2} a_{n_0}\{(\mathrm{D}^* h_{n_0})^2 - 1\} + \mathfrak{q}_{\eta'}.$$

第一个恒等式表明 $\mathbf{D}^* h_{n_0}$ 和 $\mathfrak{q}_{\eta'}$ 相互独立。由于 $\mathbf{D}^* h_{n_0}$ 服从正态分布 $N(0,1)$，我们有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta} d\mu = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2} a_{n_0} \{x^2 - 1\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_{\eta'}} d\mu = \infty.$$

因此 $e^{\mathfrak{q}_\eta} \notin L^1(\mu)$。 □

(2.1.16) 注。 设 $\eta \in \mathscr{S}_2$，并假设 $\Lambda(B_\eta) < 1$。取一个 $p \in (1, \infty)$，使得$p\Lambda(B_\eta) < 1$。由于 $\Lambda(B_{p\eta}) = p\Lambda(B_\eta) < 1$，由上述引理可得 $e^{p\mathfrak{q}_\eta} \in L^1(\mu)$。因此，上述引理的第二个断言可加强为

$$\Lambda(B_\eta) < 1 \quad \text{if and only if} \quad e^{\mathfrak{q}_\eta} \in L^{1+}(\mu) \equiv \bigcup_{p \in (1,\infty)} L^p(\mu).$$

我们将 $\mathcal{H}$ 与其对偶空间 $\mathcal{H}^*$等同，并利用连续稠密嵌入

$$\mathcal{W}^* \subset \mathcal{H}^* = \mathcal{H} \subset \mathcal{W}.$$

定理 (2.1.3) 的证明。 取 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基 $\{\ell_n\}_{n=1}^\infty$，使得对 $n \in \mathbb{N}$有 $\ell_n \in \mathcal{W}^*$。对于 $N \in \mathbb{N}$，记 $\pi^{(N)}$ 为 $\mathcal{H}$ 在由ℓ_1、……、ℓ_N张成的子空间上的正交投影。定义 $\Pi^{(N)}$，$\kappa^{(N)} \in \mathscr{L}_2$ 为

$$\Pi^{(N)}(t,s) = \sum_{n=1}^{N} \ell_n'(s) \otimes \ell_n'(t)$$

and

$$\kappa^{(N)}(t,s) = \int_0^T \int_0^T \Pi^{(N)}(t,u) \kappa(u,v) \Pi^{(N)}(v,s) du dv$$

对于 $(t,s) \in [0,T]^2$。于是有

$$B_{\kappa^{(N)}} = \pi^{(N)} B_\kappa \pi^{(N)}.$$

由此以及（2.1.6），可知

$$\|B_{\kappa^{(N)}} - B_\kappa\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \to 0 \quad \text{and} \quad \|B_{\eta(\kappa^{(N)})} - B_{\eta(\kappa)}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

根据定理（1.1.1）、引理（2.1.9）以及 $\mathbf{D}^*$ 的连续性，可得

$$\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})} \to \mathfrak{q}_{\eta(\kappa)} \text{ in } L^p(\mu) \quad \text{and} \quad F_{\kappa^{(N)}} \to F_\kappa \text{ in } L^p(\mu; \mathcal{H}) \quad \text{for any } p \in (1, \infty).$$

此外，由于

$$|\Lambda(B) - \Lambda(B')| \le \|B - B'\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \quad \text{for } B, B' \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2}),$$

存在一个 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\sup_{N \ge N_0} \Lambda(B_{\eta(\kappa^{(N)})}) < 1. \tag{2.1.17}$$

取一个 $p \in (1, \infty)$，使得

$$\alpha_p \equiv \sup_{N \geq N_0} \Lambda(B_{p\eta(\kappa^{(N)})}) = p \sup_{N \geq N_0} \Lambda(B_{\eta(\kappa^{(N)})}) < 1.$$

由引理（2.1.13），我们知道

$$\begin{aligned} &\sup_{N \geq N_0} \int_{\mathcal{W}} \exp(p\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})}) d\mu = \sup_{N \geq N_0} \int_{\mathcal{W}} \exp(\mathfrak{q}_{p\eta(\kappa^{(N)})}) d\mu \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{0 \vee \alpha_p}{3\{1 - (0 \vee \alpha_p)\}^3} \right\} p^2 \sup_{N \geq N_0} \|\eta(\kappa^{(N)})\|_2^2 \right) < \infty. \end{aligned}$$

因此，族 $\{\exp(\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})}) \mid N \geq N_0\}$ 是一致可积的。因此，鉴于映射 $\mathcal{H}^{\otimes 2} \ni A \mapsto \det_2(I + A)$ ([5, 定理 XI.2.2]) 的连续性，只要证明恒等式 (2.1.4) 即可

$$|\det_2(I + B_{\kappa^{(N)}})| \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\kappa^{(N)}}) \exp(\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})}) d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa^{(N)}\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f d\mu \tag{2.1.18}$$

对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 和 $N \geq N_0$ 都成立。

令 $N \geq N_0$，并设

$$A_{n,m}^{(N)} = \langle B_\kappa \ell_n, \ell_m \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for } 1 \leq n, m \leq N \quad \text{and} \quad A^{(N)} = \left(A_{n,m}^{(N)}\right)_{1 \leq n,m \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

由于 $B_{\kappa^{(N)}} = \pi^{(N)} B_\kappa \pi^{(N)}$，有

$$B_{\kappa^{(N)}} = \sum_{n,m=1}^{N} A_{nm}^{(N)} \ell_n \otimes \ell_m.$$

由 (2.1.6)，我们有

$$A^{(N)} + A^{(N)\dagger} + A^{(N)} A^{(N)\dagger} = \left(-\langle B_{\eta(\kappa^{(N)})} \ell_n, \ell_m \rangle_{\mathcal{H}} \right)_{1 \leq n,m \leq N}. \tag{2.1.19}$$

若令 $\varepsilon_N = 1 - \Lambda(B_{\kappa^{(N)}})$，则由 (2.1.17) 可得 $\varepsilon_N > 0$ 和

$$|(I_N + A^{(N)\dagger})x|^2 \geq \varepsilon_N |x|^2 \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}^N,$$

其中 I_N 是 N 维恒等矩阵。因此，线性映射 $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto (I_N + A^{(N)\dagger})x \in \mathbb{R}^N$ 是双射。对该映射应用变量替换公式，可得

$$\begin{aligned} &|\det(I_N + A^{(N)\dagger})| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x + A^{(N)\dagger} x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} e^{-\frac{1}{2}|x + A^{(N)\dagger} x|^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx \quad \text{for every } \varphi \in C_b(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

由 (2.1.19) 和 (2.1.6)，我们看到

$$|x + A^{(N)\dagger} x|^2 - |x|^2 = -\sum_{n,m=1}^{N} \langle B_{\eta(\kappa^{(N)})} \ell_n, \ell_m \rangle_{\mathcal{H}} \{x^n x^m - \delta_{nm}\}$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{N}\langle B_{\kappa^{(N)}}\ell_n, \ell_n\rangle_{\mathcal{H}} + \|B_{\kappa^{(N)}}\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \quad \text{for } x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N.$$

回顾到行列式$_2(I_N + M)$ $=$行列式$(I_N + M)e^{-\mathrm{tr}M}$对于 $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 成立，我们得到

$$\begin{aligned}(2.1.21)\qquad &\det(I_N + A^{(N)\dagger})e^{-\frac{1}{2}|x+A^{(N)\dagger}x|^2}\\ &= \det{}_2(I_N + A^{(N)})\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N}\langle B_{\eta(\kappa^{(N)})}\ell_n, \ell_m\rangle_{\mathcal{H}}\{x^n x^m - \delta_{nm}\}\right)\\ &\quad\times e^{-\frac{1}{2}|x|^2}e^{-\frac{1}{2}\|\kappa^{(N)}\|_2^2} \quad \text{for every } x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

由于 $B_{\kappa^{(N)}} = \pi^{(N)}B_\kappa\pi^{(N)}$ 和 $B_{\eta(\kappa^{(N)})} = \pi^{(N)}B_{\eta(\kappa^{(N)})}\pi^{(N)}$，由定理（1.1.1）和引理（2.1.9），可得

$$F_{\kappa^{(N)}} = \sum_{n,m=1}^{N}\langle B_\kappa\ell_n, \ell_m\rangle_{\mathcal{H}}(\mathrm{D}^*\ell_n)\ell_m,$$

$$\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})} = \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N}\langle B_{\eta(\kappa^{(N)})}\ell_n, \ell_m\rangle_{\mathcal{H}}\{(\mathrm{D}^*\ell_n)(\mathrm{D}^*\ell_m) - \delta_{nm}\}.$$

令 $\boldsymbol{\ell}^{(N)} = (\ell_1, \dots, \ell_N)$: $\mathcal{W} \to \mathbb{R}^N$ 且 $\mathrm{D}^*\boldsymbol{\ell}^{(N)} = (\mathrm{D}^*\ell_1, \dots, \mathrm{D}^*\ell_N)$。根据上述 $F_{\kappa^{(N)}}$ 的表达式，我们知道

$$\ell_m(F_{\kappa^{(N)}}) = \langle \ell_m, F_{\kappa^{(N)}}\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{N}\langle B_\kappa\ell_n, \ell_m\rangle_{\mathcal{H}}(\mathrm{D}^*\ell_n) \quad \text{for } 1 \le m \le N.$$

因此可得

$$\boldsymbol{\ell}^{(N)}(F_{\kappa^{(N)}}) = A^{(N)\dagger}\mathrm{D}^*\boldsymbol{\ell}^{(N)}.$$

由于 $\mathrm{D}^*\boldsymbol{\ell}^{(N)}$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上服从正态分布 $N(0, I_N)$，根据 (2.1.21)、上述 $\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})}$ 的表达式，以及 $\mathrm{D}^*\ell_n = \ell_n$ 对于 $1 \le n \le N$ ([27, (5.1.5)]) 的事实，恒等式 (2.1.20) 可改写为

$$|\det{}_2(I + B_{\kappa^{(N)}})|\int_{\mathcal{W}}[\varphi\circ\boldsymbol{\ell}^{(N)}](\iota + F_{\kappa^{(N)}})\exp(\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})})d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa^{(N)}\|_2^2}\int_{\mathcal{W}}[\varphi\circ\boldsymbol{\ell}^{(N)}]d\mu.$$

因此，(2.1.18) 对 $f = \varphi\circ\boldsymbol{\ell}^{(N)}$ 成立。由于 $F_{\kappa^{(N)}}$ 和 $\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})}$ 都仅依赖于 $\mathrm{D}^*\boldsymbol{\ell}^{(N)}$，根据维纳测度的分解性质，这意味着 (2.1.18) 对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 都成立。

□

2.2. 一阶逆变换

本节旨在证明，每个满足 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$ 的 $\iota + F_\kappa$上从 $\kappa \in \mathscr{L}_2$出发的一阶变换都有一个逆变换。

如果 $\kappa \in \mathcal{L}_2$ 且 $\det_2(I + B_\kappa) \neq 0$，那么 $I + B_\kappa$ 存在连续逆（[5, 定理 XII.1.1]）。由恒等式（$I + B_\kappa$）$^{-1} - I = -$（$I + B_\kappa$）$^{-1}B_\kappa$，可知

$(I + B_\kappa)^{-1} - I \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ ([5, 定理 IV.7.1])。应用引理（1.1.6），我们得到$(I + B_\kappa)^{-1} - I$的核 $\widehat{\kappa} \in \mathcal{L}_2$；

$$B_{\widehat{\kappa}} = (I + B_\kappa)^{-1} - I.$$

对于 $\kappa \in \mathcal{L}_2$，当 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$时，由 (2.1.7) 可知，$\det_2(I + B_\kappa) \neq 0$，因此 $\widehat{\kappa}$ 是良定义的。由于

$$\int_{\mathcal{W}} \|F_\kappa - F_{\kappa'}\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu = \|\kappa - \kappa'\|_2^2,$$

$F_\kappa = F_{\kappa'}$ 对于 κ，$\kappa' \in \mathcal{L}_2$，当 $\kappa \ (\mathscr{L}_2) = \kappa'$ 时，由引理（1.1.6）所述的单射性可知，$\widehat{\kappa}$ 由 κ 唯一确定，因此 $F_{\widehat{\kappa}}$ 在零测集意义下也唯一。变换 $\iota + F_{\widehat{\kappa}}$ 是 $\iota + F_\kappa$ 的逆变换，如下所示。

（2.2.1）定理。设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，并假设 $\Lambda\left(B_{\eta(\kappa)}\right) < 1$。则

$$(\iota + F_\kappa) \circ (\iota + F_{\widehat{\kappa}}) = (\iota + F_{\widehat{\kappa}}) \circ (\iota + F_\kappa) = \iota \tag{2.2.2}$$

并且有

$$|\det_2(I + B_\kappa)| \int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)} + \mathrm{D}^* h} d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{\kappa}}) e^{\mathrm{D}^*[(I + B_\kappa^*)^{-1} h]} d\mu \tag{2.2.3}$$

对于每个 $f \in C_b\left(\mathcal{W}\right)$ 以及 $h \in \mathcal{H}$。特别地，

$$|\det_2(I + B_\kappa)| \int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)} + \mathrm{D}^* h} d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2} e^{\frac{1}{2}\|(I + B_\kappa^*)^{-1} h\|_{\mathcal{H}}^2} \quad \textit{for every } h \in \mathcal{H}.$$

（2.2.4）注。（i）严格来说，（2.2.2）表示

$$w + F_{\widehat{\kappa}}(w) + F_\kappa(w + F_{\widehat{\kappa}}(w)) = w + F_\kappa(w) + F_{\widehat{\kappa}}(w + F_\kappa(w)) = w$$

对几乎所有的 $w \in \mathcal{W}$（相对于 μ）成立。由于 F_κ 和 $F_{\widehat{\kappa}}$ 都只在零测集意义下确定，要确定项 $F_\kappa(w + F_{\widehat{\kappa}}(w))$ 和 $F_{\widehat{\kappa}}(w + F_\kappa(w))$，我们需要为 F_κ和$F_{\widehat{\kappa}}$选取良好的修改。下面的引理 (2.2.5) 将给出这样的修改。

(ii) 如果 $\det_2(I + B_\kappa) \neq 0$，那么 $I + B_\kappa^*$ 也如此。因此，$I + B_\kappa^*$ 有一个连续逆。

为证明这一点，我们先准备几个引理。若可测集 $X \subset \mathcal{W}$ 满足：对每个 $h \in \mathcal{H}$，$X + h \equiv \{w + h \mid w \in X\}$ 与 X 重合，则称其为 $\mathcal{H}$-不变集。容易看出，当且仅当对每个 $h \in \mathcal{H}$ 都有 $X + h \subset X$ 时，X 是 $\mathcal{H}$-不变集。

(2.2.5) 引理。设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$。那么存在一个 $\mathcal{H}$-不变集 X_κ，使得 $\mu(X_\kappa) = 1$并且

$$F_\kappa(w + h) = F_\kappa(w) + B_\kappa h \quad \textit{for every } w \in X_\kappa \textit{ and } h \in \mathcal{H}. \tag{2.2.6}$$

这个引理断言，既存在 $\mathcal{H}$-不变集，也存在 F_κ的良好修改。

证明。设 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。存在 $\mathcal{H}$-不变集 $X^{(n)}$，对于 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$\mu(X^{(n)}) = 1 \quad \text{and} \quad (D^* h_n)(w + h) = (D^* h_n)(w) + \langle h_n, h \rangle_{\mathcal{H}}$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$、 $w \in X^{(n)}$和 $h \in \mathcal{H}$ （[27, 引理 5.7。7]）。令

$$X_\kappa = \left\{ w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{(n)} \;\middle|\; \lim_{N_1,N_2\to\infty} \left\| \sum_{N_1<n\vee m\le N_2} \langle B_\kappa h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \big((\mathrm{D}^* h_n)(w)\big) h_m \right\|_{\mathcal{H}} = 0 \right\}.$$

对于 $N \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \mathcal{H}$，我们知道

$$\sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\kappa h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \langle h, h_n\rangle_{\mathcal{H}} h_m = (\pi_N B_\kappa \pi_N)h,$$

其中， π_N是 $\mathcal{H}$在由 h_1、……、h_N张成的子空间上的正交投影，因此该和在 $\mathcal{H}$ 中收敛到 $B_\kappa h$，当 $N \to \infty$时成立。因此， X_κ 是 $\mathcal{H}$-不变的。由引理（2.1.9）， $\mu(X_\kappa) = 1$。根据同一引理，若将 F_κ 修改为

$$F_\kappa(w) = \begin{cases} \lim_{N\to\infty} \sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\kappa h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \big((\mathrm{D}^* h_n)(w)\big) h_m & \text{for } w \in X_\kappa, \\ 0 & \text{for } w \notin X_\kappa, \end{cases}$$

则其满足（2.2.6）。 □

（2.2.7）引理。设 $A \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ 和 $g \in \mathcal{H}$。则有

$$\langle \mathrm{D}^* A, g\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{D}^*(A^* g).$$

证明。对于任意 $\Phi \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}} \langle \mathrm{D}^* A, g\rangle_{\mathcal{H}} \Phi d\mu &= \int_{\mathcal{W}} \langle A, \mathrm{D}\Phi \otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} d\mu = \int_{\mathcal{W}} \langle A(\mathrm{D}\Phi), g\rangle_{\mathcal{H}} d\mu \\ &= \int_{\mathcal{W}} \langle \mathrm{D}\Phi, A^* g\rangle_{\mathcal{H}} d\mu = \int_{\mathcal{W}} (\mathrm{D}^*(A^* g))\Phi d\mu. \end{aligned}$$

这便得到了所需的恒等式。 □

(2.2.8) 引理。 设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 且假设 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$。对每个 $h \in \mathcal{H}$，均有

$$(\mathrm{D}^* h)(\iota + F_{\widehat{\kappa}}) = \mathrm{D}^*[(I + B_\kappa^*)^{-1} h].$$

证明。 设 $h \in \mathcal{H}$ 和 X 是相对于 $\mathrm{D}^* h$ ([27, 引理 5.7.7]) 的 $\mathcal{H}$-不变集，即 $\mu(X) = 1$ 且

$$(\mathrm{D}^* h)(w + g) = (\mathrm{D}^* h)(w) + \langle h, g\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for every } w \in X \text{ and } g \in \mathcal{H}.$$

根据此恒等式、引理 (2.1.9) 和 (2.2.7)，以及以下等式

$$(I + B_\kappa^*)(I + B_{\widehat{\kappa}}^*) = \{(I + B_{\widehat{\kappa}})(I + B_\kappa)\}^* = I,$$

我们有

$$\begin{aligned} (\mathrm{D}^* h)(\iota + F_{\widehat{\kappa}}) &= \mathrm{D}^* h + \langle h, F_{\widehat{\kappa}}\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{D}^* h + \langle h, \mathrm{D}^* B_{\widehat{\kappa}}\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{D}^*[(I + B_{\widehat{\kappa}}^*)h] \\ &= \mathrm{D}^*[(I + B_\kappa^*)^{-1} h]. \end{aligned}$$

□

定理（*2.2.1*）的证明。由引理 (2.2.5)，对于 κ和 $\widehat{\kappa}$，我们有

$$\big((\iota+F_\kappa)\circ(\iota+F_{\widehat{\kappa}})\big)(w)=w+F_\kappa(w)+F_{\widehat{\kappa}}(w)+B_\kappa F_{\widehat{\kappa}}(w)$$

and

$$\big((\iota+F_{\widehat{\kappa}})\circ(\iota+F_\kappa)\big)(w)=w+F_\kappa(w)+F_{\widehat{\kappa}}(w)+B_{\widehat{\kappa}}F_\kappa(w)$$

对任意 $w\in X_\kappa\cap X_{\widehat{\kappa}}$。由引理 (2.1.9) 和 (2.2.7) 以及恒等式

$$(I+B_\kappa)(I+B_{\widehat{\kappa}})=I=(I+B_{\widehat{\kappa}})(I+B_\kappa),$$

我们可知

$$\begin{aligned}\langle F_\kappa+F_{\widehat{\kappa}}+B_\kappa F_{\widehat{\kappa}},g\rangle_{\mathcal{H}}&=\langle \mathrm{D}^*B_\kappa,g\rangle_{\mathcal{H}}+\langle \mathrm{D}^*B_{\widehat{\kappa}},g\rangle_{\mathcal{H}}+\langle \mathrm{D}^*B_{\widehat{\kappa}},B_\kappa^*g\rangle_{\mathcal{H}}\\&=\mathrm{D}^*\Big[B_\kappa^*g+B_{\widehat{\kappa}}^*g+B_{\widehat{\kappa}}^*(B_\kappa^*g)\Big]\\&=\mathrm{D}^*\big[\big(\{(I+B_\kappa)(I+B_{\widehat{\kappa}})\}^*-I\big)g\big]\\&=0\end{aligned}$$

and

$$\langle F_\kappa+F_{\widehat{\kappa}}+B_{\widehat{\kappa}}F_\kappa,g\rangle_{\mathcal{H}}=\mathrm{D}^*\big[\big(\{(I+B_{\widehat{\kappa}})(I+B_\kappa)\}^*-I\big)g\big]=0$$

对任意 $g\in\mathcal{H}$。因此 (2.2.2) 成立。

为证明 (2.2.3)，注意到 (2.1.4) 对任意有界可测$\phi:\mathcal{W}\to\mathbb{R}$仍然成立，即

$$|\det{}_2(I+B_\kappa)|\int_{\mathcal{W}}\phi(\iota+F_\kappa)e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}}d\mu=e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2}\int_{\mathcal{W}}\phi d\mu.$$

将 $\phi_N=[(N\wedge e^{\mathrm{D}^*h})f](\iota+F_{\widehat{\kappa}})$ 替换为 $N\in\mathbb{N}$，其中 ϕ，并应用 (2.2.2) 和引理 (2.2.8)，可得

$$|\det{}_2(I+B_\kappa)|\int_{\mathcal{W}}(N\wedge e^{\mathrm{D}^*h})fe^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}}d\mu=e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2}\int_{\mathcal{W}}f(\iota+F_{\widehat{\kappa}})(N\wedge e^{\mathrm{D}^*[(I+B_\kappa^*)^{-1}h]})d\mu.$$

回想一下，对任意 $g\in\mathcal{H}$，有 $e^{\mathrm{D}^*g}\in\bigcap L^p(\mu)$。因此 $e^{\mathrm{D}^*[(I+B_\kappa^*)^{-1}h]}\in L^1(\mu)$。此外，结合注 (2.1.16) 中的 $p\in(1,\infty)$，我们知道 $e^{\mathrm{D}^*h}e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}}\in L^1(\mu)$。由控制收敛定理，在上述恒等式中令 $N\to\infty$，即可得到 (2.2.3)。

由于当 $g\in\mathcal{H}$ 时，D^*g 服从均值为 0、方差为 $\|g\|_{\mathcal{H}}^2$ 的正态分布，因此由 (2.2.3) 可得最后一个断言。 □

从 $\widehat{\kappa}$ 的角度来看恒等式 (2.2.3)，并交换 κ 和 $\widehat{\kappa}$，我们得到如下结果。

(2.2.9) 推论。令 $\kappa\in\mathcal{L}_2$ 并假设 行列式$_2(I+B_\kappa)\neq0$。那么 $\Lambda(B_{\eta(\widehat{\kappa})})<1$，且 $\iota+F_\kappa$ 在 μ 下的分布 $\mu\circ(\iota+F_\kappa)^{-1}$ 相对于 μ 的拉东-尼科迪姆导数具有如下形式：$|$行列式$_2(I+B_{\widehat{\kappa}})|e^{-\frac{1}{2}\|\widehat{\kappa}\|_2^2}e^{\mathfrak{q}_{\eta(\widehat{\kappa})}}$，也就是说，

$$\frac{d(\mu\circ(\iota+F_\kappa)^{-1})}{d\mu}=|\det{}_2(I+B_{\widehat{\kappa}})|e^{-\frac{1}{2}\|\widehat{\kappa}\|_2^2}e^{\mathfrak{q}_{\eta(\widehat{\kappa})}}.$$

证明。令 $\kappa' = \widehat{\kappa}$。由于 $I+B_{\kappa'} = (I+B_\kappa)^{-1}$，行列式$_2(I+B_{\kappa'}) \neq 0$。根据 (2.1.7)，$\Lambda(B_{\eta(\kappa')}) < 1$。$\widehat{\ }$将定理（2.2.1）应用于 κ'，并注意到 $\kappa' = \kappa$，我们得到

$$|\det{}_2(I + B_{\widehat{\kappa}})|e^{-\frac{1}{2}\|\widehat{\kappa}\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_{\eta(\widehat{\kappa})}} d\mu = \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_\kappa) d\mu \quad \text{for every } f \in C_b(\mathcal{W}).$$

由此得到所需的拉东-尼科迪姆导数表达式。 □

2.3. 线性变换

本节将定理 (2.1.3) 应用于 Cameron 和 Martin ([2]) 最初研究的线性变换。为此，定义 $\mathbb{F}_\phi : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$，其中 $\phi \in \mathscr{L}_2$，使得

$$\langle \mathbb{F}_\phi, h \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \left\langle \int_0^T \phi(t,s)\theta(s)ds, h'(t) \right\rangle dt \quad \text{for } h \in \mathcal{H}.$$

注意到

$$(\mathbb{F}_\phi(w))(t) = \int_0^t \left(\int_0^T \phi(u,s)w(s)ds \right) du \quad \text{for } w \in \mathcal{W} \text{ and } t \in [0,T].$$

因此，$\iota + \mathbb{F}_\phi : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ 是一个连续线性变换。令 $\kappa_\phi \in \mathscr{L}_2$，使得

$$\kappa_\phi(t,s) = \int_s^T \phi(t,u)du \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

应用伊藤公式，可知

$$\int_0^T \kappa_\phi(t,s)d\theta(s) = \int_0^T \phi(t,s)\theta(s)ds \quad \text{for } t \in [0,T]. \tag{2.3.1}$$

因此 $\mathbb{F}_\phi = F_{\kappa_\phi}$。本节旨在为变换 $\iota + \mathbb{F}_\phi$ 建立变量替换公式。下面的注（2.3.13）将比较我们的结果与 Cameron 和 Martin 的结果。

(2.3.2) 定理。 设 $\phi \in \mathscr{L}_2$，并假设 $\Lambda(B_{\eta(\kappa_\phi)}) < 1$。则 B_{κ_ϕ} 是迹类，并且有

$$|\det(I + B_{\kappa_\phi})| \int_{\mathcal{W}} f(\iota + \mathbb{F}_\phi) e^{\Psi_\phi} d\mu = \int_{\mathcal{W}} f d\mu \quad \textit{for every } f \in C_b(\mathcal{W}), \tag{2.3.3}$$

其中

$$\Psi_\phi = -\int_0^T \left\langle \int_0^T \phi(t,s)^\dagger d\theta(t), \theta(s) \right\rangle ds - \frac{1}{2}\int_0^T \left| \int_0^T \phi(t,s)\theta(s)ds \right|^2 dt.$$

为证明此结论，我们先准备几个引理。

（2.3.4）引理。对于每个 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，都有

$$\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)} = -\mathrm{D}^* F_\kappa - \frac{1}{2}\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2.$$

证明。令 $n \in \mathbb{N}$ 和 h_1、……、$h_n \in \mathcal{H}$。任取一个无穷次可微函数 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，其各阶导数均有界。设 $\mathrm{D}^*\boldsymbol{h} = (\mathrm{D}^*h_1$、……、$\mathrm{D}^*h_n)$。由于对于 $1 \le i \le n$ 有 $\mathrm{D}\mathrm{D}^*h_i = h_i$（[27, （5.1.9）]），故 $\mathrm{D}^*\boldsymbol{h} \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$。由引理（2.1.9）、D 的链式法则（[27, 推论 5.3.2]）以及海森矩阵 $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{1\le i}$ 的对称性，$j \le n$，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{W}} (\mathrm{D}^*F_\kappa)\varphi(\mathrm{D}^*\boldsymbol{h})d\mu = \int_{\mathcal{W}} \langle B_\kappa, \mathrm{D}^2\big(\varphi(\mathrm{D}^*\boldsymbol{h})\big)\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} d\mu \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathcal{W}} \langle B_\kappa, h_i \otimes h_j\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}(\mathrm{D}^*\boldsymbol{h})d\mu \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathcal{W}} \langle (B_\kappa + B_\kappa^*), h_i \otimes h_j\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}(\mathrm{D}^*\boldsymbol{h})d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{W}} \big((\mathrm{D}^*)^2(B_\kappa + B_\kappa^*)\big)\varphi(\mathrm{D}^*\boldsymbol{h})d\mu.
\end{aligned}$$

由此我们得到

$$\mathrm{D}^*F_\kappa = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^*)^2(B_\kappa + B_\kappa^*). \tag{2.3.5}$$

由于 $\mathrm{D}F_\kappa = B_\kappa$（见 (2.1.10)），可知

$$\left\langle \mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2\right), g\right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle F_\kappa, B_\kappa g\rangle_{\mathcal{H}}$$

and

$$\left\langle \mathrm{D}^2\left(\frac{1}{2}\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2\right), h\otimes g\right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \langle B_\kappa h, B_\kappa g\rangle_{\mathcal{H}} = \langle B_\kappa^* B_\kappa, h\otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}$$

对 h，$g \in \mathcal{H}$。因此成立

$$\int_{\mathcal{W}} \mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2\right)d\mu = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{D}^2\left(\frac{1}{2}\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2\right) = B_\kappa^* B_\kappa.$$

此外，由伊藤积分的等距性，我们有

$$\int_{\mathcal{W}} \frac{1}{2}\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu = \frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2.$$

然后，由引理（1.1.4），我们得到

$$\frac{1}{2}\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^*)^2(B_\kappa^* B_\kappa) + \frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2. \tag{2.3.6}$$

借助 (2.1.6)，对 $\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}$ 应用定理（1.1.1），可知

$$\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)} = -\frac{1}{2}(\mathrm{D}^*)^2\{B_\kappa + B_\kappa^* + B_\kappa^* B_\kappa\}.$$

代入（ 将 (2.3.5) 和 (2.3.6) 代入此等式，我们得到所需的 $\mathfrak{q}_{\eta(}$ 表达式 $_{\kappa)}$. □

(2.3.7) 注。 设 $B \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ 和 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 是其核，即 $B = B_\kappa$。根据 (2.3.5)，我们有

$$(\mathrm{D}^*)^2 B = (\mathrm{D}^*)^2\Big(\frac{1}{2}\{B_\kappa + B_\kappa^*\}\Big).$$

因此我们有

$$\{(\mathrm{D}^*)^2 B \mid B \in \mathcal{H}^{\otimes 2}\} = \{(\mathrm{D}^*)^2 B \mid B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})\} = \{\mathfrak{q}_\eta \mid \eta \in \mathscr{S}_2\}.$$

(2.3.8) 引理。 设 $\phi \in \mathscr{L}_2$，并假设 $\Lambda(B_{\eta(\kappa_\phi)}) < 1$。那么有

$$|\det_2(I + B_{\kappa_\phi})| \int_{\mathcal{W}} f(\iota + \mathbb{F}_\phi) e^{\widetilde{\Psi}_\phi} d\mu = \int_{\mathcal{W}} f d\mu \quad \textit{for every } f \in C_b(\mathcal{W}), \tag{2.3.9}$$

其中

$$\widetilde{\Psi}_\phi = \Psi_\phi + \int_0^T \left(\int_0^s \mathrm{tr}\phi(t,s) dt \right) ds.$$

证明。 由定理 (2.1.3) 和引理（2.3.4），需要证明的恒等式为

$$\mathrm{D}^* F_{\kappa_\phi} = \int_0^T \left\langle \int_0^T \phi(t,s)^\dagger d\theta(t), \theta(s) \right\rangle ds - \int_0^T \left(\int_0^s \mathrm{tr}\phi(t,s) dt \right) ds. \tag{2.3.10}$$

取 ϕ_m，$\phi \in \mathscr{L}_2$，其中 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $\|\phi_m - \phi\|_2 \to 0$，且 $m \to \infty$。于是

$$\|B_{\kappa_{\phi_m}} - B_{\kappa_\phi}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \|\kappa_{\phi_m} - \kappa_\phi\|_2 \to 0.$$

由引理（2.1.9）以及 D^*, $F_{\kappa_{\phi_m}} \to F_{\kappa_\phi}$ 在 $L^p(\mu; \mathcal{H})$ 上的连续性，对任意 $p \in (1, \infty)$ 均成立。此外，容易看出，当 ϕ_m 时，(2.3.10) 的右端依概率收敛到 ϕ 时对应的右端。因此，为证明 (2.3.10)，我们可以并且将假设 $\phi \in \mathscr{L}_2$ 具有如下形式

$$\phi(t,s) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_{[T_{N;n}, T_{N;n+1})}(t) \phi(T_{N;n}, s) \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2 \quad \text{with some } N \in \mathbb{N},$$

其中 $T_{N;n} = \frac{nT}{N}$。

设 $e_1, \ldots, e_d$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的标准正交基。对于 $1 \le i \le d$、$0 \le n \le N-1$ 和 $s \in [0,T]$，定义 $h_{n;i}, k_{s;i} \in \mathcal{H}$，使得 $h'_{n;i} = \mathbf{1}_{[T_{N;n}, T_{N;n+1})} e_i$，且 $k'_{s;i} = \mathbf{1}_{[0,s)} e_i$。根据（2.3.1），有

$$F_{\kappa_\phi} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j=1}^{d} \left(\int_0^T \phi_j^i(T_{N;n}, s) \theta^j(s) ds \right) h_{n;i}.$$

由 [27, (5.1.5)]，可知

$$\mathrm{D}^* h_{n;i} = \theta^i(T_{N;n+1}) - \theta^i(T_{N;n}) \quad \text{and} \quad \mathrm{D}\theta^i(s) = k_{s;i}.$$

根据 D^* ([27, 定理 5.2.8]) 的乘积法则，我们得到

$$\mathrm{D}^* F_{\kappa_\phi} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j=1}^{d} \left(\int_0^T \phi_j^i(T_{N;n}, s) \theta^j(s) ds \right) \{\theta^i(T_{N;n+1}) - \theta^i(T_{N;n})\}$$

$$-\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{d}\left\langle\int_0^T \phi_j^i(T_{N;n},s)k_{s;j}ds, h_{n;i}\right\rangle_{\mathcal{H}}.$$

等式右边的第一项与.....一致

$$\int_0^T\left[\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{i=1}^{d}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\phi_j^i(T_{N;n},s)\{\theta^i(T_{N;n+1})-\theta^i(T_{N;n})\}\right\}\right)\theta^j(s)\right]ds$$
$$=\int_0^T\left\langle\int_0^T \phi(t,s)^\dagger d\theta(t),\theta(s)\right\rangle ds.$$

由于

$$\langle k_{s;j},h_{n;i}\rangle_{\mathcal{H}}=\big\{(T_{N;n+1}\wedge s)-(T_{N;n}\wedge s)\big\}\delta_{ji},$$

右侧的第二项与

$$\int_0^T\left[\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{d}\phi_i^i(T_{N;n},s)\right)\big\{(T_{N;n+1}\wedge s)-(T_{N;n}\wedge s)\big\}\right]ds=\int_0^T\left(\int_0^s \mathrm{tr}\phi(t,s)dt\right)ds.$$

因此，(2.3.10) 成立。 □

(2.3.11) 引理。 B_{κ_ϕ} 是迹类的。

*Pr*证明。 定义 $\psi\in\mathscr{L}_2$为 $\psi(t,\ s)=\mathbf{1}_{[0,t)}(s)I_d$对于 $(t,\ s)\in[0,T]^2$。有

$$\kappa_\phi(t,s)=\int_0^T\phi(t,u)\psi(u,s)du\quad\text{for }(t,s)\in[0,T]^2.$$

因此我们知道

$$B_{\kappa_\phi}=B_\phi B_\psi, \tag{2.3.12}$$

这意味着 B_{κ_ϕ} 是迹类的。 □

定理 *(2.3.2)* 的证明。 由引理 (2.3.11)，只需证明 (2.3.3)。设序列 $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathscr{L}_2$ 满足 $\|\phi_m-\phi\|_2\to 0$，当 $m\to\infty$时。记 $\|\cdot\|_1$为迹类范数。根据 [5, 引理 IV.7.2]和 (2.3.12)，我们有

$$\|B_{\kappa_{\phi_m}}-B_{\kappa_\phi}\|_1\le\|B_\psi\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\|B_{\phi_m}-B_\phi\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}=\|B_\psi\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\|\phi_m-\phi\|_2\to 0\quad\text{as } m\to\infty.$$

由于映射 $B\mapsto\det(I+B)$ 关于迹类范数的连续性（[5, 推论 II.4.2]），$\det(I+B_{\kappa_{\phi_m}})$ 收敛到 $\det(I+B_{\kappa_\phi})$。容易看出，Ψ_{ϕ_m} 依概率收敛到 Ψ_ϕ。此外，

$$|\Lambda(B_{\kappa_{\phi_m}})-\Lambda(B_{\kappa_\phi})|\le\|B_{\kappa_{\phi_m}}-B_{\kappa_\phi}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\to 0\quad\text{as } m\to\infty.$$

因此，只需证明 (2.3.3) 对于 ϕ成立，它在 $[0,T]^2$上是连续的。

如果 ϕ 连续，那么 κ_ϕ 也连续。由引理 (2.3.11) 和 (A.1.3)，我们得到

$$\mathrm{tr}B_{\kappa_\phi}=\int_0^T\mathrm{tr}\kappa_\phi(t,t)dt=\int_0^T\left(\int_t^T\mathrm{tr}\phi(t,s)ds\right)dt=\int_0^T\left(\int_0^s\mathrm{tr}\phi(t,s)dt\right)ds.$$

借助恒等式 $\det_2(I+A)=\det(I+A)e^{-\mathrm{tr}A}$（对于 $A\in\mathcal{H}^{\otimes 2}$ 迹类），将其代入 (2.3.9)，即可得到 (2.3.3)。 □

(2.3.13) 注。 我们将比较定理 (2.3.2) 与 Cameron 和 Martin ([2]) 所得到的变量变换公式。为此，我们先回顾他们的公式。设$d = 1$ 和 $T = 1$。他们考虑了如下形式的线性变换

$$\mathbb{T} : \mathcal{W} \ni w \mapsto w + \int_0^1 K(\cdot, s)w(s)ds,$$

其中 $K \in \mathscr{L}_2$ 满足 $K(0, \cdot) = 0$。提醒一下，他们的"维纳测度"是在 μ下映射 $w \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}w$ 的分布，我们将其变量替换公式改写为在本框架下的形式如下。在若干假设下（此处不再重述），有

$$|D| \int_S (f \circ \mathbb{T})e^{-\Phi}d\mu = \int_{\mathbb{T}(S)} f d\mu \quad \text{for any Borel set } S \subset \mathcal{W} \text{ and } f \in C_b(\mathcal{W}), \tag{2.3.14}$$

对于 $\mathcal{W}$ 的每个博雷尔子集 S 以及 $f \in C_b(\mathcal{W})$，其中 $\mathbb{T}(S) = \{\mathbb{T}w \mid w \in S\}$,

$$D = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \det\Big(\big(K(s_i, s_j)\big)_{1 \le i,j \le n}\Big) ds_1 \cdots ds_n, \tag{2.3.15}$$

and

$$\begin{aligned}\Phi(w) =& \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \int_0^1 K(t, s)w(s)ds\right]^2 dt + \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial t}(t, s)w(s)ds\right] dw(t) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 J(s)d\{w(s)^2\} \quad \text{with } J(s) = \lim_{t \downarrow s} K(t, s) - \lim_{t \uparrow s} K(t, s).\end{aligned}$$

他们指出，"$dw(t)$"和"$d\{w(s)^2\}$"都可以定义为斯蒂尔切斯积分。

为将 (2.3.14) 与 (2.3.3) 进行比较，我们假设 K 在 $[0, 1]^2$ 上连续，且具有如下形式

$$K(t, s) = \int_0^t \phi(u, s)du \quad \text{for } (t, s) \in [0, 1]^2$$

对于某个 $\phi \in \mathscr{L}_2$，满足 $\Lambda(B_{\kappa_\phi}) < 1$。于是 $\mathbb{T} = \iota + \mathbb{F}_\phi = \iota + F_{\kappa_\phi}$，定理 (2.3.2) 适用于此 ϕ。结合以下观察 (i)–(v)，我们可以得出 (2.3.14) 由 (2.3.3) 推出。

(i) $-\Phi$ 的第一项等于 Ψ_ϕ 的第二项。

(ii) 由于 $\dfrac{\partial K}{\partial t} = \phi$，交换关于 ds 和"$dw(t)$"的二重积分顺序，我们将 $-\Phi$ 的第二项改写为

$$-\int_0^1 \left[\int_0^1 \phi(t, s)dw(t)\right] w(s)ds.$$

由于 $d = 1$, $M^\dagger = M$ 对于 $M \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ 成立，且乘法满足交换律。因此，将"$dw(t)$"视为 Itˆo 积分$d\theta(t)$后，这一项与 Ψ_ϕ 的第一项相同。

(iii) $J=0$ 以及 $-\Phi$ 的第三项均为零。

(iv) 对于 $\sigma\in\mathscr{L}_2$，在 $L^2([0,1];\mathbb{R})$ 上定义线性算子 $\mathcal{L}_\sigma$

$$\mathcal{L}_\sigma f=\int_0^1\sigma(\cdot,s)f(s)ds\quad\text{for } f\in L^2([0,1];\mathbb{R}).$$

我们通过空间 $L^2([0,1];\mathbb{R})$ 与 $\mathcal{H}$ 之间的对应关系，将 $\mathcal{L}_\sigma$ 与 B_σ 视为等同，使得

$$L^2([0,1];\mathbb{R})\ni f\leftrightarrow\int_0^\bullet f(t)dt\in\mathcal{H}.$$

由于

$$K(t,s)=\int_0^1\psi(t,u)\phi(u,s)du\quad\text{for } (t,s)\in[0,1]^2,$$

其中 $\psi(t,s)=\mathbf{1}_{[0,t)}(s)$，对于 $(t,s)\in[0,1]^2$。$\mathcal{L}_K=\mathcal{L}_\psi\mathcal{L}_\phi$，且它属于迹类。由于 K 的连续性，$\det(I+\mathcal{L}_K)$ 可按 (2.3.15)（[5,定理 VI.1.1]）中所述作 Fredholm 表示。因此

$$D=\det(I+\mathcal{L}_K)=\det(I+\mathcal{L}_\psi\mathcal{L}_\phi).$$

若 $A_1,A_2\in\mathcal{H}^{\otimes2}$ 都属于迹类，则 $\det(I+A_1A_2)=\det(I+A_2A_1)$（[5, IV.(5.9)]）。通过标准逼近论证，这一恒等式可推广至 $\mathcal{H}^{\otimes2}$。因此我们有

$$\det(I+B_\psi B_\phi)=\det(I+B_\phi B_\psi).$$

因此，由（2.3.12）以及 $\mathcal{L}_\sigma$ 与 B_σ 之间的对应关系可得

$$D=\det(I+B_{\kappa_\phi}).$$

（v）设 S 是 $\mathcal{W}$ 的博雷尔子集，且 $f\in C_b(\mathcal{W})$。令 $G=\mathbf{1}_S\circ(\iota+F_{\widehat{\kappa_\phi}})$。由定理（2.2.1），有

$$f(\iota+F_{\kappa_\phi})\mathbf{1}_S=\big(fG\big)(\iota+F_{\kappa_\phi})\quad\text{and}\quad fG=f\mathbf{1}_{\mathbb{T}(S)}\quad\mu\text{-a.s.}$$

（2.3.16）注。我们将（2.1.4）与由 [27, 定理 5.6.1] 中所述的一般变量替换公式得到的恒等式进行比较。该处的变量替换公式断言，若 $F\in\mathbb{D}^\infty(\mathcal{H})$ 具有一个 $r\in(\frac12,\infty)$，且满足

$$e^{-D^*F+r\|DF\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes2}}}\in L^{1+}(\mu)$$

满足

$$\int_{\mathcal{W}}f(\iota+F)\det{}_2(I+DF)e^{-D^*F-\frac12\|F\|^2_{\mathcal{H}}}d\mu=\int_{\mathcal{W}}fd\mu\quad\text{for every } f\in C_b(\mathcal{W}).$$

设 $\kappa\in\mathscr{L}_2$。借助 (2.1.10) 和引理（2.3.4），将此变量替换公式应用于 F_κ，我们得到 F_κ，其中

$$e^{-D^*F_\kappa}\in L^{1+}(\mu)$$

满足以下条件的是

$$\det_2(I+B_\kappa)\int_{\mathcal{W}} f(\iota+F_\kappa)e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}}d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2}\int_{\mathcal{W}} f d\mu \quad \text{for every } f\in C_b(\mathcal{W}).$$

将 $f=1$ 代入其中，可得 $\det_2(I+B_\kappa)>0$。由此重新得到了恒等式 (2.1.4)。

定义 $s(\kappa)\in\mathscr{S}_2$ 如下：

$$s(\kappa)(t,s) = -\{\kappa(t,s)+\kappa(s,t)^\dagger\} \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2.$$

由 (2.3.5)，可得

$$-D^*F_\kappa = \mathfrak{q}_{s(\kappa)}.$$

由注 (2.1.16)，可得

$$e^{-D^*F_\kappa}\in L^{1+}(\mu) \quad \text{if and only if} \quad \Lambda(B_{s(\kappa)})<1.$$

因此，一般的变量替换公式表明，当且仅当 $\Lambda(B_{s(\kappa)})<1$时，$\det_2(I+B_\kappa)>0$，且 (2.1.4) 成立。

假设 $\Lambda(B_{s(\kappa)})<2$。那么 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)})<1$，且 $\det_2(I+B_\kappa)>0$。事实上，有

$$\inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1}\langle B_{a\kappa}h,h\rangle_{\mathcal{H}} = -\frac{a}{2}\Lambda(B_{s(\kappa)}) > -a \quad \text{for } a\in[0,1].$$

因此

$$\inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1}\|(I+B_{a\kappa})h\|_{\mathcal{H}} \geq \inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1}\langle (I+B_{a\kappa})h,h\rangle_{\mathcal{H}} > 0 \quad \text{for } a\in[0,1].$$

由引理（A.1.1）和（2.1.7），对于 $a\in[0,1]$，$\det_2(I+B_{a\kappa})\neq 0$ 且 $\Lambda(B_{\eta(a\kappa)})<1$。特别地，$\Lambda(B_{\eta(\kappa)})<1$。此外，由于映射 $[0,1]\ni a\mapsto \det_2(I+B_{a\kappa}) = \det_2(I+aB_\kappa)\in\mathbb{R}$ 是连续的，并且对于 $a=0$，$\det_2(I+B_{a\kappa})=1$，对于任意 $a\in[0,1]$，$\det_2(I+B_{a\kappa})>0$。因此 $\det_2(I+B_\kappa)>0$。由此，定理 (2.1.3)涵盖了使用一般变量替换公式得到的情形。

一般而言，即使 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)})<1$ 且 $\det_2(I+B_\kappa)>0$，$\Lambda(B_{s(\kappa)})$ 也未必小于 2。例如，取正交归一的 $h_1,h_2\in\mathcal{H}$ 和 $b_1,b_2<-1$。定义 $\kappa\in\mathscr{S}_2$ 如下：

$$\kappa(t,s) = b_1[h_1'(s)\otimes h_1'(t)] + b_2[h_2'(s)\otimes h_2'(t)] \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2.$$

我们有

$$s(\kappa)(t,s) = -2b_1[h_1'(s)\otimes h_1'(t)] - 2b_2[h_2'(s)\otimes h_2'(t)]$$

and

$$\eta(\kappa)(t,s) = -(2b_1+b_1^2)[h_1'(s)\otimes h_1'(t)] - (2b_2+b_2^2)[h_2'(s)\otimes h_2'(t)]$$

对于 $(t,s)\in[0,T]^2$。因此我们看到

$$\Lambda(B_{s(\kappa)}) = (-2b_1)\vee(-2b_2) > 2$$

and

$$\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) = (-2b_1-b_1^2)\vee(-2b_2-b_2^2) = \{1-(1+b_1)^2\}\vee\{1-(1+b_2)^2\} < 1.$$

此外，有

$$\det_2(I+B_\kappa) = (1+b_1)(1+b_2)e^{-(b_1+b_2)} > 0.$$

因此，我们的条件 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)})<1$ 涵盖的一阶变换类别，比通过一般变量替换公式得到的类别更广。

第3章

从二次型到变换

由于 $\lambda \mathfrak{q}_\eta = \mathfrak{q}_{\lambda\eta}$ 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，研究拉普拉斯变换 $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \int_{\mathcal{W}} f e^{\lambda \mathfrak{q}_\eta} d\mu$ 与 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 和 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 的关系，归结为 $\lambda = 1$ 的情形：需要考察的是维纳积分 $\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta} d\mu$。为了将定理 (2.1.3) 应用于此类维纳积分的求值，我们将通过两种方式证明映射 $\mathscr{L}_2 \ni \kappa \mapsto \eta(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ 的满射性。我们还将通过限制定义域来考察其单射性。所得的求值结果将应用于谐振子型二次维纳泛函。此外，我们还将探讨它与吉尔萨诺夫变换之间的对应关系。

3.1. 满射性——寻找 κ 使 $\eta(\kappa) = \eta$

本节介绍两种方法，以求得给定 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 时的 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，使其满足 $\eta = \eta(\kappa)$。

(3.1.1) 定理。设 $\eta \in \mathscr{S}_2$。以下四个条件等价。(i) $e^{\mathfrak{q}_\eta} \in L^1(\mu)$。(ii) $\Lambda(B_\eta) < 1$。(iii) 存在一个 $\tau \in \mathscr{S}_2$，满足 行列式$_2(I + B_\tau) \neq 0$ 且

$$\eta(t,s) = -2\tau(t,s) - \int_0^T \tau(t,u)\tau(u,s)du \quad \textit{for a.e. } (t,s) \in [0,T]^2. \tag{3.1.2}$$

(iv) 存在一个 $\rho \in \mathscr{S}_2$，满足

$$\eta(t,s) = \rho(t,s) - \int_{t\vee s}^T \rho(t,u)\rho(u,s)du \quad \textit{for a.e. } (t,s) \in [0,T]^2. \tag{3.1.3}$$

如果这些条件成立，则

$$\eta(\tau) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta \quad \textit{and} \quad \eta(\kappa_A(\rho)) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta,$$

其中 $\kappa_A(\rho) \in \mathscr{L}_2$ 定义为 $\kappa_A(\rho)(t,s) = -\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\rho(t,s)$ 对于 $(t,s) \in [0,T]^2$，并且满足

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta + \mathrm{D}^* h} d\mu = \{\det{}_2(I - B_\eta)\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{\tau}}) e^{\mathrm{D}^*[(I+B_\tau)^{-1}h]} d\mu \tag{3.1.4}$$

and

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta + \mathrm{D}^* h} d\mu = e^{\frac{1}{4}\|\rho\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{\kappa_A(\rho)}}) e^{\mathrm{D}^*[(I+B_{\kappa_A^*(\rho)})^{-1}h]} d\mu \tag{3.1.5}$$

对于每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 和 $h \in \mathcal{H}$，其中 $\kappa_A^*(\rho)(t,s) = -\mathbf{1}_{(t,T]}(s)\rho(t,s)$ 对于 $(t,s) \in [0,T]^2$。

(3.1.6) 注。 (i)条件(i)与(ii)之间的等价性已在引理（2.1.13）中得到证明。

(ii) 令 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 满足 $\Lambda(B_\eta) < 1$。根据该定理，我们有这样的 τ， $\rho \in \mathscr{S}_2$ 如条件(iii)和(iv)所述。设 $\tau \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \kappa_A(\rho)$。由于 $\tau \in \mathscr{S}_2$，我们有

$$-\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\rho(t,s) = \tau(t,s) = \tau(s,t)^\dagger = -\mathbf{1}_{(t,T]}(s)\rho(t,s) \quad \text{for a.e. } (t,s) \in [0,T]^2.$$

这意味着 $\rho \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} 0$，从而 $\eta \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta(\kappa_A(\rho)) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} 0$。因此，如果 $\|\eta\|_2 \neq 0$，则 $\|\tau - \kappa_A(\rho)\|_2 \neq 0$，也就是说，我们有两类 κ，满足 $\eta(\kappa) = \eta$。

证明分为若干步骤，每一步都是一个引理。在此过程中，我们将看到，当条件得到满足时，$\det_2(I - B_\eta) \neq 0$ 以及 $I + B_{\kappa_A^*(\rho)}$ 具有连续逆。

（3.1.7）引理。 假设定理中的条件 (iii) 成立。那么 $\eta(\tau) = \eta$，条件 (ii) 得到满足，并且恒等式 （3.1.4） 成立。

证明。 方程 (3.1.2) 可改写为

$$I - B_\eta = (I + B_\tau)^2.$$

由于 $\tau \in \mathscr{S}_2$，这意味着 $I - B_\eta = I - B_{\eta(\tau)}$。根据引理（1.1.6），$\eta \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta(\tau)$。此外，由于 (2.1.7) 以及 $\det_2(I + B_\tau) \neq 0$ 这一假设，我们得到 $\Lambda(B_\eta) = \Lambda(B_{\eta(\tau)}) < 1$。

回忆一下，

$$\det\big((I+B)^2\big) = (\det(I+B))^2 \quad \text{and} \quad \det_2(I+B) = \det(I+B)e^{-\mathrm{tr}B}$$

对于 $B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$（属于迹类；关于第一个等式，参见 [5, IV(5.10)] ）。因此，恒等式

$$\det_2\big((I+B)^2\big) = \{\det_2(I+B)\}^2 e^{-\|B\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}}$$

对这样的 B 成立，并通过标准延拓论证推广到 $\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$。由于 $\|B_\tau\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \|\tau\|_2$，我们知道

$$\det_2(I - B_\eta) = \det_2((I+B_\tau)^2) = |\det_2(I+B_\tau)|^2 e^{-\frac{1}{2}\|\tau\|_2^2}.$$

将此代入含有 $\kappa = \tau$ 的 (2.2.3)，即可得到（3.1.4）。 □

(3.1.8) 引理。 对于每个 $\rho \in \mathscr{S}_2$，行列式$_2(I + B_{\kappa_A(\rho)})$ = 行列式$_2(I + B_{\kappa_A^*(\rho)}) = 1$ 和 $\Lambda(B_{\eta(\kappa_A(\rho))}) < 1$。

证明。 注意到 $B_{\kappa_A^*(\rho)} = B^*_{\kappa_A(\rho)}$。因此 $\det_2(I + B_{\kappa_A^*(\rho)}) = \det_2(I + B_{\kappa_A(\rho)})$。根据 (2.1.7)，只要证明 $\det_2(I + B_{\kappa_A(\rho)}) = 1$，证明便告完成。为证明这个恒等式，根据映射 $\mathcal{H}^{\otimes 2} \ni A \mapsto \det_2(I + A)$ 的连续性，我们可以并且将假设 $\kappa_A(\rho)$ 具有如下形式

$$\kappa_A(\rho)(t,s) = \sum_{0 \le m < n \le N-1} \mathbf{1}_{[T_{N;n}, T_{N;n+1})}(t) \mathbf{1}_{[T_{N;m}, T_{N;m+1})}(s) K_{nm}$$

对于 $(t,s) \in [0,T]^2$ 对于某些 $N \in \mathbb{N}$ 和 $K_{nm} \in \mathbb{R}^{d \times d}$，其中 $T_{N;n} = \frac{nT}{N}$ 对于 $0 \le n \le N$。

取 $\mathbb{R}^d$ 的一组标准正交基 $e_1, \dots, e_d$。定义 $h_{n;i} \in \mathcal{H}$ 为

$$h'_{n;i} = \mathbf{1}_{[T_{N;n}, T_{N;n+1})} e_i$$

对于 $0 \le n \le N-1$ 和 $1 \le i \le d$。那么 $\{h_{n;i} \mid 0 \le n \le N-1, 1 \le i \le d\}$ 是一个正交系。我们有

$$B_{\kappa_A(\rho)} = \sum_{0 \le m < n \le N-1} \sum_{i,j=1}^{d} K^{ij}_{nm} h_{m;j} \otimes h_{n;i}, \quad \text{where } K_{nm} = \left(K^{ij}_{nm}\right)_{1 \le i,j \le d}.$$

由此表达式可知，$B_{\kappa_A(\rho)}$ 是迹类。定义 $0 \le n(p) \le N-1$ 和 $1 \le i(p) \le d$，对于 $1 \le p \le dN$，使得 $p = n(p)d + i(p)$。令 $h_p = h_{n(p);i(p)}$ 为 $1 \le p \le dN$，我们有

$$B_{\kappa_A(\rho)} = \sum_{1 \le p < q \le dN} a^{pq} \tilde{h}_p \otimes \tilde{h}_q, \quad \text{where } a^{pq} = \begin{cases} K^{i(q)i(p)}_{n(q)n(p)} & \text{if } n(p) < n(q), \\ 0 & \text{if } n(p) \ge n(q). \end{cases}$$

由此可得

$$\det(I + B_{\kappa_A(\rho)}) = 1 \quad \text{and} \quad \mathrm{tr} B_{\kappa_A(\rho)} = 0.$$

因此行列式$_2(I + B_{\kappa_A(\rho)}) =$ 行列式$(I + B_{\kappa_A(\rho)}) e^{-\mathrm{tr} B_{\kappa_A(\rho)}} = 1$。 □

(3.1.9) 引理。 假设定理中的条件(iv) 成立。则 $\eta(\kappa_A(\rho)) = \eta$，条件(ii) 得到满足，且恒等式 (3.1.5) 成立。

证明。 注意到

$$\eta(\kappa_A(\rho))(t,s) = \rho(t,s) - \int_{t \vee s}^{T} \rho(t,u)\rho(u,s)du \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2 \text{ with } t \ne s. \tag{3.1.10}$$

因此 $\eta(\kappa_A(\rho)) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta$。由引理 (3.1.8) 可知，$\Lambda(B_\eta) = \Lambda(B_{\eta(\kappa_A(\rho))}) < 1$。

注意到 $\|\kappa_A(\rho)\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\rho\|_2^2$。由引理 (3.1.8) 和恒等式 (2.2.3)，其中 $\kappa = \kappa_A(\rho)$，我们得到 (3.1.5) □

(3.1.11) 引理。 如果满足条件(ii)，那么(iii)也成立。

证明。 令 $\mathcal{S}_+(\mathcal{H})$表示从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$的所有自伴、连续、半正定线性算子的集合。由于 $\Lambda(B_\eta) < 1$，因此有

$$\langle (I - B_\eta)h, h \rangle_{\mathcal{H}} \ge (1 - \Lambda(B_\eta))\|h\|^2_{\mathcal{H}} \quad \text{for } h \in \mathcal{H}.$$

因此 $I-B_\eta \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$。根据平方根引理（引理（A.1.5）），存在唯一的$C_\eta \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$满足

$$C_\eta^2 = I - B_\eta.$$

由于 C_η 是半正定的，因此

$$\|(I+C_\eta)h\|_{\mathcal{H}} \geq \langle (I+C_\eta)h, h\rangle_{\mathcal{H}} \geq 1 \quad \text{for every } h \in \mathcal{H} \text{ with } \|h\|_{\mathcal{H}} = 1.$$

由引理（A.1.1），$I+C_\eta$ 有连续逆。利用这个逆，我们得到

$$C_\eta - I = -(I+C_\eta)^{-1}B_\eta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2}).$$

根据引理（1.1.6），存在唯一的 $\kappa_S(\eta) \in \mathscr{S}_2$，使得

$$B_{\kappa_S(\eta)} = C_\eta - I.$$

令 $\tau = \kappa_S(\eta)$。根据定义，我们有

$$(I+B_\tau)^2 = C_\eta^2 = I - B_\eta.$$

这意味着（3.1.2）成立。

由于

$$\inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \|C_\eta h\|_{\mathcal{H}}^2 = \inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \langle (I-B_\eta)h, h\rangle_{\mathcal{H}} = 1 - \Lambda(B_\eta) > 0,$$

根据引理（A.1.1），$C_\eta = I + B_\tau$ 有连续逆。因此 $\det_2(I+B_\tau) \neq 0$ ([5,定理 XII.1.2])。 □

(3.1.12) 注。由于 $B_\eta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$，它有一个标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$，在 $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ 中将其展开为$B_\eta = \sum a_n h_n \otimes h_n$，其中 $a_n = \langle B_\eta h_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}}$ 对于 $n \in \mathbb{N}$。于是有 $B_{\kappa_S(\eta)} = \sum_{n=1}^\infty \{(1-a_n)^{-\frac{1}{2}} - 1\} h_n \otimes h_n$.

(3.1.13) 引理。如果条件(ii) 成立，那么(iv)也成立。

证明。正如引理（3.1.11）的证明中所见，$I-B_\eta$ 的平方根算子 $C_\eta \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$ 有连续逆。因此 $I-B_\eta$也有连续逆。定义 $\varphi \in \mathscr{S}_2$ 为 $\varphi = \widehat{-\eta}$，即 $B_\varphi = (I-B_\eta)^{-1} - I$。将此等式改写为

$$(I - B_{-\varphi})^{-1} = I + B_{-\eta}. \tag{3.1.14}$$

设 $a = \inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \langle B_\eta h, h\rangle_{\mathcal{H}}$。则 $-\infty \leq -\|B_\eta\|_{\mathrm{op}} \leq a \leq \Lambda(B_\eta) < 1$ 且

$$\langle (I-B_\eta)g, g\rangle_{\mathcal{H}} \leq (1-a)\|g\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{for any } g \in \mathcal{H}.$$

将 $g = C_\eta^{-1}h$ 代入该不等式，我们得到

$$(1-a)^{-1} \leq \langle (I-B_\eta)^{-1}h, h\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \text{ with } \|h\|_{\mathcal{H}} = 1.$$

结合式 (3.1.14)，这意味着

$$\Lambda(B_{-\varphi}) \leq 1 - (1-a)^{-1} < 1.$$

对于 $\xi \in (0, T]$，定义 $\mathcal{H}$ 的子空间 $\mathcal{H}_\xi$ 为

$$\mathcal{H}_\xi = \{h \in \mathcal{H} \mid h' = \mathbf{1}_{[0,\xi)} h'\}.$$

令 π_ξ 为 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}_\xi$上的正交投影，则有

$$\Lambda(\pi_\xi B_{-\varphi} \pi_\xi) \leq \Lambda(B_{-\varphi}) < 1. \tag{3.1.15}$$

对于 $\psi \in \mathscr{S}_2$，令 $\mathcal{L}_\psi$为 $L^2([0,T]; \mathbb{R}^d)$到自身的连续算子，使得

$$\mathcal{L}_\psi f = \int_0^T \psi(\cdot, s) f(s) ds \quad \text{for } f \in L^2([0,T]; \mathbb{R}^d).$$

通过以下对应关系，识别 $\mathcal{H}$ 与 $L^2([0,T]; \mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{H} \ni h \leftrightarrow h' \in L^2([0,T]; \mathbb{R}^d).$$

在此对应关系下， B_ψ 与 $\mathcal{L}_\psi$ 也被视为相同，恒等式 (3.1.14) 可改写为

$$(I - \mathcal{L}_{-\varphi})^{-1} = I + \mathcal{L}_{-\eta}.$$

因此， $-\eta$ 是 $\mathcal{L}_{-\varphi}$的预解核。

令 $\xi \in (0, T]$。根据 $\mathcal{H}_\xi$ 与 $L^2([0,\xi]; \mathbb{R}^d)$ 之间的对应关系，(3.1.15) 意味着

$$\sup_{\|f\|_{L^2([0,\xi];\mathbb{R}^d)}=1} \int_0^\xi \left\langle \int_0^\xi (-\varphi)(t,s) f(s) ds, f(t) \right\rangle dt < 1,$$

其中 $\|\cdot\|_{L^2([0,\xi];\mathbb{R}^d)}$ 是 $L^2([0,\xi]; \mathbb{R}^d)$ 中的 L^2-范数。因此，方程

$$g(t) - \int_0^\xi (-\varphi)(t,s) g(s) ds = f(t) \quad \text{for } t \in [0,\xi]$$

在 $L^2([0,\xi]; \mathbb{R}^d)$ 中有解。由于 Gohberg-Krein 给出的 $\mathcal{L}_{-\varphi}$ 的特殊因式分解（[6]）（见命题 (A.2.1)），存在一个 $\nu \in \mathscr{S}_2$，使得

$$-\eta(t,s) = \nu(t,s) + \int_t^T \nu(t,u)\nu(u,s) du \quad \text{for } 0 \leq s < t \leq T.$$

令 $\rho = -\nu$，可知 (3.1.3) 成立。 □

设 $\kappa_S(\eta)$ 如引理 (3.1.11) 所述， $\kappa_A(\rho)$ 如定理 (3.1.1) 所述。核 $\kappa_S(\eta)$ 是借助平方根引理构造的。随机过程 $\{(F_{\kappa_A(\rho)})'(t) = \int_0^t \rho(t, s) d\theta(s)\}_{t\in[0,T]}$ 是适应的。基于这些性质，我们称 $\iota + F_{\kappa_S(\eta)}$ 为一阶平方根变换，称 $\iota + F_{\kappa_A(\rho)}$ 为一阶适应变换。

3.2. 双射性

正如注 (2.1.5)(ii) 中所见，映射 $\mathscr{L}_2 \ni \kappa \mapsto \eta(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ 不是单射。通过限制映射的定义域，我们得到以下两种双射性。对于 $\mathcal{L} \subset \mathscr{L}_2$ 和 $\mathcal{S} \subset \mathscr{S}_2$，若映射 A：$\mathcal{L} \ni \kappa \mapsto A(\kappa) \in \mathcal{S}$ 满足：对于 $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{L}$，只要 $A(\kappa_1) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} A(\kappa_2)$，每个 $\eta \in \mathcal{S}$ 都有一个 $\kappa \in \mathcal{L}$，使得$A(\kappa) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta$，则称该映射为双射。

（3.2.1）命题。令

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{S}_2} &= \{\eta \in \mathscr{S}_2 \mid \Lambda(B_\eta) < 1\},\\
\mathscr{S}_{2,+} &= \big\{\kappa \in \mathscr{S}_2 \mid I + B_\kappa \geq 0\big\},\\
\widehat{\mathscr{S}_{2,+}} &= \big\{\kappa \in \mathscr{S}_{2,+} \mid \Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1\big\},
\end{aligned}$$

and

$$\widehat{\mathscr{L}_2} = \big\{\kappa \in \mathscr{L}_2 \mid \kappa(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\kappa(t,s) \text{ for } (t,s) \in [0,T]^2\big\},$$

其中"$I + B_\kappa \geq 0$"表示该算子是半正定的。

（i）若 $\kappa_1、\kappa_2 \in \mathscr{S}_{2,+}$ 和 $\eta(\kappa_1) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta(\kappa_2)$，则 $\kappa_1 \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \kappa_2$。此外，映射 $\widehat{\mathscr{S}_{2,+}} \ni \kappa \mapsto \eta(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ 是双射。

（ii）若 $\rho_1、\rho_2 \in \mathscr{S}_2$ 和 $\eta(\kappa_A(\rho_1) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta(\kappa_A(\rho_2)$，则 $\rho_1 \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \rho_2$。此外，$\widehat{\mathscr{L}_2}$ 在 η 下的像包含于 $\widehat{\mathscr{S}_2}$中，且映射 $\widehat{\mathscr{L}_2} \ni \kappa \mapsto \eta(\kappa) \in \widehat{\mathscr{S}_2}$ 是双射。

证明。(i) 设 $\kappa_1,\kappa_2 \in \mathscr{S}_{2,+}$，并假设 $\eta(\kappa_1) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta(\kappa_2)$。由 (2.1.6)，可得

$$(I + B_{\kappa_1})^2 = I - B_{\eta(\kappa_1)} = I - B_{\eta(\kappa_2)} = (I + B_{\kappa_2})^2.$$

由于 $I+B_{\kappa_1}$和 $I+B_{\kappa_2}$都属于 $\mathcal{S}_+(\mathcal{H})$，根据平方根算子的唯一性（引理（A.1.5）），$I + B_{\kappa_1} = I + B_{\kappa_2}$。由引理（1.1.6），$\kappa_1 \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \kappa_2$。

第一个断言表明映射的单射性 $\widehat{\mathscr{S}_{2,+}} \ni \kappa \mapsto \eta(\kappa) \in \widehat{\mathscr{S}_{2}}$。为考察满射性，设 $\eta \in \mathscr{S}_2$。正如引理 (3.1.11) 的证明中所示，$\kappa_S(\eta) \in \mathscr{S}_{2,+}$且 $\eta(\kappa_S(\eta)) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta$。由此，满射性得证。

(ii) 注意到 $\widehat{\mathscr{L}_2} = \{\kappa_A(\rho) \mid \rho \in \mathscr{S}_2\}$。根据引理 (3.1.8)，$\eta\big(\widehat{\mathscr{L}_2}\big) \subset \widehat{\mathscr{S}_2}$。由于定理（3.1.1），映射 $\mathscr{L}_2 \ni \kappa \mapsto \eta(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ 是满射。因此，只需证明第一个断言。

令 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{S}_2$ 并假设 $\eta(\kappa_A(\rho_1)) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \eta(\kappa_A(\rho_2))$。根据 (3.1.10)，有

$$\rho_1(t,s) - \rho_2(t,s) = \int_{t\vee s}^{T} \big\{\rho_1(t,u)\rho_1(u,s) - \rho_2(t,u)\rho_2(u,s)\big\}du \tag{3.2.2}$$

对几乎处处的 $(t,s) \in [0,T]^2$。取一个 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\iint_{[0,a+\frac{T}{N}]\times[0,T]} |\rho_i(t,s)|^2 dtds < \frac{1}{5} \quad \text{for any } a \in [0,T_1] \text{ and } i = 1,2,$$

其中 $T_n = T - \frac{nT}{N}$对 $1 \le n \le N$。令

$$\gamma(t,s) = \rho_1(t,s) - \rho_2(t,s) \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

由 (3.2.2) 和施瓦茨不等式，我们得到

$$|\gamma(t,s)|^2 \le 2\Big\{ \Big(\int_{t\vee s}^T |\rho_1(u,s)|^2 du\Big)\Big(\int_{t\vee s}^T |\gamma(t,u)|^2 du\Big) + \Big(\int_{t\vee s}^T |\rho_2(t,u)|^2 du\Big)\Big(\int_{t\vee s}^T |\gamma(u,s)|^2 du\Big)\Big\} \quad \text{for a.e. } (t,s) \in [0,T]^2.$$

由于 $|\rho_2(t,u)| = |\rho_2(u,t)|$，这意味着

$$\iint_{t\vee s \ge T_1} |\gamma(t,s)|^2 dtds \le \frac{4}{5} \iint_{t\vee s \ge T_1} |\gamma(t,s)|^2 dtds,$$

其中 $\iint_{t\vee s\ge a} \dots dtds$ 是集合 $\{(t,s) \in [0,T]^2 \mid t \vee s \ge a\}$上的积分。因此我们得到

$$\iint_{t\vee s \ge T_1} |\gamma(t,s)|^2 dtds = 0.$$

换言之，$\gamma(t,s)$ 对几乎处处的 $(t,s) \in [0,T]^2$（满足 $t \vee s \ge T_1$）都为零。

由此为零可知，对于 T，(3.2.2) 中的 T_1 成立。完全按照上面的方式，只是这次取 T 为 T_1，我们看到 $\gamma(t,s)$ 对几乎处处的 $(t,s) \in [0,T]^2$（满足 $T_2 \le t \vee s \le T_1$）都成立。因此，对于几乎处处的 $(t,s) \in [0,T]^2$（满足 $t \vee s \ge T_2$）也成立。依次继续这一论证，便可得到 $\gamma(t,s)$ 对几乎处处的 $(t,s) \in [0,T]^2$都为零。因此我们知道 $\rho_1 \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \rho_2$。

□

3.3. 谐振子型二次维纳泛函

我们将定理（3.1.1）应用于命题（1.1.7）中描述的 $\mathfrak{h}(\kappa;\, x)$ $\mathfrak{h}(\kappa) \in \mathbb{D}^\infty$。

(3.3.1) 命题。 设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$和 $x \in \mathbb{R}^d$。令 $c(\kappa;\ x)$ $c(\kappa) \in \mathscr{S}_2$如命题（*1.1.7*）中所述，并定义 $c'(\kappa;\ x)$ $c'(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ 为

$$c'(\kappa;x) = \kappa_S(-c(\kappa;x)) \quad \textit{and} \quad c'(\kappa) = \kappa_S(-c(\kappa)).$$

则 $B_{c(\kappa;x)}$ 是迹类，并且有

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{-\mathfrak{h}(\kappa;x)+\mathrm{D}^*h} d\mu = \{\det(I + B_{c(\kappa;x)})\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f\Big(\iota + F_{\widehat{c'(\kappa;x)}}\Big) e^{\mathrm{D}^*[(I+B_{c'(\kappa;x)})^{-1}h]} d\mu$$

and

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{-\mathfrak{h}(\kappa)+\mathrm{D}^*h} d\mu = \{\det(I + B_\kappa^* B_\kappa)\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f\Big(\iota + F_{\widehat{c'(\kappa)}}\Big) e^{\mathrm{D}^*[(I+B_{c'(\kappa)})^{-1}h]} d\mu$$

对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 以及 $h \in \mathcal{H}$。特别是，

$$\int_{\mathcal{W}} e^{-\mathfrak{h}(\kappa;x)+\mathrm{D}^*h} d\mu = \{\det(I + B_{c(\kappa;x)})\}^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\langle (I+B_{c(\kappa;x)})^{-1}h, h\rangle_{\mathcal{H}}}$$

and

$$\int_{\mathcal{W}} e^{-\mathfrak{h}(\kappa)+\mathrm{D}^* h} d\mu = \{\det(I + B_\kappa^* B_\kappa)\}^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\langle (I+B_\kappa^* B_\kappa)^{-1} h, h\rangle_{\mathcal{H}}}$$

对于任意 $h \in \mathcal{H}$。

证明。 根据命题（1.1.7），有

$$-\mathfrak{h}(\kappa; x) = \mathfrak{q}_{-c(\kappa;x)} - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)^\dagger x|^2 ds dt. \tag{3.3.2}$$

由于

$$\langle B_{-c(\kappa;x)} h, h\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^T \left(\int_0^T \langle \kappa(u,s)^\dagger x, h'(s)\rangle ds\right)^2 du \quad \text{for } h \in \mathcal{H}, \tag{3.3.3}$$

$\Lambda(B_{-c(\kappa;x)}) \leq 0 < 1$。根据定理（3.1.1）和（3.3.2），我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{W}} f e^{-\mathfrak{h}(\kappa;x)+\mathrm{D}^* h} d\mu = &\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)^\dagger x|^2 ds dt\right)\{\det{}_2(I + B_{c(\kappa;x)})\}^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \int_{\mathcal{W}} f\left(\iota + F_{\widehat{c'(\kappa;x)}}\right) e^{\mathrm{D}^*[(I+B_{c'(\kappa;x)})^{-1} h]} d\mu\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 和 $h \in \mathcal{H}$ 均成立。

对于 $A \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$，用 $|A| \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$ 表示 $A^* A$ 的平方根。根据定义， A 是∞迹类的，当且仅当存在某个标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$，使得 $\sum \langle |A| h_n,\ h_n\rangle_{\mathcal{H}} < \infty$ $\{h_n\}_{n=1}^\infty$属于 $\mathcal{H}$。由于 $B_{c(\kappa;x)} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$，$_{n=1} B_{c(\kappa;x)}^* B_{c(\kappa;x)} = B_{c(\kappa;x)}^2$。根据（3.3.3）， $B_{c(\kappa;x)} \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$。由平方根唯一性可得 $B_{c(\kappa;x)} = |B_{c(\kappa;x)}|$。再次根据（3.3.3），我们有

$$\sum_{n=1}^\infty \langle B_{c(\kappa;x)} h_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)^\dagger x|^2 ds dt \quad \text{for any ONB } \{h_n\}_{n=1}^\infty \text{ of } \mathcal{H}.$$

因此， $B_{c(\kappa;x)}$ 是迹类，且

$$\mathrm{tr} B_{c(\kappa;x)} = \int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)^\dagger x|^2 ds dt.$$

因此我们有

$$\det{}_2(I + B_{c(\kappa;x)}) = \det(I + B_{c(\kappa;x)}) \exp\left(-\int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)^\dagger x|^2 ds dt\right).$$

将其代入（3.3.4），得到第一个恒等式。

根据命题（1.1.7），我们有

$$-\mathfrak{h}(\kappa) = \mathfrak{q}_{-c(\kappa)} - \frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2.$$

回忆一下， $B_{c(\kappa)} = B_\kappa^* B_\kappa$。因此， $\Lambda(B_{-c(\kappa)}) \leq 0 < 1$, $B_{c(\kappa)}$ 是迹类，且 $\mathbf{tr} B_{c(\kappa)} = \|B_\kappa\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 = \|\kappa\|_2^2$。由定理（3.1.1），可得

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{-\mathfrak{h}(\kappa)+\mathrm{D}^* h} d\mu = e^{-\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2}\{\det{}_2(I + B_{c(\kappa)})\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{c'(\kappa)}}) e^{\mathrm{D}^*[(I+B_{c'(\kappa)})^{-1} h]} d\mu$$

对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 都成立。记住，对于迹类的 $B \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$，$\det_2(I+B) = \det(I+B)e^{-\mathrm{tr}B}$，由此得到第二个恒等式。

第三个和第四个恒等式分别由第一个和第二个恒等式推出。 □

在命题（1.1.9）中，我们证明了 $\mathfrak{h}(\kappa)$ 与一个二次型 $\mathfrak{q}_\eta$ 有关，该二次型具有非负定的 $B_\eta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$。我们将看到，对于 $\eta \in \mathscr{S}_2$， $\mathfrak{h}(\eta)$ 是 $\mathfrak{q}_\eta$ 的 $\mathcal{H}$-导数的 $\mathcal{H}$-范数平方。

(3.3.5) 命题。设 $\eta \in \mathscr{S}_2$。则有

$$\mathfrak{h}(\eta) = \frac{1}{2}\|\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta\|^2_{\mathcal{H}}.$$

此外，还有

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta\|^2_{\mathcal{H}}+\mathrm{D}^* h} d\mu = \{\det{}_2(I+B_\eta^2)\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{c'(\eta)}}) e^{\mathrm{D}^*[(I+B_{c'(\eta)})^{-1}h]} d\mu$$

and

$$\int_{\mathcal{W}} e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta\|^2_{\mathcal{H}}+\mathrm{D}^* h} d\mu = \{\det{}_2(I+B_\eta^2)\}^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\langle (I+B_\eta^2)^{-1}h, h\rangle_{\mathcal{H}}}$$

对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 以及 $h \in \mathcal{H}$ 均成立。

证明。 第二个断言由第一个断言和命题（3.3.1）推出。正如定理（1.1.1）的证明中所见，$\mathrm{D}^2\mathfrak{q}_\eta = B_\eta$ 和 $\int_{\mathcal{W}} \mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta d\mu = 0$。回忆 $\mathrm{D}F_\eta = B_\eta$ （见（2.1.10））， 可得

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta - F_\eta) = B_\eta - B_\eta = 0.$$

此外， $\int_{\mathcal{W}} F_\eta d\mu = 0$，因此 $\int_{\mathcal{W}} (\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta - F_\eta) d\mu = 0$。由引理（2.1.8）， 可得

$$\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta = F_\eta.$$

由恒等式 $\mathrm{D}F_\eta = B_\eta$，可知

$$\left\langle \mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\|\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta\|^2_{\mathcal{H}}\right), g \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle F_\eta, B_\eta g\rangle_{\mathcal{H}}$$

and

$$\left\langle \mathrm{D}^2\left(\frac{1}{2}\|\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta\|^2_{\mathcal{H}}\right), h\otimes g \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \langle B_\eta h, B_\eta g\rangle_{\mathcal{H}} = \langle B_{c(\eta)}, h\otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}$$

对每个 h， $g \in \mathcal{H}$。注意到

$$\int_{\mathcal{W}} \|\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta\|^2_{\mathcal{H}} d\mu = \int_{\mathcal{W}} \|F_\eta\|^2_{\mathcal{H}} d\mu = \|\eta\|^2_2,$$

并应用引理（1.1.4）、定理（1.1.1）和命题（1.1.7），可得

$$\frac{1}{2}\|\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^*)^2 B_{c(\eta)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_2 = \mathfrak{q}_{c(\eta)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_2 = \mathfrak{h}(\eta).$$ □

(3.3.6) 注。 在 [41], 中，作者研究了当 $d = 1$ 时的 $\left\|\mathbb{D}\left(\int_0^T |\theta(t)|^2 dt\right)\right\|^2_{\mathcal{H}}$。上述命题将其推广到了一般的 $\mathfrak{q}_\eta$s。直观地说，二次型的导数是一阶的，其 $\mathcal{H}$-范数的平方必为二阶的，也就是说是二次的。

3.4. 吉尔萨诺夫定理的推导

令 $\rho \in \mathscr{S}_2$。设 $\kappa = \kappa_A(\rho)$ 和 $\eta = \eta(\kappa)$。利用引理（2.3.4），我们将看到 Girsanov定理由变换 $\iota + F_\kappa$ 推导而来。

由于 $\|\kappa\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\rho\|_2^2$，由(2.1.4)和引理 (3.1.8)，我们有

$$\int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_\kappa) e^{\mathfrak{q}_\eta} d\mu = e^{\frac{1}{4}\|\rho\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f d\mu \quad \text{for every } f \in C_b(\mathcal{W}). \tag{3.4.1}$$

令

$$u(t) = -\int_0^t \rho(t,s) d\theta(s) \quad \text{for } t \in [0,T],$$

我们有

$$(F_\kappa)'(t) = u(t) \quad \text{for } t \in [0,T].$$

由于随机过程 $\{u(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是适应的，由 $[27, \text{定理}5.3.3]$, 可知

$$\mathrm{D}^* F_\kappa = \int_0^T \langle u(t), d\theta(t) \rangle.$$

注意 $\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^T |u(t)|^2 dt$。由引理（2.3.4），上述恒等式(3.4.1)可改写为

$$\int_{\mathcal{W}} f\Big(\theta + \int_0^\bullet u(t)dt\Big) \exp\Big(-\int_0^T \langle u(t), d\theta(t)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T |u(t)|^2 dt\Big) d\mu = \int_{\mathcal{W}} f d\mu$$

对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 都成立。也就是说，在概率测度

$$\exp\Big(-\int_0^T \langle u(t), d\theta(t)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T |u(t)|^2 dt\Big) d\mu$$

下，() 的分布与维纳测度 μ 相同。因此，Girsanov定理得证 .

Novikov条件是保证 Girsanov定理成立的众所周知的充分条件之一。该条件是 $\exp(\frac{1}{2}\int_0^T |u(t)|^2 dt) \in L^1(\mu)$。我们将证明，当且仅当 $\|B_\kappa\|_{\mathrm{op}} < 1$ 时，这种指数可积性成立。

为说明这一点，注意到

$$\frac{1}{2}\int_0^T |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^T \Big|\int_0^T \kappa(t,s) d\theta(s)\Big|^2 dt.$$

结合命题（1.1.7），可得

$$\frac{1}{2}\int_0^T |u(t)|^2 dt = \mathfrak{q}_{c(\kappa)} + \frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2.$$

由于 $B_{c(\kappa)} = B_\kappa^* B_\kappa$，我们有

$$\Lambda(B_{c(\kappa)}) = \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \|B_\kappa h\|_{\mathcal{H}}^2 = \|B_\kappa\|_{\mathrm{op}}^2.$$

由关于$\mathfrak{q}_{c(\kappa)}$的引理（2.1.13），我们得到所需的等价。

Kazamaki条件是Girsanov定理成立的另一个众所周知的充分条件。该条件是 $\left\{\frac{1}{2}\int_0^r \langle u(t)\ d\theta(t)\rangle\right\}_{r\in[0,T]}$一致可积。我们证明，这种一致可积性成立当且仅当 $\Lambda(B_\rho) < 2$。

为此，对每个 $r \in [0,T]$，定义 $\beta_r \in \mathcal{S}_2$ 为

$$\beta_r(t,s) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,r)}(t)\mathbf{1}_{[0,r)}(s)\rho(t,s) \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

则有

$$\frac{1}{2}\int_0^r \langle u(t), d\theta(t)\rangle = \mathfrak{q}_{\beta_r}.$$

若 $\frac{1}{2}\int_0^T \langle u(t)\ d\theta(t)\rangle$ 可积，则由引理（2.1.13），$\Lambda(B_{\beta_T}) < 1$。因此，$\Lambda(B_\rho) = 2\Lambda(B_{\beta_T}) < 2$。反之，假设 $\Lambda(B_\rho) < 2$，因而 $\Lambda(B_{\beta_T}) < 1$。取一个满足 $p\Lambda(B_{\beta_T}) < 1$ 的 $p \in (1,\infty)$。由于 $\Lambda(B_{p\beta_r}) \le \Lambda(B_{p\beta_T}) = p\Lambda(B_{\beta_T})) < 1$ 且 $\|\beta_r\|_2 \le \|\beta_T\|_2$ 对于 $r \in [0,T]$ 成立，由引理（2.1.13），我们有

$$\int_{\mathcal{W}} \exp[p\mathfrak{q}_{\beta_r}]d\mu \le \exp\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{p\Lambda(B_{\beta_T})}{3(1-p\Lambda(B_{\beta_T}))^3}\right\}\|\beta_T\|_2^2\right].$$

因此 $\left\{\frac{1}{2}\int_0^r \langle u(t)\ d\theta(t)\rangle\right\}_{r\in[0,T]}$一致可积。

由于 $B_\rho = B_\kappa + B_\kappa^*$, $\Lambda(B_\rho) \le 2\Lambda(B_\kappa)$。因此，若 $\|B_\kappa\|_{\mathrm{op}} < 1$，则 $\Lambda(B_\rho) < 2$。所以，Novikov条件蕴含Kazamaki条件。这种蕴含关系广为人知（参见[32, 命题VIII(1.15)]）。我们通过 $\iota + F_\kappa$重新发现了这一结论。

自然会问，哪些适应的、取值于 $\mathbb{R}^d$的随机过程 $\{u(t)\}_{t\in[0,T]}$ 具有如下性质：$\int_{\mathcal{W}}\left(\int_0^T |u(t)|^2 dt\right)d\mu < \infty$ 可通过上述一阶适应变换得到。为此，首先假设对于每个 $t \in [0,T]$，$u(t)$的每个分量都属于一阶维纳混沌。于是存在一个 $\kappa_t : [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 使得

$$\int_0^T |\kappa_t(s)|^2 ds < \infty \quad \text{and} \quad u(t) = \int_0^T \kappa_t(s)d\theta(s).$$

假设还 映射 $(t,s) \mapsto \kappa_t(s)$ 是可测的。那么有

$$\int_0^T \int_0^T |\kappa_t(s)|^2 ds dt = \int_0^T \left(\int_{\mathcal{W}} |u(t)|^2 d\mu\right) dt < \infty.$$

定义 $\rho \in \mathscr{S}_2$ 为

$$\rho(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\kappa_t(s) + \mathbf{1}_{(t,T]}(s)\kappa_s(t)^\dagger \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

由于 $\{u(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是适应的，因此有

$$u(t) = \int_0^t \kappa_t(s)d\theta(s) = \int_0^t \rho(t,s)d\theta(s).$$

因此，$\{u(t)\}_{t\in[0,T]}$ 对应于一阶适应变换 $\iota + F_{\kappa_A(\rho)}$。

第4章

线性适应变换

我们研究同时也是 $\mathcal{W}$ 上连续线性算子的适应变换。我们将证明，二次型的指数可积性与相应 Riccati 常微分方程的可解性之间是等价的。该等价性通过常微分方程给出了二次型拉普拉斯变换的显式表达式。该表达式被应用于解析或代数对象的随机表示：（i）二步幂零李群上的热核；（ii）欧拉多项式、伯努利多项式和欧拉多项式；以及（iii）KdV方程的无反射势和孤子解。

4.1. 线性适应变换

设 $C([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ 为定义在 $[0,T]$ 上的 $\mathbb{R}^{d\times d}$ 值连续函数空间。对于 $\phi\in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$，定义维纳泛函 $G_\phi\colon\ \mathcal{W}\to\mathcal{H}$ 和 $\mathfrak{p}_\phi\colon\ \mathcal{W}\to\mathbb{R}$，其中

$$\langle G_\phi,h\rangle_{\mathcal{H}}=-\int_0^T\langle\phi(t)\theta(t),h'(t)\rangle dt\quad\text{for } h\in\mathcal{H}\quad\text{and}\quad\mathfrak{p}_\phi=\int_0^T\langle\phi(t)\theta(t),d\theta(t)\rangle.$$

G_ϕ 也可视为从 $\mathcal{W}$ 到 $\mathcal{W}$ 的连续线性映射，使得

$$(G_\phi(w))(t)=-\int_0^t\phi(s)w(s)ds\quad\text{for } w\in\mathcal{W}\text{ and } t\in[0,T].$$

当我们将 G_ϕ 视为连续线性映射时，对于 $G_\phi(w)$，我们简记为 $G_\phi w$。定义 $\rho_\phi\in\mathscr{S}_2$ 如下：

$$\rho_\phi(t,s)=\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\phi(t)+\mathbf{1}_{(t,T]}(s)\phi(s)^\dagger\quad\text{for } (t,s)\in[0,T]^2.$$

不难看出

$$G_\phi=F_{\kappa_A(\rho_\phi)}\quad\text{and}\quad\mathfrak{p}_\phi=\mathfrak{q}_{\rho_\phi}.$$

因此，我们称 $\iota+G_\phi$ 为一阶线性适应变换。此外，定义$\sigma(\phi)\in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$如下：

$$\sigma(\phi)(t)=\phi(t)-\int_t^T\phi(u)^\dagger\phi(u)du\quad\text{for } t\in[0,T].\tag{4.1.1}$$

定理（3.1.1）给出如下结果。

(4.1.2) 定理。 对于每个 $\chi \in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$， $e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}} \in L^1(\mu)$ 并且成立：

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}} d\mu = e^{\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}[(\chi-\sigma(\chi))(t)]dt} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{\kappa_A(\rho_\chi)}}) d\mu \tag{4.1.3}$$

and

$$\int_{\mathcal{W}} f \exp\left(\int_0^T \langle \chi(t)\theta(t), d\theta(t)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T |\chi(t)\theta(t)|^2 dt\right) d\mu = \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{\kappa_A(\rho_\chi)}}) d\mu \tag{4.1.4}$$

对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$。

证明。 有

$$\eta(\kappa_A(\rho_\chi))(t,s) = \rho_\chi(t,s) - \int_t^T \rho_\chi(t,u)\rho_\chi(u,s)du = \chi(t) - \int_t^T \chi(u)^\dagger \chi(u) du = \sigma(\chi)(t)$$

对于 $0 \le s < t \le T$。因此我们有

$$\eta(\kappa_A(\rho_\chi)) \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \rho_{\sigma(\chi)}.$$

由于 $\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)} = \mathfrak{q}_{\rho_{\sigma(\chi)}}$，由引理 (3.1.8) 和 (2.1.13)，我们有 $e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}} \in L^1(\mu)$。由于 $\rho_\chi \in \mathscr{S}_2$，由 (4.1.1)，我们有

$$\begin{aligned}\|\rho_\chi\|_2^2 &= 2\int_0^T \left(\int_t^T |\rho_\chi(t,s)|^2 ds\right) dt = 2\int_0^T \left(\int_t^T |\chi(s)|^2 ds\right) dt \\ &= 2\int_0^T \mathrm{tr}[(\chi - \sigma(\chi))(t)] dt.\end{aligned}$$

将这些代入 $\eta = \rho_{\sigma(\chi)}$ 和 $\rho = \rho_\chi$ 对应的 (3.1.5)，得到 (4.1.3)。

由伊藤公式和 $\sigma(\chi)$ 的定义，我们知道

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left\langle \left(\int_t^T \chi(u)^\dagger \chi(u) du\right)\theta(t), d\theta(t)\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T |\chi(t)\theta(t)|^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}\left[\int_t^T \chi(u)^\dagger\chi(u)du\right] dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T |\chi(t)\theta(t)|^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}\big[(\chi-\sigma(\chi))(t)\big] dt.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)} = \int_0^T \langle \chi(t)\theta(t), d\theta(t)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T |\chi(t)\theta(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}\big[(\chi-\sigma(\chi))(t)\big] dt.$$

将其代入 (4.1.3)，得到 (4.1.4)。 □

根据这个定理，求值二次型 $\mathfrak{p}_\sigma$的拉普拉斯变换，归结为求出 $\sigma(\chi) = \sigma$的 χ。在讨论这个问题之前，我们先介绍定理（4.1.2）在关于钉住测度的积分 $e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}}$ 中的一个应用。在此过程中，我们还会看到，变换 $\iota + F_{\widehat{\kappa_A\,\rho_\chi()}}$有一个更显式的表达式。

我们简要回顾一下钉住测度。详情请参见 [27,§5.4]。令

$$\mathbb{D}^{-\infty,\infty}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\bigcap_{p\in(1,\infty)}(\mathbb{D}^{k,p})'\quad\text{and}\quad\mathbb{D}^{\infty,1+}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\bigcup_{p\in(1,\infty)}\mathbb{D}^{k,p},$$

其中 $(\mathbb{D}^{k,p})'$ 是 $\mathbb{D}^{k,p}$的对偶空间。对于 $\xi\in\mathbb{D}^{-\infty,\infty}$，我们用 $\xi[\Psi]$ 表示其在$\Psi\in\mathbb{D}^{\infty,1+}$ 处的取值。每个 $\Phi\in\mathbb{D}^{\infty}$ 都可通过 L^2内积视为 $\mathbb{D}^{\infty,1+}$ 的一个元素：

$$\Phi[\Psi]=\int_{\mathcal{W}}\Psi\Phi d\mu\quad\text{for }\Psi\in\mathbb{D}^{\infty,1+}\subset L^{1+}(\mu).$$

设 $N\in\mathbb{N}$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 是 $\mathbb{R}^N$上的快速衰减函数空间， $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 是 $\mathbb{R}^N$上的温和分布空间。假设 $\Phi=(\Phi^1,\dots,\Phi^N)\in\mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 是非退化的，即

$$\Big\{\det\big[\big(\langle\mathrm{D}\Phi^i,\mathrm{D}\Phi^j\rangle_{\mathcal{H}}\big)_{1\le i,j\le N}\big]\Big\}^{-1}\in\bigcap_{p\in(1,\infty)}L^p(\mu).$$

映射 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)\ni u\mapsto u(\Phi)\in\mathbb{D}^{-\infty,\infty}$可扩展为连续映射$\mathfrak{C}\colon\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{D}^{-\infty,\infty}$。沿用 $u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 的记号，我们将 $\mathfrak{C}(u)$ 在 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 处的值记作 $u(\Phi)$，并将 $u(\Phi)$ 在 $\Psi\in\mathbb{D}^{\infty,1+}$ 处的值写为

$$\int_{\mathcal{W}}\Psi u(\Phi)d\mu.$$

我们将 $u(\Phi)$称为 u 在 Φ下的拉回。此外，我们注意到

$$fe^{\mathfrak{a}}\in\mathbb{D}^{\infty,1+}\quad\text{for }f\in\mathbb{D}^{\infty}\text{ and }\mathfrak{a}\in\mathbb{D}^{\infty}\text{ with }e^{\mathfrak{a}}\in L^{1+}(\mu).\tag{4.1.5}$$

事实上，根据 D ([27, 定理5.2.8 和推论5.3.2])的链式法则，我们可以将 $e^{\mathfrak{a}}$ 的高阶 $\mathcal{H}$-导数表示为

$$\mathrm{D}^k e^{\mathfrak{a}}=e^{\mathfrak{a}}\sum_{\substack{j_1,\dots,j_k\ge0\\ j_1+\cdots+j_k=k}}c_{j_1,\dots,j_k}(\mathrm{D}^{j_1}\mathfrak{a}\otimes\cdots\otimes\mathrm{D}^{j_k}\mathfrak{a})\quad\text{with }c_{j_1,\dots,j_k}\in\mathbb{R}.$$

因此， $e^{\mathfrak{a}}\in\mathbb{D}^{\infty,\,1+}$，也如此。令 δ_z 为 $\mathbb{R}^N$ 上集中于 $z\in\mathbb{R}^N$的狄拉克测度 $\delta_z(\Phi)\in\bigcap(\mathbb{D}^{2N+2,\,p})'$ 以及 $\delta_z(\Phi)$确定了一个有限测度$_{p\in(1,\,\infty)}$

在 $\mathcal{W}$ ([27, 定理 5.4.15])上。该测度也记作 $\delta_z(\Phi)d\mu$，并称为由 Φ 在 z 处诱导的钉住测度（参见[27, 例 5.4.17]）。

令 $C^k([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$表示 $k\in\mathbb{N}$ 上的 $\mathbb{R}^{d\times d}$值 k次连续可微函数空间。对于对称正定的 $V\in\mathbb{R}^{d\times d}$，定义函数 $g_V\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 如下

$$g_V(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d\det V}}e^{-\frac{1}{2}\langle V^{-1}x,x\rangle}\quad\text{for }x\in\mathbb{R}^d.$$

(4.1.6) 定理。 设 $\chi\in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$。假设存在一个具有以下性质的 $\alpha\in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$

$$\alpha(T)=I_d,\quad\det\alpha(t)\ne0\ \ \textit{for every } t\in[0,T],\quad\textit{and}\quad\chi=\alpha'\alpha^{-1}.\tag{4.1.7}$$

则有以下结论。
(i) 定义 $\boldsymbol{\xi}_\alpha$： $\mathcal{W} \to \mathcal{W}$ 为

$$(\boldsymbol{\xi}_\alpha(\cdot))(t) = \alpha(t) \int_0^t \alpha(s)^{-1} d\theta(s) \quad for\ t \in [0,T],$$

其中 $(\boldsymbol{\xi}_\alpha(w))(t)$ 是 $\boldsymbol{\xi}_\alpha(w) \in \mathcal{W}$在 $t \in [0,T]$ 处对 $w \in \mathcal{W}$的求值。则有

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)} + \mathrm{D}^* h} d\mu = \left(\frac{e^{-\int_0^T \mathrm{tr}[\sigma(\chi)(t)]dt}}{\det \alpha(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\boldsymbol{\xi}_\alpha) e^{\int_0^T \langle h'(t), d\xi_\alpha(t) \rangle} d\mu \tag{4.1.8}$$

对任意 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 和 $h \in \mathcal{H}$，其中 $\{\xi_\alpha(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是如下给出的随机过程$\xi_\alpha(t)$ $=(\boldsymbol{\xi}_\alpha(\cdot))(t)$，而 $d\xi_\alpha(t)$ 表示其伊藤积分。(ii) 令 $t \in (0、T]$ 并令

$$v_t(\alpha) = \int_0^t (\alpha(t)\alpha(s)^{-1})(\alpha(t)\alpha(s)^{-1})^\dagger ds.$$

则有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}} \delta_y(\theta(t)) d\mu = \left(\frac{e^{-\int_0^T \mathrm{tr}[\sigma(\chi)(t)]dt}}{\det \alpha(0)} \right)^{\frac{1}{2}} g_{v_t(\alpha)}(y) \quad for\ y \in \mathbb{R}^d. \tag{4.1.9}$$

(4.1.10) 注。 (i) 由 (4.1.7) 以及 α的连续性可知，对于任意 $t \in [0,T]$，$\det\ \alpha(t) > 0$。因此，$\{\det\ \alpha(0)\}^{\frac{1}{2}}$是一个实数。
(ii) 根据伊藤公式以及 α 与 χ之间的关系，有

$$d\xi_\alpha(t) = d\theta(t) + \chi(t)\xi_\alpha(t)dt. \tag{4.1.11}$$

因此，随机过程 $\{\xi_\alpha(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一个 Itô 过程，其 Itô 积分有定义。

证明。(i) 定义连续线性算子 $A_\alpha : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ 为

$$(A_\alpha w)(t) = -\alpha(t) \int_0^t (\alpha^{-1})'(s) w(s) ds \quad \text{for } t \in [0,T] \text{ and } w \in \mathcal{W}.$$

我们将证明 $\iota + A_\alpha$ 是 $\iota + G_\chi$的连续逆。为此，令 $h \in \mathcal{H}$。对 $[0,T]$进行分部积分，可得

$$(A_\alpha h)(t) = -h(t) + \alpha(t) \int_0^t \alpha(s)^{-1} h'(s) ds \quad \text{for } t \in [0,T].$$

因此我们得到

$$\big((\iota + A_\alpha)h\big)(t) = \alpha(t) \int_0^t \alpha(s)^{-1} h'(s) ds \quad \text{for } t \in [0,T].$$

由于

$$(G_\chi g)(t) = -\int_0^t \alpha'(s)\alpha(s)^{-1} g(s) ds \quad \text{for } g \in \mathcal{H} \text{ and } t \in [0,T],$$

我们看到

$$\big(\big[(\iota+A_\alpha)\circ(\iota+G_\chi)\big]h\big)(t)=\alpha(t)\int_0^t\alpha(s)^{-1}\big\{h'(s)-\alpha'(s)\alpha^{-1}(s)h(s)\big\}ds$$
$$=\alpha(t)\int_0^t(\alpha^{-1}h)'(s)ds=h(t)$$

and

$$\big(\big[(\iota+G_\chi)\circ(\iota+A_\alpha)\big]h\big)(t)=\alpha(t)\int_0^t\alpha^{-1}(s)h'(s)ds-\int_0^t\alpha'(s)\bigg(\int_0^s\alpha^{-1}(u)h'(u)du\bigg)ds$$
$$=\int_0^t h'(u)du=h(t)$$

对于 $t\in[0,T]$。因此有

$$\big((\iota+A_\alpha)\circ(\iota+G_\chi)\big)h=\big((\iota+G_\chi)\circ(\iota+A_\alpha)\big)h=h\quad\text{for every } h\in\mathcal{H}.$$

由于 A_α 和 G_χ 在 $\mathcal{W}$上的连续性，这些等式在 $\mathcal{W}$上仍然成立，即有

$$\big((\iota+A_\alpha)\circ(\iota+G_\chi)\big)w=\big((\iota+G_\chi)\circ(\iota+A_\alpha)\big)w=w\quad\text{for every } w\in\mathcal{W}.$$

根据定理（2.2.1），有

$$(\iota+F_{\widehat{\kappa_A(\rho_\chi)}})\circ(\iota+G_\chi)=(\iota+G_\chi)\circ(\iota+F_{\widehat{\kappa_A(\rho_\chi)}})=\iota\quad\mu\text{-a.s.}$$

将此结果与上述恒等式结合起来，可知

$$\iota+F_{\widehat{\kappa_A(\rho_\chi)}}=\iota+A_\alpha\quad\mu\text{-a.s.}$$

根据伊藤公式，可知

$$\int_0^t(\alpha^{-1})'(s)\theta(s)ds=\alpha(t)^{-1}\theta(t)-\int_0^t\alpha(s)^{-1}d\theta(s)\quad\text{for } t\in[0,T].$$

于是有

$$\iota+F_{\widehat{\kappa_A(\rho_\chi)}}=\boldsymbol{\xi}_\alpha.\tag{4.1.12}$$

由于

$$(\det\alpha)'=(\mathrm{tr}[\alpha'\alpha^{-1}])\det\alpha=(\mathrm{tr}\chi)\det\alpha,\quad\det\alpha(T)=1,$$

我们有

$$\det\alpha(0)=e^{-\int_0^T\mathrm{tr}\chi(t)dt}.\tag{4.1.13}$$

如果 $h\in\mathcal{H}$ 具有如下形式

$$h'=\sum_{n=0}^{N-1}\mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1})}e_n$$

其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$与 e_0，……， $e_{N-1}\in\mathbb{R}^d$，则

$$\mathrm{D}^*h=\sum_{n=0}^{N-1}\langle e_n,\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)\rangle.$$

这意味着

$$(\mathrm{D}^*h)(\boldsymbol{\xi}_\alpha)=\sum_{n=0}^{N-1}\langle e_n,\xi_\alpha(t_{n+1})-\xi_\alpha(t_n)\rangle=\int_0^T\langle h'(t),d\xi_\alpha(t)\rangle.$$

因此，通过标准极限过程，我们得到

$$(\mathrm{D}^*h)(\boldsymbol{\xi}_\alpha)=\int_0^T\langle h'(t),d\xi_\alpha(t)\rangle\quad\text{for each } h\in\mathcal{H}.$$

将此式、（4.1.12）和（4.1.13）代入（4.1.3），即可得到（4.1.8）。
（ii）设 $t\in(0,\ T]$。注意， $v_t(\alpha)$ 是对称正定的。因此， $\xi_\alpha(t)=(\boldsymbol{\xi}_\alpha(\cdot))(t)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上服从均值为 0、协方差矩阵为 $v_t(\alpha)$ 的正态分布。由（4.1.8）和 [27, 定理5.4.11], ，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)\bigg(\int_{\mathcal{W}}e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}}\delta_y(\theta(t))d\mu\bigg)dy=\int_{\mathcal{W}}\varphi(\theta(t))e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}}d\mu\\&=\left(\frac{e^{-\int_0^T\mathrm{tr}[\sigma(\chi)(t)]dt}}{\det\alpha(0)}\right)^{\frac12}\int_{\mathcal{W}}\varphi(\xi_\alpha(t))d\mu=\left(\frac{e^{-\int_0^T\mathrm{tr}[\sigma(\chi)(t)]dt}}{\det\alpha(0)}\right)^{\frac12}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)g_{v_t(\alpha)}(y)dy\end{aligned}$$

对每个 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 都成立。因此，（4.1.9）成立。 □

（4.1.14）注。如定理（4.1.6）的证明中所见，恒等式（4.1.9）是（4.1.8）的直接推论。稍加努力，我们便可将（4.1.9）推广到关于钉住测度的更一般积分。为此，我们继续在定理（4.1.6）的同一假设下进行讨论。令 $N\in\mathbb{N}$，并取 $k_0\in\mathcal{H}$ 和 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ \ldots\ldots,\ k_N)\in\mathcal{H}^N$，使得 $\det C(\boldsymbol{k})\neq0$，其中 $C(\boldsymbol{k})=\big(\langle k_i,\ k_j\rangle_{\mathcal{H}}\big)_{1\le i,\ j\le N}$。令 $\mathrm{D}^*\boldsymbol{k}=(\mathrm{D}^*k_1,\ \ldots\ldots,\ \mathrm{D}^*k_N)$。定义 $\kappa[\alpha]\in\mathscr{L}_2$ 如下

$$\kappa[\alpha](t,s)=\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\alpha'(t)\bigg\{\alpha(s)^{-1}+\bigg(\int_0^s\alpha(u)^{-1}\big(\alpha(u)^{-1}\big)^\dagger du\bigg)\alpha'(s)^\dagger\bigg\}\quad\text{for }(t,s)\in[0,T]^2.$$

Set

$$\Gamma[\alpha]=\Big(\big\langle(I+B_{\kappa[\alpha]}+B^*_{\kappa[\alpha]})k_p,k_q\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big)_{0\le p,q\le N}\in\mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}.$$

用 $(x^0,\ x^1,\ \ldots\ldots,\ x^N)$ 表示 $\mathbb{R}^{N+1}$ 上的坐标系，并令 $P_\alpha(dx^0dx^1\ldots dx^N)$ 为 $\mathbb{R}^{N+1}$ 上服从 $N(0,\ \Gamma[\alpha])$ 的高斯分布。我们有

$$\begin{aligned}&\bigg(\int_{\mathcal{W}}e^{\mathfrak{q}_{\sigma(\chi)}+\mathrm{D}^*k_0}\delta_{(x^1,\ldots,x^N)}(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu\bigg)dx^1\cdots dx^N\\&=\left(\frac{e^{-\int_0^T\mathrm{tr}[\sigma(\chi)(t)]dt}}{\det\alpha(0)}\right)^{\frac12}\int_{\mathbb{R}}e^{x^0}P_\alpha(dx^0dx^1\cdots dx^N).\end{aligned}$$

证明。回忆一下，$\mathrm{D}^*\boldsymbol{k}$ 服从 $\mathbb{R}^N$ 上均值为 0、协方差为 $C(\boldsymbol{k})$ 的正态分布。由于对于 $h \in \mathcal{H}$，$\mathrm{D}^*h(\boldsymbol{\xi}_\alpha) = \int_0^T \langle h'(t)\ d\xi_\alpha(t)\rangle$，正如定理（4.1.6）的证明中所见，由 [27, 定理5.4.11], ，由（4.1.8）可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x^1,\dots,x^N)\left(\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_{\sigma(\chi)}+\mathrm{D}^*k_0}\delta_{(x^1,\dots,x^N)}(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu\right)dx^1\cdots dx^N\\
&=\int_{\mathcal{W}} \varphi(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})e^{\mathfrak{q}_{\sigma(\chi)}+\mathrm{D}^*k_0}d\mu\\
&=\left(\frac{e^{-\int_0^T \mathrm{tr}[\sigma(\chi)(t)]dt}}{\det\alpha(0)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathcal{W}}\varphi\left(\int_0^T\langle k_1'(t),d\xi_\alpha(t)\rangle,\dots,\int_0^T\langle k_N'(t),d\xi_\alpha(t)\rangle\right)e^{\int_0^T\langle k_0'(t),d\xi_\alpha(t)\rangle}d\mu
\end{aligned}$$

对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$。注意，$\left(\int_0^T\langle k_p'(t)\ d\xi_\alpha(t)\rangle\right)_{0\le p\le N}$ 在 $\mathbb{R}^{N+1}$ 上服从均值为 0 的正态分布。因此，只需证明

$$\int_{\mathcal{W}}\left(\int_0^T\langle h'(t),d\xi_\alpha(t)\rangle\right)\left(\int_0^T\langle g'(t),d\xi_\alpha(t)\rangle\right)d\mu=\left\langle(I+B_{\kappa[\alpha]}+B^*_{\kappa[\alpha]})h,g\right\rangle_{\mathcal{H}} \tag{4.1.15}$$

对 $h,\ g\in\mathcal{H}$。

令 $h,\ g\in\mathcal{H}$。利用 $\{\xi_\alpha(t)\}_{t\in[0,T]}$ 的随机微分表达式

$$d\xi_\alpha(t)=d\theta(t)+\alpha'(t)\left(\int_0^t\alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right)dt,$$

我们知道

$$\int_0^t\langle h'(s),d\xi_\alpha(s)\rangle=\int_0^t\langle h'(s),d\theta(s)\rangle+\int_0^t\left\langle h'(s),\alpha'(s)\left(\int_0^s\alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right)\right\rangle ds$$

对 $t\in[0,T]$。根据伊藤公式，我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T\langle h'(s),d\xi_\alpha(s)\rangle\right)\left(\int_0^T\langle g'(s),d\xi_\alpha(s)\rangle\right)\\
&=\int_0^T\left\langle\left(\int_0^t\langle h'(s),d\xi_\alpha(s)\rangle\right)g'(t)+\left(\int_0^t\langle g'(s),d\xi_\alpha(s)\rangle\right)h'(t),d\theta(t)\right\rangle\\
&\quad+\int_0^T\left\{\left(\int_0^t\langle h'(s),d\xi_\alpha(s)\rangle\right)\left\langle g'(t),\alpha'(t)\int_0^t\alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle\right.\\
&\qquad\left.+\left(\int_0^t\langle g'(s),d\xi_\alpha(s)\rangle\right)\left\langle h'(t),\alpha'(t)\int_0^t\alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle\right\}dt\\
&\quad+\int_0^T\langle h'(t),g'(t)\rangle dt.
\end{aligned}$$

第一项关于 μ 的积分为零。最后一项恰好是$\langle h,\ g\rangle_{\mathcal{H}}$。因此，需要计算的是中间项的维纳积分。

为计算中间项，将其改写为

$$\left(\int_0^t\langle h'(s),d\xi_\alpha(s)\rangle\right)\left\langle g'(t),\alpha'(t)\int_0^t\alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle$$

$$= \left(\int_0^t \langle h'(s), d\theta(s)\rangle\right)\left\langle g'(t), \alpha'(t)\int_0^t \alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle$$
$$+ \left(\int_0^t \left\langle h'(s), \alpha'(s)\int_0^s \alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle ds\right)\left\langle g'(t), \alpha'(t)\int_0^t \alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle.$$

根据 Itˆo 积分的等距性质，我们有

$$\int_{\mathcal{W}}\left(\int_0^t \langle h'(s), d\theta(s)\rangle\right)\left\langle g'(t), \alpha'(t)\int_0^t \alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle d\mu$$
$$= \left\langle \alpha'(t)^\dagger g'(t), \int_0^t \alpha(u)^{-1}h'(u)du\right\rangle = \left\langle \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\alpha'(t)\alpha^{-1}(s)h'(s)ds, g'(t)\right\rangle$$

and

$$\int_{\mathcal{W}}\left(\int_0^t \left\langle h'(s), \alpha'(s)\int_0^s \alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle ds\right)\left\langle g'(t), \alpha'(t)\int_0^t \alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle d\mu$$
$$= \int_0^t \left\langle \alpha'(s)^\dagger h'(s), \left(\int_0^s \alpha(u)^{-1}(\alpha(u)^{-1})^\dagger du\right)\alpha'(t)^\dagger g'(t)\right\rangle ds$$
$$= \left\langle \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\alpha'(t)\left(\int_0^s \alpha(u)^{-1}(\alpha(u)^{-1})^\dagger du\right)\alpha'(s)^\dagger h'(s)ds, g'(t)\right\rangle.$$

因此我们得到

$$\int_{\mathcal{W}}\left(\int_0^T\left(\int_0^t \langle h'(s), d\xi_\alpha(s)\rangle\right)\left\langle g'(t), \alpha'(t)\int_0^t \alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle dt\right)d\mu = \langle B_{\kappa[\alpha]}h, g\rangle_{\mathcal{H}}.$$

交换 h 与 g，我们有

$$\int_{\mathcal{W}}\left(\int_0^T\left(\int_0^t \langle g'(s), d\xi_\alpha(s)\rangle\right)\left\langle h'(t), \alpha'(t)\int_0^t \alpha(u)^{-1}d\theta(u)\right\rangle dt\right)d\mu = \langle B^*_{\kappa[\alpha]}h, g\rangle_{\mathcal{H}}.$$

由此我们得到(4.1.15)。 □

The as设(4.1.7)等价于常微分方程的唯一解 α

$$\alpha' = \chi\alpha, \quad \alpha(T) = I_d \tag{4.1.16}$$

满足对每一个 $t \in [0,T]$都有行列式 $\alpha(t) \neq 0$。使该结论成立的一个朴素˙充分条件如下。

(4.1.17) 命题。设 $\chi \in C([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$ 并假设

$$T\sqrt{d}\|\chi\|_\infty e^{T\|\chi\|_\infty} < 1, \tag{4.1.18}$$

其中 $\|\chi\|_\infty =$上确界$_{t\in[0,T]}|\chi(t)|$。那么，常微分方程 (4.1.16)的解 $\alpha \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$ 满足 (4.1.7)。特别地，恒等式 (4.1.8) 和 (4.1.9) 成立。

证明。 有

$$|\alpha(T-t)| = \left| I_d - \int_0^t \chi(T-s)\alpha(T-s)ds \right| \le \sqrt{d} + \|\chi\|_\infty \int_0^t |\alpha(T-s)|ds \quad \text{for } t \in [0,T].$$

由格朗沃尔不等式可知

$$\|\alpha\|_\infty \le \sqrt{d} e^{T\|\chi\|_\infty}.$$

因此我们有

$$|I_d - \alpha(t)| = \left| \int_t^T \chi(s)\alpha(s)ds \right| \le T\sqrt{d}\|\chi\|_\infty e^{T\|\chi\|_\infty} < 1.$$

因此，对于任意 $t \in [0,T]$，$\det \alpha(t) \neq 0$。 □

接下来，我们将利用 Riccati 常微分方程构造满足 $\sigma(\chi) = \sigma$ 的 $\chi \in C([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$，给定 $\sigma \in C([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$。具体构造如下。

(4.1.19) 定理。 设 $\sigma \in C([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$。以下三个条件等价。

(i) $e^{\mathfrak{p}_\sigma} \in L^1(\mu)$。(ii) 存在一个 $\chi \in C([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$，满足 $\sigma(\chi) = \sigma$。(iii) 存在一个 $\boldsymbol{R} \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$ 满足取值于 $\mathbb{R}^{d\times d}$ 的 ***Riccati*** 常微分方程

$$\boldsymbol{R}' = -\boldsymbol{R}^2 - \sigma^\dagger \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}\sigma - \sigma^\dagger\sigma, \quad \boldsymbol{R}(T) = 0. \tag{4.1.20}$$

如果这些条件成立，那么 $\chi = \boldsymbol{R} + \sigma$ 并且有

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{p}_\sigma} d\mu = e^{\int_0^T \operatorname{tr}\boldsymbol{R}(t)dt/2} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{\kappa_A(\rho_\chi)}})d\mu \quad \textit{for every } f \in C_b(\mathcal{W}). \tag{4.1.21}$$

需要注意的是，Riccati 常微分方程 (4.1.20) 是从 t=T 向后求解的。正如定理的证明中将看到的，这是因为条件 $\sigma = \sigma(\chi)$ 给出了向后方程，即

$$\sigma(t) = \chi(t) - \int_t^T \chi(u)^\dagger \chi(u)du \quad \text{for } t \in [0,T].$$

为证明这一点，我们先准备一个关于勒贝格积分的初等引理。

(4.1.22) 引理。 设 $t \in (0,T]$。若 $f \in L^2([0,t]; \mathbb{R})$ 满足

$$\iint_{[0,t]^2} |f(s_1) - f(s_2)|^2 ds_1 ds_2 = 0,$$

则有

$$f(u) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds \quad a.e.\ u \in [0,t].$$

证明。只需证明 $[0,t]$ 上 f 的本质上确界 M 等于其本质下确界 m（在 $[0,t]$ 上）。事实上，若如此，则在 $[0,t]$ 上几乎处处有 $f=M$，且 $\int_0^t f(s)ds = tM$。

我们用反证法证明等式 $M=m$。为此，假设 $M>m$。令 $A_1=\{s\in[0,t]\mid f(s)\geq M-\frac{M-m}{3}\}$ 且 $A_2=\{s\in[0,t]\mid f(s)\leq m+\frac{M-m}{3}\}$。根据 M 和 m的定义， A_1 和 A_2的勒贝格测度 $\lambda(A_1)$ 和 $\lambda(A_2)$ 分别都为正。因此有

$$\begin{aligned}0&=\iint_{[0,t]^2}|f(s_1)-f(s_2)|^2ds_1ds_2\geq\iint_{A_1\times A_2}|f(s_1)-f(s_2)|^2ds_1ds_2\\&\geq\Big(\frac{M-m}{3}\Big)^2\lambda(A_1)\lambda(A_2)>0,\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

定理（*4.1.19*）的证明。在定理（4.1.2）中，我们已经证明了 (ii) 推出 (i)。

为证明 (ii) 推出 (iii)，令 χ 如 (ii) 中所述，并设 $\boldsymbol{R}=\chi-\sigma$。根据 (4.1.1)，有

$$\boldsymbol{R}(t)=\int_t^T\chi(s)^\dagger\chi(s)ds\quad\text{for } t\in[0,T].$$

因此 $\boldsymbol{R}\in C^1([0,T];\,\mathbb{R}^{d\times d})$。这个恒等式还表明 $\boldsymbol{R}^\dagger=\boldsymbol{R}$，从而 $\chi^\dagger=\boldsymbol{R}+\sigma^\dagger$。于是该恒等式可改写为

$$\boldsymbol{R}(t)=\int_t^T(\boldsymbol{R}(s)+\sigma(s)^\dagger)(\boldsymbol{R}(s)+\sigma(s))ds\quad\text{for } t\in[0,T].\tag{4.1.23}$$

这正是 Riccati 常微分方程（4.1.20）的积分表达式。

为证明 (iii) 蕴含 (ii)，令 $\boldsymbol{R}\in C^1([0,T];\,\mathbb{R}^{d\times d})$ 为 Riccati 常微分方程（4.1.20）的解。对该常微分方程取转置，可见 $\boldsymbol{R}^\dagger$ 满足相同的常微分方程。因此 $\boldsymbol{R}^\dagger=\boldsymbol{R}$。令 $\chi=\boldsymbol{R}+\sigma$。于是 $\chi\in C([0,T];\,\mathbb{R}^{d\times d})$ 且 $\chi^\dagger=\boldsymbol{R}+\sigma^\dagger$。将这些代入 Riccati 常微分方程的积分表达式（ 4.1.23 ），可得

$$\chi(t)-\sigma(t)=\int_t^T\chi(u)^\dagger\chi(u)du\quad\text{for } t\in[0,T].$$

因此 $\sigma(\chi)=\sigma$，即 (ii) 成立。

我们证明 (i) 蕴含 (ii)。由于 $\mathfrak{p}_\sigma=\mathfrak{q}_{\rho_\sigma}$，根据定理（3.1.1），存在一个 $\rho\in\mathcal{S}_2$，满足 $\eta(\kappa_A(\rho))\overset{(\mathscr{L}_2)}{=}\rho_\sigma$。因此我们有

$$\int_0^T\left(\int_0^t\left|\sigma(t)-\rho(t,s)+\int_t^T\rho(t,u)\rho(u,s)du\right|^2ds\right)dt=0.\tag{4.1.24}$$

令

$$\gamma(t,s_1,s_2)=\rho(t,s_1)-\rho(t,s_2)\quad\text{for } (t,s_1,s_2)\in[0,T]^3,$$

我们证明

$$\int_0^T\left(\iint_{[0,t]^2}|\gamma(t,s_1,s_2)|^2ds_1ds_2\right)dt=0.\tag{4.1.25}$$

为说明这一点，注意到 (4.1.24) 得出

$$\int_0^T \left(\iint_{[0,t]^2} \left| \gamma(t,s_1,s_2) - \int_t^T \rho(t,u)\gamma(u,s_1,s_2)du \right|^2 ds_1 ds_2 \right) dt = 0. \tag{4.1.26}$$

取一个 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$\iint_{[a,a+\frac{T}{N}]\times[0,T]} |\rho(t,s)|^2 dtds < \frac{1}{2} \quad \text{for any } a \in [0,T_1],$$

其中，对于 $0 \leq n \leq T$，$T_n = T - \frac{nT}{N}$。由 (4.1.26) 和施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^T \left(\iint_{[0,t]^2} |\gamma(t,s_1,s_2)|^2 ds_1 ds_2 \right) dt \\
&\leq \int_{T_1}^T \left(\int_t^T |\rho(t,u)|^2 du \right) \left(\iint_{[0,t]^2} \left(\int_t^T |\gamma(v,s_1,s_2)|^2 dv \right) ds_1 ds_2 \right) dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{T_1}^T \left(\iint_{[0,v]^2} |\gamma(v,s_1,s_2)|^2 ds_1 ds_2 \right) dv.
\end{aligned}$$

因此有

$$\int_{T_1}^T \left(\iint_{[0,t]^2} |\gamma(t,s_1,s_2)|^2 ds_1 ds_2 \right) dt = 0.$$

这意味着 (4.1.26) 对 T 以及 T_1 成立。完全按照上述方法，只是这次将 T 换成 T_1，可得

$$\int_{T_2}^{T_1} \left(\iint_{[0,t]^2} |\gamma(t,s_1,s_2)|^2 ds_1 ds_2 \right) dt = 0.$$

依次继续这一论证，可得

$$\int_{T_n}^{T_{n-1}} \left(\iint_{[0,t]^2} |\gamma(t,s_1,s_2)|^2 ds_1 ds_2 \right) dt = 0 \quad \text{for } 1 \leq n \leq N.$$

因此 (4.1.25) 成立。

定义 $\chi_0 \colon [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 为 $\chi_0(0) = 0$ 且

$$\chi_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \rho(t,s)ds \quad \text{for } t \in (0,T].$$

由 (4.1.25)，对 ρ 的每个分量应用引理 (4.1.22)，我们看到

$$\int_0^T \left(\int_0^t |\rho(t,s) - \chi_0(t)|^2 ds \right) dt = 0.$$

由于 $\rho \in \mathcal{S}_2$，交换积分次序并互换 t 和 s，我们可以将该方程改写为

$$\int_0^T \left(\int_t^T |\rho(t,s) - \chi_0(s)^\dagger|^2 ds \right) dt = 0.$$

将这些代入 (4.1.24)，可得

$$\int_0^T \left| \sigma(t) - \chi_0(t) + \int_t^T \chi_0(u)^\dagger \chi_0(u) du \right|^2 dt = 0.$$

定义 $\chi \in C([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$ 为

$$\chi(t) = \sigma(t) + \int_t^T \chi_0(u)^\dagger \chi_0(u) du \quad \text{for } t \in [0,T].$$

由上述恒等式，我们得到 $\sigma(\chi) = \sigma$。因此 (iii) 成立。

我们证明第二个断言。正如在 (ii) 与 (iii) 的等价的证明中所见，我们有 $\chi = \boldsymbol{R} + \sigma$。于是成立

$$\chi - \sigma(\chi) = \chi - \sigma = \boldsymbol{R}.$$

将此代入 (4.1.3)，我们得到 (4.1.21)。 □

(4.1.27) 注。对于 $\eta \in \mathscr{S}_2$，成立

$$\langle B_\eta h, h\rangle_{\mathcal{H}} = 2\int_0^T \left\langle \int_0^t \eta(t,s) h'(s) ds, h'(t) \right\rangle dt.$$

特别地，我们有

$$\langle B_{\rho_\sigma} h, h\rangle_{\mathcal{H}} = 2\int_0^T \langle \sigma(t)h(t), h'(t)\rangle dt \quad \text{for } \sigma \in C([0,T]; \mathbb{R}^{d\times d}).$$

因此，我们知道

$$\Lambda(B_{\rho_\sigma}) = 2 \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \int_0^T \langle \sigma(t)h(t), h'(t)\rangle dt.$$

回顾 $\mathfrak{p}_\sigma = \mathfrak{q}_{\rho_\sigma}$。根据引理（2.1.13），为使 $e^{\mathfrak{p}_\sigma} \in L^1(\mu)$ 成立，充要条件是

$$\sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \int_0^T \langle \sigma(t)h(t), h'(t)\rangle dt < \frac{1}{2}. \tag{4.1.28}$$

因此，根据定理（4.1.19），若该条件成立，则 Riccati 常微分方程 (4.1.20) 存在 C^1-解。

将记号 $\Lambda(B)$ 推广到 $B \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H}^{\otimes 2})$，我们令 $\Lambda(M) = \sup \langle Mx, x\rangle$ 对于$_{x\in\mathbb{R}^d, |x|=1}$ $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$。对于满足 $\|h\|_{\mathcal{H}} = 1$ 的 $h \in \mathcal{H}$，有

$$\left| \int_0^T \langle \sigma(t)h(t), h'(t)\rangle dt \right| \le \left(\int_0^T |\sigma(t)h(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^T t\Lambda(\sigma(t)^\dagger \sigma(t)) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此，(4.1.28) 成立的一个充分条件是

$$\int_0^T t\Lambda(\sigma(t)^\dagger \sigma(t)) dt < \frac{1}{4}.$$

如果 $\sigma \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$，则定理（4.1.19）中的 Riccati 常微分方程可以替换为如下二阶线性常微分方程。

(4.1.29) 推论. 设 $\sigma \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ 与 $\boldsymbol{S} \in C^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ 为二阶常微分方程的解

$$\boldsymbol{S}'' - 2\sigma_A \boldsymbol{S}' - \sigma' \boldsymbol{S} = 0, \quad \boldsymbol{S}(T) = I_d, \quad \boldsymbol{S}'(T) = \sigma(T), \tag{4.1.30}$$

其中 $\sigma_A = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma^\dagger)$。则定理 *(4.1.19)* 中的等价条件 (i)、(ii) 与 (iii) 也等价于如下条件：

(iv) 行列式 $\boldsymbol{S}(t) \neq 0$ 对任意 $t \in [0,T]$。

若这些条件成立，则 $\sigma = \sigma(\chi)$ 连同 $\chi = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}^{-1}$，并且成立

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{p}_\sigma + \mathrm{D}^* h} d\mu = \left(\frac{e^{-\int_0^T \mathrm{tr}\sigma_S(t)dt}}{\det \boldsymbol{S}(0)}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{S}}) e^{\int_0^T \langle h'(t), d\xi_{\boldsymbol{S}}(t)\rangle} d\mu \tag{4.1.31}$$

对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 与 $h \in \mathcal{H}$，其中 $\sigma_S = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^\dagger)$，并且

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{p}_\sigma} \delta_y(\theta(t)) d\mu = \left(\frac{e^{-\int_0^T \mathrm{tr}\sigma_S(t)dt}}{\det \boldsymbol{S}(0)}\right)^{\frac{1}{2}} g_{v_t(\boldsymbol{S})}(y) \quad for\ t \in (0,T]\ and\ y \in \mathbb{R}^d. \tag{4.1.32}$$

证明. 取一个具有如下性质的 $\tau \in [0,T)$：对任意 $t \in [\tau,T]$，行列式 $\boldsymbol{S}(t) \neq 0$。由于行列式 $\boldsymbol{S}(T) = 1$，这样的 τ存在。定义 $\boldsymbol{R}_\tau \in C^1([\tau,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ 为

$$\boldsymbol{R}_\tau(t) = \boldsymbol{S}'(t)\boldsymbol{S}(t)^{-1} - \sigma(t) \quad \text{for } t \in [\tau,T].$$

由（4.1.30），我们有

$$\boldsymbol{R}_\tau' = -\boldsymbol{R}_\tau^2 - \sigma^\dagger \boldsymbol{R}_\tau - \boldsymbol{R}_\tau \sigma - \sigma^\dagger \sigma, \quad \boldsymbol{R}_\tau(T) = 0.$$

因此，$\boldsymbol{R}_\tau$在 $[\tau,T]$上满足 Riccati 常微分方程（4.1.20）。

假设对任意 $t \in [0,T]$，$\det \boldsymbol{S}(t) \neq 0$。在上述观察中令 $\tau = 0$，我们知道 $\boldsymbol{R}_0 \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$是 Riccati 常微分方程（4.1.20）的解。因此，定理（4.1.19）中的条件 (iii) 成立。

假设定理（4.1.19）中的条件 (iii) 成立。因此，存在一个 $\boldsymbol{R} \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$，它满足 Riccati 常微分方程（4.1.20）。令

$$\tau_0 = \inf\left\{\tau \in [0,T] \,\middle|\, \det \boldsymbol{S}(t) \neq 0 \text{ for any } t \in [\tau,T]\right\}.$$

由于 $\det \boldsymbol{S}(T) = 1$，$\tau_0 < T$。令 $\tau \in (\tau_0, T]$。根据第一段中的观察以及 Riccati 常微分方程解的唯一性，我们有，对 $t \in [\tau,T]$，$\boldsymbol{R}_\tau(t) = \boldsymbol{R}(t)$。回忆一下，对 $t \in [\tau,T]$，$(\det \boldsymbol{S})'(t) = [\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}^{-1})(t)] \det \boldsymbol{S}(t)$。因此我们有

$$\det \boldsymbol{S}(\tau) = e^{-\int_\tau^T \mathrm{tr}[(\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}^{-1})(t)]dt} = e^{-\int_\tau^T \mathrm{tr}[\boldsymbol{R}_\tau(t)+\sigma(t)]dt} = e^{-\int_\tau^T \mathrm{tr}[\boldsymbol{R}(t)+\sigma(t)]dt}.$$

令 $\tau \searrow \tau_0$，我们得到

$$\det \boldsymbol{S}(\tau_0) = e^{-\int_{\tau_0}^T \mathrm{tr}[\boldsymbol{R}(t)+\sigma(t)]dt} \neq 0. \tag{4.1.33}$$

这意味着 $\tau_0 = 0$。事实上，若 $\tau_0 > 0$，则由 $\boldsymbol{S}$ 在 $t = \tau_0$ 处的连续性及 (4.1.33)，存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得 $\tau_0 \le \tau_0 - \varepsilon$，这就产生了矛盾。由 $\boldsymbol{S}$ 在 $t = 0$ 处的连续性以及当 $\tau_0 = 0$ 时的 (4.1.33)，我们得到，对于任意 $t \in [0, T]$，$\det \boldsymbol{S}(t) \neq 0$。

假设对任意 $t \in [0, T]$，都有 $\det \boldsymbol{S}(t) \neq 0$。那么 $\boldsymbol{R}_0$ 满足 Riccati 常微分方程（4.1.20）。根据定理（4.1.19），$\sigma(\chi) = \sigma$，其中 $\chi = R_0 + \sigma = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}^{-1}$。由关于 χ 的这个恒等式以及定理（4.1.6），我们得到（4.1.31）和（4.1.32）。 □

我们给出推论（4.1.29）的一个例子，接下来两节将用到它。在这个例子中，我们使用矩阵函数 $\mathfrak{e}$，$\mathfrak{ch}$，$\mathfrak{sh}$，$\widehat{\mathfrak{sh}}$，$\widehat{\mathfrak{th}}$：$\mathbb{C}^{d\times d} \to \mathbb{C}^{d\times d}$ 定义如下

$$\mathfrak{e}[M] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n, \quad \mathfrak{ch}[M] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} M^{2n}, \quad \mathfrak{sh}[M] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} M^{2n+1},$$
$$\widehat{\mathfrak{sh}}[M] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} M^{2n}, \quad \widehat{\mathfrak{th}}[M'] = \widehat{\mathfrak{sh}}[M'](\mathfrak{ch}[M'])^{-1}$$

对于 M，$M' \in \mathbb{C}^{d\times d}$，且 $\det \mathfrak{ch}[M'] \neq 0$。

(4.1.34) 例。取 A，$D \in \mathbb{R}^{d\times d}$，其中 $A^\dagger = -A$ 且 $D^\dagger = D$。定义二次维纳泛函 $\mathfrak{s}_{A,\,D}$：$\mathcal{W} \to \mathbb{R}$ 如下

$$\mathfrak{s}_{A,D} = \int_0^T \langle A\theta(t), d\theta(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle D\theta(T), \theta(T)\rangle.$$

由于

$$\frac{1}{2}\langle D\theta(T), \theta(T)\rangle = \int_0^T \langle D\theta(t), d\theta(t)\rangle + \frac{T}{2}\mathrm{tr}D,$$

若令 $\sigma \in C^1([0, T];\, \mathbb{R}^{d\times d})$ 为 $\sigma \equiv A + D$，则有

$$\mathfrak{s}_{A,D} = \mathfrak{p}_\sigma + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}\sigma_S(t)dt \tag{4.1.35}$$

此 σ 的常微分方程 (4.1.30) 可写为

$$\boldsymbol{S}'' - 2A\boldsymbol{S}' = 0, \quad \boldsymbol{S}(T) = I_d,\ \boldsymbol{S}'(T) = A + D.$$

将其视为关于 $\boldsymbol{S}'$ 的常微分方程，可得

$$\boldsymbol{S}'(s) = \mathfrak{e}[2(s-T)A](A + D) \quad \text{for } s \in [0, T].$$

注意到

$$\frac{d}{ds}\Big(s\mathfrak{e}[sA]\widehat{\mathfrak{sh}}[sA]\Big) = \mathfrak{e}[2sA],$$

我们有

$$\begin{aligned} I_d - \boldsymbol{S}(t) &= \int_t^T \boldsymbol{S}'(s)ds = (s-T)\mathfrak{e}[(s-T)A]\widehat{\mathfrak{sh}}[(s-T)A](A+D)\Big|_{s=t}^{s=T} \\ &= -(t-T)\mathfrak{e}[(t-T)A]\widehat{\mathfrak{sh}}[(t-T)A](A+D) \end{aligned}$$

$$= -\mathfrak{e}[(t-T)A]\mathfrak{sh}[(t-T)A] - (t-T)\mathfrak{e}[(t-T)A]\widehat{\mathfrak{sh}}[(t-T)A]D.$$

将 I_d 重写为 $\mathfrak{e}[(t-T)A]\mathfrak{e}[-(t-T)A]$，我们得到

$$\boldsymbol{S}(t) = \mathfrak{e}[(t-T)A]\Big\{\mathfrak{ch}[(t-T)A] + (t-T)\widehat{\mathfrak{sh}}[(t-T)A]D\Big\}.$$

由于 A 是反对称的，因此存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 以及非零的 λ_1、……、$\lambda_k \in \mathbb{R}$，使得

$$A = U^*\mathrm{diag}\big[\mathrm{i}\lambda_1, -\mathrm{i}\lambda_1, \dots, \mathrm{i}\lambda_k, -\mathrm{i}\lambda_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-2k}\big]U. \tag{4.1.36}$$

对于每个 $a \in \mathbb{R}$，此表达式意味着

$$\mathfrak{e}[aA] = U^*\mathrm{diag}\big[e^{\mathrm{i}\lambda_1 a}, e^{-\mathrm{i}\lambda_1 a}, \dots, e^{\mathrm{i}\lambda_k a}, e^{-\mathrm{i}\lambda_k a}, 1, \dots, 1\big]U$$

因此

$$\det \mathfrak{e}[aA] = 1.$$

定义 $T_0 > 0$，使得

$$T_0 = \inf\Big\{t \geq 0 \;\Big|\; \det\Big(\mathfrak{ch}[tA] - t\widehat{\mathfrak{sh}}[tA]D\Big) = 0\Big\}.$$

由 $\boldsymbol{S}$的上述表达式可知

$$\det \boldsymbol{S}(t) \neq 0 \text{ for any } t \in [0,T] \quad \text{if and only if} \quad T < T_0.$$

当 $d = 2$、$A \neq 0$和 D 均为对角矩阵时，我们有显式表达式 T_0。事实上，此时存在 a、b、$c \in \mathbb{R}$，其中 $a \neq 0$，使得 $A = aJ$且 $D = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$，其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$与例（1.2.1）中相同。通过直接计算可知

$$\mathfrak{ch}[\omega J] = \begin{pmatrix} \cos\omega & 0 \\ 0 & \cos\omega \end{pmatrix}, \quad \omega\widehat{\mathfrak{sh}}[\omega J] = \begin{pmatrix} \sin\omega & 0 \\ 0 & \sin\omega \end{pmatrix} \quad \text{for } \omega \in \mathbb{R}.$$

因此有

$$\begin{aligned}\det\Big(\mathfrak{ch}[tA] - t\widehat{\mathfrak{sh}}[tA]D\Big) &= \Big(\cos(at) + \frac{b}{a}\sin(at)\Big)\Big(\cos(at) + \frac{c}{a}\sin(at)\Big) \\ &= \Big(\cos(|a|t) + \frac{b}{|a|}\sin(|a|t)\Big)\Big(\cos(|a|t) + \frac{c}{|a|}\sin(|a|t)\Big).\end{aligned}$$

函数 $\tan_{[0,\pi)}\colon [0,\pi) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 定义为：若 $\omega \neq \frac{\pi}{2}$，则 $\tan_{[0,\pi)}\omega = \tan\omega$；若 $\omega = \frac{\pi}{2}$，则 $= \infty$。该函数是双射。将其反函数记为 $\tan^{-1}_{[0,\pi)}$，可得

$$T_0 = \frac{1}{|a|}\min\Big\{\tan^{-1}_{[0,\pi)}\Big(-\frac{|a|}{b}\Big), \tan^{-1}_{[0,\pi)}\Big(-\frac{|a|}{c}\Big)\Big\},$$

其中 $-\frac{|a|}{0} = \infty$。

假设 $T < T_0$，这等价于对任意 $t \in [0,T]$，行列式 $\boldsymbol{S}(t) \neq 0$。那么推论 (4.1.29) 适用于 $\mathfrak{p}_\sigma$。由 (4.1.31)、(4.1.32) 和 (4.1.35) 可得

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{s}_{A,D}+\mathrm{D}^* h} d\mu = \Big\{\det\Big(\mathfrak{ch}[TA] - T\widehat{\mathfrak{sh}}[TA]D\Big)\Big\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{S}}) e^{\int_0^T \langle h'(t), d\xi_{\boldsymbol{S}}(t)\rangle} d\mu \tag{4.1.37}$$

and

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{s}_{A,D}} \delta_x(\theta(t)) d\mu = \Big\{\det\Big(\mathfrak{ch}[TA] - T\widehat{\mathfrak{sh}}[TA]D\Big)\Big\}^{-\frac{1}{2}} g_{v_t(\boldsymbol{S})}(x) \tag{4.1.38}$$

对于任意 $f \in C_b(\mathcal{W})$、$h \in \mathcal{H}$、$t \in (0, T]$，以及 $x \in \mathbb{R}^d$。

当 $t = T$ 时，(4.1.38) 的左端变换为

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{s}_{A,D}} \delta_x(\theta(T)) d\mu = e^{\frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle} \int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{s}_{A,0}} \delta_x(\theta(T)) d\mu.$$

因此，为了研究 $\mathfrak{s}_{A,\,D}$ 在 $\delta_x(\theta(T))d\mu$ 下的情形，我们可以假设 $D = 0$。继续假设 $T < T_0$。于是我们知道

$$\boldsymbol{S}(t) = \mathfrak{e}[(t-T)A]\mathfrak{ch}[(t-T)A] \quad \text{and} \quad \det \mathfrak{ch}[(t-T)A] \neq 0 \quad \text{for } t \in [0,T].$$

有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{S}(s)^{-1} &= \mathfrak{e}[(t-T)A]\mathfrak{ch}[(t-T)A]\mathfrak{ch}[(s-T)A]^{-1}\mathfrak{e}[-(s-T)A] \\ &= \mathfrak{ch}[(t-T)A](\mathfrak{ch}[(s-T)A])^{-1}\mathfrak{e}[(t-s)A] \quad \text{for } 0 \le s \le t \le T. \end{aligned}$$

由于 $(\mathfrak{e}[aA])^\dagger = \mathfrak{e}[-aA]$ 且 $(\mathfrak{ch}[aA])^\dagger = \mathfrak{ch}[aA]$ 对于 $a \in \mathbb{R}$ 成立，因此有

$$(\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{S}(s)^{-1})(\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{S}(s)^{-1})^\dagger = (\mathfrak{ch}[(t-T)A])^2(\mathfrak{ch}[(s-T)A])^{-2} \quad \text{for } 0 \le s \le t \le T.$$

注意到

$$\frac{d}{ds}\Big((s-T)\widehat{\mathfrak{th}}[(s-T)A]\Big) = (\mathfrak{ch}[(s-T)A])^{-2}, \tag{4.1.39}$$

我们有

$$v_T(\boldsymbol{S}) = (s-T)\widehat{\mathfrak{th}}[(s-T)A]\Big|_{s=0}^{s=T} = T\widehat{\mathfrak{th}}[TA].$$

因此我们得到

$$\det \boldsymbol{S}(0) \det v_T(\boldsymbol{S}) = \det(\mathfrak{ch}[TA]) \det(T\widehat{\mathfrak{th}}[TA]) = T^d \det(\widehat{\mathfrak{sh}}[TA]).$$

将这些代入 (4.1.38)，其中 $t = T$ 和 $D = 0$，我们得到

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\int_0^T \langle A\theta(t), d\theta(t)\rangle} \delta_x(\theta(T)) d\mu = \Big\{(2\pi T)^d \det(\widehat{\mathfrak{sh}}[TA])\Big\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2T}\langle (\widehat{\mathfrak{th}}[TA])^{-1}x, x\rangle}. \tag{4.1.40}$$

采用与本例类似的论证，我们给出推论 (4.1.29) 的另一个例子。

(4.1.41) 例。取 D_1，$D_2 \in \mathbb{R}^{d\times d}$，其中 $D_1^\dagger = D_1$ 与 $D_2^\dagger = D_2$。定义二次维纳泛函 $\mathfrak{h}_{D_1,\ D_2} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathfrak{h}_{D_1,D_2} = \frac{1}{2}\langle D_1\theta(T), \theta(T)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^T \langle D_2\theta(t), \theta(t)\rangle dt.$$

如果我们设定 $\sigma \in C([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$，使得 $\sigma(t) = D_1 + (t-T)D_2$ 对 $t \in [0,T]$ 成立，那么

$$\mathfrak{h}_{D_1,D_2} = \mathfrak{p}_\sigma + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}\sigma_S(t)dt.$$

此 σ 对应的常微分方程 (4.1.30) 为

$$\boldsymbol{S}'' + D_2\boldsymbol{S} = 0, \quad \boldsymbol{S}(T) = I_d,\ \boldsymbol{S}'(T) = D_1.$$

对称的 D_2 具有正交矩阵 $V \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 和 $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$，使得 $V^\dagger D_2 V = \mathbf{diag}\big[\lambda_1, \dots, \lambda_d\big]$。设 $\sqrt{D_2} = V\mathbf{diag}\big[\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d}\big]V^\dagger$。那么我们有

$$\boldsymbol{S}(t) = \mathfrak{ch}[\mathrm{i}(t-T)\sqrt{D_2}] + (t-T)\widehat{\mathfrak{sh}}[\mathrm{i}(t-T)\sqrt{D_2}]D_1 \quad \text{for } t \in [0,T].$$

令

$$T_1 = \inf\Big\{t \ge 0 \,\Big|\, \det\Big(\mathfrak{ch}[\mathrm{i}t\sqrt{D_2}] - t\widehat{\mathfrak{sh}}[\mathrm{i}t\sqrt{D_2}]D_1\Big) = 0\Big\},$$

我们得出

$$\det \boldsymbol{S}(t) \neq 0 \text{ for any } t \in [0,T] \text{ if and only if } T < T_1.$$

假设 $T < T_1$，等价地，对于每个 $t \in [0,T]$，$\det \boldsymbol{S}(t) \neq 0$。根据推论 (4.1.29)，我们有

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{h}_{D_1,D_2} + \mathrm{D}^* h} d\mu = \Big\{\det\Big(\mathfrak{ch}[\mathrm{i}T\sqrt{D_2}] - T\widehat{\mathfrak{sh}}[\mathrm{i}T\sqrt{D_2}]D_1\Big)\Big\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{S}})d\mu$$

and

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{h}_{D_1,D_2}} \delta_x(\theta(t))d\mu = \Big\{\det\Big(\mathfrak{ch}[\mathrm{i}T\sqrt{D_2}] - T\widehat{\mathfrak{sh}}[\mathrm{i}T\sqrt{D_2}]D_1\Big)\Big\}^{-\frac{1}{2}} g_{v_t(\boldsymbol{S})}(x)$$

对于每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$、$h \in \mathcal{H}$、$t \in (0,\ T]$，以及 $x \in \mathbb{R}^d$。

当 $t = T$ 时，第二个恒等式左端中的项 $e^{\frac{1}{2}\langle D_1\theta(T)\ \theta(T)\rangle}$ 被提取为公因子 $e^{\frac{1}{2}\langle D_1 x,\ x\rangle}$。因此，要在 $\delta_x(\theta(T))d\mu$ 下对 $e^{\mathfrak{h}_{D_1,\ D_2}}$ 积分，我们可以假设 $D_1 = 0$。由于对于 $z \in \mathbb{C}$，$(\mathfrak{ch}[z\sqrt{D_2}])^\dagger = \mathfrak{ch}[z\sqrt{D_2}]$，我们有

$$(\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{S}(s)^{-1})(\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{S}(s)^{-1})^\dagger = (\mathfrak{ch}[\mathrm{i}(t-T)\sqrt{D_2}])^2(\mathfrak{ch}[\mathrm{i}(s-T)\sqrt{D_2}])^{-2}.$$

由 (4.1.39) 可知

$$v_T(\boldsymbol{S}) = (s-T)\widehat{\mathfrak{th}}[\mathrm{i}(s-T)\sqrt{D_2}]\Big|_{s=0}^{s=t} = T\widehat{\mathfrak{th}}[\mathrm{i}T\sqrt{D_2}].$$

因此我们得到

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\frac{1}{2}\int_0^T \langle D_2\theta(t),\theta(t)\rangle dt}\delta_x(\theta(T))d\mu = \Big\{(2\pi T)^d \det \widehat{\mathfrak{sh}}[\mathrm{i}T\sqrt{D_2}]\Big\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2T}\langle(\widehat{\mathfrak{th}}[\mathrm{i}T\sqrt{D_2}])^{-1}x,x\rangle}.$$

4.2. Feynman-Kac 密度函数

将二次维纳泛函定义为 $\mathfrak{a}^x_{\phi,\ \psi}$对于 $\phi \in C^1([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$、 $\psi \in C([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，定义为

$$\mathfrak{a}^x_{\phi,\psi} = \int_0^T \langle \phi(t)(x+\theta(t)), d\theta(t)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^T \langle \psi(t)(x+\theta(t)), x+\theta(t)\rangle dt.$$

作为推论（4.1.29）的一个应用，我们给出 $x+\theta(T)$ 在 $e^{\mathfrak{a}^x_{\phi,\ \psi}}d\mu$ 下分布的密度函数的显式表示。请记住，$\mathfrak{a}^x_{\phi,\ \psi}$与费曼-卡茨公式有关（参见[27, §3.5]）。例如，如果 ϕ和 ψ 都是常函数，那么该密度函数恰好是带有标量势与向量势的拉普拉斯算子的热核。

(4.2.1) 定理 理。令 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in C^2([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$ 为 $\mathbb{R}^{d\times d}$ 上常微分方程的解

$$\Phi'' - 2\phi_A\Phi' + (\psi_S - \phi')\Phi = 0 \tag{4.2.2}$$

其终端条件为

$$\boldsymbol{S}(T) = I_d,\ \boldsymbol{S}'(T) = \phi(T),\ \boldsymbol{U}(T) = I_d,\ \boldsymbol{U}'(T) = 0,\ \boldsymbol{V}(T) = 0,\ \textit{and}\ \boldsymbol{V}'(T) = I_d.$$

假设对每个 $t \in [0,T]$，行列式 $\boldsymbol{S}(t) \neq 0$，且行列式 $\boldsymbol{V}(0) \neq 0$。对于 $x, y \in \mathbb{R}^d$，令

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}(x,y) = \frac{1}{2}\Big\{&\big\langle \phi_S(T)y, y\big\rangle - \big\langle \phi_S(0)x, x\big\rangle \\ &+ \big\langle \boldsymbol{U}'(0)y, x\big\rangle + \big\langle \boldsymbol{V}(0)^{-1}(x - \boldsymbol{U}(0)y), \boldsymbol{V}'(0)^\dagger x - y\big\rangle\Big\}\end{aligned}$$

and

$$p_T(x,y) = \left(\frac{e^{-\int_0^T \mathrm{tr}\phi_S(t)dt}}{(2\pi)^d \det \boldsymbol{S}(0) \det v_T(\boldsymbol{S})}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\mathfrak{d}(x,y)}.$$

于是有

$$\int_{\mathcal{W}} \varphi(x+\theta(T)) e^{\mathfrak{a}^x_{\phi,\psi}} d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) p_T(x,y) dy \quad \textit{for every}\ \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d). \tag{4.2.3}$$

为证明此结论，我们先准备一个引理。为陈述该引理，定义 $\sigma \in C^1([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$ 为

$$\sigma(t) = \phi(t) + \int_t^T \psi_S(s)ds \quad \text{for } t \in [0,T]. \tag{4.2.4}$$

由于 $\sigma_A = \phi_A$、 $\sigma' = \phi' - \psi_S$ 和 $\sigma(T) = \phi(T)$，常微分方程 (4.2.2) 可改写为 σ a s

$$\Phi'' - 2\sigma_A\Phi' - \sigma'\Phi = 0 \tag{4.2.5}$$

并且 $\boldsymbol{S}$的终端条件为 $\boldsymbol{S}'(T) = \sigma(T)$。应用伊藤公式，我们看到

$$\frac{1}{2}\int_0^T \langle \psi(t)(x+\theta(t)), x+\theta(t)\rangle dt = \int_0^T \left\langle \left(\int_t^T \psi_S(s)ds\right)\{x+\theta(t)\}, d\theta(t)\right\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\Big\langle\Big(\int_0^T\psi_S(s)ds\Big)x,x\Big\rangle+\frac{1}{2}\int_0^T\Big(\int_t^T\mathrm{tr}\psi_S(s)ds\Big)dt.$$

因此，若我们令

$$\mathfrak{p}_\sigma^x=\int_0^T\langle\sigma(t)(x+\theta(t)),d\theta(t)\rangle=\mathfrak{p}_\sigma+\int_0^T\langle\sigma(t)x,d\theta(t)\rangle,$$

则有

$$\mathfrak{a}_{\phi,\psi}^x=\mathfrak{p}_\sigma^x+\frac{1}{2}\Big\langle\Big(\int_0^T\psi_S(s)ds\Big)x,x\Big\rangle+\frac{1}{2}\int_0^T\Big(\int_t^T\mathrm{tr}\psi_S(s)ds\Big)dt. \tag{4.2.6}$$

因此，对$\mathfrak{a}_{\phi,\psi}^x$ 的研究可归结为对 $\mathfrak{p}_\sigma^x$的研究。

（4.2.7）引理。采用与定理（*4.2.1*）相同的假设。令

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}^{(\sigma)}(x,y)=\frac{1}{2}\Big\{&\big\langle\sigma_S(T)y,y\big\rangle-\big\langle\sigma_S(0)x,x\big\rangle\\&+\big\langle\boldsymbol{U}'(0)y,x\big\rangle+\big\langle\boldsymbol{V}(0)^{-1}(x-\boldsymbol{U}(0)y),\boldsymbol{V}'(0)^\dagger x-y\big\rangle\Big\}\end{aligned}$$

and

$$p_T^{(\sigma)}(x,y)=\left(\frac{e^{-\int_0^T\mathrm{tr}\sigma_S(t)dt}}{(2\pi)^d\det\boldsymbol{S}(0)\det v_T(\boldsymbol{S})}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\mathfrak{d}^{(\sigma)}(x,y)}\quad\textit{for } x,y\in\mathbb{R}^d.$$

于是有

$$\int_{\mathcal{W}}\varphi(x+\theta(T))e^{\mathfrak{p}_\sigma^x}d\mu=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)p_T^{(\sigma)}(x,y)dy\quad\textit{for every }\varphi\in C_b(\mathbb{R}^d). \tag{4.2.8}$$

证明。设 $x,y\in\mathbb{R}^d$。按下式定义 $\beta\in C^2([0,T];\,\mathbb{R}^d)$

$$\beta(t)=\boldsymbol{U}(t)y+\boldsymbol{V}(t)\boldsymbol{V}(0)^{-1}(x-\boldsymbol{U}(0)y)\quad\text{for } t\in[0,T].$$

由（4.2.4）可知， β 在 $\mathbb{R}^d$上满足如下常微分方程:

$$\beta''-2\sigma_A\beta'-\sigma'\beta=0,\quad\beta(0)=x,\ \ \beta(T)=y.$$

令 $h=\beta-x$。定义维纳泛函 $\mathfrak{s}[x,y]:\ \mathcal{W}\to\mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}[x,y]&=\mathfrak{p}_\sigma^x(\cdot+h)-\mathrm{D}^*h-\frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2\\&=\int_0^T\Big\langle\sigma(t)(\theta(t)+\beta(t)),d\theta(t)+\beta'(t)dt\Big\rangle-\int_0^T\langle\beta'(t),d\theta(t)\rangle-\frac{1}{2}\int_0^T|\beta'(t)|^2dt.\end{aligned}$$

应用卡梅隆–马丁定理，可得

$$\int_{\mathcal{W}}\varphi(x+\theta(T))e^{\mathfrak{p}_\sigma^x}d\mu=\int_{\mathcal{W}}\varphi(y+\theta(T))e^{\mathfrak{s}[x,y]}d\mu\quad\text{for }\varphi\in C_b(\mathbb{R}^d). \tag{4.2.9}$$

根据伊藤公式，我们知道

$$\int_0^T\langle\sigma(t)\theta(t),\beta'(t)\rangle dt=\int_0^T\Big\langle\int_t^T\sigma(s)^\dagger\beta'(s)ds,d\theta(t)\Big\rangle.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}[x,y] =&\mathfrak{p}_\sigma + \int_0^T \left\langle \sigma(t)\beta(t) + \int_t^T \sigma(s)^\dagger \beta'(s) ds - \beta'(t), d\theta(t) \right\rangle \\ &+ \int_0^T \langle \sigma(t)\beta(t), \beta'(t)\rangle dt - \frac{1}{2}\int_0^T |\beta'(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

由于

$$\left(\sigma\beta + \int_\bullet^T \sigma(s)^\dagger \beta'(s) ds - \beta'\right)' = \sigma'\beta + 2\sigma_A\beta' - \beta'' = 0,$$

我们得到

$$\int_0^T \left\langle \sigma(t)\beta(t) + \int_t^T \sigma(s)^\dagger \beta'(s) ds - \beta'(t), d\theta(t) \right\rangle = \langle \sigma(T)y - \beta'(T), \theta(T)\rangle.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\langle \sigma\beta, \beta'\rangle - \frac{1}{2}|\beta'|^2 &= \langle \sigma_S\beta, \beta'\rangle - \frac{1}{2}\Big\{\langle \beta, 2\sigma_A\beta'\rangle + |\beta'|^2\Big\} \\ &= \langle \sigma_S\beta, \beta'\rangle - \frac{1}{2}\Big\{\langle \beta, \beta'' - \sigma'\beta\rangle + |\beta'|^2\Big\} \\ &= \langle \sigma_S\beta, \beta'\rangle + \frac{1}{2}\langle \sigma_S'\beta, \beta\rangle - \frac{1}{2}\Big\{\langle \beta, \beta''\rangle + |\beta'|^2\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\langle \sigma_S\beta, \beta\rangle - \langle \beta, \beta'\rangle\Big\}'.\end{aligned}$$

因此可见

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}[x,y] =&\mathfrak{p}_\sigma + \big\langle \sigma(T)y - \beta'(T), \theta(T)\big\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\Big\{\big\langle \sigma_S(T)y, y\big\rangle - \big\langle \sigma_S(0)x, x\big\rangle - \big\langle \beta'(T), y\big\rangle + \big\langle \beta'(0), x\big\rangle\Big\}.\end{aligned}$$

由于

$$\beta'(0) = \boldsymbol{U}'(0)y + \boldsymbol{V}'(0)\boldsymbol{V}(0)^{-1}(x - \boldsymbol{U}(0)y) \quad \text{and} \quad \beta'(T) = \boldsymbol{V}(0)^{-1}(x - \boldsymbol{U}(0)y),$$

我们得到

$$\mathfrak{s}[x,y] = \mathfrak{p}_\sigma + \langle \sigma(T)y - \beta'(T), \theta(T)\rangle + \mathfrak{d}^{(\sigma)}(x,y).$$

将此与（4.2.9）及推论（4.1.29）相结合，我们看到

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{p}_\sigma^x}\delta_y(x+\theta(T))d\mu &= \int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{p}_\sigma + \langle \sigma(T)y - \beta'(T), \theta(T)\rangle + \mathfrak{d}^{(\sigma)}(x,y)}\delta_0(\theta(T))d\mu \\ &= e^{\mathfrak{d}^{(\sigma)}(x,y)}\left(\frac{e^{-\int_0^T \mathrm{tr}\sigma_S(t)dt}}{\det \boldsymbol{S}(0)}\right)^{\frac{1}{2}} g_{v_T(\boldsymbol{S})}(0).\end{aligned}$$

于是我们得到（4.2.8）。 □

定理（*4.2.1*）的证明。注意到

$$\mathfrak{d}^{(\sigma)}(x,y)=\mathfrak{d}(x,y)-\frac{1}{2}\left\langle\left(\int_0^T\psi_S(s)ds\right)x,x\right\rangle$$

and

$$\mathrm{tr}\sigma_S(t)=\mathrm{tr}\phi_S(t)+\int_t^T\mathrm{tr}\psi_S(s)ds$$

对于 $t\in[0,T]$。结合这些结果和（4.2.6），（4.2.8）可得（4.2.3）。 □

(4.2.10) 注。 虽然推论（4.1.29）是定理（4.2.1）在$x=0$ 和 $\psi=0$时的特例，但正如前文所见，要证明该定理，推论不可或缺。根据表达式（4.2.6），该推论可推广至 $\mathfrak{a}^0_{\phi,\ \psi}$，如下所示。令 $\boldsymbol{S}$ 与定理（4.2.1）中的定义相同，则有

$$\int_{\mathcal{W}}fe^{\mathfrak{a}^0_{\phi,\psi}+\mathrm{D}^*h}d\mu=\left(\frac{e^{-\int_0^T\mathrm{tr}\phi_S(t)dt}}{\det\boldsymbol{S}(0)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathcal{W}}f(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{S}})e^{\int_0^T\langle h'(t),d\xi_{\boldsymbol{S}}(t)\rangle}d\mu$$

对于每个 $f\in C_b(\mathcal{W})$。

我们给出两个示例来说明定理（4.2.1）。

(4.2.11) 例。 设 $d=1$、$a\in\mathbb{R}$和 $\lambda>0$。令 $\phi\equiv a$ 和 $\psi\equiv-\lambda^2$。由于 $\phi_A=0$、$\psi_S=-\lambda^2$ 和 $\phi'=0$，常微分方程（4.2.2）可写为

$$\Phi''-\lambda^2\Phi=0.$$

根据给定的终端条件求解这个常微分方程，我们知道

$$\boldsymbol{U}(t)=\cosh(\lambda(t-T)),\quad \boldsymbol{V}(t)=\frac{1}{\lambda}\sinh(\lambda(t-T)),$$

and

$$\boldsymbol{S}(t)=\cosh(\lambda(t-T))+\frac{a}{\lambda}\sinh(\lambda(t-T))$$

对于 $t\in[0,T]$。因此 $\boldsymbol{V}(0)\neq0$。此外，对于每个 $t\in[0,T]$，$\boldsymbol{S}(t)\neq0$ 当且仅当 $a<\lambda/\tanh(\lambda T)$。

假设 $a<\lambda/\tanh(\lambda T)$。那么定理（4.2.1）中的假设成立。由于 $\phi_S\equiv a$，通过直接计算，我们得到

$$\mathfrak{d}(x,y)=\frac{a}{2}(y^2-x^2)-\frac{\lambda}{2}\coth(\lambda T)\left\{x^2-2\mathrm{sech}(\lambda T)xy+y^2\right\}.$$

将 $\boldsymbol{S}(t)$重写为

$$\boldsymbol{S}(t)=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{a}{\lambda}\right)e^{\lambda(T-t)}+\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)e^{-\lambda(T-t)}\right\}\quad\text{for } t\in[0,T],$$

并利用恒等式

$$\frac{d}{dt}(pe^{2\lambda t}+q)^{-1}=-2p\lambda(pe^{\lambda t}+qe^{-\lambda t})^{-2}\quad\text{for any } p,q\in\mathbb{R},$$

我们可以看到

$$v_T(\boldsymbol{S}) = \frac{\sinh(\lambda T)}{\lambda}\Big(\cosh(\lambda T) + \frac{a}{\lambda}\sinh(-\lambda T)\Big)^{-1}.$$

因此，定理（4.2.1）中的 $p_T(x,\ y)$ 表示为

$$p_T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\left(\frac{\lambda T}{\sinh(\lambda T)}\right)^{1/2}\exp\Big[\frac{a}{2}(y^2-x^2) - \frac{\lambda}{2}\coth(\lambda T)\big\{x^2 - 2\mathrm{sech}(\lambda T)xy + y^2\big\}\Big].$$

当 $a = 0$ 时，此 $p_T(x,\ y)$ 正是谐振子薛定谔算子的热核（参见 [27, 定理5.8.2]）。

(4.2.12) 例。设 $d = 1$、$a \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda > 0$。令 $\phi \equiv a$ 和 $\psi \equiv \lambda^2$。则常微分方程（4.2.2）可写为

$$\Phi'' + \lambda^2\Phi = 0.$$

求解具有给定终端条件的这个常微分方程，可知

$$\boldsymbol{U}(t) = \cos(\lambda(t-T)), \quad \boldsymbol{V}(t) = \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda(t-T)),$$

and

$$\boldsymbol{S}(t) = \cos(\lambda(t-T)) + \frac{a}{\lambda}\sin(\lambda(t-T))$$

对于 $t \in [0,T]$。因此，$\boldsymbol{V}(0) \neq 0$ 当且仅当 $\lambda T \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{N}\}$。此外，对于每个 $t \in [0,T]$，$\boldsymbol{S}(t) \neq 0$ 当且仅当以下条件之一成立：(i) $a > 0$ 且 $\lambda T < \arctan(\lambda/a)$；(ii) $a < 0$ 且 $\lambda T < (\pi/2) + \arctan(|a|/\lambda)$；或 (iii) $a = 0$ 且 $\lambda T < \pi/2$。

假设上述条件 (i)、(ii) 和 (ii) 中有一个成立。那么 $\lambda T < \pi$，且定理（4.2.1）中的假设得以满足。仿照例（4.2.11）中的计算，将 $\sqrt{-1}\lambda$用于 λ，可得

$$\mathfrak{d}(x,y) = \frac{a}{2}(y^2-x^2) - \frac{\lambda}{2}\cot(\lambda T)\big\{x^2 - 2\sec(\lambda T)xy + y^2\big\}$$

and

$$v_T(\boldsymbol{S}) = \frac{\sin(\lambda T)}{\lambda}\Big(\cos(\lambda T) + \frac{a}{\lambda}\sin(-\lambda T)\Big)^{-1}.$$

因此，定理（4.2.1）中的 $p_T(x,\ y)$ 表示为

$$p_T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\left(\frac{\lambda T}{\sin(\lambda T)}\right)^{1/2}\exp\Big[\frac{a}{2}(y^2-x^2) - \frac{\lambda}{2}\cot(\lambda T)\big\{x^2 - 2\sec(\lambda T)xy + y^2\big\}\Big].$$

(4.2.13) 注。在上述两个示例中，只要 $\boldsymbol{S}(t) \neq 0$ 对任意 $t \in [0,T]$ 成立，就有 $\boldsymbol{V}(0) \neq 0$。当 $d = 1$ 时，这总是成立。事实上，$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 都满足常微分方程

$$\Phi'' - (\psi_S - \phi')\Phi = 0.$$

Sturm-Picone比较定理（[18, 10·30,10·31]）表明，若 $t_0 \in (0,\ T]$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个零点，则 $\boldsymbol{S}$ 在 $(t_0,\ T)$ 中有一个零点。因此，若对任意 $t \in [0,T]$ 都有 $\boldsymbol{S}(t) \neq 0$，则 $\boldsymbol{V}(t) \neq 0$ 对 $t \in (0,\ T]$ 成立。

一般来说因此，我们得到了一个使假设成立的简单充分条件。

(4.2.14) 命题。 设 σ 如推论（*4.1.29*）或（*4.2.4*）所述。令

$$\delta = 2\|\sigma_A\|_\infty + \|\sigma'\|_\infty \quad and \quad \delta' = |\sigma(T)| + \delta.$$

于是有如下结论。
(i) 行列式 $\boldsymbol{V}(T) \neq 0$ 如果

$$\frac{T}{2}\sqrt{d}e^{(1+\delta)T}\delta < 1.$$

(ii) $\det \boldsymbol{S}(t) \neq 0$ 对每个 $t \in [0,T]$ 若

$$\frac{T}{2}\big\{2 + T(\sqrt{d}+\delta')e^{(1+\delta)T}\big\}\delta' < 1. \tag{4.2.15}$$

证明。 设 $\alpha, \gamma \in C([0,T];\, \mathbb{R}^{d\times d})$, $C_0, C_1 \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 和 $W \in C^2([0,T];\, \mathbb{R}^{d\times d})$ 是常微分方程在 $\mathbb{R}^{d\times d}$ 上的解

$$W'' + \alpha W' + \gamma W = 0, \quad W(0) = C_0,\ W'(0) = C_1.$$

令 $\Delta = \|\alpha\|_\infty + \|\gamma\|_\infty$。常微分方程表明

$$|W(t)| + |W'(t)| \le |C_0| + |C_1| + (1+\Delta)\int_0^t \{|W(s)| + |W'(s)|\}ds \quad \text{for } t \in [0,T].$$

由格朗沃尔不等式可得

$$|W(t)| + |W'(t)| \le (|C_0| + |C_1|)e^{(1+\Delta)T} \quad \text{for } t \in [0,T].$$

因此有

$$\begin{aligned} |W(t) - C_0 - tC_1| &\le \int_0^t \left(\int_0^s |\alpha(u)W'(u) + \gamma(u)W(u)|du\right)ds \\ &\le \frac{t^2}{2}(|C_0| + |C_1|)e^{(1+\Delta)T}\Delta \quad \text{for } t \in [0,T]. \end{aligned}$$

这得出两个不等式，即

$$\left|\frac{1}{T}W(T) - C_1\right| \le \frac{1}{T}|C_0| + \frac{T}{2}(|C_0| + |C_1|)e^{(1+\Delta)T}\Delta$$

and

$$|W(t) - C_0| \le T|C_1| + \frac{T^2}{2}(|C_0| + |C_1|)e^{(1+\Delta)T}\Delta$$

对于 $t \in [0,T]$。将第一个不等式应用于 $\boldsymbol{V}$，将第二个不等式应用于 $\boldsymbol{S}(T - \cdot)$，我们得到

$$\left|\frac{1}{T}\boldsymbol{V}(T) - I_d\right| \le \frac{T}{2}\sqrt{d}e^{(1+\delta)T}\delta$$

and

$$|\boldsymbol{S}(t) - I_d| \le T|\sigma(T)| + \frac{T^2}{2}\big(\sqrt{d} + |\sigma(T)|\big)e^{(1+\delta)T}\delta \le \frac{T}{2}\big\{2 + T(\sqrt{d}+\delta')e^{(1+\delta')T}\big\}\delta'.$$

代入关于 δ 和 δ'的假设，我们完成了证明。 □

(4.2.16) 注。如果 ϕ 和 ψ 都是常函数，那么定理（4.2.1）中的 $\boldsymbol{S}$ 有一个具体表达式。为此，取 $C,\ D \in \mathbb{R}^{d\times d}$，其中 $D^\dagger = D$。令 $\phi \equiv C$ 和$\psi \equiv D$，并设 $A = C - C^\dagger$。关于 $\boldsymbol{S}$ 的常微分方程（4.2.2）写作

$$\boldsymbol{S}'' - A\boldsymbol{S}' + D\boldsymbol{S} = 0, \quad \boldsymbol{S}(T) = I_d,\ \boldsymbol{S}'(T) = C.$$

函数 $\hat{}\boldsymbol{S} \in C^2([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$ 定义为 $\hat{}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(T-\cdot)$，满足常微分方程

$$\hat{\boldsymbol{S}}'' + A\hat{\boldsymbol{S}}' + D\hat{\boldsymbol{S}} = 0, \quad \hat{\boldsymbol{S}}(0) = I_d,\ \hat{\boldsymbol{S}}'(0) = -C.$$

设 $\lambda_1, \dots, \lambda_{2d}$ 为矩阵的特征值，按重数计

$$\begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -D & -A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d\times 2d}.$$

通过常微分方程组定义 $r_1, \dots, r_{2d} \in C^\infty(\mathbb{R};\ \mathbb{C})$

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \quad \text{for } 2 \le j \le 2d, \\ r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = \cdots = r_{2d}(0) = 0, \end{cases}$$

并依次将 $Q_1, \dots, Q_{2d} \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 取为 $Q_1 = I_d$、$Q_2 = -C$ 和

$$\begin{aligned} Q_{3+n} = &-\sum_{j=1}^{n+1} \big\{ r_j^{(n)}(0)D + r_j^{(n+1)}(0)A + r_j^{(n+2)}(0)I_d \big\} Q_j \\ &- \big\{ r_{n+2}^{(n+1)}(0)A + r_{n+2}^{(n+2)}(0)I_d \big\} Q_{n+2} \quad \text{for } 0 \le n \le 2d-3. \end{aligned}$$

根据命题（A.3.4），有

$$\hat{\boldsymbol{S}} = \sum_{j=1}^{2d} r_j Q_j \quad \text{and hence} \quad \boldsymbol{S} = \sum_{j=1}^{2d} r_j(T-\cdot) Q_j.$$

若 $\lambda_1, \dots, \lambda_{2d}$ 彼此不同，则 $\boldsymbol{S}$ 还有另一种表达式。事实上，定义 $\widehat{U}_n = (\widehat{U}_n^{pq})_{1\le p,q\le d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$，其中 $0 \le n \le 2d-1$，以及 $\widehat{Q}_j = (\widehat{Q}_j^{pq})_{1\le p,q\le d} \in \mathbb{C}^{d\times d}$，其中 $1 \le j \le 2d$，如下：

$$\widehat{U}_0 = I_d, \quad \widehat{U}_1 = -C, \quad \widehat{U}_n = -(D\widehat{U}_{n-2} + A\widehat{U}_{n-1}) \quad \text{for } 3 \le n \le 2d-1$$

and

$$\begin{pmatrix} \widehat{Q}_1^{pq} \\ \vdots \\ \widehat{Q}_{2d}^{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_{2d} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{2d-1} & \cdots & \cdots & \lambda_{2d}^{2d-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{U}_0^{pq} \\ \vdots \\ \widehat{U}_{2d-1}^{pq} \end{pmatrix} \quad \text{for } 1 \le p,q \le d.$$

由命题 (A.3.11)，我们有

$$\hat{\boldsymbol{S}}(t) = \sum_{j=1}^{2d} e^{\lambda_j t} \widehat{Q}_j \quad \text{and hence} \quad \boldsymbol{S}(t) = \sum_{j=1}^{2d} e^{\lambda_j (T-t)} \widehat{Q}_j \quad \text{for } t \in [0,T].$$

我们将定理（4.1.2）和注（4.2.10）应用于 Ornstein-Uhlenbeck 过程。设 $\chi \in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ 和 $\xi^{[\chi]} = \{\xi^{[\chi]}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 为随机微分方程（简称 SDE）的唯一解

$$d\xi^{[\chi]}(t) = d\theta(t) + \chi(t)\xi^{[\chi]}(t)dt, \quad \xi^{[\chi]}(0) = 0.$$

(4.2.17) 推论。设 χ 和 $\xi^{[\chi]}$ 如上所述。
(i) 设 $\gamma \in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ 和 $\beta \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$。假设 $\gamma^\dagger = \gamma$，且常微分方程的解$\alpha \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$

$$\alpha' = \chi\alpha, \quad \alpha(T) = I_d$$

满足 行列式 $\alpha(t) \neq 0$ 对任意 $t \in [0,T]$均成立。那么有

$$\begin{aligned}(4.2.18)\qquad &\int_{\mathcal{W}} f(\xi^{[\chi]})\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \langle\gamma(t)\xi^{[\chi]}(t),\xi^{[\chi]}(t)\rangle dt + \frac{1}{2}\langle\beta(T)\xi^{[\chi]}(T),\xi^{[\chi]}(T)\rangle\right)\\ &= e^{\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}[\beta_S(t)]dt}\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{a}_{\chi+\beta_S,\gamma+\beta_S'-\chi^\dagger\chi}}d\mu\end{aligned}$$

对于每个非负的 $f \in C_b(\mathcal{W})$，其中该恒等式可能以 $\infty = $ 的形式成立 ∞.
(ii) 若 χ 属于 C^1-类，且常微分方程的解 $\boldsymbol{S} \in C^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$

$$\boldsymbol{S}'' - 2\chi_A\boldsymbol{S}' + (\gamma - \chi^\dagger\chi - \chi')\boldsymbol{S} = 0, \quad \boldsymbol{S}(T) = I_d,\ \boldsymbol{S}'(T) = \chi(T) + \beta_S(T)$$

满足 行列式 $\boldsymbol{S}(t) \neq 0$ 对每个 $t \in [0,T]$ 均成立，则有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{W}} f(\xi^{[\chi]})\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \langle\gamma(t)\xi^{[\chi]}(t),\xi^{[\chi]}(t)\rangle dt + \frac{1}{2}\langle\beta(T)\xi^{[\chi]}(T),\xi^{[\chi]}(T)\rangle\right)d\mu\\ &= \left(\frac{e^{-\int_0^T \mathrm{tr}\chi_S(t)dt}}{\det\boldsymbol{S}(0)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathcal{W}} f(\xi_{\boldsymbol{S}})d\mu \quad \textit{for every } f \in C_b(\mathcal{W}).\end{aligned}$$

该表达式在KdV方程的随机方法中起着关键作用（见[13, 40] 或下文引理(4.5.8)）。

证明。 (i) 由(4.1.11)，对 $t \in [0,T]$有$(\boldsymbol{\xi}_\alpha(\cdot))(t) = \xi^{[\chi]}(t)$。令

$$\varphi = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \langle\gamma(t)\theta(t),\theta(t)\rangle dt + \frac{1}{2}\langle\beta(T)\theta(T),\theta(T)\rangle\right)$$

以及对 $N \in \mathbb{N}$的 $\varphi_N = \varphi \wedge N$。由(4.1.4)和(4.1.12)，我们得到

$$(4.2.19)\quad \int_{\mathcal{W}} f\varphi_N \exp\left(\int_0^T \langle\chi(t)\theta(t),d\theta(t)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T |\chi(t)\theta(t)|^2 dt\right)d\mu = \int_{\mathcal{W}} (f\varphi_N)(\xi^{[\chi]})d\mu$$

对非负的 $f \in C_b(\mathcal{W})$。

由于

$$\frac{1}{2}\langle\beta(T)\theta(T),\theta(T)\rangle = \frac{1}{2}\langle\beta_S(T)\theta(T),\theta(T)\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \langle \beta_S'(t)\theta(t), \theta(t)\rangle dt + \int_0^T \langle \beta_S(t)\theta(t), d\theta(t)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}[\beta_S(t)]dt,$$

我们有

$$\varphi_N \exp\left(\int_0^T \langle \chi(t)\theta(t), d\theta(t)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T |\chi(t)\theta(t)|^2 dt\right)$$
$$\nearrow \exp\left(\mathfrak{a}^0_{\chi+\beta_S,\gamma+\beta_S'-\chi^\dagger\chi} + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}[\beta_S(t)]dt\right) \quad \text{as } N\to\infty.$$

由单调收敛定理，在（4.2.19）中令 $N\to\infty$，即可得到（4.2.18）。

（ii）令 $\phi = \chi + \beta_S$ 和 $\psi = \gamma + \beta_S' - \chi^\dagger\chi$。则有 $\phi_S = \chi_S + \beta_S$、$\phi_A = \chi_A$ 和 $\psi_S - \phi' = \gamma - \chi^\dagger\chi - \chi'$。应用注（4.2.10），由（4.2.18）可得到所需的恒等式。 □

作为推论（4.1.29）和命题（4.2.14）的另一个应用，我们给出 $\mathfrak{p}_\sigma$ 的特征函数的显式表达式如下。

（4.2.20）定理。 令 $\sigma\in C^1([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$。对于 $\zeta\in\mathbb{C}$，记 $\boldsymbol{S}_\zeta\in C^2([0,T];\ \mathbb{C}^{d\times d})$ 为 $\mathbb{C}^{d\times d}$ 上常微分方程的唯一解

$$\boldsymbol{S}_\zeta'' - 2\zeta\sigma_A\boldsymbol{S}_\zeta' - \zeta\sigma'\boldsymbol{S}_\zeta = 0,\quad \boldsymbol{S}_\zeta(T) = I_d,\quad \boldsymbol{S}_\zeta'(T) = \zeta\sigma(T).$$

令 $\Omega_\sigma = \{\zeta\in\mathbb{C}\mid |\mathrm{Re}\zeta|\|B_{\rho_\sigma}\|_{\mathrm{op}} < 1\}$。于是，对每个 $\zeta\in\Omega_\sigma$，$\det \boldsymbol{S}_\zeta(0)\neq 0$，并且有

$$\left(\int_{\mathcal{W}} e^{\zeta\mathfrak{p}_\sigma}d\mu\right)^2 = \frac{e^{-\zeta\int_0^T \mathrm{tr}\sigma_S(t)dt}}{\det \boldsymbol{S}_\zeta(0)}. \tag{4.2.21}$$

特别地，对每个 $\lambda\in\mathbb{R}$，$\det \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}\lambda}(0)\neq 0$，并且有

$$\left(\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\lambda\mathfrak{p}_\sigma}d\mu\right)^2 = \frac{e^{-\mathrm{i}\lambda\int_0^T \mathrm{tr}\sigma_S(t)dt}}{\det \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}\lambda}(0)}.$$

为证明这一点，我们先准备一个关于全纯性的引理。

(4.2.22) 引理。 设 $\eta\in\mathscr{S}_2$。令 $\mathcal{D}_\eta = \{\zeta\in\mathbb{C}\mid |\mathrm{Re}\zeta|\|B_\eta\|_{\mathrm{op}} < 1\}$。对于任意 $\zeta\in\mathcal{D}_\eta$，$|e^{\zeta\mathfrak{q}_\eta}|\in L^1(\mu)$。此外，函数

$$g:\mathcal{D}_\eta\ni\zeta\mapsto\int_{\mathcal{W}} e^{\zeta\mathfrak{q}_\eta}d\mu\in\mathbb{C}$$

是全纯的。

证明。取一个满足 $\delta\|B_\eta\|_{\mathrm{op}} < 1$ 的 $\delta > 0$，并令 $\mathcal{D}^{(\delta)} = \{\zeta\in\mathbb{C}\mid |\mathrm{Re}\zeta| < \delta\}$。只需证明，对于任意 $\zeta\in\mathcal{D}^{(\delta)}$，$|e^{\zeta\mathfrak{q}_\eta}|\in L^1(\mu)$ 关于 $\mathcal{D}^{(\delta)}$ 是全纯的。

若 $\zeta\in\mathcal{D}^{(\delta)}$，则 $|e^{\zeta\mathfrak{q}_\eta}|\le e^{\delta|\mathfrak{q}_\eta|}\le e^{\delta\mathfrak{q}_\eta} + e^{-\delta\mathfrak{q}_\eta}$。由于 $\Lambda(B_{\pm\delta\eta})\le\delta\|B_\eta\|_{\mathrm{op}} < 1$，根据引理（2.1.13），$e^{\pm\delta\mathfrak{q}_\eta}\in L^1(\mu)$。因此 $|e^{\zeta\mathfrak{q}_\eta}|\in L^1(\mu)$。

选取一个 $\varepsilon > 0$ 使得 $(\delta+\varepsilon)\|B_\eta\|_{\mathrm{op}} < 1$。注意到

$$\left|\frac{d}{d\zeta}e^{\zeta\mathfrak{q}_\eta}\right| = |\mathfrak{q}_\eta e^{\zeta\mathfrak{q}_\eta}| \leq \frac{1}{\varepsilon}e^{(\delta+\varepsilon)|\mathfrak{q}_\eta|}$$

对于任意 $\zeta \in \mathcal{D}^{(\delta)}$。通过与上述类似的论证，我们有 $e^{(\delta+\varepsilon)|\mathfrak{q}_\eta|} \in L^1(\mu)$。应用微分型控制收敛定理，我们看到 g 在 $\mathcal{D}^{(\delta)}$上是全纯的。

□

定理（*4.2.20*）的证明。由于函数 $\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto \boldsymbol{S}_\zeta(0) \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 是全纯的，因此函数 $\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto \det \boldsymbol{S}_\zeta(0) \in \mathbb{C}$也是全纯的。根据引理（4.2.22），函数 $g\colon \Omega_\sigma \to \mathbb{C}$给定为

$$g(\zeta) = (\det \boldsymbol{S}_\zeta(0))e^{\zeta\int_0^T \mathrm{tr}\sigma_S(t)dt}\left(\int_{\mathcal{W}} e^{\zeta\mathfrak{p}_\sigma}d\mu\right)^2 \quad \text{for } \zeta \in \Omega_\sigma$$

是全纯的。

取一个满足（4.2.15）的 $\delta' > 0$。对于满足 $|\lambda|(2\|\sigma_A\|_\infty + \|\sigma'\|_\infty + |\sigma(T)|) < \delta'$ 的 $\lambda \in \mathbb{R}$，根据命题（4.2.14）和推论（4.1.29），$g(\lambda) = 1$。因此，$g = 1$ 在 Ω_σ上成立。这意味着，对于每个 $\zeta \in \Omega_\sigma$，$\det \boldsymbol{S}_\zeta(0) \neq 0$，并且（4.2.21）成立。 □

(4.2.23) 注。使用常微分方程的解对 $\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{a}^0_{\phi,\psi}} f d\mu$进行求值，最早由 Cameron 和 Martin（[1, 2]）在 $d = 1$时完成。在他们的情形中，$\phi = 0$，因此 $\mathfrak{a}^0_{\phi,\psi}$ 是样本路径的加权 L^2-积分 $\int_0^T \psi(t)|\theta(t)|^2 dt$。相应的常微分方程是斯图姆–刘维尔方程

$$f'' + \psi f = 0, \quad f(T) = 1,\ f'(T) = 0.$$

若 $\psi \equiv 1$，则它对应于谐振子（[2, 20] 和 [27, 第 5.8.1] 小节）。当 $d = 2$、$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 且 $\psi = 0$ 时，$\mathfrak{a}^0_{\phi,\psi}$ 是 Lévy 的随机面积，这一求值称为 Lévy 随机面积公式（[22, 48] 和 [27, 第 5.8.2] 小节）。作者（[36]）在附加假设 $\phi^\dagger = -\phi$ 的条件下，将这一求值推广到了任意维数。该推广借助吉尔萨诺夫变换完成。在 [45], ，作者在假设 ϕ 和 ψ 足够小的条件下，借助维纳空间上的变量替换公式，实现了另一种求值。作者最近实现了对一般 ϕ、ψ 和 x 的求值（[47]）。

4.3. 二步幂零李群上的热核

本节中，我们应用推论（4.1.29）来计算二步幂零李群上的热核。我们首先介绍所研究的李群。设

$$\mathrm{AS}(d) = \{A \in \mathbb{R}^{d\times d} \mid A^\dagger = -A\} \quad \text{and} \quad \mathbb{G}(d) = \mathbb{R}^d \times \mathrm{AS}(d).$$

$\mathbb{G}(d)$ 是具有如下乘法运算的李群

$$(x, A)\cdot(y, B) = \left(x + y, A + B + \frac{1}{2}\left(x^i y^j - x^j y^i\right)_{1\leq i,j\leq d}\right) \quad \text{for } (x, A), (y, B) \in \mathbb{G}(d).$$

令 $N(d) = \frac{1}{2}d(d-1)$，并记 $a = (a^{ij})_{1\le i<j\le d}$ 为 $\mathbb{R}^{N(d)}$ 上的坐标系，该坐标系通过将 $\mathbb{R}^{N(d)}$ 识别为由 $d\times d$ 矩阵组成的空间而得到，其中对于 $i \ge j$，其 (i,j)- 项均为零。定义 $\boldsymbol{A}: \mathbb{R}^{N(d)} \ni a \mapsto \boldsymbol{A}(a) = \big(\boldsymbol{A}(a)^{ij}\big)_{1\le i,j\le d} \in \mathsf{AS}(d)$ 为

$$\boldsymbol{A}(a)^{ij} = \begin{cases} a^{ij} & \text{if } i < j, \\ -a^{ji} & \text{if } i > j, \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases}$$

对于 $a = (a^{ij})_{1\le i<j\le d}$。$\mathbb{G}(d)$ 上的全局坐标系 $(x,a) = \big((x^i)_{1\le i\le d}, (a^{ij})_{1\le i<j\le d}\big)$ 通过映射给出

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{N(d)} \ni (x,a) \mapsto (x, \boldsymbol{A}(a)) \in \mathbb{G}(d).$$

对于 $(z,C) \in \mathbb{G}(d)$，令 $\mathcal{T}_{(z,C)}$ 为 $\mathbb{G}(d)$ 在 (z,C) 处的切空间，且 $(\varphi_*)_{(z,C)}: \mathcal{T}_{(z,C)} \to \mathcal{T}_{\varphi((z,C))}$ 为光滑函数 φ 在 $\mathbb{G}(d)$ 上于 (z,C) 处的微分。记 $L(x,A): \mathbb{G}(d) \to \mathbb{G}(d)$ 为由 $(x,A) \in \mathbb{G}(d)$ 所确定的左作用：$L(x,A)[(y,B)] = (x,A)\cdot(y,B)$，对 $(y,B) \in \mathbb{G}(d)$。容易看出

$$(L(x,A)_*)_{(0,0)}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_0 = \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_x + \frac{1}{2}\sum_{j<i} x^j \Big(\frac{\partial}{\partial a^{ji}}\Big)_A - \frac{1}{2}\sum_{j>i} x^j \Big(\frac{\partial}{\partial a^{ij}}\Big)_A \tag{4.3.1}$$

and

$$(L(x,A)_*)_{(0,0)}\Big(\frac{\partial}{\partial a^{ij}}\Big)_0 = \Big(\frac{\partial}{\partial a^{ij}}\Big)_A. \tag{4.3.2}$$

将 $\mathbb{G}(d)$ 上的左不变 C^∞-向量场 $V_1, \dots, V_d$ 定义为

$$V_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} x^j \frac{\partial}{\partial a^{ji}} - \frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{d} x^j \frac{\partial}{\partial a^{ij}} \quad \text{for } 1 \le i \le d.$$

它们的李括号具有如下性质：

$$[V_i, V_j] = \frac{\partial}{\partial a^{ij}} \quad \text{for } 1 \le i < j \le d \quad \text{and} \quad [V_i, [V_j, V_k]] = 0 \quad \text{for } 1 \le i,j,k \le d.$$

因此，结合 (4.3.1) 和 (4.3.2)，我们可以看出 $\mathbb{G}(d)$ 是一个二步幂零李群。

Put

$$\mathfrak{S}^{ij}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \{\theta^i(s)d\theta^j(s) - \theta^j(s)d\theta^i(s)\} \quad \text{for } 1 \le i < j \le d,\ t \in [0,T]$$

and

$$\mathfrak{S}(t) = \big(\mathfrak{S}^{ij}(t)\big)_{1\le i<j\le d} \quad \text{for } t \in [0,T].$$

随机过程 $\{\Xi(t)\}_{t\in[0,T]}$ 定义为

$$\Xi(t) = \big(\theta(t), \boldsymbol{A}(\mathfrak{S}(t))\big) \quad \text{for } t \in [0,T]$$

是在 $\mathbb{G}(d)$ 上以下随机微分方程的唯一解:

$$d\Xi(t) = \sum_{i=1}^{d} V_i(\Xi(t)) \circ d\theta^i(t), \quad \Xi(0) = (0,0),$$

其中 $\circ d\theta^i(t)$ 表示关于 $\{\theta^i(t)\}_{t\in[0,T]}$ 的 Stratonovich 积分。由于 V_is 的左不变性，以上随机微分方程在初始条件$\Xi(0) = (x, A)$ 下的解恰好是随机过程 $\{(x, A) \cdot \Xi(t)\}_{t\in[0,T]}$。因此，与二阶微分算子相关的热核

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} V_i^2,$$

也就是说，由该微分算子生成的扩散过程的转移密度函数，可利用 $\Xi(t)$ 的密度函数来计算。鉴于 T 的任意性，只需知道 $t = T$ 时的密度函数表达式即可。

(4.3.3) 定理。令

$$p_T(x,a) = \frac{1}{(2\pi)^{N(d)}\sqrt{2\pi T}^d} \int_{\mathbb{R}^{N(d)}} \frac{e^{\mathrm{i}\langle a,b\rangle}}{\det(\widehat{\mathfrak{sh}}[\mathrm{i}\frac{T}{2}\boldsymbol{A}(b)])} \exp\left(-\frac{1}{2T}\left\langle \left(\widehat{\mathfrak{th}}\left[\mathrm{i}\frac{T}{2}\boldsymbol{A}(b)\right]\right)^{-1} x, x\right\rangle\right) db$$

对于 $(x,a) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{N(d)}$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^{N(d)}$ 中的欧几里得内积。则有

$$\int_{\mathcal{W}} f(\Xi(T))d\mu = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{N(d)}} f(x, \boldsymbol{A}(a))p_T(x,a)dxda \tag{4.3.4}$$

对每一个 $f \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathrm{AS}(d))$。

(4.3.5) 注。(i) 由 (4.1.36)，存在 $k \in \mathbb{N}, \leq \frac{d}{2}$，$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，以及一个酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{d\times d}$，使得

$$\mathfrak{ch}[\mathrm{i}A] = U^*\mathrm{diag}[\cosh(\lambda_1), \cosh(\lambda_1), \ldots, \cosh(\lambda_k), \cosh(\lambda_k), \underbrace{1, \ldots, 1}_{d-2k}]U$$

and

$$\widehat{\mathfrak{sh}}[\mathrm{i}A] = U^*\mathrm{diag}\left[\frac{\sinh(\lambda_1)}{\lambda_1}, \frac{\sinh(\lambda_1)}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\sinh(\lambda_k)}{\lambda_k}, \frac{\sinh(\lambda_k)}{\lambda_k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{d-2k}\right]U.$$

因此我们得到

$$\det(\mathfrak{ch}[\mathrm{i}A]) = \prod_{i=1}^{k}(\cosh(\lambda_i))^2 \neq 0, \quad \det(\widehat{\mathfrak{sh}}[\mathrm{i}A]) = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\sinh(\lambda_i)}{\lambda_i}\right)^2 \neq 0,$$

and

$$\det(\widehat{\mathfrak{th}}[\mathrm{i}A]) \neq 0.$$

(ii) 恒等式 (4.3.4) 由 Inahama 和作者在 [17] 中证明。

为证明定理 (4.3.3)，我们先准备一个引理。

（4.3.6）引理。对于每个 $A \in \mathrm{AS}(d)$，都有

$$\begin{aligned}(4.3.7)\qquad &\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\int_0^T \langle A\theta(t), d\theta(t)\rangle}\delta_x(\theta(T))d\mu \\ &= \left(\frac{1}{(2\pi T)^d \det(\widehat{\mathfrak{sh}}[\mathrm{i}TA])}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\left\langle (\widehat{\mathfrak{th}}[\mathrm{i}TA])^{-1}x, x\right\rangle\right) \quad \textit{for } x \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

证明。令 $A \in \mathrm{AS}(d)$。取一个满足（4.2.15）的 $\delta' > 0$。对于满足 $3|\lambda||A| < \delta'$ 的 $\lambda \in \mathbb{R}$，令 $\sigma \in C^1([0,T];\, \mathbb{R}^{d\times d})$ 使得 $\sigma \equiv \lambda A$。由于 $|\sigma(T)| + 2\|\sigma_A\|_\infty + \|\sigma'\|_\infty = 3|\lambda||A| < \delta'$，根据命题（4.2.14），常微分方程的解 $\boldsymbol{S} \in C^2([0,T];\, \mathbb{R}^{d\times d})$

$$\boldsymbol{S}'' - 2\lambda A\boldsymbol{S}' = 0, \quad \boldsymbol{S}(T) = I_d, \quad \boldsymbol{S}'(T) = \lambda A$$

满足对任意 $t \in [0,T]$ 均有 $\det \boldsymbol{S}(t) \neq 0$。由例（4.1.34）中的（4.1.40），可得

$$\begin{aligned}(4.3.8)\qquad &\int_{\mathcal{W}} e^{\lambda\int_0^T \langle A\theta(t), d\theta(t)\rangle}\delta_x(\theta(T))d\mu \\ &= \left(\frac{1}{(2\pi T)^d \det(\widehat{\mathfrak{sh}}[\lambda TA])}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\left\langle (\widehat{\mathfrak{th}}[\lambda TA])^{-1}x, x\right\rangle\right) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

令 $\Omega_A = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 3|\mathrm{Re}\zeta||A| < \delta'\}$。依照引理（4.2.22）中的相同论证，我们知道该映射

$$\Omega_A \ni \zeta \mapsto \int_{\mathcal{W}} e^{\zeta\int_0^T \langle A\theta(t), d\theta(t)\rangle}\delta_x(\theta(T))d\mu$$

$\widehat{\ }$是全纯的。由于根据注（4.3.5）所示，对任意 $a \in \mathbb{R}$，$\det(\mathfrak{sh}[\mathrm{i}aTA]) \neq 0$，$\widehat{\ }$因此存在一个定义域 $\Omega' \subset \mathbb{C}$，使得 $\{\mathrm{i}\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \Omega'$，且对 $\zeta \in \Omega'$，$\det(\mathfrak{sh}[\zeta TA]) \neq 0$。因此，（4.3.8）全纯延拓到 $\Omega_A \cap \Omega'$，也就是说，有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{W}} e^{\zeta\int_0^T \langle A\theta(t), d\theta(t)\rangle}\delta_x(\theta(T))d\mu \\ &= \left(\frac{1}{(2\pi T)^d \det(\widehat{\mathfrak{sh}}[\zeta TA])}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\left\langle (\widehat{\mathfrak{th}}[\zeta TA])^{-1}x, x\right\rangle\right) \quad \text{for } \zeta \in \Omega_A \cap \Omega'.\end{aligned}$$

代入 $\zeta = \mathrm{i}$，得到（4.3.7）。 □

(4.3.3) 定理的证明。令 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{N(d)})$。利用傅里叶分析并交换积分次序，我们将其改写为

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{W}} f(\Xi(T))d\mu = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathcal{W}} f(x, \mathfrak{S}(T))\delta_x(\theta(T))d\mu\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{N(d)}}\left(\int_{\mathbb{R}^{N(d)}} \frac{e^{\mathrm{i}\langle b,a\rangle}}{(2\pi)^{N(d)}}\left(\int_{\mathcal{W}} e^{-\mathrm{i}\langle b, \mathfrak{S}(T)\rangle}\delta_x(\theta(T))d\mu\right)db\right)f(x,a)dxda.\end{aligned}$$

对于 $b=(b^{ij})_{1\le i<j\le d}\in\mathbb{R}^{N(d)}$，有

$$-\langle b,\mathfrak{S}(T)\rangle=-\sum_{i<j}b^{ij}\int_0^T\{\theta^i(t)d\theta^j(t)-\theta^j(t)d\theta^i(t)\}$$
$$=\sum_{i,j=1}^{d}\boldsymbol{A}(b)^{ji}\int_0^T\theta^i(t)d\theta^j(t)=\int_0^T\langle\boldsymbol{A}(b)\theta(t),d\theta(t)\rangle.$$

将此结果和引理 (4.3.6) 代入上述恒等式，我们得到

$$\int_{\mathcal{W}}f(\boldsymbol{\Xi}(T))d\mu=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{N(d)}}f(x,a)p_T(x,a)dxda.$$

由此得到 (4.3.4)。 □

4.4. 欧拉、伯努利与欧拉多项式

本节将例 (4.1.34) 用于随机表示欧拉多项式、伯努利多项式和欧拉多项式。本节中，我们使用关于 $\theta(t)=x$ 的条件期望 $\mathbb{E}[\cdot|\theta(t)=x]$，而不是钉扎测度 $\delta_x(\theta(t))d\mu$。它们之间的关系如下：

$$\mathbb{E}[\Psi|\theta(t)=x]=(2\pi t)^{\frac{d}{2}}e^{\frac{1}{2t}|x|^2}\int_{\mathcal{W}}\Psi\delta_x(\theta(t))d\mu\quad\text{for }\Psi\in\mathbb{D}^{\infty,1+}.$$

设 $d=2$ 和 $T=1$。对于 $a,\ b\in\mathbb{R}$，定义 $\mathfrak{s}_{a,\,b}:\mathcal{W}\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\mathfrak{s}_{a,b}=\frac{a}{2}\int_0^1\langle J\theta(t),d\theta(t)\rangle+\frac{b}{2}|\theta(1)|^2,\quad\text{where }J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

我们简写为 $\mathfrak{s}_1$，其中$\mathfrak{s}_{1,\,0}$。

（4.4.1）命题。设 $a,\ b\in\mathbb{R}$。定义 $c_{a,\,b},\ v_{a,\,b}:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ 如下

$$c_{a,b}(t)=\cos\frac{a(1-t)}{2}-\frac{2b}{a}\sin\frac{a(1-t)}{2}$$

and

$$v_{a,b}(t)=c_{a,b}(t)^2\int_0^t c_{a,b}(s)^{-2}ds$$

对于 $t\in[0,1]$。存在一个 $\varepsilon>0$，使得若 $|a|+|b|<\varepsilon$，则 $c_{a,b}(t)>0$ 对每个$t\in[0,1]$ 成立，并且有

$$\int_{\mathcal{W}}e^{\mathfrak{s}_{a,b}}d\mu=\frac{1}{c_{a,b}(0)}\tag{4.4.2}$$

and

$$\mathbb{E}[e^{\mathfrak{s}_{a,b}}\mid\theta(t)=x]=\frac{te^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{v_{a,b}(t)}-\frac{1}{t}\right\}|x|^2}}{c_{a,b}(0)v_{a,b}(t)}\quad\textit{for }t\in(0,1]\textit{ and }x\in\mathbb{R}^2.\tag{4.4.3}$$

证明。设 $|a|+|b|<\frac{1}{4}$。由于 $\left|\frac{a(1-t)}{2}\right|\le\frac{\pi}{3}$对 $t\in[0,1]$成立，我们有

$$\cos\frac{a(1-t)}{2}-\frac{2b}{a}\sin\frac{a(1-t)}{2}\ge\frac{1}{2}-|b|>\frac{1}{4}\quad\text{for any } t\in[0,1]. \tag{4.4.4}$$

取一个 $\delta'>0$满足（4.2.15），并令 $\varepsilon=\frac{1}{4}\wedge\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\delta'\right)$。假设 $|a|+|b|<\varepsilon$。令$A=\frac{a}{2}J$和 $D=bI_2$。使用例（4.1.34）中的记号，我们有$\mathfrak{s}_{a,\,b}=\mathfrak{s}_{A,\,D}$。将函数 $\sigma\in C^1([0,T];\,\mathbb{R}^{2\times2})$定义为 $\sigma\equiv A+D$。于是我们看到

$$|\sigma(T)|+2\|\sigma_A\|_\infty+\|\sigma'\|_\infty\le\frac{2}{\sqrt{2}}(|a|+|b|)<\delta'.$$

根据命题（4.2.14），常微分方程的解 $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S}''-2A\boldsymbol{S}'=0,\quad \boldsymbol{S}(1)=I_2,\ \boldsymbol{S}'(1)=A+D$$

满足：对于任意 $t\in[0,T]$，$\det\boldsymbol{S}(t)\neq0$。由（4.1.37）和（4.1.38），我们得到

$$\int_{\mathcal{W}}e^{\mathfrak{s}_{a,b}}d\mu=\left\{\det\Big(\mathfrak{ch}[A]-b\widehat{\mathfrak{sh}}[A]\Big)\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{4.4.5}$$

and

$$\int_{\mathcal{W}}e^{\mathfrak{s}_{a,b}}\delta_x(\theta(t))d\mu=\left\{\det\Big(\mathfrak{ch}[A]-b\widehat{\mathfrak{sh}}[A]\Big)\right\}^{-\frac{1}{2}}g_{v_t(\boldsymbol{S})}(x) \tag{4.4.6}$$

对于任意 $t\in(0,\ T]$和 $x\in\mathbb{R}^d$。

由于 $\mathfrak{ch}[\xi J]=\cos(\xi)I_2$且 $\widehat{\mathfrak{sh}}[\xi J]=\frac{\sin(\xi)}{\xi}I_2$对于 $\xi\in\mathbb{R}$成立，我们有

$$\mathfrak{ch}[A]-b\widehat{\mathfrak{sh}}[A]=\left\{\cos\Big(\frac{a}{2}\Big)-\frac{2b}{a}\sin\Big(\frac{a}{2}\Big)\right\}I_2=c_{a,b}(0)I_2.$$

将此代入 (4.4.5)，并利用 $c_{a,b}(0)$ 的正性，即得 (4.4.2)。

若对 $\xi\in\mathbb{R}$，令 $\boldsymbol{o}(\xi)=\begin{pmatrix}\cos\xi & -\sin\xi\\ \sin\xi & \cos\end{pmatrix}$，则 $\mathfrak{e}[\xi J]=\boldsymbol{o}(\xi)$。如例 (4.1.34) 所示，我们知道

$$\boldsymbol{S}(t)=\mathfrak{e}[(t-1)A]\Big\{\mathfrak{ch}[(t-1)A]+b(t-1)\widehat{\mathfrak{sh}}[(t-1)A]\Big\}=c_{a,b}(t)\boldsymbol{o}\Big(\frac{a(t-1)}{2}\Big).$$

由于 $\boldsymbol{o}(\xi)$ 是一个正交矩阵，我们可知

$$v_t(\boldsymbol{S})=\int_0^t(\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{S}(s)^{-1})(\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{S}(s)^{-1})^\dagger ds=v_{a,b}(t)I_2.$$

将此代入 (4.4.6)，即得 (4.4.3)。 □

续　全纯地延拓上述关于 $e^{\mathfrak{s}_{a,b}}$ 的恒等式，我们得到如下 ng.

（4.4.7）命题。 对于满足 $-\beta\gamma<1$ 与 $|\gamma|\le\frac{1}{2}$ 的 β、γ、$a\in\mathbb{R}$，成立

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\beta\{\mathfrak{s}_1+\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma|\theta(1)|^2\}}d\mu=\left\{\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{\frac{\beta}{2}}+\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)e^{-\frac{\beta}{2}}\right\}^{-1} \tag{4.4.8}$$

and

$$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}a\mathfrak{s}_1}\mid\theta(1)=0]=\frac{\frac{a}{2}}{\sinh\frac{a}{2}}. \tag{4.4.9}$$

恒等式（4.4.8）中 $\gamma=0$ 以及（4.4.9）称为L´维随机面积公式。证明。 取一个 $\delta>0$，使得 $e^{\delta|\mathfrak{s}_1|}\in L^1(\mu)$（参见引理（2.1.13））。对于 $n\ge3$ 和 $\alpha>0$，令

$$\Omega_{n,\alpha}=\left\{(z,\zeta)\in\mathbb{C}^2\,\middle|\,|\mathrm{Re}z|<\frac{\delta}{n}-\alpha,\mathrm{Re}(z\zeta)<1-\frac{2}{n}-\alpha\right\}.$$

若（z，ζ）$\in\Omega_{n,\alpha}$，则有

$$\left|e^{z\{\mathfrak{s}_1+\frac{\zeta}{2}|\theta(1)|^2\}}\right|\le e^{|\mathrm{Re}z||\mathfrak{s}_1|+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(z\zeta)|\theta(1)|^2}\le e^{\frac{\delta}{n}|\mathfrak{s}_1|+(1-\frac{2}{n})\frac{1}{2}|\theta(1)|^2}$$

and

$$\left\{|\mathfrak{s}_1|+\frac{1}{2}|\theta(1)|^2\right\}\left|e^{z\{\mathfrak{s}_1+\frac{\zeta}{2}|\theta(1)|^2\}}\right|\le\frac{1}{\alpha}e^{\frac{\delta}{n}|\mathfrak{s}_1|+(1-\frac{2}{n})\frac{1}{2}|\theta(1)|^2}.$$

应用共轭指数为 n 和 $\frac{n}{n-1}$的 Hölder 不等式，我们知道

$$e^{\frac{\delta}{n}|\mathfrak{s}_1|+(1-\frac{2}{n})\frac{1}{2}|\theta(1)|^2}\in L^1(\mu).$$

因此，由微分型控制收敛定理，函数

$$f(z,\zeta)=\int_{\mathcal{W}}e^{z\{\mathfrak{s}_1+\frac{\zeta}{2}|\theta(1)|^2\}}d\mu$$

是良定义的在 $\Omega_{n,\alpha}$ 上有定义且全纯。因此 f 定义良好且全纯

$$\Omega\equiv\bigcup_{n\ge3}\left\{(z,\zeta)\in\mathbb{C}^2\,\middle|\,|\mathrm{Re}z|<\frac{\delta}{n},\mathrm{Re}(z\zeta)<1-\frac{2}{n}\right\}.$$

Put

$$g(z,\zeta)=\cos\frac{z}{2}-2\zeta\sin\frac{z}{2}\quad\text{for }(z,\zeta)\in\mathbb{C}^2.$$

注意，$g(0,0)=1$ 并且

$$g(\mathrm{i}\beta,\mathrm{i}\gamma)=\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)e^{\frac{\beta}{2}}+\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)e^{-\frac{\beta}{2}}>0\quad\text{for }\beta,\gamma\in\mathbb{R}\text{ with }|\gamma|\le\frac{1}{2}. \tag{4.4.10}$$

取一个 $\delta'>0$ 使得

$$g(z,\zeta)\ne0\quad\text{on }B(\delta')\equiv\left\{(z,\zeta)\in\mathbb{C}^2\mid|z|+|\zeta|<\delta'\right\}.$$

那么存在一个定义域 $\Omega'\subset\mathbb{C}^2$，使得

$$B(\delta')\cup\left\{(\mathrm{i}\beta,\mathrm{i}\gamma)\,\middle|\,\beta,\gamma\in\mathbb{R},|\gamma|\le\frac{1}{2}\right\}\subset\Omega'$$

且 $1/g$ 在 Ω' 上全纯。因此， f 和 $1/g$ 都在 $\Omega \cap \Omega'$ 上全纯。

令 $\varepsilon > 0$ 如命题（4.4.1）中所述，并设 $\varepsilon' = \varepsilon \wedge \frac{\delta}{3} \wedge \frac{1}{3} \wedge \delta'$。若 a， $b \in \mathbb{R}$ 且 $|a| + |b| < \varepsilon'$，则

$$|a| + |ab| < \varepsilon, \quad |\mathrm{Re}a| = |a| < \frac{\delta}{3}, \quad \mathrm{Re}(ab) \leq |ab| < \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}, \quad |a| + |b| < \delta'.$$

因此，(a, b) 满足命题（4.4.1）中的条件，且属于 $\Omega \cap \Omega'$。应用同一命题可知，

$$f(a,b) = \int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{s}_{a,ab}} d\mu = \frac{1}{g(a,b)}.$$

由于 f 和 $1/g$ 在 $\Omega \cap \Omega'$ 上的全纯性，我们知道

$$f = \frac{1}{g} \quad \text{on } \Omega \cap \Omega'.$$

取 β， $\gamma \in \mathbb{R}$，其中 $-\beta\gamma < 1$ 且 $|\gamma| \leq \frac{1}{2}$。那么 $(\mathrm{i}\beta, \mathrm{i}\gamma) \in \Omega \cap \Omega'$。根据上述观察，我们得到

$$f(\mathrm{i}\beta, \mathrm{i}\gamma) = \frac{1}{g(\mathrm{i}\beta, \mathrm{i}\gamma)}.$$

结合 (4.4.10)，我们得到 (4.4.8)。

令 $|a| < \varepsilon$。注意到

$$\int_0^1 \Big(\cos \frac{a(1-s)}{2}\Big)^{-2} ds = \frac{\tan \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}.$$

将此代入 (4.4.3)，其中 $b = 0$、 $t = 1$ 和 $x = 0$，可得

$$\mathbb{E}[e^{a\mathfrak{s}_1} \mid \theta(1) = 0] = \frac{\frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}.$$

将其全纯延拓，可得 (4.4.9)。 □

我们应用命题 (4.4.7)，以随机方式表示欧拉多项式、伯努利多项式和欧拉数列多项式。$\xi \in \mathbb{R}$ 的欧拉多项式 $E_n(\xi)$ 和伯努利多项式 $B_n(\xi)$，其中 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，通过以下指数型生成函数定义：

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\xi) \frac{\zeta^n}{n!} = \frac{2e^{\zeta\xi}}{e^{\zeta} + 1} \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\xi) \frac{\zeta^n}{n!} = \frac{\zeta e^{\zeta\xi}}{e^{\zeta} - 1}$$

对于 $\xi \in \mathbb{R}$ 和 $\zeta \in \mathbb{R}$，其中 $\zeta(\xi - 1) < 1$。值得注意的是，欧拉数 e_n 和伯努利数 b_n 满足：

$$e_n = 2^n E_n\Big(\frac{1}{2}\Big) \quad \text{and} \quad b_n = B_n(0) \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

对于 参见 [4]。我们有以下关于 E_n 和 B_n的随机表示 .

(4.4.11) 定理。 对于每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，都有

$$E_n(\xi) = \mathrm{i}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-2\xi)^k \left(\int_{\mathcal{W}} \left\{ \mathfrak{s}_1 + \frac{\mathrm{i}}{4} |\theta(1)|^2 \right\}^k d\mu \right) \left(\int_{\mathcal{W}} \mathfrak{s}_1^{n-k} d\mu \right)$$

and

$$B_n(\xi) = \mathrm{i}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-2\xi)^k \left(\int_{\mathcal{W}} \left\{ \mathfrak{s}_1 + \frac{\mathrm{i}}{4} |\theta(1)|^2 \right\}^k d\mu \right) \mathbb{E}[\mathfrak{s}_1^{n-k} \mid \theta(1) = 0].$$

证明。 我们首先给出 E_n 的表达式。将欧拉多项式的指数型生成函数改写为

$$\frac{2e^{\zeta\xi}}{e^{\zeta}+1} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta(1-2\xi)}}{\frac{1}{2}(e^{\frac{\zeta}{2}} + e^{-\frac{\zeta}{2}})}.$$

给定 $\xi \in \mathbb{R}$，选取 $\zeta \in \mathbb{R}$，使得 $\zeta(\xi - 1) < 1$ 且 $-\frac{1}{2}\zeta(1-2\xi) < 1$。恒等式 (4.4.8) 结合 $\beta = \zeta(1-2\xi)$ 和 $\gamma = \frac{1}{2}$ 可得

$$e^{-\frac{1}{2}\zeta(1-2\xi)} = \int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\zeta(1-2\xi)\{\mathfrak{s}_1 + \frac{\mathrm{i}}{4}|\theta(1)|^2\}} d\mu. \tag{4.4.12}$$

恒等式 (4.4.8) 结合 $\beta = \zeta$ 和 $\gamma = 0$ 也可得

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(e^{\frac{\zeta}{2}} + e^{-\frac{\zeta}{2}})} = \int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\zeta\mathfrak{s}_1} d\mu.$$

取满足 $\int_{\mathcal{W}} e^{\delta\{|\mathfrak{s}_1| + \frac{1}{4}|\theta_{(1)}|^2\}} d\mu < \infty$ 的 $0 < \delta < 2$。则有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\xi) \frac{\zeta^n}{n!} &= \left(\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\zeta(1-2\xi)\{\mathfrak{s}_1 + \frac{\mathrm{i}}{4}|\theta(1)|^2\}} d\mu \right) \left(\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\zeta\mathfrak{s}_1} d\mu \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \{\mathrm{i}\zeta(1-2\xi)\}^k \int_{\mathcal{W}} \left\{ \mathfrak{s}_1 + \frac{\mathrm{i}}{4}|\theta(1)|^2 \right\}^k d\mu \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\mathrm{i}\zeta)^j \int_{\mathcal{W}} \mathfrak{s}_1^j d\mu \right)
\end{aligned}$$

对于满足 $\zeta(\xi - 1) < 1$ 且 $|\zeta(1-2\xi)| \vee |\zeta| < \delta$ 的 $\zeta \in \mathbb{R}$，将其展开为关于 0 的 ζ 级数，并比较各 ζ^n 的系数，即可得到所需的 E_n 表达式。

接下来我们给出 B_n的表达式。将伯努利多项式的指数型生成函数改写为

$$\frac{\zeta e^{\zeta\xi}}{e^{\zeta} - 1} = e^{-\frac{1}{2}\zeta(1-2\xi)} \frac{\frac{\zeta}{2}}{\sinh\frac{\zeta}{2}}.$$

由 (4.4.9) 和 (4.4.12) 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(\xi) \frac{\zeta^n}{n!} = \left(\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\zeta(1-2\xi)\{\mathfrak{s}_1 + \frac{\mathrm{i}}{4}|\theta(1)|^2\}} d\mu \right) \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}\zeta\mathfrak{s}_1} \mid \theta(1) = 0].$$

将恒等式右端转换为 ζ的级数，并比较 ζ^n的系数，我们即可得到所需的 B_n表达式。

□

类似的方法适用于欧拉多项式。A型欧拉多项式 $P_n(\xi)$ 和 B型欧拉多项式 $P(B_n;\,\xi)$ 定义为

$$\frac{P_n(\xi)}{(1-\xi)^{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^n\xi^k \quad \text{and} \quad \frac{P(B_n;\xi)}{(1-\xi)^{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^n\xi^k$$

对于 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $\xi\in\mathbb{R}$，其中 $|\xi|<1$，其指数型生成函数由下式给出

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\xi)\frac{\zeta^n}{n!}=\frac{(1-\xi)e^{(1-\xi)\zeta}}{1-\xi e^{(1-\xi)\zeta}} \quad \text{for } \zeta\in\mathbb{R} \text{ with } |\xi|e^{(1-\xi)\zeta}<1$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(B_n;\xi)\frac{\zeta^n}{n!}=\frac{(1-\xi)e^{(1-\xi)\zeta}}{1-\xi e^{2(1-\xi)\zeta}} \quad \text{for } \zeta\in\mathbb{R} \text{ with } |\xi|e^{2(1-\xi)\zeta}<1$$

（参见[3, 8]）。我们有 P_ns 和 $P(B_n;\,\cdot)$s 的如下随机表达式。

（4.4.13）命题。成立的是

$$\begin{aligned}P_n(\xi)=&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-\xi)^k\left(\int_{\mathcal{W}}\left\{\mathrm{i}\mathfrak{s}_1+\frac{1}{4}|\theta(1)|^2\right\}^k d\mu\right)\\&\times\left(\int_{\mathcal{W}}\left\{\mathrm{i}(1-\xi)\mathfrak{s}_1+\frac{1+\xi}{4}|\theta(1)|^2\right\}^{n-k}d\mu\right)\end{aligned}$$

and

$$P(B_n;\xi)=\int_{\mathcal{W}}\left\{2\mathrm{i}(1-\xi)\mathfrak{s}_1+\frac{1+\xi}{2}|\theta(1)|^2\right\}^n d\mu$$

对于 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $\xi\in\mathbb{R}$，其中 $|\xi|<1$。

证明。 我们先给出 P_n 的表达式。将 P_ns 的指数型生成函数改写为

$$\frac{(1-\xi)e^{(1-\xi)\zeta}}{1-\xi e^{(1-\xi)\zeta}}=e^{\frac{1}{2}(1-\xi)\zeta}\left\{\frac{1}{1-\xi}e^{-\frac{1}{2}(1-\xi)\zeta}-\frac{\xi}{1-\xi}e^{\frac{1}{2}(1-\xi)\zeta}\right\}^{-1}.$$

给定满足 $|\xi|<1$ 的 $\xi\in\mathbb{R}$，令 $\zeta\in\mathbb{R}$ s 满足 $|\xi|e^{(1-\xi)\zeta}<1$，且 $-\frac{1}{2}(1-\xi)\zeta<1$。根据 (4.4.8)，取 $\beta=(1-\xi)\zeta$ 和 $\gamma=-\frac{1}{2}$，可得

$$e^{\frac{1}{2}(1-\xi)\zeta}=\int_{\mathcal{W}}e^{\mathrm{i}(1-\xi)\zeta\{\mathfrak{s}_1-\frac{\mathrm{i}}{4}|\theta(1)|^2\}}d\mu.$$

令 $-1<\xi\le 0$，并设 $\gamma=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}$。则

$$|\gamma|\le\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}+\gamma=-\frac{\xi}{1-\xi},\quad \text{and}\quad \frac{1}{2}-\gamma=\frac{1}{1-\xi}.$$

取 $\zeta\in\mathbb{R}$，其中 $-\frac{1}{2}(1+\xi)\zeta<1$。由 (4.4.8) 中的 $\beta=(1-\xi)\zeta$ 以及此 γ，可得

$$\left\{\frac{1}{1-\xi}e^{-\frac{1}{2}(1-\xi)\zeta}-\frac{\xi}{1-\xi}e^{\frac{1}{2}(1-\xi)\zeta}\right\}^{-1}=\int_{\mathcal{W}}e^{\mathrm{i}(1-\xi)\zeta\{\mathfrak{s}_1-\frac{\mathrm{i}(1+\xi)}{4(1-\xi)}|\theta(1)|^2\}}d\mu. \tag{4.4.14}$$

因此我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi)\frac{\zeta^n}{n!} = \left(\int_{\mathcal{W}} e^{(1-\xi)\zeta\{\mathfrak{i}\mathfrak{s}_1+\frac{1}{4}|\theta(1)|^2\}}d\mu\right)\left(\int_{\mathcal{W}} e^{\zeta\{\mathfrak{i}(1-\xi)\mathfrak{s}_1+\frac{(1+\xi)}{4}|\theta(1)|^2\}}d\mu\right)$$

对于 $-1 < \xi \leq 0$ 和 $\zeta \in \mathbb{R}$，且 $\max\{(1-x)\zeta,\ (1+\xi)\zeta\} < 1$ 和 $|\xi|e^{(1-\xi)\zeta} < 1$。将恒等式右侧变换为关于 0 的 ζ 级数，并比较 ζ^n的系数，即可得到所需的 P_n表达式。

接下来我们给出 $P(B_n;\cdot)$ 的表达式。将相应的指数型生成函数改写为

$$\frac{(1-\xi)e^{(1-\xi)\zeta}}{1-\xi e^{2(1-\xi)\zeta}} = \left\{\frac{1}{1-\xi}e^{-(1-\xi)\zeta} - \frac{\xi}{1-\xi}e^{(1-\xi)\zeta}\right\}^{-1}.$$

由（4.4.14）可知,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(B_n;\xi)\frac{\zeta^n}{n!} = \int_{\mathcal{W}} e^{2\zeta\{\mathfrak{i}(1-\xi)\mathfrak{s}_1+\frac{(1+\xi)}{4}|\theta(1)|^2\}}d\mu$$

对于 $-1 < \xi \leq 0$ 和 $\zeta \in \mathbb{R}$，且 $\max\{(1-x)\zeta,\ (1+\xi)\zeta\} < \frac{1}{2}$ 和 $|\xi|e^{2(1-\xi)\zeta} < 1$。这就得到了所需的 $P(B_n;\xi)$ 表达式。 □

（4.4.15）注。本节内容取自 Ikeda 与作者的论文 [14, 15] 。其中，命题（4.4.7）的证明基于热核的表达式，该表达式由 Matsumoto 借助范弗莱克公式证明（[25]）。这一表达式用于处理项 $|\theta(1)|^2$。正如命题（4.4.7）的证明中所见，该证明用到了命题（4.4.1），而该项是二次型 $\mathfrak{p}_{\sigma_{a,\,b}}$ 的一部分，可以按照我们计算二次型的拉普拉斯变换的方案处理。与使用热核相比，命题（4.4.1）要朴素得多，也更直接。

4.5. KdV方程

本节将推论 (4.2.17) 应用于 KdV方程的无反射势和孤子解。

令 $\mathcal{W}$ 为定义在 $[0,\infty)$ 上、取值于 $\mathbb{R}^n$ 的连续函数空间，且这些函数在 0 处为零；$\widehat{\mu}$ 为 $\mathcal{W}$ 上的维纳测度。下文中，我们用期望符号 $\widehat{\mathbb{E}}[\cdots]$ 表示关于 $\widehat{\mu}$ 对 $\widehat{\mathcal{W}}$ 的积分，即 $\widehat{\mathbb{E}}[f] = \int_{\widehat{\mathcal{W}}} f d\widehat{\mu}$。本节之前的结论仍然成立，只需将 $\mathcal{W}$ 和 μ 分别替换为 $d=n$、$\mathcal{W}$ 和 $\widehat{\mu}$：我们将 $\mathcal{W}$ 上的维纳泛函视为定义在 $\mathcal{W}$ 上的维纳泛函，因为把 $\mathcal{W}$ 看作 $\mathcal{W}$ 的子空间，并把 μ 看作 $\widehat{\mu}$ 在 $\mathcal{W}$ 上的限制。

Put

$$\mathcal{SD}_n = \left\{(\eta_j, m_j)_{1\leq j\leq n}\,\middle|\, 0<\eta_1<\cdots<\eta_n, m_1,\ldots,m_n>0\right\}.$$

其元素称为长度为 n 的散射数据。对于 $\boldsymbol{s} = (\eta_j, m_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathcal{SD}_n$，定义$C^\infty$-函数 $G_{\boldsymbol{s}}$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $u_{\boldsymbol{s}}$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下

$$G_{\boldsymbol{s}}(x) = \left(\frac{\sqrt{m_i m_j}e^{-(\eta_i+\eta_j)x}}{\eta_i+\eta_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \quad \text{for } x\in\mathbb{R}$$

and

$$u_{\boldsymbol{s}} = -2\Big(\frac{d}{dx}\Big)^2 \log\det(I_n + G_{\boldsymbol{s}}).$$

该函数 ion $u_{\boldsymbol{s}}$ 称为具有散射数据 $\boldsymbol{s}$的无反射势。若设

$$\boldsymbol{s}(t) = \big(\eta_j, m_j \exp(-2\eta_j^3 t)\big)_{1\le j\le n} \quad \text{for } t \in \mathbb{R},$$

则对于 $x, t \in \mathbb{R}$，函数 $v(x,t) = -u_{\boldsymbol{s}(t)}(x)$ 是 KdV方程的一个 n-孤子 解

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{3}{2} v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad \text{with } v(\cdot, 0) = -u_{\boldsymbol{s}}. \tag{4.5.1}$$

参见 [28]。

将 $\mathbb{R}^n$ 上离散测度的空间 $\boldsymbol{\Sigma}_n$ 定义为

$$\boldsymbol{\Sigma}_n = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j^2 \delta_{p_j} \,\middle|\, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R},\, c_1, \dots, c_n > 0,\, p_i \neq p_j \text{ for } i \neq j \right\},$$

其中 δ_p 表示集中于 p 处的 $\mathbb{R}^n$ 上的狄拉克测度。下文中，字母 x, y, z 也用于表示随机过程的时间参数。固定

$$\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^n c_j^2 \delta_{p_j} \in \boldsymbol{\Sigma}_n.$$

Put

$$D_{\boldsymbol{a}} = \operatorname{diag}[p_1, \dots, p_n] \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

与 $\boldsymbol{a}$ 相关联的奥恩斯坦-乌伦贝克过程 $\{\xi_{\boldsymbol{a}}(x)\}_{x\in[0,\infty)}$ 由下式给出

$$\xi_{\boldsymbol{a}}(x) = e^{xD_{\boldsymbol{a}}} \int_0^x e^{-yD_{\boldsymbol{a}}} d\theta(y) \quad \text{for } x \in [0,\infty),$$

也就是说，其第 i 个分量 $\xi^i_{\boldsymbol{a}}(x)$ 等于 $e^{xp_i}\int_0^x e^{-yp_i} d\theta^i(y)$。 $\{\xi_{\boldsymbol{a}}(x)\}_{x\in[0,\infty)}$ 是该随机微分方程的唯一解

$$d\xi_{\boldsymbol{a}}(x) = d\theta(x) + D_{\boldsymbol{a}}\xi_{\boldsymbol{a}}(x)dx, \quad \xi_{\boldsymbol{a}}(0) = x.$$

定义 $\Psi_{\boldsymbol{a}}: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 如下:

$$\Psi_{\boldsymbol{a}}(x) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x \langle \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}, \xi_{\boldsymbol{a}}(y)\rangle^2 dy\right)\right] \text{ for } x \in [0,\infty).$$

(4.5.2) L ema. $\Psi_{\boldsymbol{a}}(x) > 0$ 对于 $x > 0$ 和 $\Psi_{\boldsymbol{a}}$，在 $[0,\infty)$ 上无穷次可微 .

证明。 显然其为正。根据控制收敛定理， $\Psi_{\boldsymbol{a}}$ 可微，其导数为

$$\Psi_{\boldsymbol{a}}(x) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(-\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}, \xi_{\boldsymbol{a}}(x)\rangle^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x \langle \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}, \xi_{\boldsymbol{a}}(y)\rangle^2 dy\right)\right].$$

为证明其具有高阶可微性，设 $C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^n)$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的无穷次可微函数空间，其中各阶导数至多具有多项式增长。对于 $f \in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^n)$，令 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{1\le i\le n}$ 并定义 $\mathcal{L}f$ 为

$$\mathcal{L}f(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^2 f\Big)(\xi) + \langle D_{\boldsymbol{a}}\xi, \nabla f(\xi)\rangle - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{c_a}, \xi\rangle^2 f(\xi) \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

根据伊藤公式，我们有

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\bigg[f(\xi_{\boldsymbol{a}}(x))\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^x \langle \boldsymbol{c_a}, \xi_{\boldsymbol{a}}(y)\rangle^2 dy\Big)\bigg]\\ &= \int_0^x \widehat{\mathbb{E}}\bigg[(\mathcal{L}f)(\xi_{\boldsymbol{a}}(y))\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^y \langle \boldsymbol{c_a}, \xi_{\boldsymbol{a}}(z)\rangle^2 dz\Big)\bigg]dy \quad \text{for every } f \in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

反复应用这一恒等式，我们得到高阶可微性。 □

不失一般性，我们假设

(H)$_m$ 存在 $0 \le m < n$ 和 $1 \le j(1) < \cdots < j(m) \le n$ 使得

$$\begin{aligned}&|p_j| \le |p_{j+1}| \quad \text{for } 1 \le j \le n-1, \quad \#\{|p_1|, \dots, |p_n|\} = n - m,\\ &p_{j(\ell)} > 0 \ \text{ and } \ p_{j(\ell)+1} = -p_{j(\ell)} \ \text{ for } 1 \le \ell \le m.\end{aligned}$$

De记 $0 < r_1 < \cdots < r_{n-m}$ r 对应的代数方程的根为 r tha t

$$-1 = \sum_{j=1}^n \frac{c_j^2}{p_j^2 - r}. = \sum_{\ell=1}^m \frac{c_{j(\ell)}^2 + c_{j(\ell)+1}^2}{p_{j(\ell)}^2 - r} + \sum_{j \notin \{j(\ell), j(\ell)+1; 1\le\ell\le m\}} \frac{c_j^2}{p_j^2 - r}.$$

定义 $\boldsymbol{s(a)} = (\eta_j, \ m_j)_{1\le j\le n} \in \mathcal{SD}_n$ 为

$$\{\eta_1 < \cdots < \eta_n\} = \{p_{j(1)}, \dots, p_{j(m)}, \sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_{n-m}}\}$$

and

$$m_j = \begin{cases} 2\eta_j \dfrac{c_{j(\ell)+1}^2}{c_{j(\ell)}^2} \displaystyle\prod_{k\ne j} \frac{\eta_k + \eta_j}{\eta_k - \eta_j} \prod_{k\ne j, j+1} \frac{p_k + \eta_j}{p_k - \eta_j} & \text{if } j = j(\ell), \\ -2\eta_j \displaystyle\prod_{k\ne j} \frac{\eta_k + \eta_j}{\eta_k - \eta_j} \prod_{k=1}^n \frac{p_k + \eta_j}{p_k - \eta_j} & \text{if } j \notin \{j(\ell); 1 \le \ell \le m\}. \end{cases}$$

(4.5.3) 注记。成立的是

$$\begin{cases} |p_k| < \eta_k < |p_{k+1}| & \text{for } k \notin \{j(\ell); 1 \le \ell \le m\}, \\ \eta_{j(\ell)-1} < p_{j(\ell)} = -p_{j(\ell)+1} = \eta_{j(\ell)} < \eta_{j(\ell)+1} & \text{for } 1 \le \ell \le m. \end{cases} \tag{4.5.4}$$

这意味着 η_js 的正性以及 $\eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_n$ 所表示的序关系。这还可以推出

$$p_k^2 - \eta_j^2 \begin{cases} < 0 & \text{if (i) } j \notin \{j(\ell) \mid 1 \le \ell \le m\} \text{ and } k \le j \text{ or (ii) } j = j(\ell) \text{ and } k < j(\ell), \\ > 0 & \text{if (iii) } j \notin \{j(\ell) \mid 1 \le \ell \le m\} \text{ and } k > j \text{ or (vi) } j = j(\ell) \text{ and } k > j(\ell) + 1. \end{cases}$$

因此， m_js 中出现的所有分母均不为零，从而 m_js 都是定义良好的。此外，我们有

$$\operatorname{sgn}(m_j) = \begin{cases} (-1)^{j-1}(-1)^{j-1} = 1 & \text{if } j = j(\ell), \\ -(-1)^{j-1}(-1)^{j} = 1 & \text{if } j \notin \{j(\ell) \mid 1 \le \ell \le m\}. \end{cases}$$

因此 m_j均为正数。

我们将用 Ornstein-Uhlenbeck 过程给出无反射势的概率表示。

(4.5.5) 定理。 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a}) = (\eta_j, m_j)_{1\le j\le n}$ 如上所述。则有

$$\begin{aligned} (4.5.6) \qquad 4\log\Psi_{\boldsymbol{a}}(x) = &-2\log\det\Big(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})}(x)\Big) \\ &+ 2\log\det\Big(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})}(0)\Big) - 2x\sum_{j=1}^{n}(p_j+\eta_j) \quad \textit{for } x\in[0,\infty). \end{aligned}$$

特别地，有

$$4\Big(\frac{d}{dx}\Big)^2\log\Psi_{\boldsymbol{a}} = u_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})} \quad \textit{on } [0,\infty).$$

(4.5.7) 注。 由于每个无反射势在 $\mathbb{R}$上都是实解析的，它由 $[0,\infty$上的取值确定。因此，$4\big(\frac{d}{dx}\big)^2\log\,\Psi_{\boldsymbol{a}}$唯一确定一个无反射势。已知映射 $\boldsymbol{\Sigma}_n \ni \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{s}(\boldsymbol{a}) \in \mathcal{SD}_n$ 是满射（[40]）。因此，每个无反射势都可表示为 $4\big(\frac{d}{dx}\big)^2\log\,\Psi_{\boldsymbol{a}}$在 $[0,\infty$上的形式。

定理 (4.5.5) 的证明分为若干步骤，每一步都是一个引理。在证明过程中，除了 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a}) = (\eta_j, m_j)_{1\le j\le n}$之外，我们还固定 $x > 0$。令

$$E_{\boldsymbol{a}} = D_{\boldsymbol{a}}^2 + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}} \otimes \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$用 $\mathcal{W}_x$ 表示在 $[0,x]$ 上取值于 $\mathbb{R}^n$、且在 0 处为零的连续函数空间。 $\mathcal{W}_x\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$是 $\mathcal{W}$ 的子空间，因为对于 $w\in\mathcal{W}_x$， $w(x\wedge\cdot)\in\mathcal{W}$。

(4.5.8) 引理。 设 $\phi\in C^\infty([0,x];\mathbb{R}^{n\times n})$ 是 $[0,x]$上的常微分方程的一个解

$$\phi'' - E_{\boldsymbol{a}}\phi = 0.$$

假设对于任意 $y\in[0,x]$，均有 $\det\phi(y)\neq 0$。定义 $\psi\in C^\infty([0,x];\mathbb{R}^{n\times n})$ 为 $\psi = -(\phi'\phi^{-1})(x-\cdot)$。用 ψ_S（分别用 ψ_A）表示ψ的对称（分别为反对称）部分。则有

$$\begin{aligned} (4.5.9) \qquad &\widehat{\mathbb{E}}\bigg[f(\xi_{\boldsymbol{a}})\exp\bigg(-\frac{1}{2}\int_0^x\langle\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}},\xi_{\boldsymbol{a}}(y)\rangle^2dy + \frac{1}{2}\big\langle(\psi_S(x)-D_{\boldsymbol{a}})\xi_{\boldsymbol{a}}(x),\xi_{\boldsymbol{a}}(x)\big\rangle \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{2}\int_0^x|\psi_A(y)\xi_{\boldsymbol{a}}(y)|^2dy\bigg)\bigg] \\ &= \bigg(\frac{\det\phi(0)e^{-x\operatorname{tr}D_{\boldsymbol{a}}}}{\det\phi(x)}\bigg)^{\frac{1}{2}}\widehat{\mathbb{E}}\big[f(\iota + F_{\widehat{\kappa_A(\rho_{\psi_S})}})\big] \quad \textit{for every } f\in\widehat{\mathcal{W}}_x. \end{aligned}$$

证明。 定义 $\chi, \alpha \in C^1([0,x]; \mathbb{R}^{n\times n})$ 为 $\chi \equiv D_{\boldsymbol{a}}$ 且 $\alpha = \mathfrak{e}[(\cdot - x)D_{\boldsymbol{a}}]$。 则 α 满足

$$\alpha' = \chi\alpha, \quad \alpha(x) = I_n, \quad \text{and} \quad \det\alpha(y) \neq 0 \ \text{ for } y \in [0,x].$$

此外， $\xi^{[x]} = \xi_{\boldsymbol{a}}$，其中 $\xi^{[x]}$ 是推论 (4.2.17) 中讨论的奥恩斯坦-乌伦贝克过程。

令 $\gamma = -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}} \otimes \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}} + \psi_A^2$ 和 $\beta = \psi_S - D_{\boldsymbol{a}}$。 于是，(4.5.9) 的左端可写为

$$\widehat{\mathbb{E}}\bigg[f(\xi^{[x]})\exp\bigg(\frac{1}{2}\int_0^x \langle\gamma(y)\xi^{[x]}(y), \xi^{[x]}(y)\rangle dy + \frac{1}{2}\langle\beta(x)\xi^{[x]}(x), \xi^{[x]}(x)\rangle\bigg)\bigg].$$

根据推论 (4.2.17)，这等于

$$\exp\bigg(\frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{tr}[\beta(y)]dy\bigg)\widehat{\mathbb{E}}\Big[f\exp\big(\mathfrak{a}^0_{\chi+\beta_S,\gamma+\beta'_S-\chi^\dagger\chi}\big)\Big] \quad \text{for } f \in C_b(\mathcal{W}_x) \text{ with } f \geq 0. \tag{4.5.10}$$

注意， $\psi' = E_{\boldsymbol{a}} - \psi^2$ 和 $\psi'_S = E_{\boldsymbol{a}} - \psi_S^2 - \psi_A^2$。 于是我们知道

$$\chi + \beta_S = D_{\boldsymbol{a}} + \psi_S - D_{\boldsymbol{a}} = \psi_S$$

and

$$\gamma + \beta'_S - \chi^\dagger\chi = -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}} \otimes \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}} + \psi_A^2 + E_{\boldsymbol{a}} - \psi_S^2 - \psi_A^2 - D_{\boldsymbol{a}}^2 = -\psi_S^2.$$

因此我们有

$$\mathfrak{a}^0_{\chi+\beta_S,\gamma+\beta'_S-\chi^\dagger\chi} = \int_0^x \langle\psi_S(y)\theta(y), d\theta(y)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^x |\psi_S(y)\theta(y)|^2 dy.$$

结合 (4.1.4)，这意味着

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[f\exp\big(\mathfrak{a}^0_{\chi+\beta_S,\gamma+\beta'_S-\chi^\dagger\chi}\big)\Big] = \widehat{\mathbb{E}}\Big[f\Big(\iota + F_{\widehat{\kappa_A(\rho_{\psi_S})}}\Big)\Big]. \tag{4.5.11}$$

注意到

$$\det\phi(x) = \det\phi(0)\exp\bigg(-\int_0^x \mathrm{tr}[\psi(y)]dy\bigg).$$

因此我们有

$$\exp\bigg(\int_0^x \mathrm{tr}[\beta_S(y)]dy\bigg) = \exp\bigg(\int_0^x \mathrm{tr}[\psi(y)]dy - x\mathrm{tr}D_{\boldsymbol{a}}\bigg) = \frac{\det\phi(0)e^{-x\mathrm{tr}D_{\boldsymbol{a}}}}{\det\phi(x)}.$$

将此式和 (4.5.11) 代入 (4.5.10)，得到 (4.5.9)。 □

(4.5.12) 引理。 令 $\phi_{\boldsymbol{a}} \in C^\infty([0,\infty); \mathbb{R}^{n\times n})$ 为常微分方程的唯一解

$$\phi''_{\boldsymbol{a}} - E_{\boldsymbol{a}}\phi_{\boldsymbol{a}} = 0, \quad \phi_{\boldsymbol{a}}(0) = I_n, \quad \phi'_{\boldsymbol{a}}(0) = -D_{\boldsymbol{a}}. \tag{4.5.13}$$

于是，对于每个 $y \in [0,\infty$行列式 $\phi_{\boldsymbol{a}}(y) \neq 0)$。

证明。为证明该断言，我们采用反证法。为此，假设存在一个 $y \in (0,\infty)$，使得行列式 $\phi_{\boldsymbol{a}}(y) = 0$。取一个满足 $\phi_{\boldsymbol{a}}(y)v = 0$ 的 $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s。~令 $\phi_{\boldsymbol{a}} = \phi'_{\boldsymbol{a}} - D_{\boldsymbol{a}}\phi_{\boldsymbol{a}}$。由 (4.5.13)，我们有

$$\widetilde{\phi}'_{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}} \otimes \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})\phi_{\boldsymbol{a}} - D_{\boldsymbol{a}}\widetilde{\phi}_{\boldsymbol{a}}.$$

~改写为 $\phi'_{\boldsymbol{a}} = \phi_{\boldsymbol{a}} + D_{\boldsymbol{a}}\phi_{\boldsymbol{a}}$，我们看到

$$0 = \langle \phi_{\boldsymbol{a}}(y)v, \widetilde{\phi}_{\boldsymbol{a}}(y)v\rangle = \int_0^y \Big\{ |\widetilde{\phi}_{\boldsymbol{a}}(z)v|^2 + \langle \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}, \phi_{\boldsymbol{a}}(z)v\rangle^2 \Big\} dz.$$

~这意味着，对于每个 $z \in [0,y]$，都有 $\phi_{\boldsymbol{a}}(z)v = 0$。因此

$$\phi'_{\boldsymbol{a}}(z)v - D_{\boldsymbol{a}}\phi_{\boldsymbol{a}}(z)v = 0 \quad \text{for every } z \in [0,y].$$

结合 $\phi_{\boldsymbol{a}}(0) = I_n$，可得

$$\phi_{\boldsymbol{a}}(z)v = \mathfrak{e}[zD_{\boldsymbol{a}}]v \quad \text{for every } z \in [0,y].$$

由于 $\phi_{\boldsymbol{a}}(y)v = 0$，这意味着 $v = 0$，这就产生了矛盾。 □

(4.5.14) 引理。 设 $\phi_{\boldsymbol{a}}$ 如引理 *(4.5.12)* 中所述。则有

$$\Psi_{\boldsymbol{a}}(x) = \left(\frac{e^{-x\operatorname{tr} D_{\boldsymbol{a}}}}{\det \phi_{\boldsymbol{a}}(x)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5.15}$$

证明。设 $\phi_{\boldsymbol{a}}$ 如引理 (4.5.12) 中所述。由该引理可知，对于每个 $y \in [0,x]$，都有 $\det \phi_{\boldsymbol{a}}(y) \neq 0$。令 $\psi_{\boldsymbol{a}} = -(\phi'_{\boldsymbol{a}}\phi_{\boldsymbol{a}}^{-1})(x - \cdot)$。则有

$$\psi'_{\boldsymbol{a}} = E_{\boldsymbol{a}} - \psi_{\boldsymbol{a}}^2, \quad \psi_{\boldsymbol{a}}(x) = D_{\boldsymbol{a}}.$$

注意到 $\psi_{\boldsymbol{a}}^\dagger$ 满足相同的常微分方程。因此 $\psi_{\boldsymbol{a}} = \psi_{\boldsymbol{a}}^\dagger$。由此我们得到

$$\psi_{\boldsymbol{a}} = (\psi_{\boldsymbol{a}})_S \quad \text{and} \quad (\psi_{\boldsymbol{a}})_A = 0.$$

将这些代入 (4.5.9)，其中 $f = 1$ 和 $\psi = \psi_{\boldsymbol{a}}$，得到 (4.5.15)。 □

(4.5.16) 引理。 令 $R = \text{对角}[\eta_1, \dots, \eta_n]$。定义 $U = (U_j^i)_{1 \le i,\ j \le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为

$$U_j^i = \begin{cases} \dfrac{1}{|(D_{\boldsymbol{a}}^2 - \eta_j^2 I_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|} \dfrac{c_i}{p_i^2 - \eta_j^2} & \text{if } j \notin \{j(\ell) \mid 1 \le \ell \le m\}, \\ \dfrac{\delta_{i,j(\ell)+1}c_{j(\ell)} - \delta_{i,j(\ell)}c_{j(\ell)+1}}{(c_{j(\ell)}^2 + c_{j(\ell)+1}^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{if } j = j(\ell). \end{cases}$$

那么 U 是一个正交矩阵，并且

$$E_{\boldsymbol{a}} = UR^2U^{-1}.$$

此外，还有

$$\phi_{\boldsymbol{a}}(y) = U\big\{\mathfrak{ch}[yR] - \mathfrak{sh}[yR]R^{-1}U^{-1}D_{\boldsymbol{a}}U\big\}U^{-1} \quad \text{for } y \in [0,\infty). \tag{4.5.17}$$

证明。为证明第一个断言，令

$$u_\ell = (\underbrace{0,\dots,0}_{j(\ell)-1}, -c_{j(\ell)+1}, c_{j(\ell)}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-j(\ell)-1})^\dagger \in \mathbb{R}^n.$$

由于 $\langle \boldsymbol{c_a}, u_\ell\rangle = 0$ 和 $p^2_{j(\ell)+1} = p^2_{j(\ell)}$，我们可知

$$E_{\boldsymbol{a}} u_\ell = D^2_{\boldsymbol{a}} u_\ell = p^2_{j(\ell)} u_\ell.$$

注意到

$$\det(D^2_{\boldsymbol{a}} - r_k I_n) = \prod_{i=1}^n (p_i^2 - r_k) \neq 0,$$

我们令

$$v_k = (D^2_{\boldsymbol{a}} - r_k I_n)^{-1} \boldsymbol{c_a}.$$

于是有

$$E_{\boldsymbol{a}} v_k = (1 + \langle v_k, \boldsymbol{c_a}\rangle)\boldsymbol{c_a} + r_k v_k.$$

由于

$$1 + \langle v_k, \boldsymbol{c_a}\rangle = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{c_j^2}{p_j^2 - r_k} = 0,$$

可得

$$E_{\boldsymbol{a}} v_k = r_k v_k.$$

因此，$p^2_{j(1)}$、……、$p^2_{j(m)}$和 r_1、……、r_{n-m}是 n的不同正特征值，而 $E_{\boldsymbol{a}}$和u_1、……、u_m以及 v_1、……、v_{n-m}是相应的特征向量。如果 $j \notin \{j(\ell) \mid 1 \le \ell \le m\}$，那么对于某个 $1 \le k \le n-m$，$\eta_j = \sqrt{r_k}$，并且对于 $1 \le \ell \le m$，$\eta_{j(\ell)} = p_{j(\ell)}$。因此，$U$是一个正交矩阵，并且 $E_{\boldsymbol{a}} = UR^2U^{-1}$。

接下来我们证明表达式 **(4.5.17)**。为此，记其右端为 ψ。容易看出

$$\psi'(y) = UR\big\{\mathfrak{sh}[yR] - \mathfrak{ch}[yR]R^{-1}U^{-1}D_{\boldsymbol{a}}U\big\}U^{-1}$$

and

$$\psi''(y) = UR^2\big\{\mathfrak{ch}[yR] - \mathfrak{sh}[yR]R^{-1}U^{-1}D_{\boldsymbol{a}}U\big\}U^{-1} = E_{\boldsymbol{a}}\psi(y).$$

因此，ψ 满足常微分方程 **(4.5.13)**，从而 $\phi_{\boldsymbol{a}} = \psi$。 □

(4.5.18) 引理。假设**(H)**$_0$ 成立。(i) 令

$$X = \left(\frac{1}{\eta_i + p_j}\right)_{1\le i,j\le n}, \quad C(\boldsymbol{c_a}) = \mathrm{diag}[c_1,\dots,c_n],$$
$$V(\boldsymbol{c_a}) = \mathrm{diag}\Big[|(D^2_{\boldsymbol{a}} - \eta_1^2 I_n)^{-1}\boldsymbol{c_a}|^{-1}, \dots, |(D^2_{\boldsymbol{a}} - \eta_n^2 I_n)^{-1}\boldsymbol{c_a}|^{-1}\Big],$$
$$\tau(i) = \mathrm{sgn}\bigg(\prod_{j=1}^n (p_j - \eta_i)\bigg), \quad b(i) = \tau(i)\left\{-2\eta_i \frac{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha^2 - \eta_i^2)}{\prod_{\beta=1}^n (p_\beta^2 - \eta_i^2)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

以及 $B = \mathrm{diag}[b(1)\dots\dots b(n)]$。则有

$$U^{-1}\phi_{\boldsymbol{a}}(y)U = -\frac{1}{2}V(\boldsymbol{c_a})R^{-1}B\Big(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})}(y)\Big)\mathfrak{e}[yR]B^{-1}XC(\boldsymbol{c_a})U. \tag{4.5.19}$$

(ii)恒等式 (4.5.6) 成立。

(4.5.20) 注。 由 (4.5.4) 可得

$$\frac{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha^2-\eta_i^2)}{\prod_{\beta=1}^n(p_\beta^2-\eta_i^2)}<0\quad\text{for } 1\le i\le n.$$

因此，每个 $b(i)$都是一个实数。

证明。 (i) 由 (4.5.17)，我们有

$$\phi_{\boldsymbol{a}}(y)=\frac{1}{2}UR^{-1}\Big\{\mathfrak{e}[yR](RU^{-1}-U^{-1}D_{\boldsymbol{a}})+\mathfrak{e}[-yR](RU^{-1}+U^{-1}D_{\boldsymbol{a}})\Big\}.$$

根据引理 (4.5.16)，我们知道

$$U=C(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})\left(\frac{1}{p_i^2-\eta_j^2}\right)_{1\le i,j\le n}V(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}).\tag{4.5.21}$$

由同一引理，我们得到

$$U^{-1}=U^\dagger=V(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})\left(\frac{1}{p_j^2-\eta_i^2}\right)_{1\le i,j\le n}C(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}).$$

利用对角矩阵的交换性，我们得到

$$RU^{-1}\pm U^{-1}D_{\boldsymbol{a}}=V(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})\left(\frac{1}{\pm p_j-\eta_i}\right)_{1\le i,j\le n}C(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}).$$

由柯西恒等式 (A.4.2)，我们有

$$\det X=\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(\eta_i-\eta_j)(p_i-p_j)}{\prod_{i,j=1}^n(\eta_i+p_j)}\neq 0.\tag{4.5.22}$$

若令

$$Y=\left(\frac{1}{p_j-\eta_i}\right)_{1\le i,j\le n},$$

那么，得益于交换关系 $RV(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})=V(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})R$，我们得到

$$\phi_{\boldsymbol{a}}(y)=-\frac{1}{2}UR^{-1}V(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})\big\{I_n-\mathfrak{e}[-yR]YX^{-1}\mathfrak{e}[-yR]\big\}\mathfrak{e}[yR]XC(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}).\tag{4.5.23}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$根据余因子矩阵 $X=(X_{k\ell})_{1\le k,\ \ell\le n}$ 的定义以及柯西恒等式 (A.4.2)，我们有

$$\widetilde{X}_{k\ell}=(-1)^{k+\ell}\frac{\prod_{i<j,i,j\neq\ell}(\eta_i-\eta_j)\prod_{i<j,i,j\neq k}(p_i-p_j)}{\prod_{i,j=1,i\neq\ell,j\neq k}^n(\eta_i+p_j)}.$$

因此，X^{-1} 的第（k，ℓ）个分量表示为

$$(X^{-1})_{k\ell}=\frac{1}{\det X}\widetilde{X}_{k\ell}=\frac{\prod_{\alpha\neq\ell}(\eta_\alpha+p_k)\prod_{\beta=1}^n(\eta_\ell+p_\beta)}{\prod_{\alpha\neq\ell}(\eta_\alpha-\eta_\ell)\prod_{\beta\neq k}(p_\beta-p_k)}.$$

X^{-1} 的这一表达式和拉格朗日恒等式 (A.4.3) 表明，YX^{-1} 的第（i，j）个分量可表示为

$$(YX^{-1})_{ij} = \frac{\prod_{\beta=1}^{n}(\eta_j + p_\beta)}{\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta - \eta_i)\prod_{\alpha\neq j}(\eta_\alpha - \eta_j)} \prod_{\alpha\neq j}(\eta_\alpha + \eta_i) \tag{4.5.24}$$
$$= \frac{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha + \eta_i)}{\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta - \eta_i)} \frac{2\eta_i}{\eta_i + \eta_j} \frac{\prod_{\beta=1}^{n}(\eta_j + p_\beta)}{\prod_{\alpha\neq j}(\eta_\alpha - \eta_j)}.$$

注意到

$$\frac{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha + \eta_i)}{\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta - \eta_i)} \frac{\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta + \eta_i)}{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha - \eta_i)} = \frac{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha + \eta_i)^2 \prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta + \eta_i)^2}{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha^2 - \eta_i^2)\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta^2 - \eta_i^2)} < 0.$$

这意味着

$$\operatorname{sgn}\left[\frac{\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta + \eta_i)}{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha - \eta_i)}\right] = -\tau(i).$$

因此我们有

$$b(i)m_i^{\frac{1}{2}} = \tau(i)2\eta_i \left|\frac{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha + \eta_i)}{\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta - \eta_i)}\right| = 2\eta_i \frac{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha + \eta_i)}{\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta - \eta_i)}$$

and

$$m_i^{\frac{1}{2}} b(i)^{-1} = \tau(i)\left|\frac{\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta + \eta_i)}{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha - \eta_i)}\right| = -\frac{\prod_{\beta=1}^{n}(p_\beta + \eta_i)}{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha - \eta_i)}.$$

将这些代入 (4.5.24)，可得

$$YX^{-1} = -B\left(\frac{\sqrt{m_i m_j}}{\eta_i + \eta_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} B^{-1}.$$

将其代入 (4.5.23)，并利用对角矩阵的交换性，可得 (4.5.19)。

(ii) 由 (4.5.19)，我们有

$$\det\phi_{\boldsymbol{a}}(y) = \det\big(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})}(y)\big)e^{y\operatorname{tr}R}\det\left(-\frac{1}{2}V(\boldsymbol{c_a})R^{-1}XC(\boldsymbol{c_a})U\right).$$

代入 $y = 0$，我们得到

$$1 = \det\big(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})}(0)\big)\det\left(-\frac{1}{2}V(\boldsymbol{c_a})R^{-1}XC(\boldsymbol{c_a})U\right).$$

因此，我们有

$$\det\phi_{\boldsymbol{a}}(y) = \frac{\det\big(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})}(y)\big)e^{y\operatorname{tr}R}}{\det\big(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})}(0)\big)}.$$

将其代入 (4.5.15)，我们得到

$$\Psi_{\boldsymbol{a}}(x) = \left(\frac{\det\big(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})}(0)\big)}{\det\big(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})}(x)\big)e^{x\operatorname{tr}(D_{\boldsymbol{a}}+R)}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此 (4.5.6) 成立。 □

(4.5.25) 引理。 若 $(\mathbf{H})_m$ 与 $m \geq 1$ 成立，则 (4.5.6) 成立。

证明。 取一个满足 $\varepsilon < \min\{|a-b| \mid a, b \in \{|p_1|, \dots, |p_n|, a \neq b\}$ 的 $\varepsilon > 0$。令

$$p_j(\varepsilon) = \begin{cases} p_j - \varepsilon & \text{if } j = j(\ell) + 1 \text{ for } 1 \leq \ell \leq m, \\ p_j & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\boldsymbol{a}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \delta_{p_j(\varepsilon)}.$$

由于对 $1 \leq j \leq n-1$, $|p_j(\varepsilon)| < |p_{j+1}(\varepsilon)|$，因此 $\boldsymbol{a}(\varepsilon) \in \boldsymbol{\Sigma}_n$ 满足 $(\mathbf{H})_0$。

将 $(\eta_j(\varepsilon)\ m_j(\varepsilon))_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{SD}_n$ 定义为

$$(\eta_j(\varepsilon), m_j(\varepsilon))_{1 \leq j \leq n} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{a}(\varepsilon)).$$

根据引理 (4.5.18)，我们有

$$\begin{aligned} \log \Psi_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}(x) = &-\frac{1}{2} \log \det(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a}(\varepsilon))}(x)) \\ &+ \frac{1}{2} \log \det(I_n + G_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a}(\varepsilon))}(0)) - \frac{x}{2} \sum_{j=1}^{n} (p_j(\varepsilon) + \eta_j(\varepsilon)). \end{aligned}$$

运用伊藤微积分即可轻易证明

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{\mathbb{E}} \left[\sup_{y \in [0,x]} |\xi_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}(y) - \xi_{\boldsymbol{a}}(y)|^p \right] = 0 \quad \text{for every } x \in [0, \infty) \text{ and } p \in (1, \infty).$$

由控制收敛定理可得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Psi_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}(x) = \Psi_{\boldsymbol{a}}(x) \quad \text{for every } x \in [0, \infty).$$

因此，要证明 (4.5.6)，还需证明

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \eta_j(\varepsilon) = \eta_j \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} m_j(\varepsilon) = m_j \quad \text{for } 1 \leq j \leq n.$$

我们先证明 $\eta_j(\varepsilon)$ 收敛到 η_j。若对于某个 $1 \leq \ell \leq m$，有 $j = j(\ell)$，则有

$$p_{j(\ell)} = p_{j(\ell)}(\varepsilon) < \eta_{j(\ell)}(\varepsilon) < |p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)| = p_{j(\ell)} + \varepsilon. \tag{4.5.26}$$

因此，$\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)$ 收敛到 $\eta_{j(\ell)}$。

假设 $j \notin \{j(\ell) \mid 1 \leq \ell \leq m\}$。令 $\hat{}\eta_j$ 为 $\eta_j(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时的一个聚点。取子序列 $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得当 $k \to \infty$ 时 $\eta_j(\varepsilon_k) \to \hat{}\eta_j$，并将沿该子序列的 $\varepsilon \to 0$ 代入方程

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{p_i(\varepsilon)^2 - \eta_j(\varepsilon)^2} = -1, \tag{4.5.27}$$

我们得到

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{p_i^2 - \hat{\eta}_j^2} = -1.$$

因此，$\hat{\eta}_j = \eta_j$，也就是 $\eta_j(\varepsilon)$，收敛到 η_j。

接下来，我们看到 $m_j(\varepsilon)$ 收敛到 m_j。为此，我们回顾 $m_j(\varepsilon)$ 的表达式：

$$m_j(\varepsilon) = -2\eta_j(\varepsilon) \prod_{k\neq j} \frac{\eta_k(\varepsilon) + \eta_j(\varepsilon)}{\eta_k(\varepsilon) - \eta_j(\varepsilon)} \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k(\varepsilon) + \eta_j(\varepsilon)}{p_k(\varepsilon) - \eta_j(\varepsilon)} \tag{4.5.28}$$

并注意到

$$-2\eta_j(\varepsilon) \prod_{k\neq j} \frac{\eta_k(\varepsilon) + \eta_j(\varepsilon)}{\eta_k(\varepsilon) - \eta_j(\varepsilon)} \to -2\eta_j \prod_{k\neq j} \frac{\eta_k + \eta_j}{\eta_k - \eta_j} \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{4.5.29}$$

若 $j \notin \{j(\ell) \mid 1 \le \ell \le m\}$，则对每个 $1 \le k \le n$ 都有 $p_k \neq \eta_j$。由 (4.5.28) 和 (4.5.29)，可得

$$m_j(\varepsilon) \to -2\eta_j \prod_{k\neq j} \frac{\eta_k + \eta_j}{\eta_k - \eta_j} \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k + \eta_j}{p_k - \eta_j} = m_j \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

设对于某个 $1 \le \ell \le m$，有 $j = j(\ell)$。若 $k \notin \{j(\ell)\ j(\ell)+1\}$，则 $p_k \neq \eta_{j(\ell)}$，因此

$$\prod_{k\neq j(\ell), j(\ell)+1} \frac{p_k(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)}{p_k(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)} \to \prod_{k\neq j(\ell), j(\ell)+1} \frac{p_k + \eta_{j(\ell)}}{p_k - \eta_{j(\ell)}} \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{4.5.30}$$

我们将 $k = j(\ell)\ j(\ell)+1$ 的乘积改写为

$$\prod_{k=j(\ell), j(\ell)+1} \frac{p_k(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)}{p_k(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)} = \frac{p_{j(\ell)}(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)}{p_{j(\ell)+1}(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)} \times \frac{p_{j(\ell)+1}(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)}{p_{j(\ell)}(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)}.$$

第一个因子满足

$$\frac{p_{j(\ell)}(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)}{p_{j(\ell)+1}(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)} \to \frac{2p_{j(\ell)}}{-2p_{j(\ell)}} = -1 \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{4.5.31}$$

我们计算第二个因子的极限。由于

$$p_{j(\ell)} = |p_{j(\ell)}(\varepsilon)| < \eta_{j(\ell)}(\varepsilon) < |p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)| = p_{j(\ell)} + \varepsilon,$$

我们有

$$|p_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2| = O(\varepsilon) \quad \text{and} \quad |p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2| = O(\varepsilon),$$

其中，对于 $p > 0$，“$f(\varepsilon) = O(\varepsilon^p)$”表示 $\limsup\ \varepsilon^{-p}|f(\varepsilon)| < \infty$。由于这些估-$\varepsilon\to 0$计，将恒等式 (4.5.27) 乘以 $(p_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2)(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2)$，我们得到

$$c_{j(\ell)}^2\{p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2\} + c_{j(\ell)+1}^2\{p_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2\} = O(\varepsilon^2). \tag{4.5.32}$$

回顾定义 $p_{j(\ell)}(\varepsilon) = p_{j(\ell)}$ 和 $p_{j(\ell)+1}(\varepsilon) = -p_{j(\ell)} - \varepsilon$，可知

$$p_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 = -\frac{2p_{j(\ell)}c_{j(\ell)}^2}{c_{j(\ell)}^2 + c_{j(\ell)+1}^2}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{4.5.33}$$

将其代入（4.5.32），得到

$$p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 = \frac{2p_{j(\ell)}c_{j(\ell)+1}^2}{c_{j(\ell)}^2 + c_{j(\ell)+1}^2}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{4.5.34}$$

由于 $r_{j(\ell)}(\varepsilon) = \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2$, 根据这些估计和（4.5.31），我们得到收敛

$$\begin{aligned}\frac{p_{j(\ell)+1}(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)}{p_{j(\ell)}(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)} &= \frac{p_{j(\ell)}(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)}{p_{j(\ell)+1}(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)}\frac{p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2}{p_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2}\\ &\to (-1)\times\frac{2p_{j(\ell)}c_{j(\ell)+1}^2}{-2p_{j(\ell)}c_{j(\ell)}^2} = \frac{c_{j(\ell)+1}^2}{c_{j(\ell)}^2} \quad \text{as } \varepsilon\to 0.\end{aligned} \tag{4.5.35}$$

将（4.5.29）、（4.5.30）、（4.5.31）以及该式代入（4.5.28），可见 $m_{j(\ell)}(\varepsilon)$ 收敛于 m_j。 □

接下来，我们将概率表示推广到KdV方程的孤子解。固定 $\boldsymbol{a} = \sum c_j^2\delta_{p_j} \in \boldsymbol{\Sigma}_n$ 以及如上所述的 $(\eta_j,\ m_j)_{1\le j\le d} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{a})$。对于 $(x,\ t) \in \mathbb{R}^2$，令

$$\zeta_j(x,t) = x\eta_j + t\eta_j^3 \quad \text{for } 1\le j\le n \quad \text{and} \quad \zeta(x,t) = \operatorname{diag}[\zeta_1(x,t),\dots,\zeta_n(x,t)].$$

Put

$$\widehat{G}(x,t) = \left(\frac{\sqrt{m_i m_j}e^{-(\zeta_i(x,t)+\zeta_j(x,t))}}{\eta_i+\eta_j}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

如本节开头所述，函数

$$2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2\log\det(I_n+\widehat{G})$$

是KdV方程（4.5.1）的孤子解。定义 $\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}} \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{n\times n})$ 为

$$\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(x,t) = U\big\{\mathfrak{ch}[\zeta(x,t)] - \mathfrak{sh}[\zeta(x,t)]R^{-1}U^{-1}D_{\boldsymbol{a}}U\big\}U^{-1},$$

其中我们继续使用定理 (4.5.5) 的证明中所用的符号 U 和 R。如下文引理 (4.5.37) 所示，行列式 $\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(y,t) \ne 0$ 对每个 $(y,t) \in \mathbb{R}^2$。因此我们可以定义 $\psi_{\boldsymbol{a},x,t}\colon [0,x]\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为

$$\widehat{\psi}_{\boldsymbol{a},x,t}(y) = -\left(\Big(\frac{\partial\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}}{\partial x}\Big)(\cdot,t)\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(\cdot,t)^{-1}\right)(x-y) \quad \text{for } y\in[0,x].$$

Set

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_{\boldsymbol{a}}(x,t) = \mathbb{E}\Bigg[\exp\Bigg(&-\frac{1}{2}\int_0^x\langle\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}},\xi_{\boldsymbol{a}}(y)\rangle^2dy + \frac{1}{2}\big\langle(\widehat{\psi}_{\boldsymbol{a},x,t})_S(x) - D_{\boldsymbol{a}})\xi_{\boldsymbol{a}}(x),\xi_{\boldsymbol{a}}(x)\big\rangle\\ &-\frac{1}{2}\int_0^x\big|(\widehat{\psi}_{\boldsymbol{a},x,t})_A(y)\xi_{\boldsymbol{a}}(y)\big|^2dy\Bigg)\Bigg] \quad \text{for } (x,t)\in[0,\infty)\times\mathbb{R},\end{aligned}$$

其中 $(\widehat{\psi}_{\boldsymbol{a},x,t})_S$(分别 $(\widehat{\psi}_{\boldsymbol{a},x,t})_A$) 是对称（分别，反对称）部分，即 $\widehat{\psi}_{\boldsymbol{a},x,t}$.

(4.5.36) 定理。有

$$\log \widehat{\Psi}_{\boldsymbol{a}}(x,t) = -\frac{1}{2}\log\det(I_n+\widehat{G}(x,t)) + \frac{1}{2}\log\det(I_n+\widehat{G}(0,t)) - \frac{x}{2}\sum_{j=}^{n}(p_j+\eta_j) \quad \textit{for } (x,t)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

特别地，

$$v = -4\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 \log\widehat{\Psi}_{\boldsymbol{a}}$$

是 *KdV*方程(4.5.1)的一个孤子解。

为证明此结论，我们先准备一个引理。在$\mathbf{(H)}_m$下，令

$$J = \{(j(\ell)+1, j(\ell)) \mid 1\le \ell \le m\}$$

并定义

$$Z_{\boldsymbol{a}} = (-1)^m \prod_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2\eta_i}\prod_{1\le i<j\le n}(p_i-p_j)(\eta_i-\eta_j) \times\Big\{\prod_{(i,j)\notin J}(p_i+\eta_j)\prod_{k=1}^{n-m}|(D_{\boldsymbol{a}}^2-r_kI_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|\prod_{\ell=1}^{m}\frac{c_{j(\ell)+1}(c_{j(\ell)}^2+c_{j(\ell)+1}^2)^{1/2}}{2p_{j(\ell)}c_{j(\ell)}}\Big\}^{-1},$$

$_m$其中，当 $m=0$, $J=\emptyset$ 时，“$(i,j)\notin J$”表示“$1\le i,j\le n$”，且 $\prod\cdots=1$.$_{\ell=1}$

(4.5.37) 引理。成立

$$\det\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(y,t) = \det(I_n+\widehat{G}(y,t))e^{\mathrm{tr}\zeta(y,t)}Z_{\boldsymbol{a}} \quad \textit{for every } (y,t)\in\mathbb{R}^2. \tag{4.5.38}$$

特别地，对每个 $(y,t)\in\mathbb{R}^2$，$\det\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(y,t)\neq 0$。

证明。我们首先假设$\mathbf{(H)}_0$ 成立。重复引理（4.5.18）证明中的论证，并将 $e^{\zeta(y,t)}$ 替换为 e^{yR}，可得

$$U^{-1}\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(y,t)U = -\frac{1}{2}V(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})R^{-1}B(I_n+\widehat{G}(y,t))e^{\zeta(y,t)}B^{-1}XC(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})U.$$

由此以及（4.5.22），我们得到

$$\begin{aligned}\det\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(y,t) &= \det(I_n+\widehat{G}(y,t))e^{\mathrm{tr}\zeta(y,t)} \\ &\quad\times(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2\eta_i|(D_{\boldsymbol{a}}^2-\eta_i^2I_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|}\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(p_i-p_j)(\eta_i-\eta_j)}{\prod_{1\le i,j\le n}(p_i+\eta_j)}\det U \\ &= (-1)^n\det U\det(I_n+\widehat{G}(y,t))e^{\mathrm{tr}\zeta(y,t)}Z_{\boldsymbol{a}}.\end{aligned}$$

根据柯西恒等式 (A.4.2) 和 (4.5.21)，可得

$$\det U = \det V(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})\det C(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}})\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(p_i^2-p_j^2)(\eta_j^2-\eta_i^2)}{\prod_{1\le i,j\le n}(p_i^2-\eta_j^2)}.$$

由 (4.5.4) 可得

$$\operatorname{sgn}\left[\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(p_i^2-p_j^2)(\eta_j^2-\eta_i^2)}{\prod_{1\le i,j\le n}(p_i^2-\eta_j^2)}\right]=(-1)^n.$$

由于 $|$行列式 $U|=1$ 且行列式 $V(\boldsymbol{c_a})$ 行列式 $C(\boldsymbol{c_a})>0$，我们得到行列式 $U=(-1)^n$。因此，(4.5.38) 得证。

接下来，我们假设$(\mathbf{H})_m$ 与 $m\ge 1$ 成立。我们继续使用引理 (4.5.25) 的证明中引入的记号，如 $\boldsymbol{a}(\varepsilon)$ $\eta_j(\varepsilon)$ $m_j(\varepsilon)$ 等。令

$$R(\varepsilon)=\operatorname{diag}[\eta_1(\varepsilon),\dots,\eta_n(\varepsilon)],\quad \zeta_j(y,t;\varepsilon)=y\eta_j(\varepsilon)+t\eta_j(\varepsilon)^3,$$

$$\zeta(y,t;\varepsilon)=\operatorname{diag}[\zeta_1(y,t;\varepsilon),\dots,\zeta_n(y,t;\varepsilon)],$$

and

$$\widehat{G}(y,t;\varepsilon)=\left(\frac{\sqrt{m_i(\varepsilon)m_j(\varepsilon)}}{\eta_i(\varepsilon)+\eta_j(\varepsilon)}e^{-(\zeta_i(y,t;\varepsilon)+\zeta_j(y,t;\varepsilon))}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

根据上述观察，我们知道

$$\det\widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}(y,t)=\det(I_n+\widehat{G}(y,t;\varepsilon))e^{\operatorname{tr}\zeta(y,t;\varepsilon)}Z_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}.$$

根据定义，当 $1\le j\le n$ 时，$\lim_{\varepsilon\to 0}p_j(\varepsilon)=p_j$。此外，正如引理 (4.5.25) 的证明中所见，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_j(\varepsilon)=\eta_j\quad\text{and}\quad\lim_{\varepsilon\to 0}m_j(\varepsilon)=m_j\quad\text{for } 1\le j\le n. \tag{4.5.39}$$

因此，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\zeta(y,t;\varepsilon)=\zeta(y,t)\quad\text{and}\quad\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{G}(y,t;\varepsilon)=\widehat{G}(y,t).$$

因此，要证明 (4.5.38)，只需证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}Z_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}=Z_{\boldsymbol{a}}\quad\text{and}\quad\lim_{\varepsilon\to 0}U(\varepsilon)=U,$$

其中

$$U(\varepsilon)=\left(\frac{c_i}{|(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}-\eta_j(\varepsilon)^2I_n)^{-1}c_{\boldsymbol{a}}|(p_i(\varepsilon)^2-\eta_j(\varepsilon)^2)}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

我们首先证明 $Z_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}$ 收敛到 $Z_{\boldsymbol{a}}$。容易看出，$Z_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}$中的因子满足以下收敛关系。

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{i=1}^n\frac{c_i}{2\eta_i(\varepsilon)}=\prod_{i=1}^n\frac{c_i}{2\eta_i},\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{1\le i<j\le n}(p_i(\varepsilon)-p_j(\varepsilon))(\eta_i(\varepsilon)-\eta_j(\varepsilon))=\prod_{1\le i<j\le n}(p_i-p_j)(\eta_i-\eta_j),\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{(i,j)\notin J}(p_i(\varepsilon)+\eta_j(\varepsilon))=\prod_{(i,j)\notin J}(p_i+\eta_j)\neq 0,
\end{aligned}$$

and

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{j\notin\{j(1),\dots,j(m)\}}|(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}-\eta_j(\varepsilon)^2I_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|=\prod_{k=1}^{n-m}|(D^2_{\boldsymbol{a}}-r_kI_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|.$$

因此，要考察 $Z_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}$的收敛性，还需计算该因子的极限

$$\prod_{\ell=1}^{m}(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)+\eta_{j(\ell)}(\varepsilon))\prod_{\ell=1}^{m}|(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2I_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|.$$

由（4.5.26），可得

$$0>p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)+\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)=O(\varepsilon). \tag{4.5.40}$$

由于

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\min\{|p_k(\varepsilon)^2-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2|\mid k\neq j(\ell),j(\ell)+1\}>0,$$

这意味着

$$\begin{aligned}&(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)+\eta_{j(\ell)}(\varepsilon))|(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2I_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|\\&=-\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k^2(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)+\eta_{j(\ell)}(\varepsilon))^2}{(p_k(\varepsilon)^2-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2)^2}\right\}^{1/2}\\&=-\left\{\frac{c_{j(\ell)}^2(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)+\eta_{j(\ell)}(\varepsilon))^2}{(p_{j(\ell)}(\varepsilon)^2-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2)^2}+\frac{c_{j(\ell)+1}^2(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)+\eta_{j(\ell)}(\varepsilon))^2}{(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)^2-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2)^2}+O(\varepsilon^2)\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

由（4.5.35）和（4.5.40）可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c_{j(\ell)}^2(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)+\eta_{j(\ell)}(\varepsilon))^2}{(p_{j(\ell)}(\varepsilon)^2-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2)^2}=\frac{c_{j(\ell)+1}^4}{4p_{j(\ell)}^2c_{j(\ell)}^2}$$

and

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c_{j(\ell)+1}^2(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)+\eta_{j(\ell)}(\varepsilon))^2}{(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)^2-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2)^2}=\frac{c_{j(\ell)+1}^2}{4p_{j(\ell)}^2}.$$

因此我们看到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)+\eta_{j(\ell)}(\varepsilon))|(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2I_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|=-\frac{c_{j(\ell)+1}}{2p_{j(\ell)}c_{j(\ell)}}(c_{j(\ell)}^2+c_{j(\ell)+1}^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5.41}$$

因此 $Z_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}$ 收敛到 $Z_{\boldsymbol{a}}$。

接下来我们证明 $U(\varepsilon)$ 收敛到 $U_\circ$ 如果 $j\notin\{j(\ell)\mid 1\le\ell\le m\}$，那么由 (4.5.39) 可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}U(\varepsilon)_j^i=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}-\eta_j(\varepsilon)^2I_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|}\frac{c_i}{p_i(\varepsilon)^2-\eta_j(\varepsilon)^2}=U_j^i\quad\text{for }1\le i\le n.$$

若 $j=j(\ell)$，则由 (4.5.39) 以及 (4.5.41) 中所述极限的存在可知，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)}-\eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2I_n)^{-1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}}|=\infty.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} U(\varepsilon)^{i}_{j(\ell)} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)} - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 I_n)^{-1}\boldsymbol{c_a}|} \frac{c_i}{p_i(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2} \\ &= 0 \times \frac{c_i}{p_i^2 - p_{j(\ell)}^2} = 0 \quad \text{for } i \neq j(\ell), j(\ell)+1.\end{aligned}$$

由 (4.5.35) 和 (4.5.41)，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} U(\varepsilon)^{j(\ell)}_{j(\ell)} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{c_{j(\ell)}}{p_{j(\ell)}(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)} \big\{ (p_{j(\ell)}(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)) |(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)} - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 I_n)^{-1}\boldsymbol{c_a}| \big\}^{-1} \\ &= \frac{c_{j(\ell)}}{2p_{j(\ell)}} \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ -\left(\frac{c^2_{j(\ell)}}{(p_{j(\ell)}(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon))^2} + \frac{c^2_{j(\ell)+1}(p_{j(\ell)}(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon))^2}{(p_{j(\ell)+1}(\varepsilon)^2 - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{-1} \\ &= -c_{j(\ell)+1}(c^2_{j(\ell)} + c^2_{j(\ell)+1})^{-\frac{1}{2}} = U^{j(\ell)}_{j(\ell)}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} U(\varepsilon)^{j(\ell)+1}_{j(\ell)} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{c_{j(\ell)+1}}{p_{j(\ell)+1}(\varepsilon) - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)} \big\{ (p_{j(\ell)+1}(\varepsilon) + \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)) |(D^2_{\boldsymbol{a}(\varepsilon)} - \eta_{j(\ell)}(\varepsilon)^2 I_n)^{-1}\boldsymbol{c_a}| \big\}^{-1} \\ &= c_{j(\ell)}(c^2_{j(\ell)} + c^2_{j(\ell)+1})^{-\frac{1}{2}} = U^{j(\ell)+1}_{j(\ell)}.\end{aligned}$$

因此 $U(\varepsilon)$ 收敛于 U。 □

定理 *(4.5.36)* 的证明。 根据引理 (4.5.37) 的最后一个断言以及引理 (4.5.8)$\widehat{\ }$（其中 $\phi = \phi_{\boldsymbol{a}}$），我们得到

$$\widehat{\Psi}_{\boldsymbol{a}}(x,t) = \left(\frac{\det \widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(0,t) e^{-x \mathrm{tr} D_{\boldsymbol{a}}}}{\det \widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(x,t)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由 (4.5.38)，我们看到

$$\frac{\det \widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(0,t)}{\det \widehat{\phi}_{\boldsymbol{a}}(x,t)} = \frac{\det(I_n + \widehat{G}(0,t))}{\det(I_n + \widehat{G}(x,t)) e^{x \sum_{j=1}^{n} \eta_j}}.$$

$\widehat{\ }$结合这两个恒等式，我们得到 $\log\ \Psi_{\boldsymbol{a}}(x,\ t)$ 的所需表达式。 □

第5章

平方根变换的应用

本文讨论了一阶平方根变换的应用。特别是，拉普拉斯变换的求值将推广到钉住测度，并将根据钉扎变化而产生的求值变化用 Pl¨ucker 坐标表示。此外，还给出了若干关于这种变化的示例。

5.1. 自分解性

在本小节中，我们将定理（3.1.1）应用于二次型的特征函数。为此，令 $\eta \in \mathscr{S}_2$，并取 $\mathcal{H}$ 的标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 B_η 展开为

$$B_\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \otimes h_n,$$

$_\infty$其中 $a_n \in \mathbb{R}$ 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\sum_{n=1} a_n^2 < \infty_\circ$ 定义 $\mathfrak{f}_\eta\colon\ \mathbb{R} \to [0, \infty)$ 如下

$$\mathfrak{f}_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|x|} \displaystyle\sum_{n;xa_n>0} e^{-|\frac{x}{a_n}|} & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

其中 $\sum$ 表示求和遍历满足 $xa_n > 0$ 性质的 $n_\circ$ 由于$_{n;xa_n>0}$

$$e^{-|\frac{x}{a}|} \le k! \left|\frac{a}{x}\right|^k \quad \text{for } x, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ and } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{5.1.1}$$

$\mathfrak{f}_\eta$ 的级数在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$的紧子集上一致收敛。因此， $\mathfrak{f}_\eta$ 在$\mathbb{R} \setminus \{0\}$上连续，因而在 $\mathbb{R}$上可测。注意到

$$\int_{-1}^{1} |x|^2 \mathfrak{f}_\eta(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{n;a_n<0} \int_{-1}^{0} |x| e^{-|\frac{x}{a_n}|} dx + \frac{1}{2} \sum_{n;a_n>0} \int_{0}^{1} |x| e^{-|\frac{x}{a_n}|} dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\int_0^{\infty} ye^{-y}dy = \frac{1}{2}\|B_\eta\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}.$$

将此结果与 $k=3$ 和 $|x|>1$的（5.1.1）结合起来，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 \mathfrak{f}_\eta(x)dx < \infty. \tag{5.1.2}$$

我们将给出 $\mathfrak{q}_\eta$ 的特征函数的如下表达式。

(5.1.3) 定理。有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\lambda \mathfrak{q}_\eta}d\mu = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}\{e^{\mathrm{i}\lambda x} - 1 - \mathrm{i}\lambda x\}\mathfrak{f}_\eta(x)dx\right) \quad \textit{for every } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.1.4}$$

(5.1.5) 注。(i) 由于 $|e^{\mathrm{i}\lambda x} - 1 - \mathrm{i}\lambda x| \leq \frac{1}{2}\lambda^2|x|^2$ for $x \in \mathbb{R}$，根据 (5.1.2)，$\{e^{\mathrm{i}\lambda x} - 1 - \mathrm{i}\lambda x\}\mathfrak{f}_\eta(x)$ 关于勒贝格测度可积。因此，恒等式 (5.1.4) 右端指数中的积分是有限确定的。

(ii) 表达式 (5.1.4) 表明，$\mathfrak{q}_\eta$ 的分布是自分解的，相应的 L´évy 测度为 $\mathfrak{f}_\eta(x)dx$（参见 [33, 推论 15.11]）。

证明。定义 $\eta^{(+)}$, $\eta^{(-)} \in \mathscr{S}_2$ 如下:

$$\eta^{(\pm)}(t,s) = \sum_{n;\pm a_n>0} a_n[h_n'(s)\otimes h_n'(t)] \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2 \quad \text{(double-sign corresponds)}.$$

根据定理（1.1.1），$\mathfrak{q}_\eta = \mathfrak{q}_{\eta^{(+)}} + \mathfrak{q}_{\eta^{(-)}}$，且 $\mathfrak{q}_{\eta^{(+)}}$ 和 $\mathfrak{q}_{\eta^{(-)}}$ 相互独立。因此有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\lambda \mathfrak{q}_\eta}d\mu = \left(\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\lambda \mathfrak{q}_{\eta^{(+)}}}d\mu\right)\left(\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\lambda \mathfrak{q}_{\eta^{(-)}}}d\mu\right) \quad \text{for } \lambda\in\mathbb{R}. \tag{5.1.6}$$

我们首先考虑 $\mathfrak{q}_{\eta^{(+)}}$。令 $\lambda_0 > 0$。由于 $B_{\eta^{(+)}} = \sum_{n;\ a_n>0} a_n h_n \otimes h_n$，我们知道

$$\Lambda(B_{-\lambda_0\eta^{(+)}}) = \sup_{n;a_n>0}(-\lambda_0 a_n) \leq 0 < 1.$$

根据定理（3.1.1），我们有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{-\lambda_0 q_{\eta^{(+)}}}d\mu = \{\det{}_2(I+\lambda_0 B_{\eta^{(+)}})\}^{-\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{n;a_n>0}\{-\log(1+a_n\lambda_0)+a_n\lambda_0\}\right).$$

令 $a>0$。依次应用分部积分公式，我们有

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\frac{x}{a}}dx = n!a^{n+1} \quad \text{for } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

因此有

$$\int_0^{\infty}\{e^{-\lambda_0 x} - 1 + \lambda_0 x\}\frac{1}{x}e^{-\frac{x}{a}}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda_0^n a^n}{n} + a\lambda_0 = -\log(1+a\lambda_0) + a\lambda_0.$$

由于

$$|e^{-\lambda_0 x}-1+\lambda_0 x|\le\frac{\lambda_0^2}{2}|x|^2\quad\text{and}\quad 0\le\frac{1}{2}\sum_{n\le N;a_n>0}\frac{1}{x}e^{-\frac{x}{a_n}}\le\mathfrak{f}_{\eta^{(+)}}(x)$$

对于 $x\ge 0$ 和 $N\in\mathbb{N}$，由（5.1.2）和控制收敛定理，我们得到 t

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{n;a_n>0}\{-\log(1+a_n\lambda_0)+a_n\lambda_0\}&=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty\{e^{-\lambda_0 x}-1+\lambda_0 x\}\Big(\frac{1}{2x}\sum_{n\le N;a_n>0}e^{-\frac{x}{a_n}}\Big)dx\\&=\int_0^\infty\{e^{-\lambda_0 x}-1+\lambda_0 x\}\mathfrak{f}_{\eta^{(+)}}(x)dx.\end{aligned}$$

因此我们得到恒等式

$$\int_{\mathcal{W}}e^{-\lambda_0\mathfrak{q}_{\eta^{(+)}}}d\mu=\exp\Big(\int_0^\infty\{e^{-\lambda_0 x}-1+\lambda_0 x\}\mathfrak{f}_{\eta^{(+)}}(x)dx\Big)\quad\text{for any }\lambda_0>0.\tag{5.1.7}$$

令 $\Omega=\{\zeta\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Re}\zeta<0\}$。注意到

$$|e^{\zeta x}-1-\zeta x|=\Big|\int_0^x\int_0^y\zeta^2e^{\zeta z}dz\Big|\le\frac{|\zeta|^2}{2}|x|^2\tag{5.1.8}$$

and

$$\Big|\frac{d}{d\zeta}\Big(e^{\zeta x}-1-\zeta x\Big)\Big|=|x(e^{\zeta x}-1)|\le|\zeta||x|^2$$

对于任意 $\zeta\in\Omega$ 和 $x\ge 0$。由（5.1.2）可知，对于 $\eta^{(+)}$，根据微分型的控制收敛定理，映射

$$\Omega\ni\zeta\mapsto\int_0^\infty\{e^{\zeta x}-1-\zeta x\}\mathfrak{f}_{\eta^{(+)}}(x)dx\in\mathbb{C}$$

是全纯的。结合引理（4.2.22）中关于 $\eta^{(+)}$ 的结论以及（5.1.7），这一全纯性意味着

$$\int_{\mathcal{W}}e^{\zeta\mathfrak{q}_{\eta^{(+)}}}d\mu=\exp\Big(\int_0^\infty\{e^{\zeta x}-1-\zeta x\}\mathfrak{f}_{\eta^{(+)}}(x)dx\Big)\quad\text{for any }\zeta\in\mathcal{D}_{\eta^{(+)}}\cap\Omega.$$

因此，对于 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n>\|B_{\eta^{(+)}}\|_{\mathrm{op}}$，有

$$\int_{\mathcal{W}}e^{(-\frac{1}{n}+\mathrm{i}\lambda)\mathfrak{q}_{\eta^{(+)}}}d\mu=\exp\Big(\int_0^\infty\Big\{e^{(-\frac{1}{n}+\mathrm{i}\lambda)x}-1-\Big(-\frac{1}{n}+\mathrm{i}\lambda\Big)x\Big\}\mathfrak{f}_{\eta^{(+)}}(x)dx\Big)\quad\text{for }\lambda\in\mathbb{R}.$$

根据引理（4.2.22），该方程左端收敛于

$$\int_{\mathcal{W}}e^{\mathrm{i}\lambda\mathfrak{q}_{\eta^{(+)}}}d\mu.$$

由 (5.1.8) 和 (5.1.2)，方程右端的指数收敛于

$$\int_0^\infty\{e^{\mathrm{i}\lambda x}-1-\mathrm{i}\lambda x\}\mathfrak{f}_{\eta^{(+)}}(x)dx.$$

因此我们得到

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\lambda \mathfrak{q}_{\eta^{(+)}}} d\mu = \exp\left(\int_0^\infty \{e^{\mathrm{i}\lambda x} - 1 - \mathrm{i}\lambda x\} \mathfrak{f}_{\eta^{(+)}}(x) dx\right) \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.1.9}$$

我们接下来考虑 $\eta^{(-)}$。注意到

$$\mathfrak{f}_{\eta^{(-)}}(y) = \frac{1}{2|y|} \sum_{n;a_n<0} e^{-|\frac{y}{a_n}|} = \frac{1}{2|-y|} \sum_{n;(-a_n)>0} e^{-|\frac{-y}{-a_n}|} = \mathfrak{f}_{(-\eta)^{(+)}}(-y) \quad \text{for } y < 0.$$

由于 $-\eta^{(-)} = (-\eta)^{(+)}$，由 (5.1.9) 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\lambda \mathfrak{q}_{\eta^{(-)}}} d\mu &= \int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}(-\lambda) \mathfrak{q}_{(-\eta)^{(+)}}} d\mu = \exp\left(\int_0^\infty \{e^{-\mathrm{i}\lambda x} - 1 + \mathrm{i}\lambda x\} \mathfrak{f}_{(-\eta)^{(+)}}(x) dx\right) \\ &= \exp\left(\int_{-\infty}^0 \{e^{\mathrm{i}\lambda y} - 1 - \mathrm{i}\lambda y\} \mathfrak{f}_{\eta^{(-)}}(y) dy\right) \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

注意到 $\mathfrak{f}_\eta = \mathbf{1}_{(-\infty,0)} \mathfrak{f}_{\eta^{(-)}} + \mathbf{1}_{(0,\infty)} \mathfrak{f}_{\eta^{(+)}}$，并将 (5.1.9) 与 (5.1.10) 代入 (5.1.6)，我们得到 (5.1.4)。 □

5.2. 钉住测度

在本节中，我们证明拉普拉斯变换的求值（3.1.4）可推广到钉扎测度。

设 $k_1, \ldots, k_N \in \mathcal{H}$ 线性独立。令 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_N)$，并用 $\pi_{\boldsymbol{k}}$ 表示 $\mathcal{H}$ 到由 $k_1, \ldots, k_N$ 张成的子空间上的正交投影。由引理（1.1.6），存在 $\Pi_{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{S}_2$，使得 $\pi_{\boldsymbol{k}} = B_{\Pi_{\boldsymbol{k}}}$。对 $\eta \in \mathscr{S}_2$，令

$$B_{\eta;\boldsymbol{k}} = \pi_{\boldsymbol{k}}^\perp B_\eta \pi_{\boldsymbol{k}}^\perp, \quad \text{where } \pi_{\boldsymbol{k}}^\perp = I - \pi_{\boldsymbol{k}}.$$

定义 $\eta_{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{S}_2$ 如下

$$\begin{aligned} \eta_{\boldsymbol{k}}(t,s) =& \eta(t,s) - \int_0^T \Big\{ \Pi_{\boldsymbol{k}}(t,u)\eta(u,s) + \eta(t,u)\Pi_{\boldsymbol{k}}(u,s) \Big\} du \\ &+ \int_0^T \int_0^T \Pi_{\boldsymbol{k}}(t,u)\eta(u,v)\Pi_{\boldsymbol{k}}(v,s) du dv \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2. \end{aligned}$$

于是我们有 $B_{\eta;\boldsymbol{k}} = B_{\eta_{\boldsymbol{k}}}$：

$$(B_{\eta;\boldsymbol{k}} h)'(t) = \int_0^T \eta_{\boldsymbol{k}}(t,s) h'(s) ds \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \text{ and } t \in [0,T].$$

维纳泛函 $\mathrm{D}^* \boldsymbol{k} = (\mathrm{D}^* k_1, \ldots, \mathrm{D}^* k_N)$ 属于 $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^N)$。令

$$C(\boldsymbol{k}) = \big(\langle k_i, k_j \rangle_{\mathcal{H}}\big)_{1 \le i,j \le N}.$$

由于 k_is线性无关，$\det C(\boldsymbol{k}) \neq 0$。由于对于 $1 \le i \le N$([27, (5.1.9)], $\mathrm{D}^* \boldsymbol{k}$ ，$\mathrm{D}(\mathrm{D}^* k_i) = k_i$ 非退化。设 $\mathcal{P}$ 为形如 $p(\ell_1、\ldots\ldots、\ell_n)$的维纳泛函空间，其中 p 是多项式： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 且 $\ell_1、\ldots\ldots、\ell_n \in \mathcal{W}^*$。对于满足 $\Lambda(B_\eta) < 1$的 $\eta \in \mathscr{S}_2$，根据引理（2.1.13）， $e^{\mathfrak{q}_\eta} \in L^{1+}(\mu)$。根据(4.1.5)，对于任意 $f \in \mathcal{P}$ 和 $h \in \mathcal{H}$，我们可以考虑 $\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta + \mathrm{D}^* h} \delta_0(\mathrm{D}^* \boldsymbol{k}) d\mu$ 。

（5.2.1）定理。设 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 并假设 $\Lambda(B_\eta) < 1$。则有

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta + \mathrm{D}^* h} \delta_0(\mathrm{D}^* \boldsymbol{k}) d\mu = \{(2\pi)^N \det{}_2(I - B_{\eta;\boldsymbol{k}}) \det C(\boldsymbol{k})\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\pi_{\boldsymbol{k}} B_\eta \pi_{\boldsymbol{k}})} \times \int_{\mathcal{W}} ((\pi_{\boldsymbol{k}}^\perp)_* f)(\iota + F_{\widehat{\kappa_S(\eta_{\boldsymbol{k}})}}) e^{\mathrm{D}^*[C_{\eta_{\boldsymbol{k}}}^{-1}(\pi_{\boldsymbol{k}}^\perp h)]} d\mu \tag{5.2.2}$$

对每一个 $f \in \mathcal{P}$ 和 $h \in \mathcal{H}$，其中

$$(\pi_{\boldsymbol{k}}^\perp)_* f = p\big(\mathrm{D}^*(\pi_{\boldsymbol{k}}^\perp \ell_1), \dots, \mathrm{D}^*(\pi_{\boldsymbol{k}}^\perp \ell_n)\big) \quad \textit{for } f = p(\ell_1, \dots, \ell_n).$$

Since $\Lambda(B_{\eta_{\boldsymbol{k}}}) \le \Lambda(B_\eta) < 1$, $\widehat{\kappa_S(\eta_{\boldsymbol{k}})} \in \mathscr{S}_2$ is defined well.

证明。注意到 $C(\boldsymbol{k})$是对称正定的。取一个 $V = (V_{ij})_{1 \le i,\ j \le N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$，使得 $VC(\boldsymbol{k})V^\dagger = I_N$。对 φ，$\widetilde{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$，成立

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(V^{-1}x)\widetilde{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\widetilde{\varphi}(Vy)|\det V| dy.$$

令 $\varphi \to \delta_0$，我们得到 $\delta_0(V^{-1}dx) = |$行列式$\, V|\delta_0(dx)$。

对 $1 \le i \le N$，由 $\widehat{k_i} = \sum V_{ij} k_j$ 定义 $\widehat{k_1}$，……，$\widehat{k_N} \in \mathcal{H}$。则 $\widehat{k_1}$，……，$\widehat{k_N}$是标准正交$_{j=1}$的。令$\mathrm{D}^*\widehat{\boldsymbol{k}} = (\mathrm{D}^*\widehat{k_1}$，……，$\mathrm{D}^*\widehat{k_N})$。则$\mathrm{D}^*\boldsymbol{k} = V^{-1}\mathrm{D}^*\widehat{\boldsymbol{k}}$。由于(行列式 $V)^2$ 行列式 $C(\boldsymbol{k}) = 1$，我们有

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta + \mathrm{D}^* h} \delta_0(\mathrm{D}^* \boldsymbol{k}) d\mu = \{\det C(\boldsymbol{k})\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta + \mathrm{D}^* h} \delta_0(\mathrm{D}^* \widehat{\boldsymbol{k}}) d\mu.$$

此外，注意到 $B_{\eta;\boldsymbol{k}} = B_{\eta;\widehat{\boldsymbol{k}}}$、$\pi_{\boldsymbol{k}} = \pi_{\widehat{\boldsymbol{k}}}$ 和 $\eta_{\boldsymbol{k}} = \eta_{\widehat{\boldsymbol{k}}}$。因此，为证明 (5.2.2)，我们可以并且将假设 k_1、……、k_N是正交归一的。

取子空间 $\pi_{\boldsymbol{k}}^\perp(\mathcal{H})$ 的一个标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$，使得

$$B_{\eta;\boldsymbol{k}} = \sum_{n=1}^\infty \langle B_\eta h_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}} h_n \otimes h_n.$$

于是 $\{k_1$、……、k_N、$h_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基。根据定理（1.1.1），成立的是

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_\eta =& \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \langle B_\eta h_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \{(\mathrm{D}^* h_n)^2 - 1\} + \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^N \langle B_\eta h_n, k_j\rangle_{\mathcal{H}} (\mathrm{D}^* h_n)(\mathrm{D}^* k_j) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \langle B_\eta k_i, k_j\rangle_{\mathcal{H}} \{(\mathrm{D}^* k_i)(\mathrm{D}^* k_j) - \delta_{ij}\}.\end{aligned}$$

注意，$B_{\eta;\boldsymbol{k}} = B_{\eta_{\boldsymbol{k}}}$ 且 $\mathrm{D}^*\boldsymbol{k} = 0$ $\delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu$-几乎处处。由关于 $\mathfrak{q}_{\eta_{\boldsymbol{k}}}$ 的定理（1.1.1）、$\mathfrak{q}_\eta$ 的这一表达式以及 $(\pi_{\boldsymbol{k}}^\perp)_* f$ 的定义可得，

$$\mathfrak{q}_\eta = \mathfrak{q}_{\eta_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\pi_{\boldsymbol{k}} B_\eta \pi_{\boldsymbol{k}}) \quad \text{and} \quad f = (\pi_{\boldsymbol{k}}^\perp)_* f \quad \delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu\text{-a.e.}$$

$_N$此外，将 $h \in \mathcal{H}$ 展开为 $h = \sum \langle h,\ k_j\rangle_{\mathcal{H}} k_j + \pi_{\boldsymbol{k}}^{\perp} h$，我们看到$_{j=1}$

$$\mathrm{D}^* h = \mathrm{D}^*(\pi_{\boldsymbol{k}}^{\perp} h) \quad \delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu\text{-a.e.}$$

因此我们得到

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta + \mathrm{D}^* h}\delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\pi_{\boldsymbol{k}} B_\eta \pi_{\boldsymbol{k}})}\int_{\mathcal{W}} ((\pi_{\boldsymbol{k}}^{\perp})_* f) e^{\mathfrak{q}_{\eta_{\boldsymbol{k}}} + \mathrm{D}^*(\pi_{\boldsymbol{k}}^{\perp} h)}\delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu. \tag{5.2.3}$$

设 $p\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个多项式。取一个序列 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$，使其在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到δ_0。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{W}} p(\mathrm{D}^* h_1, \dots, \mathrm{D}^* h_n)\delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu = \lim_{m\to\infty}\int_{\mathcal{W}} p(\mathrm{D}^* h_1, \dots, \mathrm{D}^* h_n)\varphi_m(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu \\
&= \left(\int_{\mathcal{W}} p(\mathrm{D}^* h_1, \dots, \mathrm{D}^* h_n)d\mu\right)\lim_{m\to\infty}\int_{\mathcal{W}} \varphi_m(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu \\
&= \left(\int_{\mathcal{W}} p(\mathrm{D}^* h_1, \dots, \mathrm{D}^* h_n)d\mu\right)\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_m(x)\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}}e^{-\frac{1}{2}|x|^2}dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathcal{W}} p(\mathrm{D}^* h_1, \dots, \mathrm{D}^* h_n)d\mu.
\end{aligned}$$

因此，若 $\Psi \in \mathbb{D}^{\infty,\ 1+}$ 是 $\sigma[\{\mathbf{D}^* h_n \mid n \in \mathbb{N}\}]$-可测的，则

$$\int_{\mathcal{W}} \Psi\delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathcal{W}} \Psi d\mu.$$

结合 (5.2.3)，我们得到

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta + \mathrm{D}^* h}\delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k})d\mu = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\pi_{\boldsymbol{k}} B_\eta \pi_{\boldsymbol{k}}]}\int_{\mathcal{W}} ((\pi_{\boldsymbol{k}}^{\perp})_* f) e^{\mathfrak{q}_{\eta_{\boldsymbol{k}}} + \mathrm{D}^*(\pi_{\boldsymbol{k}}^{\perp} h)}d\mu.$$

应用定理（3.1.1）(ii)，我们得到 (5.2.2)。 □

5.3. 普吕克坐标

在本节中，我们将考察定理 (5.2.1) 中出现的 $\det_2(I - B_{\eta;\boldsymbol{k}})$ 如何随 N变化。为此，假设 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 满足以下条件：

(A) 存在 $A_I, A_F \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$，使得 $\det_2(I - A_I) \neq 0$, A_F是有限秩的，即 A_F的值域 $\mathcal{R}(A_F)$ 是有限维的，并且 $B_\eta = A_I + A_F$。

取线性独立的 $k_1, \dots, k_M \in \mathcal{H}$，其中 $M \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{R}(A_F)$ 包含在由它们张成的子空间中。注意到 $I - A_I$ 有连续逆（[5,定理 XII.1.2]），对于每个 $p = (p_1, \dots, p_M) \in \mathbb{R}^M$，我们定义 $J_p \in \mathcal{H}$ 为

$$J_p = (I - A_I)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{M} p_j k_j\right).$$

定义投影 $\pi^{(N)}$：对于 $0 \le N \le M$， $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 定义为 $\pi^{(0)} = 0$；若 $0 < N \le M$，则定义为 $\pi^{(N)} = \pi_{\boldsymbol{k}^{(N)}}$，其中 $\boldsymbol{k}^{(N)} = (k_1, \dots, k_N)$，而 $\pi_{\boldsymbol{k}^{(N)}}$ 是定理 (5.2.1) 前一段中定义的投影。令

$$B_\eta^{(N)} = (I - \pi^{(N)}) B_\eta.$$

定义 $\mathbf{J}_N \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 如下

$$\mathbf{J}_N \, p = \Big(\big\langle \{ I - (B_\eta^{(N)} - B_\eta^{(M)}) \} J_p, k_j \big\rangle_{\mathcal{H}} \Big)_{1 \le j \le M} \quad \text{for } p \in \mathbb{R}^M.$$

我们给出 $\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta} \delta_0(\mathrm{D}^* \boldsymbol{k}^{(N)}) d\mu$ 的以下表达式。

(5.3.1) 定理。 设 $\eta \in \mathscr{S}_2$。假设 $\Lambda(B_\eta) < 1$，且满足条件 **(A)**。那么，对每个 $0 \le N \le M$，都有 行列式 $\mathbf{J}_N \neq 0$，并且有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta} \delta_0(\mathrm{D}^* \boldsymbol{k}^{(N)}) d\mu = \left(\frac{\det C(\boldsymbol{k}^{(M)})}{(2\pi)^N \det C(\boldsymbol{k}^{(N)}) \det \mathbf{J}_N} \right)^{\frac{1}{2}} \{ \det{}_2(I - A_I) \}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathrm{tr} A_F} \tag{5.3.2}$$

对于 $0 \le N \le M$，其中 $\delta_0(\mathrm{D}^* \boldsymbol{k}^{(0)}) d\mu = d\mu$。

(5.3.3) 注。 (i) 正如下一节的示例将会说明的，(5.3.2) 为我们提供了关于钉住测度的拉普拉斯变换的另一种显式表达式。

(ii) 假设 $k_1, \dots, k_M$ 正交。令 $\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_M \\ \mathbf{J}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times M}$。有

$$\begin{aligned} \langle (I - (B_\eta^{(N)} - B_\eta^{(M)})) J_p, k_j \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle J_p, k_j \rangle_{\mathcal{H}} - \langle B_\eta J_p, (\pi^{(M)} - \pi^{(N)}) k_j \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \begin{cases} \langle J_p, k_j \rangle_{\mathcal{H}} & \text{if } j \le N, \\ \langle J_p, k_j \rangle_{\mathcal{H}} - \langle B_\eta J_p, k_j \rangle_{\mathcal{H}} & \text{if } j > N. \end{cases} \end{aligned}$$

因此，记 $\Phi^{(i)}$ i 为 Φ 的第 $1 \le i \le 2M$ 行，我们有

$$\mathbf{J}_N = \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \vdots \\ \Phi^{(N)} \\ \Phi^{(M+N+1)} \\ \vdots \\ \Phi^{(2M)} \end{pmatrix}. \tag{5.3.4}$$

故 $\det \mathbf{J}_N$ 是 Φ 的第 $(1, \dots, N, M+N+1, \dots, 2M)$ 个 Plücker 坐标。

为了证明定理（5.3.1），我们先准备一个引理。

(5.3.5) 引理。 设 $\eta \in \mathscr{S}_2$。假设 $\Lambda(B_\eta) < 1$，且条件 **(A)** 成立。则有

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta} \delta_0(\mathrm{D}^* \boldsymbol{k}^{(N)}) d\mu = & \big\{ (2\pi)^N \det C(\boldsymbol{k}^{(N)}) \det(I - A_F^{(N)} (I - A_I)^{-1}) \big\}^{-\frac{1}{2}} \\ & \times \{ \det{}_2(I - A_I) \}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathrm{tr} A_F} \quad \textit{for } 0 \le N \le M, \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

其中

$$A_F^{(N)} = -\pi^{(N)} A_I + (I - \pi^{(N)}) A_F.$$

证明。回顾恒等式行列式$_2(I+A)$ $=$行列式$(I+A)e^{-\mathrm{tr}A}$，对迹类的 $A\in\mathcal{H}^{\otimes 2}$ （[5,定理 IX.2.1]）。由此可得

$$\det{}_2\big((I+A_1)(I+A_2)\big)=\det(I+A_1)\det{}_2(I+A_2)e^{-\mathrm{tr}(A_1(I+A_2))} \tag{5.3.7}$$

对于迹类的 $A_1\in\mathcal{H}^{\otimes 2}$ 以及 $A_2\in\mathcal{H}^{\otimes 2}$。

我们首先考虑 $N=0$的情形。由定理（3.1.1），我们有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta}d\mu=\{\det{}_2(I-B_\eta)\}^{-\frac{1}{2}}.$$

回顾有限秩的 $B\in\mathcal{H}^{\otimes 2}$ 属于迹类，并将 $A_1=-A_F(I-A_I)^{-1}$ 和 $A_2=-A_I$ 代入(5.3.7)，我们得到

$$\det{}_2(I-B_\eta)=\det\big(I-A_F(I-A_I)^{-1}\big)\det{}_2(I-A_I)e^{\mathrm{tr}A_F}.$$

因此，当 $N=0$时，(5.3.6)成立。

接下来我们考虑 $1\le N\le M$的情形。由定理 (5.2.1)，我们有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta}\delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k}^{(N)})d\mu=\big\{(2\pi)^N\det C(\boldsymbol{k}^{(N)})\det{}_2(I-B_{\eta;\boldsymbol{k}^{(N)}})\big\}^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\pi^{(N)}B_\eta\pi^{(N)})}.$$

可知

$$\det{}_2(I-B_{\eta;\boldsymbol{k}^{(N)}})=\det{}_2(I-B_\eta^{(N)}). \tag{5.3.8}$$

由于

$$\big\{I-A_F^{(N)}(I-A_I)^{-1}\big\}(I-A_I)=I-A_I-A_F^{(N)}=I-B_\eta^{(N)},$$

将 $A_1=-A_F^{(N)}(I-A_I)^{-1}$ 和 $A_2=-A_I$ 代入 (5.3.7)，可得

$$\det{}_2(I-B_\eta^{(N)})=\det\big(I-A_F^{(N)}(I-A_I)^{-1}\big)\det{}_2(I-A_I)e^{\mathrm{tr}A_F^{(N)}}.$$

此外，注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big(A_F^{(N)}+\pi^{(N)}B_\eta\pi^{(N)}\big)&=\mathrm{tr}\big(-\pi^{(N)}A_I+(I-\pi^{(N)})A_F+\pi^{(N)}B_\eta\pi^{(N)}\big)\\&=\mathrm{tr}\big(-\pi^{(N)}B_\eta(I-\pi^{(N)})+A_F\big)=\mathrm{tr}A_F.\end{aligned}$$

因此，(5.3.6) 对 $1\le N\le M$ 成立。 □

定理（*5.3.1*）的证明。令 $0\le N\le M$。设

$$K_N=\pi^{(M)}(I-A_F^{(N)}(I-A_I)^{-1})\pi^{(M)},$$

并定义 $q_N=(q_{N;ij})_{1\le i,\ j\le M}\in\mathbb{R}^{M\times M}$ 为

$$K_Nk_i=\sum_{j=1}^{M}q_{N;ij}k_j\quad\text{for } 1\le i\le M.$$

于是有

$$\det(I-A_F^{(N)}(I-A_I)^{-1})=\det q_N.$$

根据引理（5.3.5），我们有

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta}\delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k}^{(N)})d\mu = \big\{(2\pi)^N \det C(\boldsymbol{k}^{(N)})\det q_N\big\}^{-\frac{1}{2}}\{\det{}_2(I-A_I)\}^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A_F}. \tag{5.3.9}$$

由于在引理 (3.1.11) 的证明中已经看到，$\Lambda(B_{\eta;\boldsymbol{k}^{(N)}}) \le \Lambda(B_\eta) < 1$，$\det_2(I - B_{\eta;\boldsymbol{k}^{(N)}}) \neq 0$。由 (5.3.8)，$\det_2(I-B_\eta^{(N)}) \neq 0$，因此 $I-B_\eta^{(N)}$ 有连续逆。对 $p=(p_1,\ \ldots,\ p_M) \in \mathbb{R}^M$，定义 $J_{N;p} \in \mathcal{H}$ 为

$$J_{N;p} = (I-B_\eta^{(N)})^{-1}\Big(\sum_{j=1}^M p_j k_j\Big).$$

注意到

$$\big(I - A_F^{(N)}(I-A_I)^{-1}\big)k_i = K_N k_i \quad \text{for } 1 \le i \le M,$$

and

$$I - A_F^{(N)}(I-A_I)^{-1} = I - (B_\eta^{(N)} - A_I)(I-A_I)^{-1} = (I-B_\eta^{(N)})(I-A_I)^{-1}.$$

于是有

$$(I-A_I)^{-1}k_i = (I-B_\eta^{(N)})^{-1}K_N k_i = \sum_{j=1}^M q_{N;ij}(I-B_\eta^{(N)})^{-1}k_j.$$

因此我们有

$$J_p = J_{N;q_N^\dagger p} \qquad \text{for } p \in \mathbb{R}^M. \tag{5.3.10}$$

由于对于任意 $h \in \mathcal{H}$ 和 $1 \le i \le M$，$\langle B_\eta^{(M)}h,\ k_i\rangle_{\mathcal{H}} = 0$，可知

$$\begin{aligned}\langle J_{N;p}, k_i\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle (I-B_\eta^{(M)})J_{N;p}, k_i\rangle_{\mathcal{H}} = \langle (I-B_\eta^{(N)})J_{N;p}, k_i\rangle_{\mathcal{H}} + \langle (B_\eta^{(N)} - B_\eta^{(M)})J_{N;p}, k_i\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \Big\langle \sum_{j=1}^M p_j k_j, k_i\Big\rangle_{\mathcal{H}} + \langle (B_\eta^{(N)} - B_\eta^{(M)})J_{N;p}, k_i\rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

结合 (5.3.10)，可得

$$\mathbf{J}_N\, p = C(\boldsymbol{k}^{(M)})q_N^\dagger p \quad \text{for } p \in \mathbb{R}^M.$$

Thus

$$\det q_N = \frac{\det \mathbf{J}_N}{\det C(\boldsymbol{k}^{(M)})}.$$

将其代入（5.3.9），即可得到（5.3.2）。 □

给定线性无关的 $k_1, \ldots, k_M \in \mathcal{H}$，$B_\eta$ 连同 $\Lambda(B_\eta) < 1$ 具有满足条件(**A**)的平凡分解。事实上，如上所述，用 $\pi^{(M)}$ 表示 $\mathcal{H}$ 到由 $k_1, \ldots, k_M$ 张成的子空间上的正交投影，我们令 $A_I = B_\eta - \pi^{(M)}$ 与 $A_F = \pi^{(M)}$。注意 $A_I \in \mathscr{S}_2$ 以及 $\Lambda(A_I) \le \Lambda(B_\eta) < 1$。正如在引理 (3.1.11)的证明中所见，我们有行列式$_2(I-A_I) \neq 0$。显然，A_F 的值域是

由 $k_1,\dots,k_M$张成的子空间。因此，对这些 A_I与A_F，假设(**A**) 得以满足，并且定理（5.3.1）可应用于 $k_1,\dots,k_M$。由于$\mathrm{tr}A_F = M$，恒等式(5.3.2)可写为

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{q}_\eta}\delta_0(\mathrm{D}^*\boldsymbol{k}^{(N)})d\mu = \left(\frac{\det C(\boldsymbol{k}^{(M)})}{(2\pi)^N \det C(\boldsymbol{k}^{(N)})\det \mathbf{J}_N}\right)^{\frac{1}{2}} \{\det{}_2(I - B_\eta + \pi^{(M)})\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{M}{2}}$$

对于 $0 \le N \le M$。

5.4. 示例

本节将给出定理（5.3.1）的若干例子。在这些例子中，算子 A_I 是一个Volterra算子，即一个谱为单点集 $\{0\}$ 的紧算子；我们还将遇到高阶线性常微分方程。下文中，令

$$\theta^{(N)}(t) = (\theta^1(t),\dots,\theta^N(t)) \quad \text{for } 0 \le N \le d.$$

在讨论这些例子之前，我们先准备一个与条件 **（A）** 对应的引理。为陈述该引理，令

$$\Delta_1 = \{(t,s) \in [0,T]^2 \mid t > s\} \quad \text{and} \quad \Delta_2 = \{(t,s) \in [0,T]^2 \mid t < s\}.$$

对于 $\phi \in \mathscr{L}_2$，定义 $\mathbf{1}_{\Delta_1}\phi$，$\mathbf{1}_{\Delta_2}\phi \in \mathscr{L}_2$ 如下

$$(\mathbf{1}_{\Delta_i}\phi)(t,s) = \mathbf{1}_{\Delta_i}(t,s)\phi(t,s) \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2 \text{ and } i = 1,2.$$

和之前一样，令 $\phi^* \in \mathscr{L}_2$，使得 $\phi^*(t,\ s) = \phi(s,\ t)^\dagger$对于 $(t,\ s) \in [0,T]^2$。

(5.4.1) 引理。取 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 和 $\phi \in \mathscr{L}_2$，满足 $\mathbf{1}_{\Delta_2}\eta \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \mathbf{1}_{\Delta_2}\phi$。令 $A_I = B_{\mathbf{1}_{\Delta_1}(\phi^* - \phi)}$ 且 $A_F = B_\phi$。则有

$$\det{}_2(I - A_I) = 1 \quad \textit{and} \quad B_\eta = A_I + A_F.$$

特别地，如果此外 B_ϕ 是有限秩的，则 B_η 满足条件 (**A**)。此外，任意满足 $B_\eta = B_{\mathbf{1}_{\Delta_1}\kappa} + B_\phi$ 的 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 都满足 $\mathbf{1}_{\Delta_1}\kappa \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \mathbf{1}_{\Delta_1}(\phi^* - \phi)$。

证明。根据引理 (3.1.8)，$\det_2(I - A_I) = 1$。由于对于任意 $\kappa \in \mathscr{L}_2$都有 $\left(\mathbf{1}_{\Delta_1}\kappa\right)^* = \mathbf{1}_{\Delta_2}\kappa^*$，我们得到

$$\mathbf{1}_{\Delta_1}\eta = \left(\mathbf{1}_{\Delta_2}\eta\right)^* \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \left(\mathbf{1}_{\Delta_2}\phi\right)^* = \mathbf{1}_{\Delta_1}\phi^*.$$

因此我们看到

$$\eta \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \mathbf{1}_{\Delta_1}\eta + \mathbf{1}_{\Delta_2}\eta \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \mathbf{1}_{\Delta_1}\phi^* + \mathbf{1}_{\Delta_2}\phi \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \mathbf{1}_{\Delta_1}(\phi^* - \phi) + \phi.$$

所以分解 $B_\eta = A_I + A_F$ 成立。

最后一个断言是引理（1.1.6）的直接推论，因为在这种情况下 $B_{\mathbf{1}_{\Delta_1}\kappa} = B_{\mathbf{1}_{\Delta_1}(\phi^* - \phi)}$。 □

（5.4.2）例。 令 $\sigma \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$，并将 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 定义为 $\eta = \rho_\sigma$，也就是说，

$$\eta(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\sigma(t) + \mathbf{1}_{(t,T]}(s)\sigma(s)^\dagger \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2. \tag{5.4.3}$$

于是我们有

$$\mathfrak{q}_\eta = \mathfrak{p}_\sigma = \int_0^T \langle \sigma(t)\theta(t), d\theta(t)\rangle.$$

定义 $\kappa_F \in \mathscr{L}_2$ 为 $\kappa_F(t,\ s) = \sigma(s)^\dagger$，其中 $(t,\ s) \in [0,T]^2$。根据 η 的定义（5.4.3），我们看到 $\mathbf{1}_{\Delta_2}\eta = \mathbf{1}_{\Delta_2}\kappa_F$。令 $e_1,\ \ldots,\ e_d$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的标准正交基，并将 $k_j \in \mathcal{H}$ 定义为 $k_j' = e_j$，其中 $1 \le j \le d$。由于

$$(B_{\kappa_F}h)'(t) = \int_0^T \sigma(s)^\dagger h'(s)ds \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \text{ and } t \in [0,T],$$

我们看到

$$\mathcal{R}(B_{\kappa_F}) \subset \left\{ \sum_{i=1}^d a_i k_i \,\middle|\, a_1,\ldots,a_d \in \mathbb{R} \right\}.$$

因此，B_{κ_F} 是有限秩的。

设 $\kappa_I = \mathbf{1}_{\Delta_1}(\kappa_F^* - \kappa_F)$。于是我们有

$$\kappa_I(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\{\sigma(t) - \sigma(s)^\dagger\} \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

根据引理（5.4.1），B_η 满足条件 **(A)**，其中 $A_I = B_{\kappa_I}$ 和 $A_F = B_{\kappa_F}$。

假设 $\Lambda(B_\eta) < 1$。根据推论（4.1.29），该条件等价于常微分方程的解 $\boldsymbol{S}$ 的非奇异性

$$\boldsymbol{S}'' - 2\sigma_A\boldsymbol{S}' - \sigma'\boldsymbol{S} = 0 \quad \boldsymbol{S}(T) = I_d,\ \boldsymbol{S}'(T) = \sigma(T).$$

A关于 σ 的另一个等价条件见注（4.1.27）.

要将定理（5.3.1）应用于具有上述 $k_1,\ldots,k_d$ 的 $\mathfrak{q}_\eta$，我们计算 $p = (p_1,\ldots,p_d) \in \mathbb{R}^d$ 的 J_p。注意，

$$(A_I h)'(t) = \sigma(t)h(t) - \int_0^t \sigma(s)^\dagger h'(s)ds \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \text{ and } t \in [0,T].$$

由于 $(I - A_I)J_p = \sum_{j=1}^d p_j k_j$，我们有

$$J_p'(t) - \sigma(t)J_p(t) + \int_0^t \sigma(s)^\dagger J_p'(s)ds = p \quad \text{for } t \in [0,T].$$

该方程连同初始条件 $J_p(0) = 0$ 等价于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的二阶常微分方程

$$J_p'' - 2\sigma_A J_p' - \sigma' J_p = 0, \quad J_p(0) = 0, \quad J_p'(0) = p, \quad \text{where } \sigma_A = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma^\dagger).$$

设 $U \in C^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ 是 $\mathbb{R}^{d\times d}$ 上二阶常微分方程的解

$$U'' - 2\sigma_A U' - \sigma' U = 0, \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = I_d. \tag{5.4.4}$$

于是我们有

$$J_p = U(\cdot)p.$$

根据定义，有

$$\mathbf{J}_d\, p = \big(\langle J_p, k_j\rangle_{\mathcal{H}}\big)_{1\le j\le d} = \big(\langle J_p(T), e_j\rangle\big)_{1\le j\le d} = U(T)p.$$

因此我们得到

$$\mathbf{J}_d = U(T).$$

由于 $(I-\pi^{(d)})k_j = 0$ 对于 $1\le j\le d$，根据定义，

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_0\, p &= \Big(\langle (I-\pi^{(d)}B_\eta)J_p, k_j\rangle_{\mathcal{H}}\Big)_{1\le j\le d} = \Big(\langle (I-B_\eta)J_p, k_j\rangle_{\mathcal{H}}\Big)_{1\le j\le d}\\ &= \left(\left\langle \sum_{i=1}^d p_i k_i - A_F J_p, k_j\right\rangle_{\mathcal{H}}\right)_{1\le j\le d} = Tp - T\left(\int_0^T \sigma(s)^\dagger U'(s)ds\right)p.\end{aligned}$$

因此我们看到

$$\mathbf{J}_0 = T(I_d - \Sigma), \quad \text{where } \Sigma = \int_0^T \sigma(s)^\dagger U'(s)ds.$$

定义 $\Phi\in\mathbb{R}^{2d\times d}$ 为

$$\Phi = \begin{pmatrix} U(T)\\ T(I_d-\Sigma)\end{pmatrix}.$$

那么，每个$\mathbf{J}_N$ 都由 (5.3.4) 给出，其中使用此 Φ。

注意，对于 $0\le N\le d$， $C(\boldsymbol{k}^{(N)}) = T^N I_N$。此外，有 at

$$\mathrm{tr}A_F = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^d \langle A_F k_j, k_j\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^d \int_0^T \left\langle \int_0^T \sigma(s)^\dagger e_j ds, e_j\right\rangle dt = \int_0^T \mathrm{tr}\sigma(s)ds.$$

由于 $\mathbf{D}^* k_j = \theta^j(T)$，根据定理（5.3.1），我们得到

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\int_0^T \langle \sigma(t)\theta(t), d\theta(t)\rangle}\delta_0(\theta^{(N)}(T))d\mu = \left(\frac{T^{d-N}}{(2\pi)^N \det \mathbf{J}_N}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}\sigma(s)ds} \tag{5.4.5}$$

对于 $0\le N\le d$。

(5.4.6) 例。在此例中，我们考虑例（5.4.2）的一个特例：常微分方程（5.4.4）具有常系数的情形。此时，解 U 有显式表达式。

令 C， $D\in\mathbb{R}^{d\times d}$，并假设 $D^\dagger = D$。定义二次维纳泛函$\mathfrak{a}_{C,\ D}$ 如下

$$\mathfrak{a}_{C,D} = \frac{1}{2}\int_0^T \langle C\theta(t), d\theta(t)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^T \langle D\theta(t), \theta(t)\rangle dt.$$

这个维纳泛函等于定理（4.2.1）中的 $\mathfrak{a}^x_{\phi,\psi}$，其中有 $x=0$、 $\phi\equiv\frac{1}{2}C$ 和$\psi\equiv D$。令

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}C + (T-t)D \quad \text{for } t\in[0,T].$$

由（4.2.6）可知

$$\mathfrak{a}_{C,D} = \int_0^T \langle \sigma(t)\theta(t), d\theta(t)\rangle + \frac{T^2}{4}\mathrm{tr}D. \tag{5.4.7}$$

例（5.4.2）中的常微分方程（5.4.4）可改写为

$$U'' - AU' + DU = 0, \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = I_d, \quad \text{where } A = \tfrac{1}{2}(C - C^\dagger).$$

Put

$$M_{A,D} = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -D & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d\times 2d},$$

并令 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2d} \in \mathbb{C}$ 为按重数计的特征值。通过以下常微分方程组定义 $r_1, \ldots, r_{2d} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \quad \text{for } 2 \le j \le 2d, \\ r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = \cdots = r_{2d}(0) = 0, \end{cases}$$

并依次定义复矩阵 $Q_1, \ldots, Q_{2d} \in \mathbb{C}^{d\times d}$

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = I_d,$$

and

$$Q_{3+n} = -D\left(\sum_{j=1}^{n+1} r_j^{(n)}(0)Q_j\right) + A\left(\sum_{j=1}^{n+2} r_j^{(n+1)}(0)Q_j\right) - \sum_{j=1}^{n+2} r_j^{(n+2)}(0)Q_j$$

对于 $0 \le n \le 2d-3$。根据命题（A.3.4），取 $k = 2$，其中 $C_0 = -D$、$C_1 = A$、$U_0 = 0$ 和 $U_1 = I_d$，可知 U 表示为

$$U = \sum_{j=1}^{2d} r_j Q_j. \tag{5.4.8}$$

注意，例（5.4.2）中的 Σ 给定为

$$\Sigma = \frac{1}{2}C^\dagger U(T) + D\int_0^T U(s)ds.$$

矩阵 $\mathbf{J}_N$ 由（5.3.4）给出，其中

$$\Phi = \begin{pmatrix} U(T) \\ T(I_d - \Sigma) \end{pmatrix}.$$

由于

$$\int_0^T \mathrm{tr}\sigma(s)ds = \frac{T}{2}\mathrm{tr}C + \frac{T^2}{2}\mathrm{tr}D,$$

由 (5.4.5) 和 (5.4.7)，我们得到

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\frac{1}{2}\int_0^T \langle C\theta(t), d\theta(t)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^T \langle D\theta(t),\theta(t)\rangle dt}\delta_0(\theta^{(N)}(T))d\mu = \left(\frac{T^{d-N}}{(2\pi)^N \det \mathbf{J}_N}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{T}{4}\mathrm{tr}C}$$

对于 $0 \le N \le d$。

假设 $M_{A,D}$ 具有互异的特征值 $\nu_1, \dots, \nu_{2d}$。分两步定义 $\widehat{Q}_1, \dots \widehat{Q}_{2d} \in \mathbb{C}^{d\times d}$。(i) 依次定义 $\widehat{U}_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$，其中 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 为

$$\widehat{U}_0 = 0, \quad \widehat{U}_1 = I_d, \quad \widehat{U}_{2+n} = -D\widehat{U}_n + A\widehat{U}_{n+1} \quad \text{for } 0 \le n \le 2d-3.$$

(ii) 将 Q_j 的每个 (p,q)-分量 Q_j^{pq} 定义为

$$\begin{pmatrix} \widehat{Q}_1^{pq} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widehat{Q}_{2d}^{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \nu_1 & \dots & \nu_{2d} \\ \nu_1^2 & \dots & \nu_{2d}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \nu_1^{2d-1} & \dots & \nu_{2d}^{2d-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{U}_0^{pq} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widehat{U}_{2d-1}^{pq} \end{pmatrix}.$$

根据命题 (A.3.11)，对于 $k = 2$ 及 $C_0 = -D, C_1 = A, U_0 = 0, U_1 = I_d$，我们可以将 U 表示为

$$U(t) = \sum_{j=1}^{2d} e^{\nu_j t}\widehat{Q}_j \quad \text{for } t \in [0,T].$$

此外，在这种情况下，我们有

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{d} \left\{ \frac{1}{2} e^{\nu_j T} C^\dagger + \frac{e^{\nu_j T} - 1}{\nu_j} D \right\} \widehat{Q}_j, \quad \text{where } \frac{e^{0T}-1}{0} = 1.$$

上述两个例子中的常微分方程都是二阶的。这类常微分方程已在前一章中出现。在接下来的示例中，我们将讨论常微分方程阶数大于或等于三的情形。

(5.4.9) 例。我们继续使用示例 (5.4.2) 和 (5.4.6) 中的记号。由 (5.4.3) 和 (5.4.7)，$\mathrm{D}\mathfrak{a}_C$ <style id='4', $_D$ =$\mathrm{D}\mathfrak{q}_\eta$。根据命题 (3.3.5)，我们有

$$\frac{1}{2}\|\mathrm{D}\mathfrak{a}_{C,D}\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathfrak{q}_{c(\eta)} + \frac{1}{2}\|\eta\|_2^2. \tag{5.4.10}$$

我们将定理（5.3.1）应用于 $-\frac{1}{2}\|D\mathfrak{a}_{C,\ D}\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathfrak{q}_{-c(\eta)} - \frac{1}{2}\|\eta\|_2^2$。

我们首先看到定理（5.3.1）适用于 $B_{-c(\eta)}$。为此，将 $B_{-c(\eta)}$ 展开为

$$B_{-c(\eta)} = -B_{c(\eta)} = -B_\eta^2 = -A_I^2 + \Big((-A_I)A_F + (-A_F)(A_I + A_F) \Big).$$

回想一下 $A_I = B_{\kappa_I}$，因此

$$A_I^2 = B_{\kappa_I * \kappa_I},$$

其中

$$(\kappa_I * \kappa_I)(t,s) = \int_0^T \kappa_I(t,u)\kappa_I(u,s)du \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

由于

$$\kappa_I(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\{A - (t-s)D\} \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2,$$

我们知道

$$(\kappa_I * \kappa_I)(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\left\{(t-s)A^2 - \frac{(t-s)^2}{2}(DA+AD) + \frac{(t-s)^3}{6}D^2\right\}.$$

由引理 (3.1.8)，我们得到

$$\mathrm{tr}[A_I^2] = 0 \quad \text{and} \quad \det{}_2(I + A_I^2) = 1. \tag{5.4.11}$$

设 $e_1, \ldots, e_d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个标准正交基，并定义 $k_1, \ldots, k_{3d} \in \mathcal{H}$ 为

$$k_i'(t) = e_i, \quad k_{d+i}'(t) = \left(t - \frac{T}{2}\right)e_i, \quad k_{2d+i}'(t) = \left(t^2 - Tt + \frac{T^2}{6}\right)e_i$$

对于 $t \in [0,T]$ 和 $1 \le i \le d$。则 $k_1, \ldots, k_{3d}$ 两两正交。正如在前一个例子中所见，我们有

$$\mathcal{R}(A_F) \subset \left\{\sum_{j=1}^{d} a_j k_j \,\middle|\, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}\right\}.$$

由于

$$(A_I k_i)'(t) = \left(tA - \frac{t^2}{2}D\right)e_i \quad \text{for } t \in [0,T] \text{ and } 1 \le i \le d,$$

我们看到

$$\mathcal{R}\Big((-A_I)A_F + (-A_F)(A_I + A_F)\Big) \subset \left\{\sum_{i=1}^{3d} a_i k_i \,\middle|\, a_1, \ldots, a_{3d} \in \mathbb{R}\right\}.$$

因此，$B_{-c(\eta)}$ 满足条件 (**A**)，其中 $-A_I^2$ 对应于 A_I，且 $(-A_I)A_F + (-A_F)(A_I + A_F)$ 对应于 A_F。由于 $B_{c(\eta)} \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$，$\Lambda(B_{-c(\eta)}) \le 0 < 1$。因此，定理（5.3.1）适用于 $\mathfrak{q}_{-c(\eta)}$，其中 $k_1, \ldots, k_{3d}$。

我们计算与 $\mathfrak{q}_{-c(\eta)}$ 相关的 J_p，针对 $p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in (\mathbb{R}^d)^3 = \mathbb{R}^{3d}$。注意，

$$(A_I h)'(t) = \int_0^t [Ah' - Dh](s)ds$$

and

$$(A_I^2 h)'(t) = \int_0^t \left\{A\left(\int_0^s [Ah' - Dh](u)du\right) - D\left(\int_0^s \left(\int_0^u [Ah' - Dh](v)dv\right)du\right)\right\}ds$$

$3d$对于 $h \in \mathcal{H}$和 $t \in [0,T]$。由于 $(I + A_I^2)$ $J_p = \sum p_i k_i$，其中 p_1，……，p_{3d}被确定为$i=1 p^{(i)} = (p_{(i-1)d+1}$，……，$p_{id})$，对于 $i = 1$，2，3，J_p由方程刻画

$$J_p^{(1)}(t) + \int_0^t \left\{A\left(\int_0^s [AJ_p^{(1)} - DJ_p](u)du\right) - D\left(\int_0^s \left(\int_0^u [AJ_p^{(1)} - DJ_p](v)dv\right)du\right)\right\}ds$$

$$= p^{(1)} + \Big(t - \frac{T}{2}\Big)p^{(2)} + \Big(t^2 - Tt + \frac{T^2}{6}\Big)p^{(3)} \quad \text{for } t \in [0, T].$$

若令

$$\widehat{J}_0(p) = 0, \quad \widehat{J}_1(p) = p^{(1)} - \frac{T}{2}p^{(2)} + \frac{T^2}{6}p^{(3)}, \quad \widehat{J}_2(p) = p^{(2)} - Tp^{(3)},$$

and

$$\widehat{J}_3(p) = -A^2\Big(p^{(1)} - \frac{T}{2}p^{(2)} + \frac{T^2}{6}p^{(3)}\Big) + 2p^{(3)},$$

那么，带有初始条件 $J_p(0) = 0$ 的这个方程等价于 $\mathbb{R}^d$ 上的四阶常微分方程

$$J_p^{(4)} + A^2 J_p^{(2)} - (AD + DA)J_p^{(1)} + D^2 J_p = 0, \quad J_p^{(i)}(0) = \widehat{J}_i(p) \quad \text{for } 0 \le i \le 3.$$

设矩阵的特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{4d} \in \mathbb{C}$

$$\hat{M}_{A,D} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \\ -D^2 & AD + DA & -A^2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4d \times 4d}$$

按重数计数。定义 $r_1, \ldots, r_{4d} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ 为

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \quad \text{for } 2 \le j \le 4d, \\ r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = \cdots = r_{4d}(0) = 0, \end{cases}$$

以及多重线性映射 $q_1, \ldots q_{4d} : (\mathbb{C}^d)^3 \to \mathbb{C}^d$ 为

$$q_1(p) = 0, \quad q_2(p) = \widehat{J}_1(p), \quad q_{m+1}(p) = \widehat{J}_m(p) - \sum_{j=1}^{m} r_j^{(m)}(0) q_j(p) \quad \text{for } 2 \le m \le 3,$$

and

$$\begin{aligned} q_{5+n}(p) = &- D^2\Big(\sum_{j=1}^{n+1} r_j^{(n)}(0) q_j(p)\Big) + (AD + DA)\Big(\sum_{j=1}^{n+2} r_j^{(n+1)}(0) q_j(p)\Big) \\ &- A^2\Big(\sum_{j=1}^{n+3} r_j^{(n+2)}(0) q_j(p)\Big) - \sum_{j=1}^{n+4} r_j^{(n+4)}(0) q_j(p) \quad \text{for } 0 \le n \le 4d - 5. \end{aligned}$$

根据 $k = 4$ 的推论 (A.3.5)，当 $C_0 = -D^2$、$C_1 = AD + DA$、$C_2 = -A^2$ 以及 $C_3 = 0$、J_p 时，表示为

$$J_p = \sum_{j=1}^{4d} r_j q_j(p).$$

利用这个 J_p，我们将矩阵 $\mathbf{J}_0$,$\mathbf{J}_{3d} \in \mathbb{R}^{3d\times 3d}$ 和 $\Phi \in \mathbb{R}^{6d\times 3d}$ 定义为

$$\mathbf{J}_0\, p = \begin{pmatrix} \langle J_p, (I + B_{c(\eta)})k_1\rangle_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ \langle J_p, (I + B_{c(\eta)})k_{3d}\rangle_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{3d}\, p = \begin{pmatrix} \langle J_p, k_1\rangle_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ \langle J_p, k_{3d}\rangle_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \quad \text{for } p \in \mathbb{R}^{3d}$$

and

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{3d} \\ \mathbf{J}_0 \end{pmatrix}.$$

矩阵 $\mathbf{J}_N$ 由 (5.3.4) 给出，其中有 Φ。

上述 $\langle J_p, k_i\rangle_{\mathcal{H}}$可计算为

$$\langle J_p, k_i\rangle_{\mathcal{H}} = \langle J_p(T), e_i\rangle,$$

$$\langle J_p, k_{d+i}\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle -\frac{T}{2}J_p(T) + \int_0^T tJ_p^{(1)}(t)dt, e_i \right\rangle,$$

and

$$\langle J_p, k_{2d+i}\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle -\frac{T^2}{6}J_p(T) + \int_0^T (t^2 - Tt)J_p^{(1)}(t)dt, e_i \right\rangle.$$

此外，$\langle J_p,(I + B_{c(\eta)})k_i\rangle_{\mathcal{H}}$也可计算如下。对于 $e \in \mathbb{R}^d$ 和 $n \in\{0, 1, 2\}$，定义 $h_{e;n} \in \mathcal{H}$ 为 $h'_{e;n}(t) = t^n e$，其中 $t \in [0, T]$。求出 $K_n, P_n(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$，使得

$$K_n = \int_0^T s^n \sigma(s)^\dagger ds = \frac{T^{n+1}}{2(n+1)}C^\dagger + \frac{T^{n+2}n!}{(n+2)!}D$$

and

$$\begin{aligned} P_n(t) =& \frac{n!t^{n+2}}{(n+2)!}A^2 - \frac{n!t^{n+3}}{(n+3)!}(AD + DA) + \frac{n!t^{n+4}}{(n+4)!}D^2 \\ &+ \frac{1}{n+1}K_{n+1}A - \frac{n!}{(n+2)!}K_{n+2}D + \left(tA - \frac{t^2}{2}D + K_0\right)K_n. \end{aligned}$$

由于

$$(B_\eta h)'(t) = \int_0^t [Ah' - Dh](s)ds + \int_0^T \sigma(s)^\dagger h'(s)ds \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \text{ and } t \in [0, T],$$

通过直接计算，我们得到

$$(B_{c(\eta)}h_{e;n})'(t) = P_n(t)e \quad \text{for } t \in [0, T].$$

改写为

$$k_i = h_{e_i;0}, \quad k_{d+i} = h_{e_i;1} - \frac{T}{2}h_{e_i;0}, \quad k_{2d+i} = h_{e_i;2} - Th_{e_i;1} + \frac{T^2}{6}h_{e_i;0} \quad \text{for } 1 \le i \le d,$$

结合上述对 $\langle J_p, k_i\rangle_{\mathcal{H}}$s的求值，我们得到

$$\langle J_p, (I + B_{c(\eta)})k_i\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle J_p(T) + \int_0^T P_0(t)^\dagger J_p^{(1)}(t)dt, e_i \right\rangle,$$

$$\langle J_p, (I + B_{c(\eta)})k_{d+i}\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle -\frac{T}{2}J_p(T) + \int_0^T \Big(tI_d + P_1(t)^\dagger - \frac{T}{2}P_0(t)^\dagger\Big)J_p^{(1)}(t)dt, e_i \right\rangle,$$

and

$$\begin{aligned}&\langle J_p, (I + B_{c(\eta)})k_{2d+i}\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= \left\langle -\frac{T^2}{6}J_p(T) + \int_0^T \Big((t^2 - tT)I_d + P_2(t)^\dagger - TP_1(t)^\dagger + \frac{T^2}{6}P_0(t)^\dagger\Big)J_p^{(1)}(t)dt, e_i \right\rangle\end{aligned}$$

对于 $1 \le i \le d$。

我们计算定理（5.3.1）中的其余量。通过直接计算可知

$$\|k_i\|_{\mathcal{H}}^2 = T, \quad \|k_{d+i}\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{T^3}{12}, \quad \|k_{2d+i}\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{T^5}{180} \quad \text{for } 1 \le i \le d.$$

因此我们有

$$\det C(\boldsymbol{k}^{(N)}) = T^N \quad \text{for } 0 \le N \le d \quad \text{and} \quad \det\big(C(\boldsymbol{k}^{(3d)})\big) = \frac{T^{9d}}{12^d 180^d}. \tag{5.4.12}$$

由（5.4.11）可知

$$\begin{aligned}&- \|\eta\|_2^2 - \operatorname{tr}\Big[(-A_I)A_F + (-A_F)(A_I + A_F)\Big]\\ &= -\|B_\eta\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 - \operatorname{tr}\Big[(-A_I)A_F + (-A_F)(A_I + A_F)\Big]\\ &= \operatorname{tr}\Big[-B_\eta^2 + A_I A_F + A_F(A_I + A_F)\Big] = \operatorname{tr}[-A_I^2] = 0.\end{aligned}$$

将定理（5.3.1）应用于$\mathfrak{q}_{-c(\eta)}$，并结合（5.4.10）、（5.4.11）和（5.4.12），可得

$$\int_{\mathcal{W}} e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{D}\mathfrak{a}_{C,D}\|_{\mathcal{H}}^2}\delta_0(\theta^{(N)}(T))d\mu = \left(\frac{T^{9d-N}}{(2\pi)^N 12^d 180^d \det \mathbf{J}_N}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } 0 \le N \le d.$$

定义$\hat{}\ k_{d+1}, \ldots, \hat{}k_{2d} \in \mathcal{H}$，使得$\hat{}\ k'_{d+i}(t) = (t^2 - \frac{T^2}{3})e_i$，其中 $1 \le i \le d$且 $t \in [0, T]$。若 $A = 0$（当 $d = 1$时总是如此），我们可以用$\hat{}\ \hat{}k_1, \ldots, k_d, k_{d+1}, \ldots, k_{2d}$代替 $k_1, \ldots, k_{3d}$，来执行上述步骤。细节从略。

（5.4.13）例。在前面的示例中，我们遇到了二阶和四阶常微分方程。本例将讨论出现三阶常微分方程的情形。

设 $D \in \mathbb{R}^{d\times d}$，并假设 $D^\dagger = D$ 和

$$\Lambda(-D) \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^d, |x|=1} \langle (-D)x, x\rangle < 1.$$

定义二次维纳泛函 $\mathfrak{v}_D$ 如下：

$$\mathfrak{v}_D = \frac{1}{2}\int_0^T \big\langle D(\theta(t) - \overline{\theta}), \theta(t) - \overline{\theta}\big\rangle dt, \quad \text{where } \overline{\theta} = \frac{1}{T}\int_0^T \theta(t)dt.$$

当 $d=1$ 且 $D=1$ 时，$\frac{2}{T}\mathfrak{v}_D$ 是样本路径的样本方差，它在 Malliavin 微积分发展早期对控制 Malliavin 协方差的逆起到了关键作用。例如，参见 Ikeda 和 Watanabe 所著书籍的第一版（[16]）。

作为 Malliavin 微积分中的一个简单练习，我们知道

$$\langle \mathrm{D}\mathfrak{v}_D, g\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \langle D(\theta(t)-\overline{\theta}), g(t)-\overline{g}\rangle dt \quad \text{for } g\in\mathcal{H}.$$

因此

$$\int_{\mathcal{W}} \mathrm{D}\mathfrak{v}_D d\mu = 0.$$

对上述式子求 $\mathcal{H}$ 导数，并将恒等式 $\int_0^T (h(t)-h)dt = 0$ 代入所得的恒等式中，可知

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{D}^2\mathfrak{v}_D, h\otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} &= \int_0^T \langle D(h(t)-\overline{h}), g(t)-\overline{g}\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle D(h(t)-\overline{h}), g(t)\rangle dt \\
&= \int_0^T \left\langle D\left(\int_t^T (h(s)-\overline{h})ds\right), g'(t)\right\rangle dt \\
&= \int_0^T \left\langle -D\left(\int_0^t (h(s)-\overline{h})ds\right), g'(t)\right\rangle dt \quad \text{for } h,g\in\mathcal{H}.
\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

令 $\eta\in\mathscr{S}_2$ 为

$$\eta(t,s) = \left(-\mathbf{1}_{[0,t)}(s)(t-s) + \frac{t}{T}(T-s)\right)D = \left(\min\{t,s\} - \frac{ts}{T}\right)D \tag{5.4.15}$$

对于 $(t,s)\in[0,T]^2$，我们有

$$\int_0^T \eta(t,s)h'(s)ds = -D\left(\int_0^t (h(s)-\overline{h})ds\right) \quad \text{for } h\in\mathcal{H}. \tag{5.4.16}$$

因此有

$$\mathrm{D}^2\mathfrak{v}_D = B_\eta.$$

此外，很容易看出

$$\int_{\mathcal{W}} \mathfrak{v}_D d\mu = \frac{T^2}{12}\mathrm{tr}D.$$

由引理（1.1.4）和定理（1.1.1），可得

$$-\mathfrak{v}_D = \mathfrak{q}_{-\eta} - \frac{T^2}{12}\mathrm{tr}D. \tag{5.4.17}$$

定义 $\kappa_F\in\mathscr{L}_2$ 为

$$\kappa_F(t,s) = -\frac{t}{T}(T-s)D \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2.$$

根据 η 的定义 (5.4.15)，可得 $\mathbf{1}_{\Delta_2}(-\eta) = \mathbf{1}_{\Delta_2}\kappa_F$。令 e_1，……，e_d 为 $\mathbb{R}^d$ 的一个标准正交基，并定义正交的 k_1，……，$k_{2d} \in \mathcal{H}$，使得

$$k_i'(t) = e_i \quad \text{and} \quad k_{d+i}'(t) = \left(t - \frac{T}{2}\right)e_i \quad \text{for } t \in [0,T] \text{ and } 1 \le i \le d.$$

由于

$$(B_{\kappa_F}h)'(t) = \int_0^T \left(-\frac{t}{T}(T-s)D\right)h'(s)ds = -tD\overline{h} \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \text{ and } t \in [0,T],$$

我们有

$$\mathcal{R}(B_{\kappa_F}) \subset \left\{\sum_{i=1}^{2d} a_i k_i \,\middle|\, a_1, \ldots, a_{2d} \in \mathbb{R}\right\}.$$

因此 B_{κ_F} 具有有限秩。令 $\kappa_I \in \mathscr{L}_2$ 使得

$$\kappa_I(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)(t-s)D \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

由（5.4.15）和引理（5.4.1）可知，$B_{-\eta}$ 在 $A_I = B_{\kappa_I}$和 $A_F = B_{\kappa_F}$下满足条件(**A**)。此外，由（5.4.14）中的第一个恒等式可知，

$$\Lambda(B_{-\eta}) \le \Lambda(-D) \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \int_0^T |h(t) - \overline{h}|^2 dt \le \Lambda(-D) < 1.$$

因此定理（5.3.1）可应用于 $\mathfrak{q}_{-\eta}$，取 k_1，……，k_{2d}。

我们计算与 $\mathfrak{q}_{-\eta}$ 相关联的 J_p，其中 $p = (p^{(1)}, p^{(2)}) \in (\mathbb{R}^d)^2 = \mathbb{R}^{2d}$。注意

$$(A_I h)'(t) = \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t)}(s)(t-s)Dh'(s)ds = \int_0^t Dh(s)ds \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \text{ and } t \in [0,T].$$

由于（$I - A_I$）$J_p = \sum p_i k_i$，其中 $p_1, \ldots, p_{2d}$ 由 $p^{(i)} = (p_{(i-1)d+1}, \ldots, p_{id})$ 确定，适用于$i=1$，$i = 1,2$，因此我们有

$$J_p^{(1)}(t) - \int_0^t DJ_p(s)ds = p^{(1)} + \left(t - \frac{T}{2}\right)p^{(2)} \quad \text{for } t \in [0,T].$$

如果我们设

$$\widehat{J}_0(p) = 0, \quad \widehat{J}_1(p) = p^{(1)} - \frac{T}{2}p^{(2)}, \quad \widehat{J}_2(p) = p^{(2)},$$

那么这个恒等式连同初始条件 $J_p(0) = 0$ 等价于 $\mathbb{R}^d$上的三阶常微分方程

$$J_p^{(3)} - DJ_p^{(1)} = 0, \quad J_p^{(i)}(0) = \widehat{J}_i(p) \quad \text{for } 0 \le i \le 2.$$

我们将这个常微分方程作为关于 $J_p^{(1)}$ 的二阶常微分方程来求解，并对其积分得到 J_p。为此，令 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2d} \in \mathbb{C}$ 为该矩阵的特征值

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ D & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$$

按重数计。定义 $r_1, \dots, r_{2d} \in C^\infty(\mathbb{R};\, \mathbb{C})$ 为

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \quad \text{for } 2 \le j \le 2d, \\ r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = \cdots = r_{2d}(0) = 0, \end{cases}$$

以及多重线性映射 $q_1, \dots, q_{2d} \colon (\mathbb{C}^d)^2 \to \mathbb{C}^d$ as

$$q_1(p) = \widehat{J}_1(p), \quad q_2(p) = \widehat{J}_2(p) - \lambda_1 \widehat{J}_1(p),$$

and

$$q_{3+n}(p) = D\Big(\sum_{j=1}^{n+1} r_j^{(n)}(0) q_j(p)\Big) - \sum_{j=1}^{n+2} r_j^{(n+2)}(0) q_j(p) \quad \text{for } 0 \le n \le 2d-3.$$

根据推论（A.3.5），对于 $k = 2$，取 $C_0 = D$ 和 $C_1 = 0$，可得

$$J_p(t) = \sum_{j=1}^{2d} \Big(\int_0^t r_j(s)ds\Big) q_j(p) \quad \text{for } t \in [0, T].$$

利用这个 J_p，我们通过以下方式定义矩阵 $\mathbf{J}_0$,$\mathbf{J}_{2d} \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$

$$\mathbf{J}_0\, p = \begin{pmatrix} \langle J_p, (I + B_\eta) k_1 \rangle_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ \langle J_p, (I + B_\eta) k_{2d} \rangle_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{J}_{2d}\, p = \begin{pmatrix} \langle J_p, k_1 \rangle_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ \langle J_p, k_{2d} \rangle_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \quad \text{for } p \in \mathbb{R}^{2d}.$$

矩阵 $\mathbf{J}_N$ 由 (5.3.4) 确定，其中

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{2d} \\ \mathbf{J}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4d \times 2d}.$$

上述 $\langle J_p, k_i \rangle_{\mathcal{H}}$s 和 $\langle J_p, (I + B_\eta) k_i \rangle_{\mathcal{H}}$s 的计算如下。由 (5.4.16) 可得

$$(B_\eta k_i)'(t) = \frac{t(T-t)}{2} D e_i \quad \text{and} \quad (B_\eta k_{d+i})'(t) = -\Big(\frac{t^3}{6} - \frac{T}{4}t^2 + \frac{T^2}{12}t\Big) D e_i.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \langle J_p, k_i \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle J_p(T), e_i \rangle, \\ \langle J_p, k_{d+i} \rangle_{\mathcal{H}} &= \Big\langle -\frac{T}{2} J_p(T) + \int_0^T t J_p^{(1)}(t) dt, e_i \Big\rangle, \\ \langle J_p, (I + B_\eta) k_i \rangle_{\mathcal{H}} &= \Big\langle J_p(T) + \int_0^T \frac{t(T-t)}{2} D J_p^{(1)}(t) dt, e_i \Big\rangle, \end{aligned}$$

and

$$\langle J_p, (I + B_\eta) k_{d+i} \rangle_{\mathcal{H}} = \Big\langle -\frac{T}{2} J_p(T) + \int_0^T \Big\{ t I_d - \Big(\frac{t^3}{6} - \frac{T}{4}t^2 + \frac{T^2}{12}t\Big) D \Big\} J_p^{(1)}(t) dt, e_i \Big\rangle$$

对于 $1 \le i \le d$。

我们计算定理（5.3.1）中的其余量。如前一个例子所示，我们有

$$\|k_i\|_{\mathcal{H}}^2 = T \quad \text{and} \quad \|k_{d+i}\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{T^3}{12} \quad \text{for } 1 \le i \le d.$$

因此，我们得到

$$\det\big(C(\boldsymbol{k}^{(N)})\big) = T^N \quad \text{for } 0 \le N \le d \quad \text{and} \quad \det C(\boldsymbol{k}^{(2d)}) = \frac{T^{4d}}{12^d}. \tag{5.4.18}$$

由引理（A.1.3），我们有

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A_F = -\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{tr}[\kappa_F(t,t)]dt = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\int_0^T \left(\frac{t}{T}(T-t)D\right)dt\right] = \frac{T^2}{12}\mathrm{tr}D.$$

由定理（5.3.1）、引理（5.4.1）以及恒等式（5.4.17）和（5.4.18），我们得到

$$\int_{\mathcal{W}} e^{-\mathfrak{v}_D}\delta_0(\theta^{(N)}(T))d\mu = \left(\frac{T^{4d-N}}{(2\pi)^N 12^d \det \mathbf{J}_N}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } 0 \le N \le d.$$

(5.4.19) 例。 在本例中，我们考虑出现四阶以上常微分方程的情形。

令 $\mathcal{I}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ 为积分算子，使得

$$\mathcal{I}[w](t) = \int_0^t w(s)ds \quad \text{for } t \in [0,T] \text{ and } w \in \mathcal{W}.$$

固定一个 $N \in \mathbb{N}$，并定义随机过程 $\{X_N(t)\}_{t\in[0,T]}$ 为

$$X_N(t) = \mathcal{I}^N[\theta](t) \quad \text{for } t \in [0,T].$$

定义 $\gamma_N\colon\ [0,T]^2 \to \mathbb{R}$ 为

$$\gamma_N(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\frac{(t-s)^N}{N!} \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

交换积分次序，我们很容易看到

$$\mathcal{I}^N[h](t) = \int_0^T \gamma_N(t,s)h'(s)ds \quad \text{for } h \in \mathcal{H} \text{ and } t \in [0,T]. \tag{5.4.20}$$

对 $\{\theta(t)\}_{t\in[0,T]}$ 进行分段线性近似，由此得到

$$X_N(t) = \int_0^T \gamma_N(t,s)d\theta(s). \tag{5.4.21}$$

因此，$\{X_N(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一个高斯过程。当 $d=2$ 时，Ikeda、Kusuoka 和 Manabe（[9]）研究了这类高斯过程所围成的随机面积。

对于 $\sigma \in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$，我们通过以下方式考虑维纳泛函 $\mathfrak{q}\colon\ \mathcal{W}\to\mathbb{R}$

$$\mathfrak{q}=\int_0^T\big\langle\sigma(t)X_N(t),dX_N(t)\big\rangle=\int_0^T\big\langle\sigma(t)X_N(t),X_{N-1}(t)\big\rangle dt.$$

定义 $\eta\in\mathscr{S}_2$ 为

$$\eta(t,s)=\int_0^T\Big\{\gamma_{N-1}(u,t)\gamma_N(u,s)\sigma(u)+\gamma_N(u,t)\gamma_{N-1}(u,s)\sigma(u)^\dagger\Big\}du\quad\text{for }(t,s)\in[0,T]^2,$$

我们将证明

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_\eta+\frac{1}{2(N!)^2}\int_0^T t^{2N}\mathrm{tr}[\sigma(t)]dt. \tag{5.4.22}$$

为此，我们先计算 $\mathrm{D}\mathfrak{q}$。由 (5.4.21)，可知

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{D}\mathfrak{q},g\rangle_{\mathcal{H}}=&\int_0^T\bigg\langle\sigma(t)X_N(t),\int_0^T\gamma_{N-1}(t,s)g'(s)ds\bigg\rangle dt\\&+\int_0^T\bigg\langle\sigma(t)\int_0^T\gamma_N(t,s)g'(s)ds,X_{N-1}(t)\bigg\rangle dt\quad\text{for }g\in\mathcal{H}.\end{aligned}$$

再次由 (5.4.21)，可得

$$\int_{\mathcal{W}}\mathrm{D}\mathfrak{q}d\mu=0.$$

接下来，对 $\mathrm{D}\mathfrak{q}$ 求 $\mathcal{H}$ 导数，可得

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{D}^2\mathfrak{q},h\otimes g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes2}}=&\int_0^T\bigg\langle\sigma(t)\int_0^T\gamma_N(t,u)h'(u)du,\int_0^T\gamma_{N-1}(t,s)g'(s)ds\bigg\rangle dt\\&+\int_0^T\bigg\langle\sigma(t)\int_0^T\gamma_N(t,s)g'(s)ds,\int_0^T\gamma_{N-1}(t,u)h'(u)du\bigg\rangle dt\\=&\int_0^T\bigg\langle\int_0^T\eta(s,u)h'(u)du,g'(s)\bigg\rangle ds\quad\text{for }h,g\in\mathcal{H}.\end{aligned}\tag{5.4.23}$$

因此有

$$\mathrm{D}^2\mathfrak{q}=B_\eta.$$

最后，由（5.4.21）以及 Itˆo 积分的等距性可知，

$$\int_{\mathcal{W}}\mathfrak{q}d\mu=\int_0^T\bigg\{\Big(\int_0^T\gamma_N(t,s)\gamma_{N-1}(t,s)ds\Big)\mathrm{tr}[\sigma(t)]\bigg\}dt=\int_0^T\frac{t^{2N}}{2(N!)^2}\big(\mathrm{tr}\sigma(t)\big)dt.$$

由引理（1.1.4），我们得到恒等式（5.4.22）。

设 $N_1,\ N_2\in\mathbb{N}$。根据定义，我们知道

$$\gamma_{N_2}(u,s)=\mathbf{1}_{[0,u)}(s)\gamma_{N_2}(u,s)\quad\text{for }(u,s)\in[0,T]^2.$$

由于

$$\mathbf{1}_{[0,t]}(u)\mathbf{1}_{[0,u)}(s)=\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(u)\mathbf{1}_{[0,u)}(s),$$

我们有

$$\gamma_{N_1}(u,t)\gamma_{N_2}(u,s) = \frac{(u-t)^{N_1}}{N_1!}\gamma_{N_2}(u,s) - \mathbf{1}_{[0,t]}(u)\frac{(u-t)^{N_1}}{N_1!}\gamma_{N_2}(u,s) \tag{5.4.24}$$
$$= \frac{(u-t)^{N_1}}{N_1!}\gamma_{N_2}(u,s) - \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(u)\frac{(u-t)^{N_1}}{N_1!}\gamma_{N_2}(u,s)$$

对于 (u,t)， $(u,s) \in [0,T]^2$。定义 $\kappa_F \in \mathscr{L}_2$ 为

$$\kappa_F(t,s) = \int_0^T \left\{ \frac{(u-t)^{N-1}}{(N-1)!}\gamma_N(u,s)\sigma(u) + \frac{(u-t)^N}{N!}\gamma_{N-1}(u,s)\sigma(u)^\dagger \right\} du$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{j!(N-1-j)!}\left(\int_0^T u^{N-j-1}\gamma_N(u,s)\sigma(u)du \right) t^j$$
$$+ \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!(N-j)!}\left(\int_0^T u^{N-j}\gamma_{N-1}(u,s)\sigma(u)^\dagger du \right) t^j \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

由（5.4.24），我们知道$\mathbf{1}_{\Delta_2}\eta = \mathbf{1}_{\Delta_2}\kappa_F$。设 $e_1, \ldots, e_d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准正交基，并取首一多项式 $f_0, \ldots, f_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得每个 f_i 的次数为 i，且 $\int_0^T f_i(t)f_j(t)dt = 0$ 若 $i \neq j$。定义 $k_1, \ldots, k_{(N+1)d} \in \mathcal{H}$ 为

$$k'_{nd+i} = f_n e_i \quad \text{for } 0 \le n \le N \text{ and } 1 \le i \le d.$$

于是有

$$\mathcal{R}(B_{\kappa_F}) \subset \left\{ \sum_{i=1}^{(N+1)d} a_i k_i \,\middle|\, a_1, \ldots, a_{(N+1)d} \in \mathbb{R} \right\}.$$

因此 B_{κ_F} 是有限秩的。定义 $\kappa_I \in \mathscr{L}_2$ 为

$$\kappa_I(t,s) = -\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\int_0^t \left\{ \frac{(u-t)^{N-1}}{(N-1)!}\gamma_N(u,s)\sigma(u) + \frac{(u-t)^N}{N!}\gamma_{N-1}(u,s)\sigma(u)^\dagger \right\} du$$

对于 $(t,s) \in [0,T]^2$。由（5.4.24）和引理（5.4.1）， B_η 满足条件（**A**），其中$A_I = B_{\kappa_I}$ 和 $A_F = B_{\kappa_F}$。

我们假设 $\Lambda(B_\eta) < 1$，并将定理（5.3.1）应用于 $\mathfrak{q}_\eta$。例如，若满足以下条件，则该假设成立：

$$\frac{2}{N!(N-1)!}\int_0^T t^{2N}|\sigma(t)|dt < 1. \tag{5.4.25}$$

事实上，根据（5.4.23），我们有

$$\langle B_\eta h, h\rangle_{\mathcal{H}} \le 2\int_0^T |\sigma(t)|\frac{t^N}{N!}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\left(\int_0^t |h'(s)|ds \right)^2 dt$$
$$\le \frac{2}{N!(N-1)!}\left(\int_0^T t^{2N}|\sigma(t)|dt \right)\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{for } h \in \mathcal{H}.$$

在本例的其余部分，我们只讨论如何通过（$2N+2$）阶常微分方程刻画 J_p。

令 $p=(p^{(1)}、\ldots\ldots、p^{(N+1)})\in(\mathbb{R}^d)^{N+1}=\mathbb{R}^{(N+1)d}$。根据 κ_I的定义以及（5.4.20），可知

$$\begin{aligned}(A_Ih)'(t)&=-\int_0^t\left\{\frac{(u-t)^{N-1}}{(N-1)!}\Big(\mathcal{I}\big[\sigma\mathcal{I}^N[h]\big]\Big)'(u)+\frac{(u-t)^N}{N!}\Big(\mathcal{I}\big[\sigma^\dagger\mathcal{I}^{N-1}[h]\big]\Big)'(u)\right\}du\\&=(-1)^N\Big\{\mathcal{I}^N\big[\sigma\mathcal{I}^N[h]\big]-\mathcal{I}^{N+1}\big[\sigma^\dagger\mathcal{I}^{N-1}[h]\big]\Big\}(t)\quad\text{for } h\in\mathcal{H}\text{ and } t\in[0,T].\end{aligned}$$

由于

$$(I-A_I)J_p=\sum_{n=0}^N\bigg(\int_0^\bullet f_n(s)ds\bigg)p^{(n)},$$

J_p 由以下方程确定

$$J_p^{(1)}-(-1)^N\mathcal{I}^N\big[\sigma\mathcal{I}^N[J_p]\big]+(-1)^N\mathcal{I}^{N+1}\big[\sigma^\dagger\mathcal{I}^{N-1}[J_p]\big]=\sum_{n=0}^N f_np^{(n)}.\tag{5.4.26}$$

令

$$K_p=\mathcal{I}^N[J_p],$$

并对（5.4.26）求（$N+1$）阶导数，可得

$$K_p^{(2N+2)}-2(-1)^N\sigma_AK_p^{(1)}-(-1)^N\sigma^{(1)}K_p=0.\tag{5.4.27}$$

T K_p 的初始条件由其定义和（5.4.26）得出，如下所示 .

$$K_p^{(i)}(0)=0,\quad K_p^{(N+1+i)}(0)=J_p^{(i+1)}(0)=\sum_{n=0}^N f_n^{(i)}(0)p^{(n)}\quad\text{for } 0\le i\le N.$$

通过求解具有此初始条件的 (5.4.27) 得到 K_p ，然后对 K_p N 求 J_p 次导数。

在一种特殊情形下，即将例（5.4.6）修改为 X_N，我们可以得到 J_p 的一个更显式的表达式。为此，令 $C,D\in\mathbb{R}^{d\times d}$，并假设 $D^\dagger=D$。定义维纳泛函 $\mathfrak{a}_{C,D}^{(N)}:\mathcal{W}\to\mathbb{R}$ 为

$$\mathfrak{a}_{C,D}^{(N)}=\frac12\int_0^T\langle CX_N(t),X_{N-1}(t)\rangle dt+\frac12\int_0^T\langle DX_N(t),X_N(t)\rangle dt.$$

由于

$$\frac12\int_0^T\langle DX_N(t),X_N(t)\rangle dt=\int_0^T\langle(T-t)DX_N(t),X_{N-1}(t)\rangle dt,$$

使用相同的 $\sigma\in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$，由下式给出

$$\sigma(t)=\frac12C+(T-t)D\quad\text{for } t\in[0,T],$$

与例（5.4.6）中一样，我们有

$$\mathfrak{a}_{C,D}^{(N)} = \int_0^T \langle \sigma(t) X_N(t), X_{N-1}(t) \rangle dt.$$

我们假设

$$\frac{T^{2N+1}}{N!(N-1)!(2N+1)} \left\{ 2|C| + \frac{T}{N+1}|D| \right\} < 1,$$

由此满足条件（5.4.25）。我们将上述观察应用于 $\mathfrak{a}_{C\,D}^{(N)}$,从而计算与之相关的 J_p 。

由于 $C, C^\dagger, D$ 和 $\mathcal{I}$ 可交换，常微分方程（5.4.27）可写为

$$K_p^{(2N+2)} - (-1)^N A K_p^{(1)} + (-1)^N D K_p = 0 \quad \text{with } A = \tfrac{1}{2}\{C - C^\dagger\},$$

也就是说,

$$J_p^{(N+2)} - (-1)^N A \mathcal{I}^{N-1}[J_p] + (-1)^N D \mathcal{I}^N[J_p] = 0. \tag{5.4.28}$$

将此方程对 N求导 N次，得到关于 J_p 的常微分方程，使得

$$J_p^{(2N+2)} - (-1)^N A J_p^{(1)} + (-1)^N D J_p = 0. \tag{5.4.29}$$

由于当 $i \geq N+1$时 $f_n^{(i)} = 0$ ，由（5.4.26）和（5.4.28）得到的 J_p的初始条件为

$$J_p(0) = 0, \quad J_p^{(i)}(0) = \sum_{n=0}^{N} f_n^{(i-1)}(0) p^{(n+1)} \quad \text{for } 1 \leq i \leq 2N+1.$$

设 λ_1，……， $\lambda_{(2N+2)d}$为该矩阵的特征值

$$\begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & I_d \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^N A & -(-1)^N D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2N+2)d \times (2N+2)d}$$

按重数计。定义 $r_j \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$为

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \quad \text{for } 2 \leq j \leq (2N+2)d, \\ r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = \cdots = r_{(2N+2)d}(0) = 0, \end{cases}$$

以及多重线性映射 $q_j : (\mathbb{C}^d)^{(N+1)d} \to \mathbb{C}^d$ ，对 $1 \leq j \leq (2N+2)d$ 而言

$$q_1(p) = 0, \quad q_{m+1}(p) = \sum_{n=0}^{N} f_n^{(m-1)}(0) p^{(n+1)} - \sum_{j=1}^{m} r_j^{(m)}(0) q_j(p) \quad \text{for } 1 \leq m \leq 2N+1,$$

and

$$q_{2N+3+n}(p) = (-1)^{N+1} D\left(\sum_{j=1}^{n+1} r_j^{(n)}(0) q_j(p)\right) + (-1)^N A\left(\sum_{j=1}^{n+2} r_j^{(n+1)}(0) q_j(p)\right) - \sum_{j=1}^{2N+2+n} r_j^{(2N+2+n)}(0) q_j(p) \quad \text{for } 0 \le n \le (2N+2)(d-1)-1.$$

由推论（A.3.5），取 $k = 2N+2$、$C_0 = (-1)^{N+1} D$、$C_1 = (-1)^N A$ 和 $C_2 = \cdots = C_{2N+1} = 0$，可得

$$J_p = \sum_{j=1}^{(2N+2)d} r_j q_j(p).$$

Ikeda、Kusuoka 和 Manabe 的随机面积，由 X_N ([9])围成，是我们的 $\mathfrak{a}_{C\,D}^{(N)}$，其中 $d = 2$、C 是反对称的，且 $D = 0$。

(5.4.30) 注。 (i) 上述示例中的所有 A_I都是 Volterra 算子。Ikeda、Kusuoka 和 Manabe（[9, 10, 12]）发现，可以利用将 B_η 分解为一个 Volterra 算子与一个有限秩算子之和这一方法。Hara-Ikeda（[7]）借助他们的结果揭示了其内在的格拉斯曼结构（Pl¨ucker 坐标）。在这种情况下，作者也在 [42] 中证明了与定理（5.3.1）和注（5.3.3）类似的断言。本专著重新引入了一般条件**(A)** 。

附录 A

分析或代数断言

A.1. 泛函分析引理

(A.1.1) 引理。 每个满足以下性质的自伴连续线性算子 $A:\ \mathcal{H}\ \to\ \mathcal{H}$

$$\inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1}\|Ah\|_{\mathcal{H}}\geq\varepsilon\quad \textit{for some}\ \varepsilon>0$$

具有连续逆。此外，逆算子 A^{-1} 满足

$$\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}\leq\varepsilon^{-1}.$$

证明。 我们首先证明 A 具有连续逆。假设的下界估计蕴含以下不等式

$$\|Ah\|_{\mathcal{H}}\geq\varepsilon\|h\|_{\mathcal{H}}\quad\text{for every } h\in\mathcal{H}. \tag{A.1.2}$$

因此， A 是单射。根据有界逆定理，只需证明 A 是满射。

令 $\mathcal{R}(A)$为 A的值域。若对于 $n\in\mathbb{N}$ ，有 $h_n\in\mathcal{R}(A)$，且 Ah_n 在 $\mathcal{H}$中收敛到 g ，则不等式 (A.1.2) 给出

$$\|h_n-h_m\|_{\mathcal{H}}\leq\varepsilon^{-1}\|Ah_n-Ah_m\|_{\mathcal{H}}\to 0\quad\text{as } n,m\to\infty,$$

也就是说， $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$中的一个柯西序列。令 h 为它在 $\mathcal{H}$中的极限。于是我们得到

$$\|Ah-g\|_{\mathcal{H}}=\lim_{n\to\infty}\|Ah_n-g\|_{\mathcal{H}}=0.$$

因此， $\mathcal{R}(A)$是闭集。

若 $h\in\mathcal{H}$ 垂直于 $\mathcal{R}(A)$，则由 A的自伴性可得

$$\langle Ah,g\rangle_{\mathcal{H}}=\langle h,Ag\rangle_{\mathcal{H}}=0\quad\text{for any } g\in\mathcal{H}.$$

结合 A的单射性，可得 $h=0$。因此， $\mathcal{R}(A)=\mathcal{H}$，也就是说，$A$是满射。

代入 g $A^{-1}h$ 根据 h 在 (A.1.2) 中，我们得到所需的对 $\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}$的控制。 □

(A.1.3) 引理。 如果 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 在 $[0,T]^2$ 上连续，且 B_κ 是迹类，那么

$$\mathrm{tr}B_\kappa = \int_0^T \mathrm{tr}[\kappa(s,s)]ds.$$

证明。令 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $L^2([0,T];\mathbb{R})$的一组正交三角基，即将 $\{\cos(\frac{2m\pi t}{T}),\ \sin(\frac{2m\pi t}{T});\ m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$正交归一化后得到的一组标准正交基。取$\mathbb{R}^d$的一组标准正交基$e_1$，……，$e_d$。对于 $n\in\mathbb{N}$和 $1\le i\le d$，由 $h'_{n;i}=\varphi_n e_i$定义 $h_{n;i}\in\mathcal{H}$。令$N\in\mathbb{N}$，并记 π_N 为 $\mathcal{H}$ 到由$\{h_{n;i}\mid 1\le n\le N, 1\le i\le d\}$张成的子空间上的正交投影。定义 $\kappa_N\in\mathscr{L}_2$ 使得

$$B_{\kappa_N}=\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{n,m=1}^{N}\langle B_\kappa h_{n;i},h_{m;j}\rangle_{\mathcal{H}} h_{n;i}\otimes h_{m;j},$$

也就是说,

$$\kappa_N(t,s)=\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{n,m=1}^{N}\langle B_\kappa h_{n;i},h_{m;j}\rangle_{\mathcal{H}}[(\varphi_n(s)e_i)\otimes(\varphi_m(t)e_j)]\quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2.$$

有

$$\int_0^T \mathrm{tr}[\kappa_N(s,s)]ds=\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=1}^{N}\langle B_\kappa h_{n;i},h_{n;i}\rangle_{\mathcal{H}}.$$

由于 $B_{\kappa_N}=\pi_N B_\kappa \pi_N$，由 [5, 定理 I.3.1], 可得

$$\mathrm{tr}(\pi_N B_\kappa\pi_N)=\mathrm{tr}B_{\kappa_N}=\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=1}^{N}\langle B_\kappa h_{n;i},h_{n;i}\rangle_{\mathcal{H}}=\int_0^T[\mathrm{tr}\kappa_N(s,s)]ds. \tag{A.1.4}$$

Put

$$s_M=\frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M}\kappa_N\quad\text{for } M\in\mathbb{N}.$$

根据 Fej´er 定理，序列 $\{s_M\}_{M=1}^\infty$在 $[0,T]^2$上一致收敛到 κ。由于B_κ 是迹类，根据 (A.1.4)，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}B_\kappa &= \lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\big(\pi_M B_\kappa\pi_M\big)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M}\mathrm{tr}\big(\pi_N B_\kappa\pi_N\big)\\ &=\lim_{M\to\infty}\int_0^T\mathrm{tr}[s_M(s,s)]ds=\int_0^T\mathrm{tr}[\kappa(s,s)]ds.\end{aligned}$$

因此，所需的恒等式成立。 □

回顾一下，$\mathcal{S}_+(\mathcal{H})$用于表示从 $\mathcal{H}$ 到其自身的自伴、连续且非负定线性算子的全体。

(A.1.5) 引理。 每个 $A\in\mathcal{S}_+(\mathcal{H})$ 都有唯一的 $B\in\mathcal{S}_+(\mathcal{H})$ 满足 $B^2=A$。若连续线性 $C:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 与 A交换，则也与 B交换。

证明。这被广泛称为平方根引理。我们通过修改 [31, 定理 VI.9], 的证明来给出一个证明，其中处理的是复希尔伯特空间。

只需考虑 $\|A\|_{\mathrm{op}} \le 1$ 的情形。由于 $I - A \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$,

$$\|I - A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \langle (I-A)h, h\rangle_{\mathcal{H}} \le 1.$$

令 $(1-a)^{\frac{1}{2}}_{-} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^n$ 为 $(1-a)^{\frac{1}{2}}$ 关于 $a = 0$ 的幂级数。正如引理 [31, 定理 VI.9] 中所见， $c_n < 0$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ ，该级数在 $a \in [-1, 1]$ 上绝对收敛。因此，级数 $I + \sum c_n (I-A)^n$ 在算子范数下收敛到一个连续线性算子 $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$。由于收敛是绝对的，我们可以对该级数求平方并重新排列各项，由此证明 $B^2 = A$。由于

$$\langle (I-A)^n h, h\rangle_{\mathcal{H}} \le \|I-A\|^n_{\mathrm{op}} \le 1 \quad \text{for any } n \in \mathbb{N} \text{ and } h \in \mathcal{H} \text{ with } \|h\|_{\mathcal{H}} = 1,$$

我们有

$$\langle Bh, h\rangle_{\mathcal{H}} \ge 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0 \quad \text{for any } h \in \mathcal{H} \text{ with } \|h\|_{\mathcal{H}} = 1.$$

因此 $B \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$。该级数的绝对收敛还意味着，对于任意满足 $CA = AC$ 的连续线性 C , $CB = BC$ 。

假设 $B' \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$满足 $(B')^2 = A$。由于 $B'A = (B')^3 = AB'$， B'与 B可交换。因此我们有

$$(B-B')B(B-B') + (B-B')B'(B-B') = (B^2 - (B')^2)(B-B') = 0.$$

由于 $(B-B')B(B-B') \ge 0$ 以及 $(B-B')B'(B-B') \ge 0$，它们必为零，因此它们的差 $(B-B')^3 = 0$。由于 $B - B'$ 是自伴的，我们有

$$\begin{aligned}\|B-B'\|^4_{\mathrm{op}} &= \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \|(B-B')h\|^4_{\mathcal{H}} \le \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \|(B-B')^2 h\|^2_{\mathcal{H}} \\ &\le \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \|(B-B')^4 h\|_{\mathcal{H}} = 0.\end{aligned}$$

因此 $B - B' = 0$，这意味着唯一性。 □

A.2. 特殊因式分解

(A.2.1) 命题。令 $\sigma \in \mathscr{S}_2$。假设

$$\inf_{\xi \in [0,T]} \Lambda(\pi_\xi B_\sigma \pi_\xi) < 1, \tag{A.2.2}$$

其中 π_ξ： $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是式 (3.1.15) 中使用的投影。定义 $\gamma \in \mathscr{S}_2$ 为 $B_\gamma = (I - B_\sigma)^{-1} - I$。那么存在一个 $\nu \in \mathscr{S}_2$ ，使得

$$\gamma(t,s) = \nu(t,s) + \int_t^T \nu(t,u)\nu(u,s)du \quad \textit{for } 0 \le s < t \le T. \tag{A.2.3}$$

为了证明该命题，我们回顾 Gohberg-Krein 提出的特殊因式分解（[6]）。令

$$\mathscr{L}_2^{\mathbb{C}} = \{\tau_1 + \mathrm{i}\tau_2 \mid \tau_1, \tau_2 \in \mathscr{L}_2\}.$$

对于 $\tau \in \mathscr{L}_2^{\mathbb{C}}$，定义从 $L^2([0,T];\mathbb{C}^d)$ 到其自身的连续线性算子 $\mathcal{L}_\tau$ 如下：

$$(\mathcal{L}_\tau f)(t) = \int_0^T \tau(t,s)f(s)ds \quad \text{for } t \in [0,T] \text{ and } f \in L^2([0,T];\mathbb{C}^d).$$

T $\mathcal{L}_\tau$ 的预解核是函数 $\gamma \in \mathscr{L}_2^{\mathbb{C}}$，满足 $(I-\mathcal{L}_\tau)^{-1} = I + \mathcal{L}_\gamma$.

(A.2.4) 引理。设 $\tau \in \mathscr{L}_2^{\mathbb{C}}$。
(i) 要使得存在 $\mathcal{L}_\tau$ 的预解核 $\gamma \in \mathscr{L}_2^{\mathbb{C}}$，其形式为

$$\mathcal{L}_\gamma = \mathcal{L}_{\nu_+} + \mathcal{L}_{\nu_-} + \mathcal{L}_{\nu_+}\mathcal{L}_{\nu_-}, \tag{A.2.5}$$

其中 $\nu_\pm \in \mathscr{L}_2^{\mathbb{C}}$ 满足

$$\nu_+(t,s) = \mathbf{1}_{[t,T]}(s)\nu_+(t,s) \quad \textit{and} \quad \nu_-(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\nu_-(t,s) \quad \textit{for } (t,s) \in [0,T]^2, \tag{A.2.6}$$

其充要条件是方程

$$g(t) - \int_0^\xi \tau(t,s)g(s)ds = f(t) \quad \textit{for } t \in [0,\xi]$$

对于任意 $\xi \in (0,T]$，在 $L^2([0,\xi];\mathbb{C}^d)$ 中均有解。
(ii) *若 (i) 中的条件成立且 $\mathcal{L}_\tau$ 是自伴的，则 $\mathcal{L}^*_{\nu_+} = \mathcal{L}_{\nu_-}$，也就是说* ,

$$\overline{\nu_+(s,t)^\dagger} = \nu_-(t,s) \quad \textit{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

(iii)若 *(i)* 中的条件成立，则有

$$\mathcal{L}_{\nu_-} = \int_0^T \mathcal{L}_\tau P_\xi (I - P_\xi \mathcal{L}_\tau P_\xi)^{-1} d\xi,$$

其中，对于 $t \in [0,T]$，$(P_\xi f)(t) = \mathbf{1}_{[0,\xi]}(t)f(t)$。

证明。 (i) 参见 [6,第180]页中 (8.5) 后的命题 1° 。
(ii) 见 [6, 第161]页 (2.5) 之后的注。(iii) 见 [6, 第162]页的定理 3.1。 □

命题 *(A.2.1)* 的证明。 设 $\sigma \in \mathscr{L}_2$ ，并假设 (A.2.2) 成立。

由于包含关系 $\mathbb{R}^{d\times d} \subset \mathbb{C}^{d\times d}$, $\sigma \in \mathscr{L}_2^{\mathbb{C}}$。对于 $f = f_1 + \mathrm{i}f_2 \in L^2([0,T];\mathbb{C}^d)$，其中$f_1$, $f_2 \in L^2([0,T];\mathbb{R}^d)$，由于 $\sigma \in \mathscr{S}_2$，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle P_\xi \mathcal{L}_\sigma P_\xi f, f\rangle_{L^2([0,T];\mathbb{C}^d)} \\
&= \int_0^T \left\langle \int_0^T \mathbf{1}_{[0,\xi]}(t)\sigma(t,s)\mathbf{1}_{[0,\xi]}(s)\{f_1(s) + \mathrm{i}f_2(s)\}ds, \{f_1(t) - \mathrm{i}f_2(t)\} \right\rangle dt \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_0^T \left\langle \int_0^T \sigma(t,s)\mathbf{1}_{[0,\xi]}(s)f_i(s), \mathbf{1}_{[0,\xi]}(t)f_i(t) \right\rangle dt
\end{aligned}$$

$$\leq \Lambda(\pi_\xi B_\sigma \pi_\xi)\|f\|_{L^2([0,T];\mathbb{C}^d)}.$$

因此我们得到

$$\inf_{\xi\in(0,T]}\sup_{\|f\|_{L^2([0,T];\mathbb{C}^d)}=1}\langle P_\xi \mathcal{L}_\sigma P_\xi f, f\rangle_{L^2([0,T];\mathbb{C}^d)} < 1.$$

根据引理 (A.2.4)(i)，存在一个关于 $\mathcal{L}_\tau$ 和 $\nu_\pm \in \mathscr{L}_2^{\mathbb{C}}$ 的预解核 $\gamma \in \mathscr{L}_2^{\mathbb{C}}$，满足 (A.2.5) 和 (A.2.6)。

恒等式 (A.2.5) 可改写为

$$\gamma(t,s) = \nu_+(t,s) + \nu_-(t,s) + \int_0^T \nu_+(t,u)\nu_-(u,s)du \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2.$$

特别地，由 (A.2.6) 可知

$$\gamma(t,s) = \nu_-(t,s) + \int_t^T \nu_+(t,u)\nu_-(u,s)du \quad \text{for } 0\leq s<t\leq T. \tag{A.2.7}$$

由于 $\sigma\in\mathscr{L}_2$，我们有

$$\overline{\sigma(s,t)^\dagger} = \sigma(t,s) \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2.$$

因此 $\mathcal{L}_\sigma^* = \mathcal{L}_\sigma$。由引理 (A.2.4)(ii)，我们知道

$$\overline{\nu_+(s,t)^\dagger} = \nu_-(t,s) \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2.$$

由引理 (A.2.4)(iii) 可得 $\nu_-\in\mathscr{L}_{2\circ}$。根据上述恒等式，$\nu_\pm\in\mathscr{L}_2$ 和

$$\nu_+(s,t)^\dagger = \nu_-(t,s) \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2. \tag{A.2.8}$$

定义 $\nu\in\mathscr{L}_2$ 如下

$$\nu(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\nu_-(t,s) + \mathbf{1}_{(t,T]}(s)\nu_+(t,s) \quad \text{for } (t,s)\in[0,T]^2.$$

由 (A.2.8)，$\nu\in\mathscr{S}_{2\circ}$。此外，由于 (A.2.7)，我们看到 (A.2.3) 成立。 □

A.3. 常系数矩阵值线性常微分方程

本节中，我们给出常系数矩阵值线性常微分方程解的显式表达式。

令 $k\in\mathbb{N}$和 C_0，……，C_{k-1}，U_0，……，$U_{k-1}\in\mathbb{R}^{d\times d}$。记 $\boldsymbol{U}\in C^k(\mathbb{R};\mathbb{R}^{d\times d})$ 为 $\mathbb{R}^{d\times d}$ 上常微分方程的解

$$\boldsymbol{U}^{(k)} - C_{k-1}\boldsymbol{U}^{(k-1)} - \cdots - C_1\boldsymbol{U}^{(1)} - C_0\boldsymbol{U} = 0, \quad \boldsymbol{U}^{(i)}(0) = U_i \quad \text{for } 0\leq i\leq k-1, \tag{A.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{U}_{(i)} = \left(\frac{d}{dt}\right)^i \boldsymbol{U}$。令

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_d \\ C_0 & C_1 & \cdots & \cdots & C_{k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{kd\times kd}.$$

令 λ_1，……，$\lambda_{kd} \in \mathbb{C}$ 为 M 的特征值（按重数计）。通过常微分方程组定义 r_1，……，$r_{kd} \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \quad \text{for } 2 \le j \le kd, \\ r_1(0) = 1, \;\; r_2(0) = \cdots = r_{kd}(0) = 0, \end{cases} \tag{A.3.2}$$

并依次由 $Q_1, \ldots, Q_{kd} \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 表示

$$\begin{cases} Q_1 = U_0, \quad Q_{m+1} = U_m - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} r_j^{(m)}(0) Q_j \quad \text{for } 1 \le m \le k-1, \\ Q_{k+n+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} C_i \Big(\sum_{j=1}^{i+n+1} r_j^{(i+n)}(0) Q_j \Big) - \sum_{j=1}^{k+n} r_j^{(k+n)}(0) Q_j \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } 0 \le n \le k(d-1)-1. \end{cases} \tag{A.3.3}$$

利用这些 r_j 和 Q_j，$\boldsymbol{U}$ 表示如下。

(A.3.4) 命题。在上述记号下，有

$$\boldsymbol{U} = \sum_{j=1}^{kd} r_j Q_j.$$

在证明此命题之前，我们看到，上述表达式可推广到 $\mathbb{R}^d$ 上的常微分方程。

(A.3.5) 推论。设 $C_0, \ldots, C_{k-1} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 和 $J_0, \ldots, J_{k-1} \in \mathbb{R}^d$。常微分方程在 $\mathbb{R}^d$ 上的解 $J \in C^k(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$

$$J^{(k)} - C_{k-1}J^{(k-1)} - \cdots - C_1 J^{(1)} - C_0 J = 0, \quad J^{(i)}(0) = J_i \quad \textit{for } 0 \le i \le k-1$$

表示为

$$J = \sum_{j=1}^{kd} r_j q_j,$$

其中，$r_1, \ldots, r_{kd} \in C^\infty(\mathbb{R};\ \mathbb{C})$ 由(A.3.2) 定义，而 $q_1, \ldots, q_{kd} \in \mathbb{C}^d$ 则依次确定如下：

$$q_1 = J_0, \quad q_{m+1} = J_m - \sum_{j=1}^{m} r_j^{(m)}(0) q_j \quad \textit{for } 1 \le m \le k-1,$$

and

$$q_{k+n+1} = \sum_{i=0}^{k-1} C_i \Big(\sum_{j=1}^{i+n+1} r_j^{(i+n)}(0) q_j \Big) - \sum_{j=1}^{k+n} r_j^{(k+n)}(0) q_j \quad \textit{for } 0 \le n \le k(d-1)-1.$$

证明。对于每个 $0 \le \nu \le k-1$，令 $\boldsymbol{U}_\nu \in C^k(\mathbb{R};\, \mathbb{R}^{d\times d})$为满足 $\boldsymbol{U}^{(i)}(0) = \delta_{\nu i} I_d$ 的常微分方程 (A.3.1)的解，其中 $0 \le i \le k-1$。于是我们有：

$$J = \sum_{\nu=0}^{k-1} \boldsymbol{U}_\nu J_\nu.$$

定义 $Q_{\nu;1}, \dots, Q_{\nu;kd} \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 由 (A.3.3) 定义，其中 $U_m = \delta_{m\nu} I_d$，对于 $0 \le m \le k-1$，并令 set

$$q_j = \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_{\nu;j} J_\nu \quad \text{for } 1 \le j \le kd.$$

根据命题（A.3.4）以及上面对含有 $\boldsymbol{U}_\nu$s 的 J 的表达式，我们知道

$$J = \sum_{\nu=0}^{k-1} \Big(\sum_{j=1}^{kd} r_j Q_{\nu;j} \Big) J_\nu = \sum_{j=1}^{kd} r_j q_j.$$

(A.3.3) 第一行中关于 $\boldsymbol{U}_\nu$ 的恒等式写作

$$Q_{\nu;m+1} = \delta_{\nu m} I_d - \sum_{j=1}^{m} r_j^{(m)}(0) Q_{\nu;j} \quad \text{for } 0 \le m \le k-1,$$

其中 $\sum_{j=1}^{0} \cdots = 0$。这意味着

$$q_{m+1} = J_m - \sum_{j=1}^{m} r_j^{(m)}(0) q_j \quad \text{for } 0 \le m \le k-1.$$

(A.3.3) 第二行中关于 $\boldsymbol{U}_\nu$ 的恒等式意味着

$$q_{k+n+1} = \sum_{i=0}^{k-1} C_i \Big(\sum_{j=1}^{i+n+1} r_j^{(i+n)}(0) q_j \Big) - \sum_{j=1}^{k+n} r_j^{(k+n)}(0) q_j \quad \text{for } 0 \le n \le k(d-1)-1.$$

因此，q_j 满足所需的递推关系。 □

我们继续证明命题（A.3.4）。为此，我们回顾 E.J. Putzer（[30]）给出的指数函数表达式

$$\mathfrak{e}[tM] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} M^n \quad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

(A.3.6) 命题。设 $r_1, \dots, r_{kd}$ 如 (A.3.2) 中所述，并令

$$P_1 = I_{kd} \quad \textit{and} \quad P_j = (M - \lambda_{j-1} I_{kd}) \cdots (M - \lambda_1 I_{kd}) \quad \textit{for } 2 \le j \le kd.$$

那么有

$$\mathfrak{e}[tM] = \sum_{j=1}^{kd} r_j(t) P_j \quad \textit{for } t \in \mathbb{R}.$$

证明。 定义 $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^{kd\times kd})$ 为

$$\Phi(t)=\sum_{j=1}^{kd} r_j(t)P_j \quad \text{for } t\in\mathbb{R}.$$

我们有

$$\Phi'=\sum_{j=1}^{kd} r_j'P_j=\lambda_1 r_1P_1+\sum_{j=2}^{kd}(r_{j-1}+\lambda_j r_j)P_j=\sum_{j=1}^{kd}\lambda_j r_jP_j+\sum_{j=1}^{kd-1} r_jP_{j+1}.$$

这意味着

$$\Phi'-\lambda_{kd}\Phi=\sum_{j=1}^{kd-1} r_j\{P_{j+1}+(\lambda_j-\lambda_{kd})P_j\}.$$

根据定义和凯莱-哈密顿定理，我们知道

$$P_{j+1}=(M-\lambda_jI_{kd})P_j \quad \text{for } j\ge 1 \quad \text{and} \quad P_{kd+1}=0.$$

因此我们看到

$$\begin{aligned}\Phi'-\lambda_{kd}\Phi&=\sum_{j=1}^{kd-1} r_j\{(M-\lambda_jI_{kd})+(\lambda_j-\lambda_{kd})I_{kd}\}P_j=\sum_{j=1}^{kd-1} r_j(M-\lambda_{kd}I_{kd})P_j\\&=(M-\lambda_{kd}I_{kd})(\Phi-r_{kd}P_{kd})=(M-\lambda_{kd}I_{kd})\Phi.\end{aligned}$$

这意味着

$$\Phi'=M\Phi.$$

根据定义， $\Phi(0)=I_{kd}$。 因此，对于 $t\in\mathbb{R}$， $\mathfrak{e}[tM]=\Phi(t)$。 □

命题（*A.3.4*）的证明。将（A.3.1）改写为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{U}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}^{(k-1)}\end{pmatrix}'=M\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{U}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}^{(k-1)}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{U}(0)\\ \boldsymbol{U}^{(1)}(0)\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}^{(k-1)}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_0\\ U_1\\ \vdots\\ U_{k-1}\end{pmatrix},$$

根据命题（A.3.6），我们知道

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}(t)\\ \boldsymbol{U}^{(1)}(t)\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}^{(k-1)}(t)\end{pmatrix}=\left(\sum_{j=1}^{kd} r_j(t)P_j\right)\begin{pmatrix}U_0\\ U_1\\ \vdots\\ U_{k-1}\end{pmatrix} \quad \text{for } t\in\mathbb{R}.$$

因此，我们有

$$\boldsymbol{U}=\sum_{j=1}^{kd} r_jQ_j \quad \text{for some } Q_j\in\mathbb{C}^{d\times d}. \tag{A.3.7}$$

因此，一旦证明这些 Q_js 满足递推关系 (A.3.3)，证明便告完成。

为证明 (A.3.3)，将 (A.3.7) 代入 (A.3.1)，可得

$$\sum_{j=1}^{kd} r_j^{(k+n)} Q_j = \sum_{i=0}^{k-1} C_i \left(\sum_{j=1}^{kd} r_j^{(i+n)} Q_j \right) \quad \text{for } n \geq 0.$$

由 (A.3.7) 及此式，可得

$$\text{(A.3.8)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{kd} r_j^{(m)}(0) Q_j = U_m \quad \text{for } 0 \leq m \leq k-1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{kd} r_j^{(k+n)}(0) Q_j = \sum_{i=0}^{k-1} C_i \left(\sum_{j=1}^{kd} r_j^{(i+n)}(0) Q_j \right) \quad \text{for } n \geq 0. \end{cases}$$

定义 $\Lambda \in \mathbb{R}^{kd \times kd}$ 如下

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_{kd} \end{pmatrix}.$$

由 (A.3.2)，有

$$\begin{pmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \\ \vdots \\ r_{kd}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} r_1^{(n)}(0) \\ r_2^{(n)}(0) \\ \vdots \\ r_{kd}^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} r_1^{(n-1)}(0) \\ r_2^{(n-1)}(0) \\ \vdots \\ r_{kd}^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} \quad \text{for } n \geq 1.$$

由此通过归纳法可得

$$r_{n+1}^{(n)}(0) = 1 \text{ and } r_{n+j}^{(n)}(0) = 0 \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ and } j \geq 2.$$

代入 t　　将其代入 (A.3.8)，我们得到 Q_js 的递推关系 (A.3.3)。 □

将 M 的特征多项式表示为乘积函数

$$\det(\lambda I_{kd} - M) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \nu_j)^{m_j} \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{C},$$

其中，如果 $i \neq j$，则 $n \in \mathbb{N}$、$\nu_j \in \mathbb{C}$、$\nu_i \neq \nu_j$，且 $m_j \in \mathbb{N}$。我们还可以将 $\mathfrak{e}[tM]$ 表示如下。

(A.3.9) 命题　位置。 存在 $C_{ji} \in \mathbb{C}^{kd \times kd}$，使得对于 $1 \leq j \leq n$ 和 $1 \leq i \leq m_j$，

$$\mathfrak{e}[tM] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} t^{i-1} e^{\nu_j t} C_{ji} \quad \textit{for } t \in \mathbb{R}.$$

证明。令 $1 \le r \le n$ 对应的 $\hat{m}_0 = 0$ 和 $\hat{m}_r = m_1 + \cdots + m_r$。将 M 的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{kd}$ 按重数排列为

$$\lambda_j = \nu_r \quad \text{if } 1 \le r \le n \text{ and } \hat{m}_{r-1} < j \le \hat{m}_r.$$

根据命题（A.3.6），只需证明存在复数$c_{j;p,\,q}$s，使得若 $\hat{m}_{r-1} < j \le \hat{m}_r$，则

$$r_j(t) = \sum_{p=1}^{r-1} \sum_{q=1}^{m_p} c_{j;p,q} t^{q-1} e^{\nu_p t} + \sum_{q=1}^{j-\hat{m}_{r-1}} c_{j;r,q} t^{q-1} e^{\nu_r t} \quad \text{for } t \in \mathbb{R}, \tag{A.3.10}$$

其中 $\sum_{r-1} \sum_{m_p} \cdots = 0$，若 $r = 1$。我们用归纳法证明（A.3.10）成立。$p=1\ q=1$

开始归纳之前，我们先说明两个恒等式。为陈述第一个恒等式，对于$m \in \mathbb{N}$和 $\beta \neq 0$，定义 $b_0(m;\,\beta), \ldots,\ b_m(m;\,\beta) \in \mathbb{R}$ 如下：

$$b_0(1;\beta) = -\frac{1}{\beta}, \quad b_1(1;\beta) = \frac{1}{\beta}, \quad b_m(m;\beta) = \frac{1}{\beta},$$

and

$$b_k(m;\beta) = -\frac{m-1}{\beta} b_k(m-1;\beta) \quad \text{for } m \ge 2,\ 0 \le k \le m-1.$$

利用在 $[0,t]$ 上的分部积分，我们得到第一个恒等式：

$$\int_0^t s^{m-1} e^{\beta s} ds = b_0(m;\beta) + \sum_{k=1}^{m} b_k(m;\beta) t^{k-1} e^{\beta t} \quad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

根据 r_j 的定义，得到第二个恒等式：

$$\lambda_{j+1}(t) = e^{\lambda_{j+1} t} \int_0^t r_j(s) e^{-\lambda_{j+1} s} ds \quad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

现在开始归纳。根据定义，我们有：

$$r_1(t) = e^{\nu_1 t} \quad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

因此，对于 $j = 1$ with $c_{1;1,\ 1} = 1$，(A.3.10) 成立。接下来令 $\hat{m}_{r-1} < j \le \hat{m}_r$，并假设 (A.3.10) 对此 j 成立。归纳法的其余部分分为两种情况：当 $j = \hat{m}_r$ 以及当 $\hat{m}_{r-1} < j < j+1 \le \hat{m}_r$ 时。如果 $j = \hat{m}_r$，则 $\lambda_{j+1} = \nu_{r+1}$。由于 $j = \hat{m}_r$ 的恒等式 (A.3.10)，我们看到

$$\begin{aligned} r_{j+1}(t) &= e^{\lambda_{j+1} t} \int_0^t e^{-\lambda_{j+1} s} r_j(s) ds = \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{m_p} c_{j;p,q} e^{\nu_{r+1} t} \int_0^t s^{q-1} e^{(\nu_p - \nu_{r+1}) s} ds \\ &= \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{m_p} c_{j;p,q} b_0(q;\nu_p - \nu_{r+1}) e^{\nu_{r+1} t} + \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{m_p} c_{j;p,q} \left(\sum_{k=1}^{q} b_k(q;\nu_p - \nu_{r+1}) t^{k-1} \right) e^{\nu_p t}. \end{aligned}$$

因此，当 $j=\hat{m}_r$ 时，(A.3.10) 对 $j+1$ 成立，其中

$$c_{j+1;p,q}=\sum_{k=q}^{m_p}c_{j;p,k}b_q(k;\nu_p-\nu_{r+1})\quad \text{for } p\le r \text{ and } 1\le q\le m_p$$

and

$$c_{j+1;r+1,1}=\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{m_p}c_{j;p,q}b_0(q;\nu_p-\nu_{r+1}).$$

若 $\hat{m}_{r-1}<j<j+1\le\hat{m}_r$，则有

$$\begin{aligned}r_{j+1}(t)&=\sum_{p=1}^{r-1}\sum_{q=1}^{m_p}c_{j;p,q}e^{\nu_r}\int_0^t s^{q-1}e^{(\nu_p-\nu_r)s}ds+\sum_{q=1}^{j-\hat{m}_{r-1}}c_{j;r,q}e^{\nu_r t}\int_0^t s^{q-1}ds\\&=\sum_{p=1}^{r-1}\sum_{q=1}^{m_p}c_{j;p,q}\left\{b_0(q;\nu_p-\nu_r)e^{\nu_r t}+\sum_{k=1}^{q}b_k(q;\nu_p-\nu_r)t^{k-1}e^{\nu_p t}\right\}+\sum_{q=1}^{j-\hat{m}_{r-1}}\frac{c_{j;r,q}}{q!}t^q e^{\nu_r t}.\end{aligned}$$

因此，当 $\hat{m}_{r-1}<j<j+1\le\hat{m}_r$ 时，(A.3.10) 对 $j+1$ 成立，其中

$$c_{j+1;p,q}=\sum_{k=q}^{m_p}c_{j;p,k}b_q(k;\nu_p-\nu_r)\quad \text{for } p\le r-1 \text{ and } 1\le q\le m_p,$$

$$c_{j+1;r,1}=\sum_{p=1}^{r-1}\sum_{q=1}^{m_p}c_{j;p,q}b_0(q;\nu_p-\nu_r),$$

and

$$c_{j+1;r,q}=\frac{c_{j;r,q-1}}{(q-1)!}\quad \text{for } 2\le q\le j+1-\hat{m}_{r-1}.$$

证明完毕。 □

借助上述表达式，我们可以得到 $\boldsymbol{U}$ 的另一个表达式。

(A.3.11) 命题。 假设 M 有 kd 个彼此不同的特征值 $\nu_1,\ldots,\nu_{kd}$，即 $n=kd$ 且 $m_j=1$，其中 $1\le j\le n$ 取遍命题 *(A.3.9)* 中的取值。依次定义 $\widehat{U}_n\in\mathbb{R}^{d\times d}$，其中 $0\le n\le kd-1$，使得

$$\widehat{U}_n=\begin{cases}U_n & \text{for } 0\le n\le k-1\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}C_i\widehat{U}_{n-k+i} & \text{for } k\le n\le kd-1,\end{cases}$$

以及 $Q_j=\left(Q_j^{pq}\right)_{1\le p,\ q\le d}\in\mathbb{C}^{d\times d}$ 对于 $1\le j\le kd$，通过

$$\begin{pmatrix}Q_1^{pq}\\ \vdots\\ \vdots\\ Q_{kd}^{pq}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\\ \nu_1 & \cdots & \cdots & \nu_{kd}\\ \vdots & & & \vdots\\ \nu_1^{kd-1} & \cdots & \cdots & \nu_{kd}^{kd-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\widehat{U}_0^{pq}\\ \vdots\\ \vdots\\ \widehat{U}_{kd-1}^{pq}\end{pmatrix}. \tag{A.3.12}$$

Then

$$\boldsymbol{U}(t) = \sum_{j=1}^{kd} e^{\nu_j t} Q_j \quad \textit{for } t \in \mathbb{R}.$$

证明。 根据命题 (A.3.9)，存在 $Q_1, \ldots, Q_{kd} \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 使得

$$\boldsymbol{U}(t) = \sum_{j=1}^{kd} e^{\nu_j t} Q_j \quad \text{for } t \in \mathbb{R}. \tag{A.3.13}$$

Set

$$K_n = \sum_{j=1}^{kd} \nu_j^n Q_j \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

由（A.3.13）可得

$$\boldsymbol{U}^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{kd} \nu_j^n e^{\nu_j t} Q_j \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

将其代入常微分方程（A.3.1），可得

$$\boldsymbol{U}^{(k+n)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} C_i \left(\sum_{j=1}^{kd} \nu_j^{i+n} e^{\nu_j t} Q_j \right) \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

利用这两个表达式，在 $t = 0$ 处计算 $\boldsymbol{U}^{(n)}(t)$，可得

$$K_n = U_n \quad \text{for } 0 \le n \le k-1 \quad \text{and} \quad K_n = \sum_{i=0}^{k-1} C_i K_{n-k+i} \quad \text{for } k \le n \le kd-1.$$

因此，对于 $0 \le n \le kd-1$，有 $K_n = U_n$。这意味着

$$\sum_{j=1}^{kd} \nu_j^n Q_j^{pq} = K_n^{pq} = \widehat{U}_n^{pq} \quad \text{for } 0 \le n \le kd-1 \text{ and } 1 \le p, q \le d.$$

因此， Q_j^{pq} s 由（A.3.12）确定。 □

A.4. 柯西恒等式与拉格朗日恒等式

我们给出两个以柯西和拉格朗日命名的恒等式。

(A.4.1) 引理。设 α_i、β_i、a_i、b_j、$z \in \mathbb{C}$ 满足 $1 \le i \le n$、$1 \le j \le n-1$，并假设 $a_i \ne a_j$ 满足 $i \ne j$。那么以下两个恒等式成立。

$$\det\left(\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j} \right)_{1\le i,j\le n} \right) = \frac{\prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j)}{\prod_{1\le i,j\le n} (\alpha_i + \beta_j)}, \tag{A.4.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (a_k + b_j) \prod_{i\ne k} (a_i - z)}{\prod_{i\ne k} (a_i - a_k)} = \prod_{k=1}^{n-1} (z + b_k). \tag{A.4.3}$$

(A.4.2) 称为柯西恒等式，(A.4.3) 称为拉格朗日恒等式。

证明。 我们首先用归纳法证明 (A.4.2)。

当 $n = 2$ 时，可以通过简单计算证明 (A.4.2)。假设 (A.4.2) 对于截至 $n-1$ 的情形成立。重复进行以下变换

(i) 从其余各行中减去第一行，以及 (ii) 将因子
提出行列式之外，

我们得到

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\le i,j\le n} &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \left(\dfrac{\beta_1-\beta_j}{\alpha_i+\beta_1}\,\dfrac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 2\le j\le n}} \\ \vdots & \\ \dfrac{1}{\alpha_n+\beta_1} & \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i+\beta_1}\prod_{j=2}^{n}(\beta_1-\beta_j)\times\det\begin{pmatrix} 1 & \\ \vdots & \left(\dfrac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 2\le j\le n}} \\ 1 & \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i+\beta_1}\prod_{j=2}^{n}(\beta_1-\beta_j)\times\det\left(\frac{\alpha_1-\alpha_i}{\alpha_1+\beta_j}\,\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{2\le i,j\le n} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i+\beta_1}\prod_{j=2}^{n}\frac{1}{\alpha_1+\beta_j}\prod_{i=2}^{n}(\alpha_1-\alpha_i)(\beta_1-\beta_i)\times\det\left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{2\le i,j\le n}.
\end{aligned}$$

结合归纳假设，我们得到 (A.4.2) 对于 n 成立。

接下来证明 (A.4.3)。我们将 (A.4.3) 的左边写为 $\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i z^i$，右边写为 $\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i z^i$。代入 $z = a_j$, $1 \le j \le n$ 后，两者相等。这意味着

$$(\gamma_0,\dots,\gamma_{n-1})\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = (\delta_0,\dots,\delta_{n-1})\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

由于对于 $i \ne j$, $a_i \ne a_j$ 的范德蒙德矩阵$,\dots,a_n$不是奇异矩阵。因此对于 $0 \le i \le n-1$, $\gamma_i = \delta_i$。由此，(A.4.3) 成立。 □

附录 B

不使用 Malliavin 微积分

本章将不使用 Malliavin 微积分，证明第 1 章和第 2 章中的断言。

令 $\mathscr{I}: \mathcal{H} \to L^2(\mu)$ 为维纳积分的映射；我们定义 $\mathscr{I}(\ell) = \ell$ 对$\ell \in \mathcal{W}^*$ 并利用恒等式 $\int_{\mathcal{W}} |\mathscr{I}(\ell)|^2 d\mu = \|\ell\|_{\mathcal{H}}^2$ 以及 $\mathcal{W}^*$ 在 $\mathcal{H}$中的稠密性，将其连续延拓至 $\mathcal{H}$。它也可用 Itˆo 积分表示如下。

$$\mathscr{I}(h) = \int_0^T \langle h'(t), d\theta(t) \rangle \quad \text{for } h \in \mathcal{H}.$$

由于对于 $h \in \mathcal{H}$ ([27, (5.1.8)])，$\mathrm{D}^* h = \mathscr{I}(h)$，因此对于 $\mathrm{D}^* h$，第 1.1 节中的断言仍可将 $\mathscr{I}(h)$ 代入而成立。我们为那些借助 Malliavin 微积分证明的断言给出另一种证明。为清楚说明对应关系，我们在断言编号后加上撇号 $'$。

定理 (1.1)′. 设 $\eta \in \mathscr{S}_2$。对于 $\mathcal{H}$ 的任意标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\mathfrak{q}_\eta$ 可展开为 $L^2(\mu)$ 在 s

$$\mathfrak{q}_\eta = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\eta h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} \{ \mathscr{I}(h_n)\mathscr{I}(h_m) - \delta_{nm} \}.$$

证明。 正如在引理（1.1.6）的证明中所见，我们有

$$\eta(t,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\eta h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} [h_n'(s) \otimes h_m'(t)] \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

对 $N \in \mathbb{N}$ 定义 $\eta^{(N)} \in \mathscr{S}_2$ 如下

$$\eta^{(N)}(t,s) = \sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\eta h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} [h_n'(s) \otimes h_m'(t)] \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

于是有

$$\int_{\mathcal{W}} |\mathfrak{q}_\eta - \mathfrak{q}_{\eta^{(N)}}|^2 d\mu = \frac{1}{2} \|\eta - \eta^{(N)}\|_2^2 \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

根据定义，我们知道

$$\mathfrak{q}_{\eta^{(N)}} = \sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\eta h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} \int_0^T \left\langle \left(\int_0^t \langle h_n'(s), d\theta(s) \rangle \right) h_m'(t), d\theta(t) \right\rangle.$$

由于 $B_\eta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$，交换 n 和 m，我们得到

$$\mathfrak{q}_{\eta^{(N)}} = \sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\eta h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \int_0^T \left\langle \left(\int_0^t \langle h_m'(s), d\theta(s)\rangle \right) h_n'(t), d\theta(t) \right\rangle.$$

应用伊藤公式可知

$$\begin{aligned}\mathscr{I}(h_n)\mathscr{I}(h_m) - \delta_{nm} = &\int_0^T \left\langle \left(\int_0^t \langle h_n'(s), d\theta(s)\rangle \right) h_m'(t), d\theta(t) \right\rangle \\ &+ \int_0^T \left\langle \left(\int_0^t \langle h_m'(s), d\theta(s)\rangle \right) h_n'(t), d\theta(t) \right\rangle.\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\mathfrak{q}_{\eta^{(N)}} = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\eta h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \{\mathscr{I}(h_n)\mathscr{I}(h_m) - \delta_{nm}\}.$$

令 $N \to \infty$，我们便得到 $L^2(\mu)$ 中所需的展开式。 □

定理（1.1.5）′。 $\mathcal{C}_2 = \{\mathfrak{q}_\eta \mid \eta \in \mathscr{S}_2\}$。

证明。由定理（1.1.1）′，$\mathfrak{q}_\eta \in \mathcal{C}_2$ 对任意 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 均成立。

为证明反向包含，令 $\mathfrak{q} \in \mathcal{C}_2$。重复定理（1.1.5）的证明中将 $\mathscr{I}(h_n)$ 用于 $\mathbf{D}^* h_n$ 的论证，我们得到一个实数双重数列 $\{b_{nm}\}_{n,\ m=1}^{\infty}$，使得 $\sum\ b_{nm}^2 < \infty$，$b_{nm} = b_{mn}$ 对 n，$m \in \mathbb{N}$ 均成立，并且$_{n,\ m=1}$

$$\mathfrak{q} = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm}\{\mathscr{I}(h_n)\mathscr{I}(h_m) - \delta_{nm}\}. \tag{B.1.1}$$

定义 $B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$ 如下

$$B = \sum_{n,m=1}^{\infty} 2b_{nm} h_n \otimes h_m.$$

由引理（1.1.6），存在一个 $\eta \in \mathscr{S}_2$，满足 $B_\eta = B$。于是 $\langle B_\eta h_n,\ h_m\rangle_{\mathcal{H}} = 2b_{nm}$ 对于n，$m \in \mathbb{N}$。由定理（1.1.1）′和（B.1.1），我们得到

$$\mathfrak{q}_\eta = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\eta h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \{\mathscr{I}(h_n)\mathscr{I}(h_m) - \delta_{nm}\} = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm}\{\mathscr{I}(h_n)\mathscr{I}(h_m) - \delta_{nm}\} = \mathfrak{q}.$$

证明完成。 □

命题（1.1.7）′。 设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$。则有

$$\mathfrak{h}(\kappa; x) = \mathfrak{q}_{c(\kappa;x)} + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T |\kappa(t,s)^\dagger x|^2 ds dt.$$

证明。 设 κ_1， $\kappa_2 \in \mathscr{L}_2$。 通过直接计算可得

$$\int_{\mathcal{W}} |\mathfrak{h}(\kappa_1;x) - \mathfrak{h}(\kappa_2;x)|d\mu, \quad \|c(\kappa_1;x) - c(\kappa_2;x)\|_2$$

and

$$\left|\int_0^T \left(\int_0^T |\kappa_1(t,s)^\dagger x|^2 ds\right)dt - \int_0^T \left(\int_0^T |\kappa_2(t,s)^\dagger x|^2 ds\right)dt\right|$$

都被.....所支配

$$|x|^2\big\{\|\kappa_1\|_2 + \|\kappa_2\|_2\big\}\|\kappa_1 - \kappa_2\|_2.$$

因此， 当 κ 满足 $\kappa_N \to \kappa$ 属于 $\mathscr{L}_2$ 且 $N \to \infty$ 时， 恒等式成立； 而对于每个 N， 满足 $\kappa = \kappa_N$ 的恒等式都成立。因此， 只需证明 κ 为如下形式时的恒等式

(B.1.2) $\quad \kappa(t,s) = \kappa(T_{N;n}, s) \quad \text{for } (t,s) \in [T_{N;n}, T_{N;n+1}) \times [0,T] \text{ and } 0 \le n \le N-1,$

其中 $N \in \mathbb{N}$ 且 $T_{N;n} = \frac{nT}{N}$。 对于这样的 κ， 我们有

$$\mathfrak{h}(\kappa;x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{T}{N}\left\langle x, \int_0^T \kappa(T_{N;n}, s)d\theta(s)\right\rangle^2.$$

对于 $k \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$， 定义 $\eta'(k) \in \mathscr{S}_2$ 如下:

$$\eta'(k)(t,s) = k'(s) \otimes k'(t) \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

注意到 $B_{\eta'(k)} = k \otimes k$， 并应用定理（1.1.1）′， 取满足 $h_1 = \frac{1}{\|k\|_{\mathcal{H}}} k$ 的标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$，可得

(B.1.3) $$\mathscr{I}(k)^2 = 2\mathfrak{q}_{\eta'(k)} + \|k\|_{\mathcal{H}}^2.$$

设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ 具有 (B.1.2) 中所述的形式。对于 $0 \le n \le N-1$， 定义 $k_n \in \mathcal{H}$ 如下:

$$k_n'(s) = \kappa\big(T_{N;n}, s\big)^\dagger x \quad \text{for } s \in [0,T].$$

由于

$$\left\langle x, \int_0^T \kappa(T_{N;n}, s)d\theta(s)\right\rangle = \int_0^T \big\langle x, \kappa(T_{N;n}, s)d\theta(s)\big\rangle = \mathscr{I}(k_n),$$

根据（B.1.3）， 可得

$$\mathfrak{h}(\kappa;x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{T}{N}\mathscr{I}(k_n)^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{T}{N}\mathfrak{q}_{\eta'(k_n)} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{T}{N}\|k_n\|_{\mathcal{H}}^2.$$

注意到

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{T}{N}\eta'(k_n)\right)(t,s) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{T}{N}\big[\big(\kappa(T_{N;n}, s)^\dagger x\big) \otimes \big(\kappa(T_{N;n}, t)^\dagger x\big)\big] \\ &= \int_0^T \big[\big(\kappa(u,s)^\dagger x\big) \otimes \big(\kappa(u,t)^\dagger x\big)\big]du\end{aligned}$$

$$= c(\kappa; x)(t, s) \quad \text{for } (t, s) \in [0, T]^2$$

and

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{T}{N} \|k_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{T}{N} \left(\int_0^T \left| \kappa(T_{N;n}, s)^\dagger x \right|^2 ds \right) = \int_0^T \left(\int_0^T |\kappa(t, s)^\dagger x|^2 ds \right) dt.$$

因此，我们得到了所需的恒等式。 □

我们现在考虑第2章中的成果。

定理 (2.1.3)′。 设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$ ，并假设 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$。则有

$$|\det_2(I + B_\kappa)| \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_\kappa) e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}} d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f d\mu \quad \textit{for every } f \in C_b(\mathcal{W}).$$

为了证明，我们修改引理（2.1.9）。

引理（2.1.9）′。 设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$。对 $\mathcal{H}$的任意标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ ，有

$$F_\kappa = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\kappa h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n) h_m,$$

其中该级数在 $L^2(\mu; \mathcal{H})$中收敛。

证明。 由引理（1.1.6），我们有

$$\kappa(t, s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\kappa h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} [h_n'(s) \otimes h_m'(t)] \quad \text{for } (t, s) \in [0, T]^2.$$

定义 $\kappa^{(N)} \in \mathscr{L}_2$ ，其中 $N \in \mathbb{N}$ ，使得

$$\kappa^{(N)}(t, s) = \sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\kappa h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} [h_n'(s) \otimes h_m'(t)] \quad \text{for } (t, s) \in [0, T]^2.$$

那么，根据 Itô 积分的等距性质，我们有

$$\int_{\mathcal{W}} \|F_{\kappa^{(N)}} - F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu = \|\kappa^{(N)} - \kappa\|_2^2 \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

根据 $F_{\kappa^{(N)}}$的定义，我们可知

$$F_{\kappa^{(N)}} = \sum_{n,m=1}^{N} \langle B_\kappa h_n, h_m \rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n) h_m.$$

至此，证明完成。 □

定理 *(2.1.3)* 的证明′。 在定理 (2.1.3) 证明的第一段中，利用 D^* 的连续性可知

$$\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})} \to \mathfrak{q}_{\eta(\kappa)} \text{ in } L^p(\mu) \quad \text{and} \quad F_{\kappa^{(N)}} \to F_\kappa \text{ in } L^p(\mu;\mathcal{H}) \quad \text{for any } p \in (1,\infty).$$

为了在该段之后继续论证，只需证明这些收敛在 L^2-意义下成立。通过观察以下内容，即可看出这类 L^2-收敛：

$$\int_{\mathcal{W}} |\mathfrak{q}_{\eta(\kappa^{(N)})} - \mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}|^2 d\mu = \frac{1}{2}\|\eta(\kappa^{(N)}) - \eta(\kappa)\|_2^2 = \frac{1}{2}\|B_{\eta(\kappa^{(N)})} - B_{\eta(\kappa)}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2$$

and

$$\int_{\mathcal{W}} \|F_{\kappa^{(N)}} - F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu = \|\kappa^{(N)} - \kappa\|_2^2 = \|B_{\kappa^{(N)}} - B_\kappa\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2. \qquad \square$$

定理（2.2.1）′。 恒等式 (2.2.2) 和 (2.2.3) 以及最后一个恒等式，对于 $\mathscr{I}(\cdot)$中的 D^* 均成立。

为 了证明，我们需要在不使用 Malliavin 微积分的情况下证明引理 (2.2.8) .

Lem理 (2.2.8)′。 设 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，并假设 $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$。于是有 t

$$\mathscr{I}(h)(\iota + F_{\widehat{\kappa}}) = \mathscr{I}((I + B_\kappa^*)^{-1}h) \quad \textit{for any } h \in \mathcal{H}.$$

证明。 设 $h \in \mathcal{H}$。由于对于 $\ell \in \mathcal{W}^*$， $\mathscr{I}(\ell) = \ell$，重复引理 [27, Lemma 5.7.7], 证明中的论证，我们得到一个 $\mathcal{H}$-不变集 X，使得 $\mu(X)$，并且

$$\mathscr{I}(h)(w+g) = \mathscr{I}(h)(w) + \langle h, g\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for every } w \in X \text{ and } g \in \mathcal{H}. \tag{B.1.4}$$

由引理（2.1.9）′，我们得到在 $L^2(\mu;\mathcal{H})$ 中的级数展开：

$$F_{\widehat{\kappa}} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_{\widehat{\kappa}} h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n) h_m$$

其中， $\mathcal{H}$ 的标准正交基为 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$。结合（B.1.4），可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}(h)(\iota + F_{\widehat{\kappa}}) &= \mathscr{I}(h) + \langle h, F_{\widehat{\kappa}}\rangle_{\mathcal{H}} = \mathscr{I}(h) + \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_{\widehat{\kappa}} h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n)\langle h, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \mathscr{I}(h) + \sum_{n=1}^{\infty} \langle B_{\widehat{\kappa}} h_n, h\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n) = \mathscr{I}(h) + \sum_{n=1}^{\infty} \langle B_{\widehat{\kappa}}^* h, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n) \\
&= \mathscr{I}((I + B_{\widehat{\kappa}}^*)h),
\end{aligned}$$

其中，为了得到最后一个等号，我们用到了 $\mathscr{I}\colon \mathcal{H} \to L^2(\mu)$ 的连续性，以及 $B_{\widehat{\kappa}}^* h = \sum \langle B_{\widehat{\kappa}}^* h,\ h_n\rangle_{\mathcal{H}} h_n$ 的$_\infty$展开。由于 $I + B_{\widehat{\kappa}}^* = (I + B_\kappa^*)^{-1}$，我们便得到所需的$_{n=1}$恒等式。 $\square$

定理 （*2.2.1*）的证明′. 根据引理（2.1.9）′ 和 (B.1.4)，我们可以在不使用 Malliavin 微积分的情况下证明引理 (2.2.5) 中的断言。因此我们有

$$(\iota + F_\kappa) \circ (\iota + F_{\widehat{\kappa}}) = \iota + F_\kappa + F_{\widehat{\kappa}} + B_\kappa F_{\widehat{\kappa}}. \tag{B.1.5}$$

设 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基。根据引理（2.1.9）′，我们有

$$F_\kappa = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\kappa h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n)h_m \quad \text{and} \quad F_{\widehat{\kappa}} = \sum_{n,p=1}^{\infty} \langle B_{\widehat{\kappa}} h_n, h_p\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n)h_p.$$

由第二个恒等式可得

$$\begin{aligned} B_\kappa F_{\widehat{\kappa}} &= \sum_{n,p=1}^{\infty} \langle B_{\widehat{\kappa}} h_n, h_p\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n) B_\kappa h_p = \sum_{n,m,p=1}^{\infty} \langle B_{\widehat{\kappa}} h_n, h_p\rangle_{\mathcal{H}} \langle B_\kappa h_p, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n)h_m \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_{\widehat{\kappa}} h_n, B_\kappa^* h_m\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n)h_m = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\kappa B_{\widehat{\kappa}} h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n)h_m. \end{aligned}$$

由于

$$B_\kappa + B_{\widehat{\kappa}} + B_\kappa B_{\widehat{\kappa}} = (I + B_\kappa)(I + B_{\widehat{\kappa}}) - I = 0,$$

pl将 F_κ、 $F_{\widehat{\kappa}}$ 和 $B_\kappa F_{\widehat{\kappa}}$ 的级数展开代入 (B.1.5)，可得

$$(\iota + F_\kappa) \circ (\iota + F_{\widehat{\kappa}}) = \iota.$$

(2.2.2) 中的另一个等式可类似地得到。

恒等式 (2.2.3) 以及最后一个以 $\mathscr{I}(\cdot)$ 表示 D^* 的恒等式，可通过重复定理 (2.2.1) 的证明中的论证得到，其中定理 (2.1.3)′ 和引理 (2.2.8)′ 分别替代定理 (2.1.3) 和引理 (2.2.8)。 □

引理 (2.3.8)′。 对于 $\phi \in \mathscr{L}_2$，若 $\Lambda(B_{\eta(\kappa_\phi)}) < 1$，则有

$$|\det_2(I + B_{\kappa_\phi})| \int_{\mathcal{W}} f(\iota + \mathbb{F}_\phi) e^{\widetilde{\Psi}_\phi} d\mu = \int_{\mathcal{W}} f d\mu \quad \textit{for every } f \in C_b(\mathcal{W}).$$

证明。 对于 $\kappa \in \mathscr{L}_2$，定义 $s(\kappa) \in \mathscr{S}_2$ 为

$$s(\kappa)(t,s) = \kappa(t,s) + \kappa(s,t)^\dagger \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

设 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。由引理（2.1.9）′，成立

$$F_\kappa = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\kappa h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \mathscr{I}(h_n)h_m.$$

根据定理（1.1.1）′ 及（2.1.6），我们有

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{\eta(\kappa)} &= -\mathfrak{q}_{s(\kappa)} - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle B_\kappa^* B_\kappa h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} \{\mathscr{I}(h_n)\mathscr{I}(h_m) - \delta_{nm}\} \\ &= -\mathfrak{q}_{s(\kappa)} - \frac{1}{2}\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|B_\kappa\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2. \end{aligned}$$

因此，根据定理 (2.1.3)′，只需证明

$$\int_0^T \left\langle \int_0^t s(\kappa_\phi)(t,s) d\theta(s), d\theta(t) \right\rangle \tag{B.1.6}$$

$$= \int_0^T \left\langle \int_0^T \phi(t,s)^\dagger d\theta(t), \theta(s) \right\rangle ds - \int_0^T \left(\int_0^s \mathrm{tr}\phi(t,s)dt \right) ds.$$

回顾 $s(\kappa)$ 的定义，我们首先计算

$$\int_0^T \left\langle \int_0^t \kappa_\phi(t,s)d\theta(s), d\theta(t) \right\rangle.$$

由伊藤公式，可得

$$\begin{aligned}\int_0^t \kappa_\phi(t,s)d\theta(s) &= \int_0^t \left(\int_s^T \phi(t,u)du \right) d\theta(s) = \int_0^T \phi(t,u) \left(\int_0^u \mathbf{1}_{[0,t)}(s)d\theta(s) \right) du \\ &= \int_0^T \phi(t,u)\theta(t\wedge u)du.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\langle \int_0^t \kappa_\phi(t,s)d\theta(s), d\theta(t) \right\rangle &= \int_0^T \left\langle \int_0^T \phi(t,u)\theta(t\wedge u)du, d\theta(t) \right\rangle \\ &= \int_0^T \left(\int_0^T \langle \phi(t,u)\theta(t\wedge u), d\theta(t) \rangle \right) du \\ &= \int_0^T \left(\int_0^u \langle \theta(t), \phi(t,u)^\dagger d\theta(t) \rangle \right) du + \int_0^T \left\langle \theta(u), \int_u^T \phi(t,u)^\dagger d\theta(t) \right\rangle du,\end{aligned} \tag{B.1.7}$$

其中，为看出第二个等式，我们对关于 du 和 $d\theta(t)$的二重积分应用了富比尼定理。

接下来我们计算

$$\int_0^T \left\langle \int_0^t \kappa_\phi(s,t)^\dagger d\theta(s), d\theta(t) \right\rangle.$$

Put

$$M(t) = \int_0^t \kappa_\phi(s,t)^\dagger d\theta(s) = \int_0^t \left(\int_t^T \phi(s,u)^\dagger du \right) d\theta(s) \quad \text{for } t \in [0,T].$$

$\{M(t)\}_{t\in[0,T]}$是一个具有随机微分的伊藤过程

$$dM(t) = \left(\int_t^T \phi(t,u)^\dagger du \right) d\theta(t) - \left(\int_0^t \phi(s,t)^\dagger d\theta(s) \right) dt.$$

由伊藤公式，我们看到

$$\begin{aligned}\langle M(r), \theta(r) \rangle &= \int_0^r \langle M(t), d\theta(t) \rangle + \int_0^r \left\langle \theta(t), \left(\int_t^T \phi(t,u)^\dagger du \right) d\theta(t) \right\rangle \\ &\quad - \int_0^r \left\langle \theta(t), \int_0^t \phi(s,t)^\dagger d\theta(s) \right\rangle dt + \int_0^r \left(\int_t^T \mathrm{tr}\phi(t,u)du \right) dt\end{aligned}$$

对于 $r \in [0,T]$。代入 $r = T$，并注意到 $M(T) = 0$，我们得到

$$\int_0^T \left\langle \int_0^t \kappa_\phi(s,t)^\dagger d\theta(s), d\theta(t) \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^T \left\langle \theta(t), \left(\int_t^T \phi(t,u)^\dagger du \right) d\theta(t) \right\rangle + \int_0^T \left\langle \theta(t), \int_0^t \phi(s,t)^\dagger d\theta(s) \right\rangle dt \\
&\quad - \int_0^T \left(\int_t^T \mathrm{tr}\phi(t,u) du \right) dt \\
&= -\int_0^T \left(\int_0^u \langle \theta(t), \phi(t,u)^\dagger d\theta(t) \rangle \right) du + \int_0^T \left\langle \theta(t), \int_0^t \phi(s,t)^\dagger d\theta(s) \right\rangle dt \\
&\quad - \int_0^T \left(\int_0^u \mathrm{tr}\phi(t,u) dt \right) du,
\end{aligned}
$$

其中，为了得到最后一个等式，我们在第一项中对 du 和 $d\theta(t)$ 应用富比尼定理计算二重积分，并在第三项中交换积分次序。结合 (B.1.7)，我们得到 (B.1.6)。

□

附录 C

特征值展开

设 $\eta \in \mathscr{S}_2$。由于 $B_\eta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$（引理（1.1.6））, 存在一个标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$\langle B_\eta h_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} = \langle B_\eta h_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}}\delta_{nm} \quad \text{for } n, m \in \mathbb{N}.$$

By T定理 (1.1.1), $\mathfrak{q}_\eta$ 在 $L^p(\mu)$ 中有如下级数展开，对任意 $p \in (1, \infty)$

$$\mathfrak{q}_\eta = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\langle B_\eta h_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}}\{(\mathrm{D}^* h_n)^2 - 1\}.$$

借助这一展开，我们可以计算 $\mathfrak{q}_\eta$ 的拉普拉斯变换，如（3.1.4）所示，而无需使用平方根变换 $\iota + F_{\kappa_S(\eta)}$，其中 $\kappa_S(\eta) \in \mathscr{S}_2$ 的定义见引理 (3.1.11)。本章将给出这一不同的证明。

(C.1.1) 引理。设 $N \in \mathbb{N}$。对于正交归一的 $h_1, \ldots, h_N \in \mathcal{H}$ 和 $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$，满足最大$_{1\le n\le N} a_n < 1$，定义 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 为

$$\eta(t,s) = \sum_{n=1}^{N} a_n[h_n'(s) \otimes h_n'(t)] \quad \textit{for } (t,s) \in [0,T]^2. \tag{C.1.2}$$

那么 行列式$_2(I + B_{\kappa_S(\eta)}) \neq 0$ 且

$$B_{\widehat{\kappa_S(\eta)}} = \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-a_n}} - 1\Big)h_n \otimes h_n.$$

证明。注意到

$$B_\eta = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n \otimes h_n.$$

因此, $\Lambda(B_\eta) = \max_{1\le n\le N} a_n < 1$。由于 $\eta(\kappa_S(\eta))$ $_{(\mathscr{L}_2)}=$ η （定理（3.1.1））, 根据 (2.1.7), $\det_2(I + B_{\kappa_S(\eta)}) \neq 0$。

Put

$$B = \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-a_n}} - 1\Big)h_n \otimes h_n.$$

Then

$$\langle (I+B)h, g\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{1-a_n}} \langle h_n, h\rangle_{\mathcal{H}} \langle h_n, g\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for } h, g \in \mathcal{H}.$$

因此， $I+B \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$ 和 $(I+B)^2(I-B_\eta) = I$。根据平方根唯一性（引理（A.1.5））， 可知 $I+B = C_\eta^{-1}$。回顾 $\kappa_S(\eta)$ 的定义，即$C_\eta - I = B_{\kappa_S(\eta)}$，可得

$$B_{\widehat{\kappa_S(\eta)}} = (I + B_{\kappa_S(\eta)})^{-1} - I = B. \qquad \square$$

（C.1.3）引理。 设 $N \in \mathbb{N}$和 $\ell_1, \ldots, \ell_N \in \mathcal{W}^*$ 在 $\mathcal{H}$中正交归一。对于 $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ ，若 $\max_{1\le n\le N} a_n < 1$，则用 $h_n = \ell_n$ （ $1 \le n \le N$时）代入（C.1.2）定义 $\eta \in \mathscr{S}_2$ 。于是，对于每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$， （3.1.4）在 $h = 0$ 时成立。

证明。 对于满足 $a < 1$ 的 $a \in \mathbb{R}$ ，有

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{\frac{1}{2}a(x^2-1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{e^{-\frac{1}{2}a}}{\sqrt{1-a}} \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(y + \Big(\frac{1}{\sqrt{1-a}} - 1\Big)y\Big) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

N对任意 $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ 均成立。由于 $B_\eta = \sum a_n \ell_n \otimes \ell_n$ 和 $\{\mathrm{D}^*\ell_n \mid 1 \le n \le N\}$ 是一族独立同分布（IID）的随机变量，服从正态分布 $N(0,1)$，因此

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{W}} \prod_{n=1}^{N} \Big\{ \varphi_n(\mathrm{D}^*\ell_n) e^{\frac{1}{2}a_n\{(\mathrm{D}^*\ell_n)^2 - 1\}} \Big\} d\mu \\
&= \{\det{}_2(I - B_\eta)\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} \prod_{n=1}^{N} \Big\{ \varphi_n\Big(\mathrm{D}^*\ell_n + \Big(\frac{1}{\sqrt{1-a_n}} - 1\Big)\mathrm{D}^*\ell_n\Big) \Big\} d\mu
\end{aligned}$$

对任意 $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in C_b(\mathbb{R})$ 均成立。由引理（C.1.1）和（2.1.9），有

$$\ell_n(F_{\widehat{\kappa_S(\eta)}}) = \Big(\frac{1}{\sqrt{1-a_n}} - 1\Big)\mathrm{D}^*\ell_n \quad \text{for } 1 \le n \le N.$$

回顾一下，根据定理（1.1.1），$\mathrm{D}^*\ell_n = \ell_n$ for $1 \le n \le N$ （见 [27, （5.1.5）]），我们看到

$$\int_{\mathcal{W}} \Big[\prod_{n=1}^{N} (\varphi_n \circ \ell_n)\Big] e^{\mathfrak{q}_\eta} d\mu = \{\det{}_2(I - B_\eta)\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} \Big[\prod_{n=1}^{N} (\varphi_n \circ \ell_n)\Big] \big(\iota + F_{\widehat{\kappa_S(\eta)}}\big) d\mu.$$

根据维纳测度的分解性质，由此很容易得出，对于每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ ， （3.1.4）均成立， 其中 $h = 0$ 。 $\square$

(C.1.4) 引理。 设 $N \in \mathbb{N}$和 $h_1, \ldots, h_N \in \mathcal{H}$ 为正交归一。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在N $\ell_1, \ldots, \ell_N \in \mathcal{W}^*$，它们在 $\mathcal{H}$ 中正交归一，并且满足$\sum_{n=0} \|h_n - \ell_n\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$.

证明。我们对 $N \in \mathbb{N}$使用归纳法来证明该断言。当 $N = 1$时，该断言由 $\mathcal{W}^*$ 在 $\mathcal{H}$中的稠密性得出。

假设命题对 N 成立，并令 $h_1, \ldots, h_{N+1} \in \mathcal{H}$ 为正交归一的。固定一个 $\varepsilon > 0$，并取一个 $\delta > 0$ 使得 $\delta < \frac{1}{3} \wedge \frac{\varepsilon}{7}$。根据归纳假设，存在 $\ell_1, \ldots, \ell_N \in \mathcal{W}^*$，它们在 $\mathcal{H}$ 中正交归一，并满足 $\sum_{n=1} \|h_n - \ell_n\|_{\mathcal{H}} < \delta$。记 π_N 为 $\mathcal{H}$ 在由 $\ell_1, \ldots, \ell_N$ 张成的子空间上的正交投影。于是

$$\|\pi_N h_{N+1}\|_{\mathcal{H}} = \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle h_{N+1}, \ell_n \rangle_{\mathcal{H}} \ell_n \right\|_{\mathcal{H}} = \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle h_{N+1}, \ell_n - h_n \rangle_{\mathcal{H}} \ell_n \right\|_{\mathcal{H}} \leq \sum_{n=1}^{N} \|h_n - \ell_n\|_{\mathcal{H}} < \delta.$$

选取一个 $\ell \in \mathcal{W}^*$ 使得 $\|h_{N+1} - \ell\|_{\mathcal{H}} < \delta$。于是有

$$\|\pi_N \ell\|_{\mathcal{H}} \leq \|\pi_N(\ell - h_{N+1})\|_{\mathcal{H}} + \|\pi_N h_{N+1}\|_{\mathcal{H}} < 2\delta.$$

这意味着

$$\|(I - \pi_N)\ell\|_{\mathcal{H}} \geq \|\ell\|_{\mathcal{H}} - 2\delta > \|h_{N+1}\|_{\mathcal{H}} - 3\delta = 1 - 3\delta > 0. \tag{C.1.5}$$

定义 $\ell_{N+1} \in \mathcal{W}^*$ 为

$$\ell_{N+1} = \frac{1}{\|(I - \pi_N)\ell\|_{\mathcal{H}}} (I - \pi_N)\ell.$$

那么 $\ell_1, \ldots, \ell_{N+1}$ 在 $\mathcal{H}$ 中正交归一。注意

$$\|(I - \pi_N)\ell\|_{\mathcal{H}} \leq \|\ell\|_{\mathcal{H}} \leq \|h_{N+1}\|_{\mathcal{H}} + \delta = 1 + \delta.$$

结合 (C.1.5)，由此可得

$$\|(I - \pi_N)\ell - \ell_{N+1}\|_{\mathcal{H}} = \left| \|(I - \pi_N)\ell\|_{\mathcal{H}} - 1 \right| < 3\delta.$$

成立如下

$$\|h_{N+1} - \ell_{N+1}\|_{\mathcal{H}} \leq \|h_{N+1} - \ell\|_{\mathcal{H}} + \|\pi_N \ell\|_{\mathcal{H}} + \|(I - \pi_N)\ell - \ell_{N+1}\|_{\mathcal{H}} < 6\delta.$$

结合归纳假设，这意味着

$$\sum_{n=1}^{N+1} \|h_n - \ell_n\|_{\mathcal{H}} \leq \delta + 6\delta = 7\delta < \varepsilon.$$

因此该断言对 $N + 1$ 成立。 □

（C.1.6）引理。设 $N \in \mathbb{N}$。对于正交归一的 $h_1, \ldots, h_N \in \mathcal{H}$ 和 $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$，若 $\max_{1 \leq n \leq N} a_n < 1$，则按（C.1.2）定义 $\eta \in \mathscr{S}_2$。那么，对于任意$f \in C_b(\mathcal{W})$，（3.1.4）在 $h = 0$ 下成立。

证明。由引理（C.1.4），存在 $\ell_1^{(m)},\dots,\ell_N^{(m)}$，$m\in\mathbb{N}$，使得对每个 $m\in\mathbb{N}$，$\ell_1^{(m)},\dots,\ell_N^{(m)}$ 在 $\mathcal{H}$ 中正交归一，且 $\sum_{n=1}^{N}\|h_n-\ell_n^{(m)}\|_{\mathcal{H}}\to 0$ 如 $m\to\infty$。对于 $m\in\mathbb{N}$，按以下方式定义 $\eta^{(m)}\in\mathscr{S}_2$：

$$\eta^{(m)}(t,s)=\sum_{n=1}^{N}a_n[(\ell_n^{(m)})'(s)\otimes(\ell_n^{(m)})'(t)]\quad\text{for }(t,s)\in[0,T]^2.$$

显然，由于 $\|B_{\eta^{(m)}}-B_\eta\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\to 0$ $m\to\infty$。此外，根据引理 (C.1.1)，有

$$\|B_{\widehat{\kappa_S(\eta^{(m)})}}-B_{\widehat{\kappa_S(\eta)}}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\to 0.$$

根据定理（1.1.1）和引理（2.1.9），有

$$\mathfrak{q}_{\eta^{(m)}}\to\mathfrak{q}_\eta\text{ in }L^p(\mu)\quad\text{and}\quad F_{\widehat{\kappa_S(\eta^{(m)})}}\to F_{\widehat{\kappa_S(\eta)}}\text{ in }L^p(\mu;\mathcal{H})\quad\text{as }m\to\infty$$

对于任意 $p\in(1,\infty)$。

由于 $\max_{1\le n\le N}a_n<1$ 和

$$\det{}_2(I-B_{\eta^{(m)}})=\prod_{n=1}^{N}(1-a_n)e^{a_n}=\det{}_2(I-B_\eta)>0\quad\text{for }m\in\mathbb{N},$$

应用引理（C.1.3），有

$$\int_{\mathcal{W}}fe^{\mathfrak{q}_{\eta^{(m)}}}d\mu=\{\det{}_2(I-B_\eta)\}^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathcal{W}}f(\iota+F_{\widehat{\kappa_S(\eta^{(m)})}})d\mu\tag{C.1.7}$$

对于每个 $f\in C_b(\mathcal{W})$ 和 $m\in\mathbb{N}$。

令 $M=\max_{1\le n\le N}a_n$，并取一个 $p\in(1,\infty)$，使得 $pM<1$。由于 $\Lambda(B_{p\eta^{(m)}})=p\Lambda(B_{\eta^{(m)}})=p(0\vee M)$，且对每个 $m\in\mathbb{N}$ 都有 $\|\eta^{(m)}\|_2=\|\eta\|_2$，由引理（2.1.13）可知

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\int_{\mathcal{W}}e^{p\mathfrak{q}_{\eta^{(m)}}}d\mu\le\exp\left(\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{p(0\vee M)}{3\{1-p(0\vee M)\}^3}\right\}p^2\|\eta\|_2^2\right).$$

因此，族 $\{\exp(\mathfrak{q}_{\eta^{(m)}})\mid m\in\mathbb{N}\}$ 一致可积。在 (C.1.7) 中令 $m\to\infty$，即可得到 (3.1.4)，其中 $h=0$。□

(C.1.8) 引理。 令 ρ、$\eta\in\mathscr{S}_2$。假设 $\Lambda(B_\rho)\vee\Lambda(B_\eta)<1$ 且 $B_\rho B_\eta=B_\eta B_\rho$。对于 $B\in\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$，令 $\Lambda'(B)=1-\Lambda(B)$。则有

$$\|B_{\widehat{\kappa_S(\rho)}}-B_{\widehat{\kappa_S(\eta)}}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\le\frac{\|\rho-\eta\|_2}{\sqrt{\Lambda'(B_\rho)}\sqrt{\Lambda'(B_\eta)}(\sqrt{\Lambda'(B_\rho)}+\sqrt{\Lambda'(B_\eta)})}.$$

证明。我们首先证明

$$\inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1}\langle C_\rho h,h\rangle_{\mathcal{H}}\ge\sqrt{\Lambda'(B_\rho)}.\tag{C.1.9}$$

由于 $B_\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$（引理（1.1.6）），存在 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$B_\rho = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \otimes h_n,$$

其中 $a_n \in \mathbb{R}$ 对于 $n \in \mathbb{N}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$。回顾 $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \Lambda(B_\rho) < 1$，我们定义线性算子 $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 如下：

$$Ch = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-a_n}\langle h, h_n\rangle_{\mathcal{H}} h_n \quad \text{for } h \in \mathcal{H}.$$

于是有

$$\|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (1-a_n)\langle h, h_n\rangle_{\mathcal{H}}^2 \le \|h\|_{\mathcal{H}}^2$$

and

$$\langle Ch, g\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-a_n}\langle h, h_n\rangle_{\mathcal{H}}\langle g, h_n\rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, Cg\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{for } h, g \in \mathcal{H}.$$

这也意味着

$$\langle Ch, h\rangle_{\mathcal{H}} \ge \sqrt{\inf_{n\in\mathbb{N}}(1-a_n)}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \sqrt{\Lambda'(B_\rho)}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{for } h \in \mathcal{H}. \tag{C.1.10}$$

因此 $C \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$。此外，我们还可得

$$C^2 h = \sum_{n=1}^{\infty} (1-a_n)\langle h, h_n\rangle_{\mathcal{H}} h_n = (I - B_\eta)h \quad \text{for } h \in \mathcal{H}.$$

由平方根唯一性（引理（A.1.5）），可知 $C = C_\eta$。不等式（C.1.10）正是所需的不等式（C.1.9）。

由（C.1.9）可得

$$\inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \|C_\rho h\| \ge \inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \langle C_\rho h, h\rangle_{\mathcal{H}} \ge \sqrt{\Lambda'(B_\rho)}.$$

根据引理（A.1.1），我们看到 C_ρ 有连续逆，且

$$\|C_\rho^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le \frac{1}{\sqrt{\Lambda'(B_\rho)}}. \tag{C.1.11}$$

由（C.1.9），我们得到

$$\|(C_\rho + C_\eta)h\|_{\mathcal{H}} \ge \langle (C_\rho + C_\eta)h, h\rangle_{\mathcal{H}} \ge \sqrt{\Lambda'(B_\rho)} + \sqrt{\Lambda'(B_\eta)}$$

对于 $h \in \mathcal{H}$，其中 $\|h\|_{\mathcal{H}} = 1$。由引理（A.1.1）可知，这意味着

$$\|(C_\rho + C_\eta)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le \frac{1}{\sqrt{\Lambda'(B_\rho)} + \sqrt{\Lambda'(B_\eta)}}. \tag{C.1.12}$$

利用 B_ρ、 B_η、 C_ρ、 C_η、 C_ρ^{-1} 和 C_η^{-1} 的交换性，我们将其改写为

$$B_{\widehat{\kappa_S(\rho)}} - B_{\widehat{\kappa_S(\eta)}} = C_\rho^{-1} - C_\eta^{-1} = C_\rho^{-1} C_\eta^{-1} (C_\rho + C_\eta)^{-1} (B_\rho - B_\eta).$$

将关于 ρ 和 η 的估计 (C.1.11) 以及 (C.1.12) 代入其中，便得到所需的不等式。

□

（*3.1.4*）的另一种证明（3.1.4）。只需证明 $h = 0$时的（3.1.4）。事实上，若 $\ell \in \mathcal{W}^*$，则 $\mathbf{D}^*\ell = \ell$。将 $f_N = (N \wedge e^\ell) f$ 代入（3.1.4），并令 $N \to \infty$，便得到对 h成立的 $\ell \in \mathcal{W}^*$ 情形下的（3.1.4）。由于 $\mathcal{W}^*$ 在 $\mathcal{H}$中稠密，该恒等式可延拓至 $\mathcal{H}$。

设 $\eta \in \mathscr{S}_2$，并假设 $\Lambda(B_\eta) < 1$。取 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$，使得∞ $B_\eta = \sum a_n h_n \otimes h_n$，其中 $a_n = \langle B_\eta h_n, \quad n \in \mathbb{N}$时的 $h_n \rangle_{\mathcal{H}}$。对于 $N \in \mathbb{N}$，定义 $\eta^{(N)} \in \mathscr{S}_2$ 为$_{n=1}$

$$\eta^{(N)}(t,s) = \sum_{n=1}^{N} a_n [h_n'(s) \otimes h_n'(t)] \quad \text{for } (t,s) \in [0,T]^2.$$

于是，当 $N \to \infty$ 时，$\|B_{\eta^{(N)}} - B_\eta\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \to 0$；当 $N \in \mathbb{N}$ 时，$B_{\eta^{(N)}} B_\eta = B_\eta B_{\eta^{(N)}}$。由定理 (1.1.1) 以及引理 (C.1.8) 和 (2.1.9)，$\mathfrak{q}_{\eta^{(N)}} \to \mathfrak{q}_\eta$ 属于 $L^p(\mu)$，且 $F_{\widehat{\kappa_S \quad (\eta^{(N)})}} \to F_{\widehat{\kappa_S \, \eta\,()}}$ 属于 $L^p($ $\mu; \mathcal{H})$，当任意 $p \in (1, \infty)$ 时，均有 $N \to \infty$。

由于 $\max_{1 \le n \le N} a_n \le \Lambda(B_\eta) < 1$，由引理 (C.1.6) 可得

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_{\eta^{(N)}}} d\mu = \{\det{}_2(I - B_{\eta^{(N)}})\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\widehat{\kappa_S(\eta^{(N)})}}) d\mu \tag{C.1.13}$$

对每个 $f \in C_b(\mathcal{W})$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 均成立。

取一个 $p \in (1, \infty)$，使得 $p\Lambda(B_\eta) < 1$。由引理（2.1.13）以及控制关系 $\Lambda(B_\eta^{(N)})$ $\le \Lambda(B_\eta)$ 和 $\|\eta^{(N)}\|_2 \le \|\eta\|_2$，可得

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \int_{\mathcal{W}} e^{p\mathfrak{q}_{\eta^{(N)}}} d\mu \le \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{p\Lambda(B_\eta)}{3(1 - p\Lambda(B_\eta))^3} \right\} p^2 \|\eta\|_2^2 \right).$$

因此，族 $\{\exp(\mathfrak{q}_{\eta^{(N)}}) \mid N \in \mathbb{N}\}$ 一致可积。在（C.1.13）中令 $N \to \infty$，即可得到 $h = 0$ 时的（3.1.4）。 □

记号

基础知识

$\mathbb{N}$	自然数
$\mathbb{R}$	实数
$\mathbb{C}$	复数
$\mathbb{R}^n$	n 维实欧几里得空间
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\mathbb{R}^n$中的内积
$\lvert x \rvert$	$x \in \mathbb{R}^n$的欧几里得范数
$\mathbb{R}^{d\times d}$	$d \times d$ 实矩阵
$\mathbb{C}^{d\times d}$	$d \times d$ 复矩阵
$\lvert M \rvert$	$M \in \mathbb{R}^{d\times d}$的欧几里得范数
$M^\dagger$	$M \in \mathbb{C}^{d\times d}$的转置
$\mathbf{1}_S$	S的示性函数

维纳空间与卡梅隆-马丁空间

$\mathcal{W}$	在 $[0,T]$ 上取值于$\mathbb{R}^d$、在 $\mathbf{0}$ 处为零的连续函数
μ	$\mathcal{W}$上的维纳测度
$\mathcal{H}$	具有平方 $h \in \mathcal{W}$ 的绝对连续 在 $[0,T]$ 上可积的导数 h'。
$\langle h, g \rangle_{\mathcal{H}}$	$\int_0^T \langle h'(t)\ g'(t) \rangle dt$
$\lVert h \rVert_{\mathcal{H}}$	$\langle h, h \rangle_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}$

函数空间

$L^p(\mu;\ E)$	关于 μ的E值 p次可积函数
$L^p(\mu)$	$L^p(\mu;\mathbb{R})$的缩写
$L^{1+}(\mu)$	$\bigcup_{p\in(1,\ \infty)} L^p(\mu)$
$L^p([a,b];E)$	E值的 p次可积函数，定义在 $[a,b]$上
$C_b(X)$	X上的连续有界实值函数
$C([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$	$\mathbb{R}^{d\times d}$上的取值于$\mathbb{R}^{d\times d}$的连续函数
$C^k([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$	$[0,T]$上的取值于$\mathbb{R}^{d\times d}$的 k次连续可微函数
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$	$\mathbb{R}^N$上的快速衰减函数
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$	定义在 $\mathbb{R}^N$上的温和分布

Malliavin 微积分

D	$\mathcal{H}$-导数
D*	D 的伴随
$\mathbb{D}^{k,\ p}(E)$	k次 $\mathcal{H}$可微的 E值维纳泛函，具有 所有阶的p次可积 $\mathcal{H}$导数
$\mathbb{D}^{\infty}(E)$	$\bigcap_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \bigcap_{p\in(1,\infty)} \mathbb{D}^{k,p}(E)$
$\mathbb{D}^{k,\ p}$ 和 $\mathbb{D}^{\infty}$	分别为 $\mathbb{D}^{k,p}(\mathbb{R})$和 $\mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R})$的缩写
$\delta_z(\Phi)d\mu$	由 Φ在 z 处的钉住测度

希尔伯特-施密特算子

$\mathcal{H}^{\otimes 2}$	从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$的希尔伯特-施密特算子
$\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$	从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$的自伴希尔伯特-施密特算子
$\mathcal{S}_+(\mathcal{H})$	从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$的自伴连续非负定算子
$\Lambda(B)$	$\sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \langle Bh, h\rangle_{\mathcal{H}}\ (B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2}))$
$h \otimes g \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$	$(h \otimes g)k = \langle h, k\rangle g\ (k \in \mathcal{H})$
$B_\kappa \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$	$\langle B_\kappa h,\ g\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \left\langle \int_0^T \kappa(t,\ s)h'(s)ds,\ g'(t) \right\rangle dt\ (h,\ g \in \mathcal{H})$

核

$\mathscr{L}_2$	取值于 $[0,T]^2$ 的 $\mathbb{R}^{d\times d}$ 值平方可积函数
$\mathscr{S}_2$	$\eta \in \mathscr{L}_2$的全体，其中 $\eta(t,s)^\dagger = \eta(s,t)$ 对于 $(t,s) \in [0,T]^2$
$\|\kappa\|_2$	$\left(\int_0^T \int_0^T |\kappa(t,\ s)|^2 ds dt\right)^{\frac{1}{2}}$
$\kappa \overset{(\mathscr{L}_2)}{=} \kappa'$	若 $\|\kappa - \kappa'\|_2 = 0$
$\eta(\kappa) \in \mathscr{S}_2$	$\eta(\kappa)(t,s) = -\left\{\kappa(t,s) + \kappa(s,t)^\dagger + \int_0^T \kappa(u,\ t)^\dagger \kappa(u,\ s)\, du\right\}$
$\widehat{\kappa} \in \mathscr{L}_2$	$B_{\widehat{\kappa}} = (I + B_\kappa)^{-1} - I$
$\kappa_S(\eta) \in \mathscr{S}_2$	$B_{\kappa_S(\eta)} = C_\eta - I$ 其中 $C_\eta \in \mathcal{S}_+(\mathcal{H})$ 满足 $C_\eta^2 = I - B_\eta$
$\kappa_A(\rho) \in \mathscr{L}_2$	$\kappa_A(\rho)(t,\ s) = -\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\rho(t,\ s)$
$\rho_\phi \in \mathscr{S}_2$	$\rho_\phi(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\phi(t) + \mathbf{1}_{(t,T]}(s)\phi(s)^\dagger$
$\sigma(\phi) \in C([0,T];\ \mathbb{R}^{d\times d})$	$\sigma(\phi)(t) = \phi(t) - \int_t^T \phi(u)^\dagger \phi(u) du$

维纳泛函

$F_\kappa : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$	$\langle F_\kappa, h\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{} \left\langle \int_T \kappa(t, \quad s) d\theta(s) \;\; h'(t) \right\rangle dt \; (h \in \mathcal{H})$
$\mathfrak{q}_\eta : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$	$\int_0^T \left\langle \int_0^t \eta(t, \quad s) d\theta(s) \;\; d\theta(t) \right\rangle$
$\mathfrak{h}(\kappa; \quad x)$	$\frac{1}{2} \int_0^T \left\langle x, \quad \int_0^T \kappa(t, s) d\theta(s) \right\rangle^2 dt$
$\mathfrak{h}(\kappa)$	$\frac{1}{2} \int_0^T \left\| \int_0^T \kappa(t, \quad s) d\theta(s) \right\|^2 dt$
$\mathfrak{p}_\sigma : \quad \mathcal{W} \to \mathbb{R}$	$\int_{\langle \sigma(t) \theta(t) d\theta(t) \rangle_0}^T$

矩阵函数

$\mathfrak{e}[M]$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$
$\mathfrak{ch}[M]$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} M^{2n}$
$\widehat{\mathfrak{sh}}[M]$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} M^{2n}$
$\mathfrak{sh}[M]$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} M^{2n+1}$
$\widehat{\mathfrak{th}}[M]$	$\widehat{\mathfrak{sh}}[M] (\mathfrak{ch}[M])^{-1}$ (如果行列式 $\mathfrak{ch}[M] \neq 0$)

参考文献

[1] R.H. Cameron与W.T. Martin. 借助某些斯图姆-刘维尔微分方程对各种维纳积分的求值. 美国数学会通报**51** （1945年），73–90.[2] R.H. Cameron与W.T. Martin. 一般线性变换类下维纳积分的变换. 美国数学会汇刊 **58** （1945年），184–219.[3] A. Cohen. 球面型欧拉多项式. M¨unster数学杂志 **1** （2008年）1–8.[4] A. Erd´elyi（编）. 高等超越函数，第1卷，麦格劳-希尔，纽约，1953年.[5] I.Gohberg、S. Goldberg与N.Krupnik. 线性算子的迹与行列式. Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2000年.[6] I. Gohberg与M. Krein. 希尔伯特空间中的算子分解. 英译，美国数学会译丛 **51** （ 1966 年），155–188.[7] K. Hara 与 N. Ikeda. 二次维纳泛函与格拉斯曼流形上的动力学. Bull. Sci. math.**125** （2001年），481–528.[8] F. Hirzebruch. 欧拉多项式. M¨unster数学杂志，**1** （2008年），9–14.[9] N. Ikeda、S. Kusuoka与S. Manabe. 高斯过程的L´evy随机面积公式. Comm. Pure Appl. Math. **47**（1994年），329–360.[10] N. Ikeda、S. Kusuoka与S. Manabe. L´evy随机面积公式及相关问题. Proc. Pure. Math. AMS **57**（1995年），281–305.[11] N. Ikeda、S. Manabe. 随机振荡积分的渐近公式. 载于《谷口国际研讨会论文集：概率论中的渐近问题》，K.D.Elworthy、N.Ikeda编. 皮特曼研究笔记数学丛书 **284**，朗文，埃塞克斯，1993年. 第 136–155 页 .[12] N. Ikeda 与 S. Manabe. 维纳积分的范弗莱克 - 泡利公式与雅可比场. 载于《Itˆo随机微积分与概率论》，N.Ikeda、S.Watanabe、M.Fukushima、H.Kunita编. 施普林格出版社，纽约，1996年. 第141–156页.[13]N. Ikeda与S. Taniguchi. 二次维纳泛函、卡尔曼-布西滤波器与KdV方程. 载于《随机分析及相关专题》，H.Kunita、S.Watanabe、Y.Takahashi编. 纯粹数学高级研究 **41**，日本数学会，东京，2004年. 第167–187页.

[14] N. Ikeda与S. Taniguchi. Itˆo-Nisio定理、二次维纳泛函与1-孤子. Stoch. Proc. Appl.**120** （2010年），605–621.[15] N. Ikeda与S. Taniguchi. 欧拉多项式、伯努利多项式与L´evy随机面积公式. Bull. Sci. math.，**135**（2011年），684–694.[16] N. Ikeda与S. Watanabe. 随机微分方程与扩散过程. North-Holland/讲谈社，阿姆斯特丹/东京，1981年.[17] Y.Inahama与S. Taniguchi. 等正则次黎曼流形上的热迹渐近. 日本数学会杂志 **72** （2020年），1049–1096.[18] E.L. Ince. 常微分方程，Dover，纽约，1956年.[19] K. Itˆo与M. Nisio. 独立的巴拿赫空间值随机变量之和的收敛. 大阪数学杂志 **5**（1968年），35–48.[20] M. Kac. 论概率论与微分方程及积分方程之间的若干联系. 载于《第二届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》，J. Neyman 编，加州大学出版社，伯克利，1951年. 第189–215页.[21]M. Kac. 函数空间中的积分及其若干应用. 林琴国家科学院、比萨高等师范学院，比萨，1980年.[22] P. L´evy. 维纳随机函数及其他拉普拉斯随机函数. 载于《第二届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》，J. Neyman编，加州大学出版社，伯克利，1951年. 第171–186页.[23] P. Malliavin与S. Taniguchi. 解析泛函的全纯扩张（d´efinies于维纳空间r´eel）、柯西公式与驻相法. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **322**（1996年），261–265.[24] P. Malliavin与S. Taniguchi. 实抽象维纳空间上的解析函数、柯西公式与驻相法. Jour. Funct. Anal. **143** （1997年），470–528.[25] H. Matsumoto. 带磁场的Schr¨odinger算子特征值的半经典渐近. Jour. Funct. Anal.，**129** （1995年）168–190.[26] H. Matsumoto与S. Taniguchi. 二阶维纳泛函及其L´evy测度. Electron. J. Probab.**7** （2002年），No. 14，1–30.[27] H. Matsumoto与S. Taniguchi. 随机分析——Itˆo与Malliavin微积分并论. 剑桥大学出版社，剑桥，2017年.[28] T. Miwa、M. Jimbo与E. Date. 孤子. 剑桥大学出版社，剑桥，2000年.[29] D. Nualart. Malliavin 微积分及相关专题. 第2版. 施普林格，纽约，2006年.[30] E.J. Putzer. 在讨论常系数线性系统时避免使用若尔当标准形. Amer. Math. Monthly**73** （1966年），2–7.

[31] M. Reed 和 B. Simon。《现代数学物理方法》第1卷：泛函分析，修订增补版。Academic Press，圣迭戈，1980年。[32] D. Revuz 和 M. Yor。《连续鞅与布朗运动》。第三版第三次印刷，校正版。施普林格，柏林，2005年。[33] K. Sato。《列维过程与无限可分布》。剑桥大学出版社，剑桥，1999年。[34] H. Sugita 和 S. Taniguchi。实抽象维纳空间上具有二次相位函数的振荡积分。《函数分析杂志》**155** (1998年)，229–262。[35] H. Sugita 和 S. Taniguchi。关于相对于钉扎维纳测度的随机振荡积分的一则注。《九州数学杂志》**53** (1999年)，151–162。[36] S. Taniguchi。具有二次相位函数的随机振荡积分与雅可比方程。《概率论及相关领域》**114**(1999年)，291–308。[37] S. Taniguchi。列维随机面积与驻相原理。《函数分析杂志》**172** (2000年)，165–176。[38] S. Taniguchi。与KdV方程孤子解相关的二阶维纳泛函。《函数分析杂志》**216** (2004年)，212–229。[39] S. Taniguchi。随机振荡积分：二次相位函数的渐近性与精确表达式。载于《随机分析与数学物理（SAMP/ANESTOC 2002）》，R. Rebolledo、J. Resende 和 J.-C. Zambrini 编。世界科学出版社，伦敦，2004年。第165–181页。[40] S. Taniguchi。布朗片与无反射势。《随机过程及其应用》**116**(2006年)，293–309。[41]S. Taniguchi。关于区间上布朗样本路径平方范数的 Malliavin 导数所对应的二次维纳泛函。《电子概率通讯》**11** (2006年)，1–10。[42] S. Taniguchi。关于具有二次相位函数的随机振荡积分的雅可比场方法。《九州数学杂志》**61** (2007年)，191–208。[43] S. Taniguchi。测度空间上平方范数的二次维纳泛函。《随机分析通讯》**2** (2008年)，11–26。[44] S. Taniguchi。抽象维纳空间上用于驻相法的一类新振幅函数。《九州数学杂志》**69** (2015年)，219–228。[45] S. Taniguchi。维纳空间上的变换与二次型。《九州数学杂志》**78** (2024年)，395–412。[46] S. Taniguchi。维纳空间上的一阶变换与二次型。即将在2025年发表于《九州数学杂志》。

[47] S. Taniguchi。维纳空间上的一阶适应变换与二次型。即将在2026年发表于《九州数学杂志》。

[48] M. Yor. 关于 Paul L´evy 公式的注记。载于《S´eminaire Prob. XIV》，Lect. Notes Math. 784，施普林格，纽约，1980年，第343–346页。