前提擦除缓存中的推导惩罚：容量、强逆定理与色散二分性

Jianfeng Xu[1]

arXiv:2603.00930v1 [cs.IT] 1 Mar 2026

摘要

我们为基于推导的推理引擎在独立前提擦除条件下的缓存问题，提出了一个信息论框架。我们比较了两种解码器模型：一种是已编码方案，采用任意比特串缓存和通用解码器；另一种是推导约束方案，其缓存由逻辑事实组成，且解码器必须生成有效证明。我们建立了四个编码定理。第一个定理证明，每个推导步骤都携带由基础集基数决定的通用逐步信息量。第二个定理揭示，在深度相同的情况下，线性链式与平衡合并式 Datalog 架构之间存在指数级容量分离。第三个定理确定了一个临界访问频率，将缓存最优的情形与按需推导最优的情形区分开来。第四个定理确定了擦除条件下推导约束缓存的最小规模，并将查询信息分解为可靠缓存与噪声信道容量。核心结果是推导惩罚：推导约束缓存与已编码缓存之比趋于擦除率的倒数，且这一结论对查询数量、重叠结构和可靠性目标普遍成立。该惩罚源自结构化缓存刚性定理：只有目标查询的推导有向无环图中的缓存事实才能提升韧性，因此无法进行跨坐标纠错。除容量结果外，我们还证明了 KL 散度速率下带有 Bahadur–Rao 前因子的强逆定理、色散二分性（正的编码色散与零推导受限色散），以及完整的八种情形相图。依赖架构的深度到依赖关系映射使合并架构的相变界限锐化程度呈指数级提升。所有结果均适用于同义表示。

索引词

推导深度、前提擦除、编码缓存、推导惩罚、擦除信道、强逆定理、信道色散、最大距离可分码、Datalog。

I. 引言

DERIVATION-BASED 推理引擎通过根据存储的前提构造证明来回答查询。这类引擎应用于数据库查询评估 [1], 、知识库推理、自动定理证明，以及面向大语言模型的检索增强架构 [2], [3]。当前提基遭受随机丢失——例如由存储故障、网络分区或数据过期导致——可靠缓存中的中间逻辑事实便可确保目标查询仍然可推导。由此产生两个根本问题。首先，要实现 δ独立同分布前提擦除下的可靠查询恢复，缓存大小至少需要多少？其次，当解码器必须给出有效的逻辑推导，而非仅仅输出正确答案时，需要付出怎样的惩罚？这些问题处于信息论、演绎推理和缓存的交叉领域，但现有框架尚未对它们进行联合研究。

香农理论 [4], [5]为信源编码和信道容量提供了语言，但没有对推理成本建模：即从存储的前提中得出结论所需的演绎步骤数。柯尔莫哥洛夫复杂度 [6], [7]量化单个描述的长度，而贝内特逻辑深度 [8] 则将其与计算时间联系起来；然而，两者都没有针对相对于基础集的 查询回答进行研究。在这种场景中，可用的前提基是决定在线成本的显式参数。在数据库系统中，物化视图选择明确地在存储与查询延迟 [9]–[11], 之间进行权衡，而缓存策略则在线实现这种权衡 [12]–[14], ，但这些方法在噪声条件下缺乏信息论最优性保证。知识编译 [15] 会对知识库进行预处理，将其转换为一种易于处理的目标语言，以便高效回答某些查询；然而，编译成本尚未针对含噪前提信道进行量化。时间—空间权衡是复杂性理论中的经典主题 [16], [17], ，电路的深度—宽度分解 [18], [19] 则提供了结构上的类比，但这两种框架都没有以含噪前提基底为参数来刻画这种权衡。

在信道编码方面， m元擦除信道二元擦除信道$_m(\varepsilon)$的容量为（$1-\varepsilon$）log m [5]，且 MDS 码在所有速率下都能达到球填充指数 [20,定理 5.8。3] 这些结果已广为人知。Polyanskiy、Poor 和 Verd´u [21]的有限码长理论通过信道色散刻画二阶编码速率

[1]凯原法 学院、中国智慧司法研究院、上海交通大学计算机科学与技术学院，上海 20003 0, 中国。电子邮箱：xujf@sjtu.edu.cn

。Maddah-Ali 和 Niesen [22] 提出的编码缓存范式表明，在广播网络中，编码多播消息相较于无编码放置可带来乘性增益；然而，在该框架中，接收端是任意的代数译码器，而非受限于通过有效推理步骤将缓存事实与存留前提结合起来的证明引擎。强逆定理和误差指数、 [20], [23], [24], 中偏差 [24], 以及二项尾概率的精确渐近提供了概率工具，但要将这些工具应用于演绎译码器模型，还需要新的结构性结果。神经符号人工智能 [25] 和大型知识图谱 [26]进一步凸显了参数化存储与非参数检索或推导之间的张力，但关于这种张力的信息论界限——尤其是在存在前提噪声的情况下——一直付之阙如。

现有文献尚未为以下三者提供统一理论：（i）相对基推导代价；（ii）前提噪声下的信息论缓存界限；以及（iii）要求有效推导而非任意译码器输出所需付出的确切代价。本文解决了这三个问题。

我们形式化了两种解码器模型：编码缓存（定义 4.1），其中缓存是由通用算法解码的任意比特串；以及推导约束缓存（定义 4.2），其中缓存由逻辑事实 $S \subseteq \mathrm{Cn}(B)$ 构成，且解码必须验证 $q \in \mathrm{Cn}(B \cup S)$。我们的核心结构性结果是缓存刚性定理（定理 3.5）：对于具有唯一轨迹的忠实程序，只有目标查询推导有向无环图中的缓存事实才能提升韧性。这排除了跨坐标纠错，并导出了普适的 $1/\varepsilon$推导惩罚。

形式化基础确定了一种逻辑语言 $\mathcal{L}$，并将其具体化为 FO(LFP) [27]；在有限有序结构上，FO(LFP) 通过 Immerman–Vardi 定理 [28], [29], 刻画多项式时间性质，从而提供一个与机器无关的语义层。双域信息模型（S_O, S_C）取自客观信息观点 [30]–[33]。定量结果针对两种 Datalog架构展开：一种是依赖增长呈线性的元组组装链 Π_k $\kappa = k+d-1$，另一种是增长呈指数级的平衡合并程序 $\Pi_k^{\|}$ $\kappa = k \cdot 2^{d-1}$。

图 1 总结了本文结果的逻辑架构，围绕四个编码定理（CT1–CT4）展开；这些定理构成一条逻辑链，最终汇聚于核心的 $1/\varepsilon$ 推导惩罚。

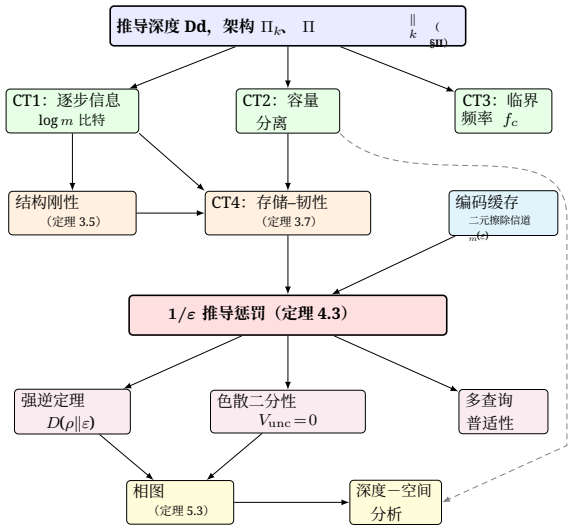

图 1. 逻辑依赖图。实线箭头表示主要依赖关系；虚线箭头表示 CT2 的架构映射 $d \mapsto \kappa_{\mathcal{A}}(d)$，该映射用于第 VII 节的深度-空间重新参数化。 $1/\varepsilon$ 推导惩罚（定理 4.3）源于将 CT4 的推导约束反向定理（由定理 3.5 的结构刚性保证）与二元擦除信道$m(\varepsilon)$上的编码缓存可达性进行比较。表示不变性（定理 2.8）确保所有编码定理都能在同义表示之间迁移。

主要贡献与图 1 中的节点相对应，具体如下。CT1（定理 2.2）证明，每个推导步骤恰好携带 $\log m$ 比特的条件算法信息，由此确立了后续所有结果所依据的逐步信息率。CT2 （定理 2.4 ）证明，在深度相同的情况下，链架构与合并架构之间存在指数级容量分离： $C(\Pi_k, B, d) = (k+d-1) \log m$，而 $C(\Pi_k^{\|}, B, d) = k \cdot 2^{d-1} \log m$。CT3（定理 2.6）确定了临界访问频率 $f_c = \Theta(\rho_s \cdot \log(m+d))$，其中 ρ_s 为归一化存储成本；超过这一频率后，缓存优于按需推导。CT4（定理 3.7）证明，在擦除率为 ε 的独立同分布擦除条件下，对于韧性目标 δ，具有 κ 个不同依赖项的一般查询所需的最小推导约束缓存为 $\sigma^*_{\mathrm{unc}} = (\kappa - N^*) \log m + O(\kappa)$，其中 $N^* \approx \delta/\varepsilon$；而最小编码缓存为 $\sigma^*_{\mathrm{code}} = (1+o(1))\varepsilon\kappa \log m$（定理 4.3）。比值 $\sigma^*_{\mathrm{unc}}/\sigma^*_{\mathrm{code}}$ 收敛至 $1/\varepsilon$—— 即推导惩罚。该惩罚具有普适性：它仅取决于 ε，与查询数量、查询的重叠结构或 δ 无关（定理 6.3）。除一阶容量外，编码阈值以下的成功概率以 KL 散度速率 $D(\rho\|\varepsilon)$ 衰减（定理 4.6），其 Bahadur–Rao 前因子为 [23] （定理 5.1），

而两种方案呈现出一种色散二分性：编码二阶项 $\Theta(\sqrt{\kappa}\,\log m)$ 与 BEC色散 [21] 匹配，而推导约束式 $O(\log m)$ 则具有零有效色散（定理 4.9）。完整相图（定理 5.3）包含五种编码机制区间和三种推导约束机制区间，后者不发生相变。CT2 中的架构依赖映射 $d \mapsto \kappa_{\mathcal{A}}(d)$ 会传递至所有下游量，使合并架构的相变更加陡峭（定理 7.1），且最大容错深度呈指数级降低（定理 3.8）。所有编码定理均可推广至同义表示（定理 2.8）。

本文组织如下。第二节介绍系统模型：不可约核心、推导深度、两种 Datalog 架构、编码定理 CT1–CT3以及表示不变性。第三节引入前提擦除缓存，并通过结构刚性定理证明 CT4。第四节确立信源–信道分离、 $1/\varepsilon$ 推导惩罚、强逆定理和色散二分性。第五节将误差分析细化至 Bahadur–Rao精度，并构建完整的相图。第六节将理论扩展至多查询联合缓存。第七节在深度空间中重新参数化相图。第八节提供数值验证。第九节和第十节讨论其影响、局限性和开放问题。附录 A 包含逻辑基底和噪声模型；附录B提供一项辅助计算。

II. 系统模型与预备知识

信息公理化——有限关系结构上的逻辑系统 $\mathcal{L}$:=FO(LFP)、带有效编码的双域模型 [27],、启用机制、状态同义性 $\equiv_{\mathcal{L}}$以及噪声语义基——详见附录 A。所有语义状态集均包含于一个固定的环境全集 $\mathbb{S}_O$ 中（假设 A.2）；根据 Immerman–Vardi定理 [28], [29], $\mathcal{L}$ 恰好刻画有序有限结构的多项式时间性质，而命题 A.1保证第三至第七节的集合扰动噪声模型不失一般性。我们固定一个针对 $\mathcal{L}$的有效证明系统 PS，其证明检查可判定（假设 A.1），并将任意有限公式集 Γ 的演绎闭包定义为

$$\mathrm{Cn}(\Gamma) := \{\varphi : \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi\}. \tag{2.1}$$

本节余下部分将介绍不可约核心和推导深度（第二节A）、推导有向无环图和层（第二节B）、两种具体的 Datalog 架构（第二节C）、编码定理 CT1–CT2（第二节D）、结合 CT3 的存储–深度和存储–计算权衡（第二节E–F），以及表示不变性（第二节G）。

A. 语义依赖、不可约核心和推导深度

本小 节介绍：（i）一个不可冗余语义核心 Atom(S_O)（通过 Cn，而非 P_O）；（ii）一个可计算的 le 前驱 算子 P_O，用于定义 Dd($\cdot \mid B$)。

有限集合 $B \subseteq \mathbb{S}_O$ 是一个可用前提基：其元素均为深度为 0 的前提。

假设 2.1（有限且可有效枚举的知识库）。 所考虑的知识库 S_O 均为有限集，且可按固定的规范顺序有效枚举。

假设 2.2（有效冗余性检验）。 当 $\Gamma \subseteq S_O$ 为有限集且满足 $s \in S_O$ 时，谓词 $s \in$*Cn*（Γ）是可判定的。这适用于 *Datalog/Horn* 风格设定和有界域理论 *[1], [34]*。

定义 2.1（语义原子核心）。 *Atom*（S_O）是以下确定性过程的输出：初始化 $A \leftarrow S_O$；按规范顺序扫描；对于每个 $s \in S_O$，若 $s \in$ *Cn*（$A \setminus \{s\}$），则 $A \leftarrow A \setminus \{s\}$；输出 A。

命题 2.1（核心正确性）。 在假设 *2.1* 和 *2.2* 下， A : =*Atom*（S_O）满足：（i）*Cn*（A） =*Cn*（S_O）；（ii）对所有 $a \in A$， $a \notin$ *Cn*（$A \setminus \{a\}$）；（iii） A 由 S_O 和规范顺序唯一确定。

证明。 每次删除都保持 Cn 不变；根据归纳法，Cn(A) =Cn(S_O)。对于不可冗余性：扫描 a 时，保留了 a，因为 $a \notin$ Cn($A_t \setminus \{a\}$)，其中 $A_t \supseteq A$；由 Cn 的单调性可得 $a \notin$ Cn($A \setminus \{a\}$)。规范性：确定性。□

定义 2.2 (内在前提基与操作性前提基)。 A : = 原子(S_O) （核心前提）， J : $= S_O \setminus A$ （存储的捷径），$A \cup J = S_O$ （操作基）。

a) 深度的前驱结构：

公理 2.1（有限且可计算的前驱）。 对于每个 $s \in \mathbb{S}_O$， P_O（s） 是有限的，并且可由 *enc*$_O$（s）有效计算得到。

公理 2.2（良基性）。对于每个 $s \in \mathbb{S}_O$，s 沿 P_O 的反向展开不包含无限链。

命题 2.2 (有限无环前驱展开)。在公理 *2.1* 和公理 *2.2* 下，对于任意 $s \in \mathbb{S}_O$，反向展开是一个有限的可计算有向无环图 *[35]*。

证明。考虑通过反复将每个节点 v 展开为其有限前驱集 $P_O(v)$ 而得到的有根前驱展开图（公理 2.1）。保留节点的重数时，该展开是一棵有限分支有根树，并且每条反向链都对应其中的一条有根路径。

如果该展开是无限的，那么根据柯尼希引理（每棵无限有限分支树都有一条无限路径 [36]），它将包含一条无限反向链，这与公理 2.2 矛盾。因此，该展开是有限的。将重复状态合并后，即得到一个有限的可计算有向无环图。□

假设 2.3 (依赖与推理的一致性)。固定一个有限的 $B \subseteq \mathbb{S}_O$。对于每个 $s \in \mathbb{S}_O \setminus B$，$P_O(s)$ 与以 s 为结论的某个固定范式单步推理中的直接前提一致。B 中的元素无需通过推理得出。

定义 2.3 (相对于基底的推导深度)。设 $B \subseteq \mathbb{S}_O$ 为有限集。在假设 *2.3* 下：

$$Dd(s \mid B) := \begin{cases} 0, & s \in B, \\ 1 + \max\limits_{s' \in P_O(s)} Dd(s' \mid B), & otherwise, \end{cases} \tag{2.2}$$

其最大值为 $\max \varnothing := 0$。

定理 2.1 (Dd 的良定义性与可计算性)。设 $B \subseteq \mathbb{S}_O$ 为有限且可有效判定的集合。在假设 *2.3* 和公理 *2.1–2.2* 下，对于每个 $s \in \mathbb{S}_O$，$Dd(s \mid B)$ 都是唯一、有限、可计算的非负整数。

证明。命题 2.2 给出了一个有限的有向无环图；自底向上动态规划可计算 Dd。□

定义 2.4（内在深度与操作深度）。对于 $A := Atom(S_O)$ 和 $q \in Cn(A)$：$n_{\mathrm{int}}(q) := Dd(q \mid A)$，$n_{\mathrm{op}}(q) := Dd(q \mid S_O)$。由于 $A \subseteq S_O$，$n_{\mathrm{op}}(q) \le n_{\mathrm{int}}(q)$。

B. 推导有向无环图、层次与基事实依赖

定义 *2.5*（规范推导有向无环图）。对于 $q \in Cn(B)$，有向无环图 $G(q, B)$ 的顶点集为 $V(G)$（包含 q 且在前驱下封闭的最小集合），边集为 $E(G) := \{(v, v') : v \notin B,\ v' \in P_O(v)\}$，根为 q，叶为 $V_0(G) := V(G) \cap B$。

定义 2.6（深度层次与宽度分布）。对于 $G = G(q, B)$，其中 $d := Dd(q \mid B)$：深度层 $V_\ell := \{v \in V(G) : Dd(v \mid B) = \ell\}$；层宽度 $w_\ell := |V_\ell|$；最大宽度 $W_{\max} := \max_{1 \le \ell \le d} w_\ell$；总工作量 $W := \sum_{\ell=1}^{d} w_\ell$。

定义 2.7（依赖计数与头部元数）。设 $q \in Cn(B)$ 与 $G(q, B)$ 为规范推导有向无环图（定义 *2.5*）。

(i) 不同的基础事实依赖计数是

$$\kappa(q, B) := |V_0(G(q, B))| = |V(G(q, B)) \cap B|.$$

该计数统计了不同的*EDB* 事实中在 B 中作为叶出现的事实。

(ii) 对于定义 *2.8–2.9* 中的具体查询族，每个 *IDB* 查询 q 具有固定的头部元组长度（元数），记为 $a(q)$。对于深度为 d 的查询，记 $a(\Pi, d)$ 为架构 Π 下深度为 d 的查询的元数。对于 Π_k，$a(\Pi_k, d) = k + d - 1$；对于 $\Pi_k^{\parallel}$，$a(\Pi_k^{\parallel}, d) = k \cdot 2^{d-1}$。

(iii) 始终有 $\kappa(q, B) \le a(q)$。对于所有头部坐标两两不同的不同坐标子族，等号成立。

C. 推导架构

本文的定量结果针对一元 EDB B 上的两个 Datalog 程序建立：$= \{A(i) : i \in [m]\}$，其中有 m：$= |B| \ge 2$。两个程序均使用规则集 R，其具有 $r := |R| = 2$ 以及最大元数 k。

定义 2.8（元组组装链程序 Π_k）。固定 $k \ge 2$。*IDB* 关系 T_d 的元数为 $d \ge k$。基础规则：$T_k(x_1, \ldots, x_k) \leftarrow A(x_1) \ldots, A(x_k)$。扩展规则：$T_{d+1}(\vec{x}, x_{d+1}) \leftarrow T_d(\vec{x})\ A(x_{d+1})$。

定义 2.9（平衡合并程序 $\Pi_k^{\parallel}$）。固定 $k \ge 2$。*IDB* 关系 R_d 的元数为 $k \cdot 2^{d-1}$。基础规则：$R_1(x_1, \ldots, x_k) \leftarrow A(x_1) \ldots, A(x_k)$。合并规则：$R_{d+1}(\vec{x}, \vec{y}) \leftarrow R_d(\vec{x})\ R_d(\vec{y})$，其中 $|\vec{x}| = |\vec{y}| = k \cdot 2^{d-1}$。

定义 2.10（忠实规则）。 如果 *Datalog* 规则的每个体变量都出现在头部中，则该规则是忠实的，因此头元组可以唯一确定体实例化。

引理 2.1 (Π_k的忠实性）。 Π_k 的每条规则都是忠实的。如果 $T_d(i_1, \ldots, i_d)$ 可由 B推导得出，则其推导轨迹由元组 $(i_1, \ldots, i_d)$唯一确定。

证明。每条规则都将所有体变量置于头部。唯一性可通过对 d进行归纳得到：头元组确定体实例化（$T_{d-1}(i_1, \ldots, i_{d-1})$ $A(i_d)$），而根据归纳假设，$T_{d-1}(\ldots)$的推导轨迹是唯一的。

□

引理 2.2 ($\Pi_k^{\|}$的忠实性）。 $\Pi_k^{\|}$ 的每条规则都是忠实的。如果 $R_d(i_1, \ldots, i_{k\cdot 2^{d-1}})$ 可由 B推导得出，则其推导轨迹由该元组唯一确定。

证明。与引理 2.1 类似：合并规则将所有体变量置于头部；由于每个头元组都确定了两个体实例化，因此可通过对 d 进行归纳得出唯一性。 □

命题 2.3 (Π_k的计数与结构）。对于具有 $|B| = m \geq 2$ 且深度为 $d \geq 1$ 的 Π_k，定义深度为 d 的查询集

$$\mathcal{Q}_d := \{T_{k+d-1}(i_1, \ldots, i_{k+d-1}) : (i_1, \ldots, i_{k+d-1}) \in [m]^{k+d-1}\}.$$

则：
(i) $|\mathcal{Q}_d| = m^a$ 的头部元数为 $a = a(\Pi_k、\ B、\ d) = k + d - 1$。
(ii) 每个推导有向无环图 $G\,(q, B)$ 是一条具有 $w_\ell = 1$ 的路径。
(iii) 其二 不同依赖数量满足 $\kappa(q, B) \leq a$，当且仅当 $i_1, \ldots, i_a$ 两两不同时取等号 *ct.*

证明。 一条链通过 d 步构造出 $[m]^{k+d-1}$ 上的 T_{k+d-1} 元组；忠实性（引理 2.1）保证了唯一性和极小性。

□

Lem引理 2.3 (不同坐标分数)。 令 $a \geq 1$，并从 $[m]^a$ 中均匀抽取 $(I_1, \ldots, I_a)$。 *n*

$$\Pr[\exists\, r < s :\ I_r = I_s] \leq \binom{a}{2}\frac{1}{m}.$$

因此，若 $a = o(\sqrt{m})$，则当 $m \to \infty$ 时，不同坐标分数趋于 1 。特别地，对于从 $\mathcal{Q}_d$ （链）或 $\mathcal{Q}_d^{\|}$ （合并）中均匀随机抽取的深度为 d 的查询，当 $a(\Pi, d) = o(\sqrt{m})$ 时，以概率 $1 - o(1)$ 有 $\kappa(q, B) = a(q)$ 。

证明。 对所有 $\binom{a}{2}$ 个配对应用并合界：$\Pr[I_r = I_s] = 1/m$。

□

定义 2.11 (非碰撞查询)。 查询 $q = R_d(\vec{i}) \in \mathcal{Q}_d^{\|}$ 若在每一步合并中，两个体实例化都是不同的基事实，则称其为非碰撞。

引理 2.4 (无碰撞分数)。 对于 $\Pi_k^{\|}$，当 $|B| = m \geq 2$ 且 $d \geq 2$ 时，$|\mathcal{Q}_d^{\|} \setminus \mathcal{Q}_d^{\mathrm{nc}}|/|\mathcal{Q}_d^{\|}| \leq 2^d/m^k$。对于 $d \leq c$对数$_2\, m$，当 $c < k$ 时，无碰撞分数趋于1。

证明。 推导树有 $2^{d-1} - 1$ 个合并节点；在每个节点处，发生碰撞的概率为 $\leq m^{-k}$；应用并合界。

□

命题 2.4 (关于 $\Pi_k^{\|}$ 的计数与结构)。 对于 $\Pi_k^{\|}$，当 $|B| = m$ 且 $d \geq 1$ 时：(i) $|\mathcal{Q}_d^{\|}| = m^{k\cdot 2^{d-1}}$。(ii) 对于非碰撞查询，$G(q, B)$ 是高度为 d 的完全二叉树，且具有 $w_\ell = 2^{d-\ell}$。(iii) 对于所有查询，$w_\ell \leq 2^{d-\ell}$。(iv) 对于非碰撞查询，$W_{\max} = 2^{d-1}$ 且 $W = 2^d - 1$。(v) $\kappa(q, B) \leq a$，其中 $a = a(\Pi_k^{\|}, B, d) = k \cdot 2^{d-1}$；若头部坐标两两不同，则取等号。

定义 2.12 (定量泛性)。 若查询 q 在 $\mathcal{Q}$ 中具有 $|\mathcal{Q}| = M$，则称其为 η-泛型，当且仅当 $K(q \mid \langle B\rangle) \geq \log M - \log(1/\eta)$。至少有 $1-\eta$ 比例的 $\mathcal{Q}$ 是 η-泛型。

推论 2.1 (联合典型性)。 **</style}中同时满足非碰撞和(**$1/m$)-泛型(定义 2.12) 的比例为 $\geq 1 - 1/m - 2^d/m^k$；当 $d = o(k\log_2 m)$ 且 $m \to \infty$时，该比例趋近于1 。

D. 编码定理：逐步信息与容量分离

定义 2.13 (有限基的规范自定界编码)。 固定有限知识库上的规范顺序（假设 *2.1*）。对于任意有限前提基 $B = \{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq \mathbb{S}_O$，令 $\langle B\rangle$ 表示有序列表的一种固定前缀无关二进制编码($\mathit{enc}_O(b_1) \ldots, \mathit{enc}_O(b_m)$)，使用标准的自定界方案（例如，˜ ˜对每个 $\mathit{enc}_O(b_i)$ 进行长度前缀编码，然后串接）。类似地，我们将任意有限噪声基 B 编码为 $\langle B\rangle$。

所有 *Kolm* *ogorov* 复杂度 $K(\cdot \mid \cdot)$ 均相对于一台固定的通用前缀机定义 *ne*
以及固定的d 编码约定 $\langle\cdot\rangle$。

全文中，$\log := \log_2$ 和 $K(\cdot \mid \cdot)$ 表示相对于固定通用机 [7] 的前缀无条件柯尔莫哥洛夫复杂度。

定义 2.14（信息丰富区域）。 若实例族 (q, B) 满足以下条件，则属于信息丰富区域：$K(q \mid \langle B \rangle) = \omega(\log m)$ 当 $m \to \infty$时。

引理 2.5（链式编码）。 长度为 $n \geq 1$ 、来自 B 且满足 $|B| = m$ 的链式轨迹，具有长度为 $\kappa \log m + O(n)$ 的前缀无编码，其中 $\kappa = k+n-1$ 为有效基选择计数。

证明。 每个步骤编码一个规则标识符（$\lceil \log r \rceil$ 比特）和基前提指针（$k_j \lceil \log m \rceil$ 比特）；IDB 指针是确定的。 □

定理 2.2（链式推导紧致编码定理（CT1））。 对于 Π_k 满足 $|B| = m \geq 2$， $q \in \mathcal{Q}_d$ 满足$d \geq 1$，以及 $\kappa := k+d-1$：

$$\kappa \log m - \log m - O(1) \;\leq\; K(q \mid \langle B \rangle) \;\leq\; \kappa \log m + O(d). \tag{2.3}$$

该下界至少以 $1-1/m$ 的比例成立。对于处于$\log m, d \to \infty$:$K(q \mid \langle B \rangle) = (1+o(1))\kappa \log m$这一范围内的$(1/m)$一般查询，每个推导步骤恰好贡献$\log m$ 比特。

证明。上界。引理 2.5 给出 $K \leq \kappa \log m + O(d)$。

下界。 由于 $|\mathcal{Q}_d| = m^\kappa$（命题 2.3）且 $|\{x : K(x \mid y) < \ell\}| < 2^\ell$，令 $\ell = \kappa \log m - \log m$，可知复杂度低于 ℓ 的查询少于 $m^{\kappa-1}$ 个，因此可压缩比例为 $< 1/m$。 □

假设 2.4 (可序列化深度见证)。 $c_{\min} \mathit{Dd}(q \mid B) \leq N(q \mid B) \leq c_{\max} \mathit{Dd}(q \mid B)$ 对常数$c_{\min}$、 $c_{\max} > 0$成立，其中 $N(q \mid B)$ 是最小推导轨迹长度。对于 Π_k 和 $\Pi_k^{\parallel}$，取 $c_{\min} = c_{\max} = 1$ 时该结论均成立。

定理 2.3 (推导深度作为信息度量)。 在假设 2.4 下，对于满足 $\mathit{Dd}(q \mid B) \geq 1$ 的一般查询： $K(q \mid \langle B \rangle) = \Theta(\mathit{Dd}(q \mid B) \cdot \log(m + \mathit{Dd}(q \mid B)))$。

证明。 根据定理 2.2， $K = (1+o(1))\kappa \log m$ 适用于一般查询。假设 2.4 给出 $N = \Theta(\mathrm{Dd})$；对于Π_k，$\kappa = k+\mathrm{Dd}-1 = \Theta(\mathrm{Dd})$，且当 $\mathrm{Dd} = O(\mathrm{poly}(m))$ 时，每步的编码成本为 $\Theta(\log m) = \Theta(\log(m+\mathrm{Dd}))$。 □

定理 2.4（深度可达容量分离（CT2））。 定义 $C(\Pi, B, d) := \log |\{q : \mathit{Dd}(q \mid B) = d\}|$。则：

（*I*）链。 $C(\Pi_k, B, d) = (k+d-1) \log m$。（*II*）合并。 $C(\Pi_k^{\parallel}, B, d) = k \cdot 2^{d-1} \log m$。（*III*）指数分离。 $C(\Pi_k^{\parallel}, B, d)/C(\Pi_k, B, d) = k \cdot 2^{d-1}/(k+d-1) \to \infty$。（*IV*）等工作量守恒。两种架构在总工作量为 W 时，均产生 $\Theta(W \log m)$ 比特；差距体现在单位深度的信息量上，而非单位工作量的信息量上。

证明。 **(I) 链**。 根据命题 2.3(i)，深度-d 头部元数为 $a = k + d - 1$ 和 $|\mathcal{Q}_d| = m^a$。因此$C(\Pi_k, B, d) = \log |\mathcal{Q}_d| = a \log m = (k + d - 1) \log m$。

(II) 合并。 根据命题 2.4(i)，深度-d 头部元数为 $a = k \cdot 2^{d-1}$ 和 $|\mathcal{Q}_d^{\parallel}| = m^a$。因此 $C(\Pi_k^{\parallel}, B, d) = a \log m = k \cdot 2^{d-1} \log m$。

(III) 分离。 由比率 $k \cdot 2^{d-1}/(k + d - 1) \to \infty$ 直接得出，因为 $d \to \infty$。

(IV) 等工作量备注。 对于 Π_k, $W = \Theta(d)$ 和 $C = \Theta(W \log m)$。对于非碰撞的 $\Pi_k^{\parallel}$，命题 2.4(iv) 给出 $W = 2^d - 1$，而 $C = \Theta(2^d \log m) = \Theta(W \log m)$。 □

$q \mid B$ 的推导深度 Dd 与并行求值深度一致：即自底向上求值中从 B开始所需的同步轮次。

命题 2.5（Dd 等于并行求值深度）。 在假设 *2.3* 下， q*from* B 的并行求值深度等于 $\mathit{Dd}(q \mid B)$。

证明。 这两个量满足相同的递推关系： B 中的事实在第 0 轮求值，而非基事实在其所有前驱均可用后的下一轮求值。唯一解为 (2.2)。 □

E. 分层存储–深度权衡

定义 2.15 （层前缀缓存）。 对于 $G = G(q, B)$ 且 $d = Dd(q \mid B)$ 以及 $\ell_0 \in \{0, \ldots, d\}$: $S_{\ell_0} := \{v \in V(G) : 1 \le Dd(v \mid B) \le \ell_0\}$。

命题 2.6 （深度缩减）。$Dd(q \mid B \cup S_{\ell_0}) = d - \ell_0$。

定理 2.5 （分层帕累托曲线）。 设 $r := |R|$ 为规则数量， $M_\ell := m + \sum_{j=1}^{\ell-1} w_j$ 为第 ℓ 层的累积池大小。定义逐层信息量 $I_\ell := w_\ell(k \log M_\ell + \log r)$ 以及累积信息量 $I(\ell_0) := \sum_{\ell=1}^{\ell_0} I_\ell$。带参数 $(d, W_{\max})$ 的层前缀策略可达到存储 $O(d - \ell_0)$ 与剩余深度 $\Pi_k(\Theta(m))$ 比特/深度单位）；对于 $\Pi_k^{\|}$，则呈指数式前置（缓存第 1 层的代价为 $\Theta(K/2)$，但深度仅减少 1）。

F. 存储–计算权衡

定义 2.16 (成本模型)。 存储成本为 $\rho_s := \alpha/\beta$ 每比特（归一化）；计算成本为每个推导步骤 1 。对于在一个时间范围内被访问 f_q 次的查询 q： 缓存的成本为每次访问 $\rho_s \cdot \ell_q / f_q + O(1)$ ，其中 $\ell_q = K(q \mid \langle B \rangle) + O(1)$；按需推导的成本为每次访问 $Dd(q \mid B)$ 。

定理 2.6 (临界频率 (CT3))。 在假设 2.4和信息丰富区域下，盈亏平衡频率为

$$f_c = \Theta(\rho_s \cdot \log(m+d)). \tag{2.4}$$

对于 $f_q \gg f_c$，缓存是最优的；对于 $f_q \ll f_c$，按需推导是最优的。

G. 表示不变性

一项基础要求是，编码定理衡量的是信息量，而非表示伪影。

定义 2.17 （推理系统与对齐双解释）。 一个推理系统 $\mathfrak{I} := (S_O, P_O, B)$ 将状态集与前驱算子和基础集配对。一个对齐双解释 $\Phi = (\tau, \bar{\tau})$： $\mathfrak{I}_1 \rightleftharpoons \mathfrak{I}_2$ 由见证同义性 $S_O^{(1)} \equiv_{\mathcal{L}} S_O^{(2)}$ 的组合解释构成，并且额外满足基底保真性（$|B_1| = |B_2| = m$）、查询对应性，以及带膨胀（δ_τ、 $\delta_{\bar{\tau}}$）的推导相容性。当 $\delta_\tau = \delta_{\bar{\tau}} = 1$、 Φ 是等距的时。

定理 2.7 （表示不变性）。 在具有膨胀（δ_τ、 $\delta_{\bar{\tau}}$）：

（a）深度夹逼。$Dd\Pi_1(q \mid B_1)/\delta_\tau \le Dd\Pi_2(q^\tau \mid B_2) \le \delta_\tau \, Dd\Pi_1(q \mid B_1)$。（b）复杂度不变性。 $|K(q \mid \langle B_1 \rangle) - K(q^\tau \mid \langle B_2 \rangle)| \le O(|\tau| + |\bar{\tau}|)$。（c）等距强化。 $\delta_\tau = \delta_{\bar{\tau}} = 1$ 给出精确的深度相等性。

定理 2.8 (核心定理迁移)。 全部四个编码定理(本节的 *CT1–CT3* 以及定理3.7) 都可在具有膨胀有界失真的同义表示之间迁移：*CT1* 的编码常数按 $[\kappa_1/\delta_\tau, \kappa_1\delta_\tau]$变换；*CT2* 的容量满足 $C_1(\lfloor d/\delta_\tau \rfloor) \le C_2(d) \le C_1(\delta_\tau \cdot d)$；*CT3* 的临界频率满足 $f_c^{(1)}/\delta_\tau \le f_c^{(2)} \le \bar{\delta}_\tau \, f_c^{(1)}$；*CT4* 的缓存大小至多改变 $\delta_\tau \bar{\delta}_\tau$。在等距条件下，所有量都完全保持不变。 Θ级规律和定性二分是同义类 $[\mathfrak{I}]_{\equiv_{\mathcal{L}}}$的典范不变量。

a) 噪声信息： 第三至第七节所使用的噪声模型是定义 A.7 中的噪声语义基： 对于给定的 $S_O \subseteq \mathbb{S}_O$，任意集合 $\tilde{S}_O := (S_O \setminus S_O^-) \cup S_O^+$，其中包含 $S_O^- \subseteq S_O$（丢失的）和 $S_O^+ \subseteq \mathbb{S}_O \setminus S_O$（伪增）。仅存在丢失时（$S_O^+ = \varnothing$），$\mathrm{Cn}(\tilde{S}_O) \subseteq \mathrm{Cn}(S_O)$ 且 $\mathrm{Dd}(q \mid \tilde{S}_O) \ge \mathrm{Dd}(q \mid S_O)$（定理 3.1(I)）；上述表示不变性结果通过命题 A.1 延伸至这一噪声情形。

III. 前提擦除下的存储–韧性容量

当基础前提集遭受随机丢失时，在线推导引擎面临一个根本性的矛盾：更深层的查询依赖更多基础事实，而这些事实中的每一个都可能被擦除；然而，预先存储所有依赖项，又会耗尽推导本想节省的存储预算。本节将解决这一矛盾，针对的是推导约束式 解码器——它们必须利用存留前提和可靠的中间逻辑事实缓存来推导查询答案。

主要结果是存储–韧性容量定理（定理 3.7，CT4）： 在擦除率为 ε 的独立同分布前提擦除下，对于韧性目标 δ，具有 κ 个基础事实依赖项的一般查询所需的最小可靠缓存为 $\sigma^* = (\kappa - N^*) \log m + O(\kappa)$ ，其中 $N^* \approx \delta/\varepsilon$。在此处及全文中，CT4 中的 κ 表示不同的依赖项

数量 $\kappa(q,\ B)$（定义 2.7）。剩余的 $N^*\log\ m$ 比特代表易擦除基础集的“信道容量”——无需缓存即可可靠传输的信息。第四节将比较这一推导约束最优值与编码缓存最优值 $\sigma^*_{\text{code}} = \varepsilon\kappa\log\ m$，从而揭示推导惩罚 $1/\varepsilon$。

在全文中，用于计算 Dd(· | B) 的每个含噪基础集 B 都是有限的，且其成员资格可判定，因此定理 2.1 适用。

A. 前提扰动与收缩–扩张二分

我们首先将噪声模型置于第二节的形式化框架中，然后确立 Cn(·) 和 Dd(· | ·) 在集合层面的扰动下的单调行为。

命题 3.1（作为形式化噪声框架中实例的含噪前提基底）。设 $\mathcal{I}$ 是一个信息实例（定义 A.3），其中 S_O 有限，$B_0 \subseteq S_O \subseteq \mathbb{S}_O$ 是一个有限前提基，$B_0^- \subseteq B_0$ 和 $B_0^+ \subseteq \mathbb{S}_O \setminus B_0$ 有限，且 $\tilde{B}_0 := (B_0 \setminus B_0^-) \cup B_0^+$。那么：(i) $\tilde{B}_0$ 是一个噪声语义基（定义 A.7）；(ii) $\tilde{B}_0$ 有限，且可有效判定；(iii) $Dd(s \mid B_0)$ 对每个 $s \in \mathbb{S}_O$ 都定义良好且可计算；(iv) $Cn(B_0)$ 定义良好，且查询划分（定义 3.2）由 $Cn(\cdot)$ 的单调性决定。

证明。(i) 由假设 A.2 得出。(ii) 利用 $B_0\ B_0^-\ B_0^+$ B_0 ,,的有限性以及公理 A.3(R1) 中成员资格的可判定性。(iii) 应用定理 2.1，其中 $B := B_0$。(iv) 利用假设 A.1 以及 Cn 的单调性。□

定义 3.1 (含噪前提基底（基线参数化）)。固定一个有限基线 $B_0 \subseteq \mathbb{S}_O$。含噪前提基底是 $\tilde{B}_0 := (B_0 \setminus B_0^-) \cup B_0^+$，其中 $B_0^- \subseteq B_0$（丢失的）和 $B_0^+ \subseteq \mathbb{S}_O \setminus B_0$（伪增）。记 $B_\cap := B_0 \setminus B_0^-, \ell := |B_0^-|, p := |B_0^+|, \mathcal{N} := \ell + p$。

假设 3.1 (有界且可有效描述的噪声)。存在一个可计算族 $\{\mathcal{V}_s\} \subseteq \mathbb{S}_O$，其 $|\mathcal{V}_s| \le \text{poly}(s)$ 且 $B_0 \cup B_0^+ \subseteq \mathcal{V}_{m+\mathcal{N}}$；给定 $\langle B_0\rangle$ 或 $\langle\tilde{B}_0\rangle$中的任意一个，集合 B_0^-、B_0^+均可用总长度为 $O(\mathcal{N}\log(m+\mathcal{N}))$的索引列表描述。

定义 3.2（可靠、伪增和丢失查询集）。 $\mathcal{Q}_{\text{sound}} := Cn(B_0) \cap Cn(\tilde{B}_0)$, $\mathcal{Q}_{\text{spur}} := Cn(\tilde{B}_0) \setminus Cn(B_0)$, $\mathcal{Q}_{\text{lost}} := Cn(B_0) \setminus Cn(\tilde{B}_0)$。

定义 3.3 (一致性)。若有限前提基 B 的 $Cn(B)$不是所有合式公式构成的集合，则称其一致。

a) 单调性引理：

引理 3.1（前提基单调性）。如果 $B_1 \subseteq B_2$，那么对于每个 $s \in \mathbb{S}_O$，$Dd(s \mid B_2) \le Dd(s \mid B_1)$。

证明。对 Dd($s \mid B_1$) 使用良基归纳。如果 $s \in B_1$，那么 $s \in B_2$ 也成立，因此 Dd($s \mid B_2$) $= 0 =$ Dd($s \mid B_1$)。如果 $s \in B_2 \setminus B_1$，那么 Dd($s \mid B_2$) $= 0 \le$ Dd($s \mid B_1$)。如果 $s \notin B_2$，那么 $s \notin B_1$ 并且

$$\text{Dd}(s \mid B_2) = 1 + \max_{s' \in P_O(s)} \text{Dd}(s' \mid B_2) \le 1 + \max_{s' \in P_O(s)} \text{Dd}(s' \mid B_1) = \text{Dd}(s \mid B_1),$$

其中，该不等式是将归纳假设应用于每个 $s' \in P_O(s)$ 得出的（其中 Dd($s' \mid B_1$) $<$ Dd($s \mid B_1$)）。□

引理 3.2 (基转换描述长度)。在假设 *3.1* 下，$K(\langle B_0\rangle \mid \langle B_0\rangle) = O(\mathcal{N}\log(m+\mathcal{N}))$ 且 $K(\langle B_0\rangle \mid \langle B_0\rangle) = O(\mathcal{N}\log(m+\mathcal{N}))$。

证明。用 $\mathcal{V}_{m+\mathcal{N}}$ 上的索引列表来描述 $B_0^- \cup B_0^+$。□

b) 收缩–扩张二分：

定理 3.1 (收缩–扩张二分)。设 B_0 是有限且一致的，$B_0 = (B_0 \setminus B_0^-) \cup B$ $_0^+$.

(I) 仅损失（$B_0^+ = \varnothing$）。*Cn*($\tilde{B}_0$) $\subseteq$ *Cn*(B_0)；$\mathcal{Q}_{\text{spur}} = \varnothing$；$\tilde{B}_0$ 一致；对于 $q \in$*Cn*(B_0)，*Dd*($q \mid \tilde{B}_0$) $\ge$ *Dd*($q \mid B_0$)；对于每个 $q \in \mathcal{Q}_{\text{lost}}$，$q \notin$*Cn*($B_0$)（没有外部前提便无法恢复）。*(II)* 仅污染（$B_0^- = \varnothing$）。*Cn*(B_0) $\supseteq$ *Cn*(B_0)；$\mathcal{Q}_{\text{lost}} = \varnothing$；对于 $q \in$ *Cn*(B_0)，*Dd*($q \mid B_0$) $\le$ *Dd*($q \mid B_0$)。如果某个$b^+ \in B_0^+$使$B_0 \cup \{b^+\}$不一致，那么 *Cn*($\tilde{B}_0$) 就是所有合式公式的集合。*(III)* 组合噪声。不保证任何一个单调性方向；三类查询都可能非空。

证明。(I) $B_0 = B_\cap \subseteq B_0$ $B_0 \subseteq B_0$ B_0；由 Cn 的单调性可得 Cn( ) Cn( )。一致性：的任意模型都满足 B_0。深度增加：引理 3.1。(II) $B_0 \supseteq B_0$；由 Cn 的单调性可得扩张。深度降低：引理 3.1。一致性灾难：由矛盾可推出任意命题。(III)相互竞争的效应。□

B. 损失–计算二元性

本小节确立了丢失的存储与增加的计算之间一种对位置敏感的兑换关系。当丢失的前提可由剩余基础集重构时（例如，核心为 $A \subseteq B_\cap$ 的操作捷径$J \subseteq \mathsf{Cn}(A)$），这种对偶关系适用；当丢失不可冗余的核心前提时，韧性需要可靠的预存储，这一点将通过第三节 III-D 节中的脆弱性命题和 CT4 予以形式化。

定义 3.4 (全局重构深度)。 令 $B_0^- \subseteq B_0$ 和 $B_\cap := B_0 \setminus B_0^-$。重构深度 为$d_{\mathrm{rec}} :=$ 最大值$^{b\in B_0^-}$ $\mathit{Dd}(b \mid B_\cap)$，其中 $d_{\mathrm{rec}} := 0$ 若 $B_0^- = \varnothing$，且 $d_{\mathrm{rec}} := \infty$ 若某个丢失的前提无法从 $B_\cap$ 推导得出。

定理 3.2 （损失–计算二元性）。 令 $B_0^- \subseteq B_0$， $B_\cap = B_0 \setminus B_0^-$， $q \in \mathit{Cn}(B_\cap)$。（I）深度偏移。

$$\mathit{Dd}(q \mid B_0) \;\le\; \mathit{Dd}(q \mid B_\cap) \;\le\; \mathit{Dd}(q \mid B_0) + d_{\mathrm{rec}}. \tag{3.1}$$

（II）若 $B_0^- \cap V_0(G(q,\ B_0)) = \varnothing$ （依赖集中没有出现丢失的事实），则 $\mathit{Dd}(q \mid B_\cap) = \mathit{Dd}(q \mid B_0)$。（III）在组合噪声 $\tilde{B}_0 = (B_0 \setminus B_0^-) \cup B_0^+$: $\mathit{Dd}(q \mid \tilde{B}_0) \le \mathit{Dd}(q \mid B_\cap) \le \mathit{Dd}(q \mid B_0) + d_{\mathrm{rec}}$。

证明。 (I) 下界由引理 3.1（$B_\cap \subseteq B_0$）给出。对于上界，我们通过对 $\mathsf{Dd}(v \mid B_0)$ 进行良基归纳，证明对于 q 的反向展开中的每个 v，都有 $\mathsf{Dd}(v \mid B_\cap) \le \mathsf{Dd}(v \mid B_0) + d_{\mathrm{rec}}$。

基础情形。$v \in B_0$。 若 $v \in B_\cap$，则 $\mathsf{Dd}(v \mid B_\cap) = 0 \le 0 + d_{\mathrm{rec}}$。 若 $v \in B_0^-$，则 $\mathsf{Dd}(v \mid B_\cap) \le d_{\mathrm{rec}} = 0 + d_{\mathrm{rec}} = \mathsf{Dd}(v \mid B_0) + d_{\mathrm{rec}}$ 根据定义 3.4。

归纳步骤。 $v \notin B_0$。 每个 $v' \in P_O(v)$ 都满足 $\mathsf{Dd}(v' \mid B_0) < \mathsf{Dd}(v \mid B_0)$；由归纳假设，$\mathsf{Dd}(v' \mid B_\cap) \le \mathsf{Dd}(v' \mid B_0) + d_{\mathrm{rec}}$。 因此，$\mathsf{Dd}(v \mid B_\cap) = 1 + \max_{v'} \mathsf{Dd}(v' \mid B_\cap) \le \mathsf{Dd}(v \mid B_0) + d_{\mathrm{rec}}$。 将其特化到$v := q$，得到 (3.1)。

(II) 从 B_0 到 q 的推导仅使用 $B_\cap$ 中的前提；等号由引理 3 得出 .1.
(III) $B_\cap \subseteq B_0$ 根据引理 3.1 得出第一个不等式；第二个不等式由 (I) 得出。 □

定理 3.3 (信息论形式)。 在定理 *3.2* 的假设、信息丰富区域(定义 2.14)以及假设 *2.4* 下，对于一般查询:

$$K(q \mid \langle B_\cap \rangle) \;=\; \Theta\big(\mathit{Dd}(q \mid B_\cap) \cdot \log(\tilde{m} + \mathit{Dd}(q \mid B_\cap))\big) \;=\; K_q + O(\mathcal{N} \log(m + \mathcal{N})), \tag{3.2}$$

其中 $\tilde{m} = |B_\cap|$ 和 $K_q := K(q \mid \langle B_0 \rangle)$。

证明。 第一个等式是将定理 2.3 应用于 $(q,\ B_\cap)$ 得出的；第二个等式由引理 3.2 得出。 □

C. 紧致噪声编码定理

定义 *3.5*（噪声查询集）。令 Π_k 具有基础集 B，其中 $|B| = m \ge 2$、 $B^- \subseteq B$ （$|B^-| = \ell$） 、 $B^+ \subseteq \mathbb{S}_O \setminus B$ （$|B^+| = p$） 、 $\tilde{B} :=$ （$B \setminus B^-$） $\cup B^+$，其中 $\tilde{m} := m - \ell + p \ge 2$。对于 $n \ge 1$: $\tilde{\mathcal{Q}}_n := \{T_{k+n-1}(\vec{i}) : A(i_j) \in \tilde{B}\ \forall j\}$ 以及 $\mathcal{Q}_n^{\mathrm{sound}} := \{q \in \tilde{\mathcal{Q}}_n :$ 所有 $A(i_j) \in B \setminus B^-\}$。

定理 3.4 （紧致噪声编码定理）。 根据定义 *3.5*，在 $\tilde{\kappa} := k + n - 1$ 和 $\varepsilon := \ell/m$的条件下:

（I） $|\tilde{\mathcal{Q}}_n| = \tilde{m}^{\tilde{\kappa}}$；对于一般查询， $K(q \mid \langle \tilde{B} \rangle) =$ （$1 + o$（1））$\tilde{\kappa}$对数 $\tilde{m}$.

(II) $\log \tilde{m} = \log m + \log(1-\varepsilon) + \log((m-\ell+p)/(m-\ell))$。

(III) $|\mathcal{Q}_n^{\mathrm{sound}}|/|\tilde{\mathcal{Q}}_n| = ((m-\ell)/\tilde{m})^{\tilde{\kappa}}$。 ˜(IV) $C(B,\ n) - C(B,\ n) = \tilde{\kappa} \log(\tilde{m}/m)$。

˜证明。 将定理 2.2 应用于 Π_k，其基础集 B 的大小为 $\tilde{m}$；通过命题 2.3 进行计数。 □

推论 3.1 (噪声平衡区制)。 当 $\ell = p$: $\tilde{m} = m$ 时，容量保持不变，但正确比例为$(1-\varepsilon)^{\tilde{\kappa}}$——对于固定的 $\varepsilon > 0$，它呈指数级小。

D. 随机擦除与存储–韧性容量定理

a) 基础事实依赖： 我们使用不同依赖计数 $\kappa(q,\ B)$ 和头部元数 $a(q)$，如定义 2.7 所示。对于两种架构，深度为 d 的头部元数分别为 $a(\Pi_k,\ d) = k+d-1$ 和 $a(\Pi_k^{\|},\ d) = k \cdot 2^{d-1}$。在使用独立同分布擦除存活概率 $(1-\varepsilon)^{\kappa(q,B)}$时，我们明确假设依赖项互不相同 （即， $\kappa(q,\ B)$ 是不同叶节点的数量），或者将分析限制在不同坐标子族上，其中$\kappa(q,\ B) = a(q)$。

引理 3.3 （ κ 对忠实程序的极小性）。 设 Π 是忠实的，且具有唯一推导轨迹（该条件由 Π_k 与 $\Pi_k^{\|}$ 根据引理2.1 和 2.2）满足。则 G（$q,\ B$） 是 $q,\ \kappa$（$q,\ B$） $= |V_0$（G（$q,\ B$））|的唯一规范推导有向无环图，并且命题2.3 与 2.4(v) 中的取值成立。

证明。 忠实性与唯一的定义规则使该迹由头元组唯一确定，其依据是对深度的归纳法。

□

b) 独立同分布擦除信道与韧性：

定义 3.6（独立同分布前提擦除信道）。 每个 $b_i \in B$ 以概率 $\varepsilon \in$ （0，1）独立擦除，从而得到带有 $\mathbb{E}[|B|] =$ （$1-\varepsilon$）的 $B \subseteq B\, m$。查询 q 原生存活，若 V_0（G（q，B））$\subseteq B$。解码器观测缓存 S （可靠）以及 B。每个实现都是仅损失型噪声基底（命题 3.1），因此定理 *3.1*（I）保证可靠性。

定义 3.7（韧性阈值）。 N^*（ε，δ）：$=\lfloor \ln(1/(1-\delta))/\ln(1/(1-\varepsilon)) \rfloor$。对于较小的 ε，δ：$N^* \approx \delta/\varepsilon$。

命题 3.2（存活概率）。 在擦除率为 ε的独立同分布擦除下，具有 κ 个不同基础事实依赖的查询以概率（$1-\varepsilon$）$^\kappa$ 原生存活，且当且仅当 $\kappa \le N^*$（ε，δ）时为原生 δ-韧性。

定义 3.8 (δ-韧性)。 缓存 $S \subseteq Cn(B)$ 使得 $T \subseteq Cn(B)$ δ-韧性成立当且仅当 $\Pr[T \subseteq Cn(B \cup S)] \ge 1-\delta$。

命题 3.3 (不可冗余核心的脆弱性)。 若 $a \in A := Atom(S_O)$ 且 $T \ni a$，则 $\Pr[T \subseteq Cn(A)] \le 1-\varepsilon$，由不可冗余性可知(命题 2.1(ii))。因此，T 不能在 $\delta < \varepsilon$ 的情况下满足 δ-韧性，除非 S 覆盖 a。

c) 结构性缓存刚性： 以下定理是反向定理的关键结构性要素：它表明，只有位于目标查询的推导有向无环图之内 的缓存事实才有助于韧性。

定理 3.5 (结构性缓存刚性)。 设 Π 是忠实的，具有唯一轨迹，并满足假设 *2.3*，$q \in Cn(B)$，$B \subseteq B$, $S \subseteq Cn(B)$。则

$$q \in Cn(\tilde{B} \cup S) \iff q \in Cn(\tilde{B} \cup (S \cap V(G(q, B)))). \tag{3.3}$$

证明。 ($\Leftarrow$) 显然成立。($\Rightarrow$)：对 $d :=$Dd($q \mid B$) 进行归纳。

基础情形 ($d = 0$)： $q \in B$。在 Π_k 和 $\Pi_k^{\|}$ 中，EDB 谓词 A 仅出现在规则体中，从未出现在规则头部；因此，任何规则都无法推导出 q，它必定已经属于 $B \cup S$。若 $q \in S$，则 $q \in V(G(q, B))$，因此 $q \in B \cup (S \cap V(G(q, B)))$。

步骤 ($d \ge 1$)：设 $P_O(q) = \{v_1, \ldots, v_a\}$。由忠实性和唯一轨迹可知，从 $B \cup S$ 推导出 q 的任何推导都必须应用同一条规则，且其体实例化为 $v_1, \ldots, v_a$；特别地，每个 v_i 都必须属于 Cn($B \cup S$)。对于每个 v_i：若 $v_i \in B$，则 $v_i \in$Cn($B \cup (S \cap V(G(q, B)))$)；若 $v_i \in S$，则 $v_i \in P_O(q) \subseteq V(G(q, B))$，因此 $v_i \in S \cap V(G(q, B))$；若 $v_i \notin B \cup S$，则可应用归纳假设，因为 Dd($v_i \mid B$) $\le d-1$ 且 $G(v_i, B) \subseteq G(q, B)$，从而得到 $v_i \in$Cn($B \cup (S \cap V(G(v_i, B)))$) $\subseteq$Cn($B \cup (S \cap V(G(q, B)))$)。应用唯一规则即可得到结论。 □

推论 *3.2*（吸收刻画）。定义有用缓存 $U(q, S) := S \cap V(G(q, B))$、已吸收叶集 $D_{\text{abs}}(q, S) := \bigcup_{f \in U} V_0(G(f, B))$，以及暴露叶集 $D_{\text{exp}}(q, S) := V_0(G(q, B)) \setminus D_{\text{abs}}(q, S)$。那么：*(i)* $q \in Cn(\tilde{B} \cup S)$ 蕴含 $D_{\text{exp}} \subseteq \tilde{B}$；*(ii)* $Pr[q \in Cn(\tilde{B} \cup S)] \le (1-\varepsilon)^{|D_{\text{exp}}|}$。

证明。(i) 根据定理 3.5，只有 U 相关；暴露叶不会由 U 提供，必须位于 B 中。(ii) 由于 $D_{\text{exp}} \subseteq V_0(G(q, B)) \subseteq B$，且 B 中的每个元素都会被独立擦除，因此 $\Pr[D_{\text{exp}} \subseteq \tilde{B}] = (1-\varepsilon)^{|D_{\text{exp}}|}$。结合 (i) 即得该界。

□

d) 条件编码与结构性逆命题：

引理 3.4（给定祖先缓存的条件编码）。在定理 *3.5* 的假设下，设 q 的不同依赖计数为 $\kappa = \kappa(q, B)$，且 $S \subseteq Cn(B)$。令 $j := |D_{\text{abs}}(q, S)|$ 为已吸收叶数量（推论 *3.2*）。那么

$$K(q \mid \langle B \rangle, S) \le (\kappa - j) \log m + O(\kappa).$$

证明。根据定理 3.5，不失一般性地可设 $S \subseteq V(G(q, B))$，因为将 S 替换为 $S \cap V(G(q, B))$ 不会改变 $q \in$ Cn($B \cup S$)，且只会减小 $K(S \mid \langle B \rangle)$。

在 $B = \{A(i)$ 上固定的规范顺序（$i \in [m]\}$ （假设 2.1））下，为 κ 的不同叶节点 $V_0(G(q, B)) = \{A(u_1) \ldots, A(u_\kappa)\}$ 固定一个规范枚举。给定 $\langle B \rangle$ 和 S 时，q 的描述由以下部分组成：

（i）一个 κ 比特的位掩码，用于指示 κ 个叶中哪些已暴露（因此有 $\kappa - j$ 个位置），占用 $O(\kappa)$ 比特；（ii）已暴露叶的标识（$[m]$ 中的索引），占用 $(\kappa - j)\lceil \log m \rceil$ 比特；（iii）一个 $O(\kappa)$ 比特的决胜字符串，用于在所有与（i）—（ii）及缓存事实 S 一致的候选项中选出目标查询 q（例如，通过在推导树的固定遍历顺序中指定对称合并步骤所需的左／右实例化）。

给定 $\langle B \rangle$、S 以及上述数据，通用解码器可以在候选对象上（无界地）搜索，并输出由决胜字符串指定的唯一目标。总描述长度为 $(\kappa - j)$ log $m + O(\kappa)$。 □

定理 3.6（忠实程序的结构性逆定理）。在速率为 ε、目标为 δ 的独立同分布擦除下，令$N^*:=N^*(\varepsilon,\delta)$。令 q为具有 $\kappa>N^*$ 个依赖项的 $(1/m)$-通有（定义 2.12）。任意 δ-弹性缓存$S\subseteq Cn(B)$ 满足

$$K(S\mid\langle B\rangle)\geq(\kappa-N^*)\log m-O(\kappa+\log m).\tag{3.4}$$

结构刚性（定理 *3.5*）至关重要：若无此性质，编码策略便可能违背坐标级核算。*Fano* 型逆定理 *[5,* 第 *2]* 章仅给出$\Omega(\kappa\varepsilon\log m)$，弱了 ε 倍。

证明。步骤 *1.* 设 $j:=|D_{\mathrm{abs}}(q,S)|$。由推论 3.2(ii)，$(1-\varepsilon)^{\kappa-j}\geq 1-\delta$，故 $j\geq\kappa-N^*$。

步骤 *2.* 前缀无歧义复杂度的链式法则 [7]：$K(q\mid\langle B\rangle)\leq K(S\mid\langle B\rangle)+K(q\mid\langle B\rangle,S)+O(\log K(q\mid\langle B\rangle))$。由引理 3.4，$K(q\mid\langle B\rangle,S)\leq(\kappa-j)\log m+O(\kappa)$。由 $(1/m)$-一般性，$K(q\mid\langle B\rangle)\geq\kappa\log m-\log m-O(1)$。

步骤 *3*。$K(S\mid\langle B\rangle)\geq(\kappa\log m-\log m-O(1))-((\kappa-j)\log m+O(\kappa))-O(\log(\kappa\log m))=j\log m-O(\kappa+\log m)\geq(\kappa-N^*)\log m-O(\kappa+\log m)$. □

e) 存储–韧性容量定理：

定理 3.7 (存储–韧性容量定理 (CT4))。设 Π在 *EDB* 基底B上具有唯一轨迹且忠实，$|B|=m\geq 2$在擦除率为 ε、目标为 δ的独立同分布擦除下成立。令 $N^*:=N^*(\varepsilon,\delta)$，且 q为具有 $\kappa\geq N^*$ 依赖项的$(1/m)$-泛型。

(I) 可达性。存在一种策略，使用 $\sigma=(\kappa-N^*)^+\log m+O(\kappa)$ 个可靠比特，使其具备 q δ-韧性。**(II)** 反向定理。任何具备 δ-韧性的缓存都满足 $K(S\mid\langle B\rangle)\geq(\kappa-N^*)\log m-O(\kappa+\log m)$。**(III)** 容量分解。

$$K(q\mid\langle B\rangle)=\sigma^*+N^*\log m+o(\kappa\log m),\tag{3.5}$$

其中，$\sigma^*:=(\kappa-N^*)\log m+O(\kappa)$ 是最小推导约束缓存，而 $N^*\log m$是易擦除基底的“信道容量”。

证明。**(I)** 对于 Π_k：缓存吸收 $\kappa-N^*$ 依赖项的分层前缀中间项（命题 2.6）。对于 $\Pi_k^{\parallel}$：缓存覆盖除 N^* 个基础事实之外所有事实的第 1 层节点（命题 2.4(v)）。存储量：$(\kappa-N^*)\log m+O(\kappa)$。这些 N^* 暴露事实以概率 $(1-\varepsilon)^{N^*}\geq 1-\delta$ 留存。

(II) 定理 3.6。

(III) 由（I）–（II），$\sigma^*=(\kappa-N^*)\log m+O(\kappa)$。此外，对于头部坐标长度为 a 的查询族（定义 2.7），计数下界始终为

$$K(q\mid\langle B\rangle)\geq a\log m-\log m-O(1)$$

对于 $(1/m)$-一般查询（定义 2.12），以及直接上界

$$K(q\mid\langle B\rangle)\leq a\log m+O(1)$$

通过直接编码头部元组坐标。在满足 $\kappa(q,B)=a(q)$ 的不同坐标区域中，由此得到 $K(q\mid\langle B\rangle)=\kappa\log m+O(\kappa)$。代入 $\sigma^*=(\kappa-N^*)\log m+O(\kappa)$ 可得

$$K(q\mid\langle B\rangle)=\sigma^*+N^*\log m+o(\kappa\log m)$$

只要 $\log m\to\infty$ 且 $\kappa\to\infty$。 □

推论 3.3（CT4 的典范不变性）**.** 分解 (3.5) 是 $[\mathfrak{I}]_{\equiv_{\mathcal{L}}}$ 的典范性质：对于与 $|B_1|=|B_2|=m$ 的任意对齐双解释，$|\sigma_1^*-\sigma_2^*|\leq c_\Phi+O(\kappa)$ 与 $N^*\log m$ 在两个系统中均相同。

证明。K 依定理 2.7(b) 在相差至多 $O(c_\Phi)$ 的意义下不变；κ 由定义 2.17 中的基底保真度与查询对应条件所保持。 □

E. 架构依赖的深度–韧性对偶

容量分解（CT4）涉及架构依赖映射 $d\mapsto\kappa(d)$：$\kappa_{\mathrm{chain}}(d)=k+d-1$ 与 $\kappa_{\mathrm{merge}}(d)=k\cdot 2^{d-1}$。该映射由 CT2（定理 2.4）确立，使最大容错深度出现指数级差距。

定理 3.8 (深度–韧性二象性)。在擦除率为 ε、目标为 δ 的独立同分布擦除下，且不使用缓存：

(I) 链 Π_k。$d_{\max}^{\mathrm{chain}}=N^*-k+1=\Theta(\delta/\varepsilon)$；存活率 $=(1-\varepsilon)^{k+d-1}=\exp(-\Theta(\varepsilon d))$。*(II)* 合并 $\Pi_k^{\parallel}$。$d_{\max}^{\mathrm{merge}}=1+\log_2(N^*/k)=\Theta(\log(\delta/(k\varepsilon)))$；存活率 $=(1-\varepsilon)^{k\cdot 2^{d-1}}=\exp(-\Theta(\varepsilon\cdot 2^d))$。*(III)* 守恒。两者在各自的阈值处均达到韧性容量 $N^*\log m$；对于 b 元合并，$d_{\max}(b)=1+\log_b(N^*/k)$，而 $C_{\mathrm{res}}=N^*\log m$。

(IV) 差距。 $d_{\max}^{\text{chain}}/d_{\max}^{\text{merge}} = \Theta((\delta/\varepsilon)/\log(\delta/\varepsilon)) \to \infty$ 如 $\varepsilon \to 0$。

证明。 (I) $\kappa = k+d-1$; $\kappa \le N^*$给出 $d \le N^*-k+1$。(II) $\kappa = k \cdot 2^{d-1}$; $\kappa \le N^*$给出 $d \le 1+\log_2(N^*/k)$。(III) 在阈值处， $\kappa = N^*$在两种情况下均成立。(IV) $(N^*-k+1)/(1+\log_2(N^*/k)) = \Theta(N^*/\log N^*)$。 □

推论 3.4 (通过部分缓存实现韧性放大)。 对于 $\Pi_k^{\|}$ ，在深度 d处，缓存覆盖除 $k \cdot 2^{d-\ell_0-1}$ 个依赖项之外所有依赖项的深度 1 节点，可得到 $d_{\max}(\ell_0) = d_{\max}(0) + \ell_0$：每个缓存深度单位都带来指数级放大。对于 Π_k，缓存 ℓ_0 层可将依赖项减少 ℓ_0：仅有线性放大。

证明。 对于 $\Pi_k^{\|}$ ： 共有 2^{d-1} 个深度 1 节点，每个节点吸收 k 个基础事实。缓存这些节点中除 $2^{d-\ell_0-1}$ 个之外的所有节点，可吸收 $k(2^{d-1}-2^{d-\ell_0-1})$ 个基础事实，留下 $k \cdot 2^{d-\ell_0-1}$ 个暴露依赖项； δ-韧性要求 $(1-\varepsilon)^{k\cdot 2^{d-\ell_0-1}} \ge 1-\delta$，由此得到 $d-\ell_0 \le d_{\max}(0)$，即 $d_{\max}(\ell_0) = d_{\max}(0) + \ell_0$。对于 Π_k：每缓存一层深度，依赖数量就减少 1；命题 2.6 给出了线性放大。 □

F. 非均匀噪声与注水式缓存

定义 3.9 (非均匀前提擦除)。 每个 $b_i \in B$ 都以概率 $\varepsilon_i \in [0,1)$独立地被擦除。定义 $c_i := \ln(1/(1-\varepsilon_i))$ 以及 $C(\delta) := \ln(1/(1-\delta))$。

定义 3.10 (查询脆弱性)。 对于依赖集为 $\{b_{i_1}, \dots, b_{i_\kappa}\}$ 的 q： $\mathcal{V}(q) := \sum_j c_{i_j}$, $P_{\text{surv}}(q) = \exp(-\mathcal{V}(q))$； q 原生具有 δ- 韧性，当且仅当 $\mathcal{V}(q) \le C(\delta)$。

定理 3.9 (非均匀噪声下的注水式缓存)。 设 q 的依赖项具有排序后的代价 $c_{i_1} \le \cdots \le c_{i_\kappa}$。在可靠缓存吸收保护集 D_{prot} 的 *DAG* 节点的情况下（推论3.2中的吸收性质）：

(I) 最优保护。 $D_{\text{prot}}^* = \{b_{i_j} : \ j > \kappa-\kappa^*\}$ （最不可靠的 κ^* 个事实），其中 κ^* 是满足 $\sum_{j=1}^{\kappa-\kappa^*} c_{i_j} \le C(\delta)$ 的最小整数。(II) 存储。 $\sigma_{\text{wf}}^* = \kappa^* \log m + O(\kappa)$。(III) 比较。 在均匀噪声下，$\kappa^* = \kappa - N^*$ （与 *CT4* 匹配）。在非均匀噪声下，当代价不恒定时， $\kappa_{\text{wf}}^* < \kappa - \lfloor C(\delta)/c_{\max} \rfloor =:$ 。(IV) 最优性。 任何具有 δ-韧性的策略都需要 $\sigma \ge \kappa_{\text{wf}}^* \log m - O(\kappa)$。

证明。 (I) 在满足 $\sum_{j \notin D_{\text{prot}}} c_{i_j} \le C(\delta)$ 的条件下最小化 $|D_{\text{prot}}|$。由于所有项目的存储权重相同（$\log m$ 比特），优先保护成本最高的元素，按照贪心分数背包论证 [37] 是最优的。(II) κ^* 个坐标，每个坐标需要 $\lceil \log m \rceil$ 比特。(III) 最坏情况设计均匀使用 $c_{\max}$ 。(IV) 调整定理 3.7(II) 的反向定理：在仅有最不不可靠的 $\kappa-\kappa_{\text{wf}}^*$ 个事实幸存的事件中，可用信息量为$\sigma + (\kappa-\kappa_{\text{wf}}^*) \log m + O(\kappa)$；对于一般的 q，这必须达到 $\kappa \log m - O(\kappa)$。 □

推论 3.5 (利用噪声结构知识获得的容量增益)。 给定有序成本 $c_{(1)} \le \cdots \le c_{(m)}$，定义 $m_{\text{eff}}(\varepsilon, \delta)$：= 最大值$\{j : \sum_{i=1}^{j} c_{(i)} \le C(\delta)\}$。则：(i) </style> 无缓存时可容忍 的最大依赖数量为 ；(ii) 相较于最坏情况均匀设计，结构增益为 $G_{\text{struct}} \ge c_{\max}/\bar{c}$，其中 $\bar{c}$： $= m^{-1}\sum_i c_i$。

证明。 (i) 来自可靠前提的 q 及其 $\kappa \le m_{\text{eff}}$ 依赖项具有 $\mathcal{V}(q) \le C(\delta)$。(ii) $m_{\text{eff}} \ge C(\delta)/\bar{c}$；最坏情况给出 $\lfloor C(\delta)/c_{\max} \rfloor$。 □

定理 3.10 （非均匀擦除下的帕累托刻画）。 在非均匀擦除 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$下：

(I) 可行性。 $\sigma \ge (\kappa(d) - m_{\text{eff}})^+ \log m + O(\kappa(d))$。*(II)* 帕累托前沿。 $\sigma(d) = (\kappa(d) - m_{\text{eff}})^+ \log m + O(\kappa(d))$ 对于 $d > d_{\max}^{\text{free}}$单调递增且具有凸性。*(III)* 噪声结构依赖性。 $\sigma_{\text{wf}}^*(d,\delta) \le \sigma_{\text{unif}}^*(d,\delta)$；当 ε_i为非恒定时，不等式严格成立。

证明。 (I) 如果 $\kappa(d) \le m_{\text{eff}}$，则原生韧性成立（$\sigma = 0$）；否则，定理 3.9 给出该界。(II) $\kappa(d)$是非递减的；$(\cdot)^+$ 与仿射 $\kappa(d)$的复合具有凸性，因此 $-m_{\text{eff}}$。(III) 根据定理 3.9(III)，非均匀噪声产生更大的m_{eff}。 □

备注 3.1 (噪声感知临界频率)。 对于超出原生鲁棒性 $(\kappa > N^*)$ 的查询，在定理 *2.6* 中用 $\rho\sigma^*$ 替换无噪声情形存储成本 ρK_q，可得 $f_c^{\text{noisy}} = \Theta(\rho \cdot ((\kappa-N^*)/\kappa) \cdot \log m) < f_c$：噪声会降低缓存阈值，因为实现韧性所需的存储量小于完整的条件信息 K_q。

注 3.2 (推导惩罚预览)。 定理 *3.7* 确立了推导约束方案的 $\sigma_{\text{unc}}^* = (\kappa-N^*)\log m + O(\kappa)$ 。在 $\kappa \gg N^*$(等价地， $\kappa\varepsilon^2 \gg \delta$) 的情形下，这就是 $(1-o(1))\kappa \log m$。第四节将表明，采用任意解码器而非证明引擎的编码方案可达到 $\sigma_{\text{code}}^* = \varepsilon\kappa\log m + o(\kappa \log m)$，小 $1/\varepsilon$ 倍。结构性缓存刚性（定理 *3.5*）迫使每个吸收的依赖项无论 ε 如何都付出 $\log m$ 比特的代价，这正是这一差距的证明论根源。

IV. 信源-信道分离与推导惩罚

第三节确立，对于一个具有 κ 个基础事实依赖的一般查询，推导约束缓存的大小为 $\sigma^*_{\mathrm{unc}} = (\kappa - N^*)\log m + O(\kappa)$，其中 $N^* \approx \delta/\varepsilon$。现在我们引入已编码 缓存：缓存是一个由通用解码器处理的任意比特串，并据此确定推导约束解码所付出的精确惩罚。

由此得到三个结果。首先，最小编码缓存为 $\sigma^*_{\mathrm{code}} = (1+o(1))\varepsilon\kappa \log m$，由此产生 $1/\varepsilon$ 的推导惩罚（定理 4.3）。其次，当缓存低于临界缓存 $\varepsilon\kappa \log m$ 时，错误概率将以 KL 散度速率收敛至 1（定理 4.6）。第三，两种方案呈现出色散二分性：编码二阶项为 $\Theta(\sqrt{\kappa \log m})$，而推导约束式二阶项为 $O(\log m)$，这反映了有效色散为零（定理 4.9）。

A. 编码缓存方案与 m 元擦除信道

a) 两种解码器模型：

定义 4.1（编码缓存方案）。对于擦除条件下基础集 B 上的查询族 $\mathcal{Q}$，编码缓存方案是一个三元组 (编码, 解码 σ)：（i）编码：$\mathcal{Q} \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^\sigma$ 将$(q, \langle B \rangle)$ 映射为缓存字符串 s；（ii）解码 $:2^B \times \{0,1\}^\sigma \to \mathcal{Q} \cup \{\perp\}$ 将$(\tilde{B}, s)$ 映射为查询估计；（iii）两个映射均可计算。对于每个目标 $q \in \mathcal{Q}$，若$\Pr_{\tilde{B}}[$解码$(B,$ 编码$(q, \langle B \rangle)) = q] \geq 1-\delta$，则称该方案为 δ-可靠。

定义 4.2（推导约束方案）。如果一个已编码方案中，推导约束 指的是 $\mathrm{Enc}(q, \langle B \rangle)$˜ 对集合 $S \subseteq \mathrm{Cn}(B)$ 进行编码，且解码器验证 $q \in \mathrm{Cn}(B \cup S)$，则称该方案为推导约束式。定理 *3.7* 刻画了此类方案的最优缓存大小。

b) m元擦除信道：

定义 4.3（m元擦除信道）。二元擦除信道$_m(\varepsilon)$ 的输入为 $X \in [m]$，输出为 $Y \in [m] \cup \{\perp\}$，其中 $\Pr[Y = X] = 1-\varepsilon$ 且 $\Pr[Y = \perp] = \varepsilon$。其容量为 C（二元擦除信道$_m$（ε））$= (1-\varepsilon)\log m$；参见 *[5]*。

在独立同分布前提擦除（定义 3.6）下，信道模型取决于查询的依赖项是否互不相同。本节重点讨论 q 依赖于 κ 互不相同的 基础事实的情形（即定义 2.7 中的 $\kappa = \kappa(q, B)$），因此 q 通过二元擦除信道 $_m(\varepsilon)$的 κ 次独立信道使用进行通信。对于具体查询族 $\mathcal{Q}_d$ 和 $\mathcal{Q}_d^{\|}$，若要使 $\kappa(q, B) = a(q)$ 对比例为 $1 - o(1)$ 的查询成立，一个充分条件是 $a(\Pi, d) = o(\sqrt{m})$（引理 2.3）。

B. 容量：反向定理与可达性

定义 4.4（不同坐标查询子族）。对于一个深度为 d 的查询族 $\mathcal{Q}_d$（或 $\mathcal{Q}_d^{\|}$），其头部元数为 $a = a(\Pi, d)$，定义

$$\mathcal{Q}_d^{\mathrm{dist}} := \{q \in \mathcal{Q}_d : \kappa(q, B) = a(q)\},$$

也就是说，该子族中的依赖项（等价地，头部坐标）两两不同。

定理 4.1（编码缓存反向界）。在擦除率为 $\varepsilon \in (0, 1)$ 的独立同分布擦除下，设 q 有 κ 个不同的基础事实依赖项，且满足 $\kappa = o(m)$，并设 (Enc、Dec σ) 对从 $\mathcal{Q}_d^{\mathrm{dist}}$（定义 *4.4*）中均匀抽取的 δ-可靠的 $(1/m)$ 一般查询。则

$$\sigma \geq (\varepsilon - \delta)\,\kappa \log m - h_b(\delta). \tag{4.1}$$

For $\delta = o(\varepsilon)$*:* $\sigma \geq (1-o(1))\,\varepsilon\kappa \log m.$

证明。从 $[m]^\kappa$ 中均匀抽取 $q = (i_1, \ldots, i_\kappa)$；于是 $H(q) = \kappa \log m$。将有效的二元擦除信道$_m(\varepsilon)$ 输出记为 Y^κ。

步骤 *1*（*Fano* 不等式）。δ-可靠性给出 $H(q \mid Y^\kappa, s) \leq h_b(\delta) + \delta\kappa \log m$。

步骤 *2*（链式法则）。$\kappa \log m = I(q; Y^\kappa, s) + H(q \mid Y^\kappa, s) \leq I(q; Y^\kappa) + \sigma + h_b(\delta) + \delta\kappa \log m$，利用$I(q; s \mid Y^\kappa) \leq H(s) \leq \sigma$。

步骤 *3*（二元擦除信道 互信息）。每个坐标贡献 $H(i_j \mid Y_j) = \varepsilon \log m$，从而得到 $I(q; Y^\kappa) = \kappa(1-\varepsilon)\log m$。

步骤 *4*。$\sigma \geq (\varepsilon-\delta)\,\kappa \log m - h_b(\delta)$。 □

定理 4.2（编码缓存可达性）。在相同假设下，存在一个 δ-可靠的编码缓存方案，使得

$$\sigma = \kappa\varepsilon \log m + \Phi^{-1}(1-\delta)\sqrt{\kappa\varepsilon(1-\varepsilon)}\,\log m + O(\log m), \tag{4.2}$$

其中 Φ^{-1} 是标准正态分位数。对于固定的 δ 和 $\kappa \to \infty$：$\sigma = (1+o(1))\,\varepsilon\kappa \log m$。

证明。我们将 κ 个不同的坐标 $(i_1,\dots,i_\kappa) \in [m]^\kappa$ 编码为域 $\mathbb{F}_q$ 中的符号，其中 $q \geq m$。根据伯特兰公设 [38], ，对于每个整数 $m \geq 2$ ，都存在一个素数 q ，使得 $m < q < 2m$；我们固定这样一个素域 $\mathbb{F}_q$。于是 $\log q = \log m + O(1)$，因此一个 $\mathbb{F}_q$符号对应 $\log m + O(1)$ 比特。

使用 $\mathbb{F}_q$ 上的系统型 $(\kappa + r, \kappa)$ 里德-所罗门（MDS）码，并将 r 个校验符号存入缓存。令

$$r := \left\lceil \kappa\varepsilon + \Phi^{-1}(1-\delta)\sqrt{\kappa\varepsilon(1-\varepsilon)} \right\rceil + 1.$$

令 $E \sim \mathrm{Bin}(\kappa, \varepsilon)$ 表示被擦除的系统符号数。MDS 解码成功当且仅当 $E \leq r$。根据带连续性校正的 Berry–Esseen 定理 [39] ，对于上述 r 取值，$\Pr[E > r] \leq \delta$ 。缓存长度为 $\sigma = r\log q = \kappa\varepsilon\log m + \Phi^{-1}(1-\delta)\sqrt{\kappa\varepsilon(1-\varepsilon)}\log m + O(\log m)$。 □

C. 信源-信道分离与推导惩罚

定理 4.3 (前提擦除下的信源-信道分离)。设 q 是$(1/m)$-泛型的，具有 κ个不同依赖项， $\kappa = o(m)$，且处于独立同分布擦除 ε 下。

(I) 编码分解。

$$K(q \mid \langle B \rangle) = \sigma^*_{\mathrm{code}} + C_{\mathrm{channel}} + o(\kappa \log m), \tag{4.3}$$

其中 $C_{\mathrm{channel}} := \kappa(1-\varepsilon)\log m$ 是 κ 次使用 二元擦除信道$_m(\varepsilon)$ 的容量，且 $\sigma^*_{\mathrm{code}} = \varepsilon\kappa \log m + o(\kappa \log m)$.

（II）受推导约束的分解。

$$K(q \mid \langle B \rangle) = \sigma^*_{\mathrm{unc}} + N^* \log m + o(\kappa \log m), \tag{4.4}$$

其中 $\sigma^*_{\mathrm{unc}} = (\kappa - N^*)\log m + O(\kappa)$（定理 3.7）。

（III）推导惩罚。

$$\frac{\sigma^*_{\mathrm{unc}}}{\sigma^*_{\mathrm{code}}} = \frac{\kappa - N^*}{\kappa\varepsilon}\,(1+o(1)). \tag{4.5}$$

对于 $\kappa\varepsilon^2 \gg \delta$，该比值收敛至 $1/\varepsilon$：推导约束使所需缓存量增加至原来的 $1/\varepsilon$ 倍。

证明。**(I)** CT1 给出 $K(q \mid \langle B \rangle) = (1+o(1))\kappa\log m$。定理 4.1 与定理 4.2 给出 $\sigma^*_{\mathrm{code}} = (1+o(1))\varepsilon\kappa\log m$. 相减： $C_{\mathrm{channel}} = (1+o(1))\kappa(1-\varepsilon)\log m = \kappa \cdot C$(二元擦除信道$_m(\varepsilon)$)。

(II) 定理 3.7(III)。

(III) $N^* \approx \delta/\varepsilon$ 对于较小的 ε, δ。在区间 $\kappa\varepsilon^2 \gg \delta$： $\sigma^*_{\mathrm{unc}} \approx \kappa\log m$ 与 $\sigma^*_{\mathrm{code}} \approx \varepsilon\kappa\log m$；该比值为 $1/\varepsilon$。 □

注记4.1 (惩罚的操作性解释 $1/\varepsilon$)。一般译码器会利用代数冗余（各坐标位置上的*MDS*校验），将每个被擦除坐标的不确定性分散到整个缓存中，平均每个坐标付出 $\varepsilon\log m$ 比特的代价。推导约束式译码器无法利用跨坐标代数关系：每个吸收的依赖都要付出$\log m$ 比特，无论 ε 如何。推导引擎无法进行“跨坐标纠错”，这正是产生惩罚的根本原因。

推论4.1 (非均匀擦除下的编码增益)。在非均匀擦除$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ (定义 3.9)下，编码缓存满足 $\sigma^*_{\mathrm{code,nu}} = (\sum_{j=1}^{\kappa} \varepsilon_{i_j})\log m + o(\kappa \log m)$，而推导约束式缓存满足 $\sigma^*_{\mathrm{unc,nu}} = \kappa^*_{\mathrm{wf}} \log m + O(\kappa)$ (定理 3.9)。非均匀编码增益为 $G_{\mathrm{nu}} = \kappa^*_{\mathrm{wf}} / \sum_j \varepsilon_{i_j} \cdot (1+o(1))$，在均匀噪声下则化简为 $1/\varepsilon$。

证明。坐标 j 对应的有效信道是二元擦除信道$_m(\varepsilon_{i_j})$；由独立性可得， $H(q \mid Y^\kappa) = \sum_j \varepsilon_{i_j}\log m$。可达性采用与非均匀速率 [40], [41]相匹配的 UEP码；反向定理则由定理 4.1 的 Fano论证得到，其中 $I(q; Y^\kappa) = \kappa\log m - \sum_j \varepsilon_{i_j}\log m$。 □

D. 强逆定理与误差指数

弱逆（定理 4.1）表明 $\sigma \geq (\varepsilon-\delta)\kappa\log m$。现在我们证明强 逆定理：当缓存低于临界值时，$P_e \to 1$ 以指数速率发生。该论证基于一个组合像大小界，绕过了有损Fano步骤。

引理 4.1 (具有边信息的二元擦除信道的像大小界)。设 $q \in [m]^\kappa$ 均匀抽取， Y^κ 为输入 q经过二元擦除信道$_m(\varepsilon)^{\otimes\kappa}$ 后的输出，且 $s =$ 编码器$(q, \langle B \rangle) \in \{0,1\}^\sigma$。对于任意确定性译码器：

$$P_c := \Pr[\mathrm{Dec}(Y^\kappa, s) = q] \;\leq\; \mathbb{E}\left[\min\left(1,\; \frac{2^\sigma}{m^E}\right)\right], \tag{4.6}$$

其中 $E = |\{j : \; Y_j = \perp\}| \sim \mathrm{Bin}(\kappa、\ \varepsilon)$。

证明。给定擦除集合 $\mathcal{E}$和未擦除输出 $q_{\bar{\mathcal{E}}}=y$。在给定 $(\mathcal{E},\ y)$ 的条件下，q在 $\mathcal{L}(\mathcal{E},\ y)$ 上均匀分布：$=\{q'\in[m]^{\kappa}:$ $q'_{\bar{\mathcal{E}}}=y\}$，其中 $|\mathcal{L}|=m^{|\mathcal{E}|}$。对于每个缓存值 s'，令 $A(s')=\{q'\in\mathcal{L}:\ \mathrm{Enc}(q',\ \langle B\rangle)=s'\}$。解码器对每一对 $(Y^{\kappa},\ s')$ 输出一个元素，因此正确解码的查询数至多为 $\min(m^{|\mathcal{E}|},\ 2^{\sigma})$。因此$P_c\,|\,(\mathcal{E},\ y)\ \le\min(1,\ 2^{\sigma}/m^{|\mathcal{E}|})$；对 $\mathcal{E}$ 取期望可得 (4.6)。 □

定理 4.4（精确编码成功概率）。定义 $r:=\lfloor\sigma/\log\ m\rfloor$。

（i）反向定理。 $P_c\le\Pr[\mathrm{Bin}(\kappa,\ \varepsilon)\ \le r+1]+(m-1)^{-1}$。（ii）可达性。该 $(\kappa+r,\ \kappa)$ *RS* 码达到 $P_c^{\mathrm{MDS}}=\Pr[\mathrm{Bin}(\kappa,\ \varepsilon)\ \le r]$。（iii）近乎最优性。 $P_c^{*}-P_{\mathrm{MDS}_c}\ \ \le\Pr[E=r+1]+(m-1)^{-1}=O(\kappa^{-1/2})\ +O(m^{-1})$。

证明。 *(i)* 由引理 4.1 和 $2^{\sigma}<m^{r+1}$ 得： $P_c<\Pr[E\le r+1]+\sum_{j=1}^{\infty}m^{-j}=\Pr[E\le r+1]+(m-1)^{-1}$。 *(ii)* 系统性 RS 码存储 r 个校验符号。MDS 解码成功当且仅当 $E\le r$。 *(iii)* 差距至多为 $\Pr[E=r+1]+(m-1)^{-1}$；根据局部中心极限定理，$\Pr[E=r+1]=O(\kappa^{-1/2})$。 □

T定理 4.5 (编码缓存的强反定理)。若 $\sigma\le(\varepsilon-\gamma)\kappa\log\ m$ 对某个 $\gamma\in(0,\varepsilon)$成立，则

$$P_e\ \ge\ 1-e^{-\gamma^{2}\kappa/2}-m^{1-\gamma\kappa/2}. \tag{4.7}$$

特别地， $P_e\to1$ 随 κ呈指数级变化。

证明。令 $r\le(\varepsilon-\gamma)\kappa$ 且 $e_0:=\lfloor r+1+\gamma\kappa/2\rfloor$。由引理 4.1 得： $P_c\le\Pr[E<e_0]+m^{r+1-e_0}$。由于 $r+1-e_0\le-\gamma\kappa/2$： $m^{r+1-e_0}\le m^{1-\gamma\kappa/2}$。根据 Hoeffding 不等式， [42], $\Pr[E<e_0]\le e^{-\gamma^{2}\kappa/2}$。结合起来可得 (4.7)。 □

定理 4.6 (强反定理指数 =KL散度)。对于 $\sigma=(\varepsilon-\gamma)\kappa\log\ m$ 当 $\gamma\in(0,\varepsilon)$时：

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{-1}{\kappa}\log P_c^{*}(\sigma)=D(\varepsilon-\gamma\parallel\varepsilon), \tag{4.8}$$

其中 $D(p\|q)$：$=p\log(p/q)\ +(1-p)\log((1-p)/(1-q))$。该指数由最大距离可分码实现。

证明。上界（反向定理）。对像大小界应用倾斜矩技术：对于 $t\in[0,1]$，$\min(1,x)\ \le x^{t}$，因此 $P_c\le2^{t\sigma}(1-\varepsilon+\varepsilon m^{-t})^{\kappa}$。令 $u:=t\log\ m$，且 $g_0(u):=u(\varepsilon-\gamma)\ +\log(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-u})$，可得 $\kappa^{-1}\log P_c\le g_0(u)\ +O(u/\kappa)$。对 $u\ge0$ 上的 g_0 取最小值，直接计算（附录B）可得$-g_0^{*}=D(\varepsilon-\gamma\|\varepsilon)$。

下界 （可达性）。 $P_c^{\mathrm{MDS}}=\Pr[\mathrm{Bin}(\kappa,\varepsilon)\ \le(\varepsilon-\gamma)\kappa]$。根据 Cramér 定理 [24, 定理2.2.3]: $\kappa^{-1}\log\ P_c^{\mathrm{MDS}}\to-D(\varepsilon-\gamma\|\varepsilon)$。 □

注记 4.2（信息论解释）。指数 $D(\varepsilon-\gamma\|\varepsilon)$ 是速率 $\varepsilon-\gamma$ 与 ε处伯努利分布之间的*KL*散度——一个*Sanov*型结果。该指数与字母表大小 m无关； m 控制每符号信息量（$\log m$ 比特），而非擦除统计量。

推论 4.2（可靠性函数）。对于 $\sigma\ =\ (\varepsilon+\gamma')\ \kappa\log\ m$ 且 $\gamma'\ >\ 0$: $\lim_{\kappa\to\infty}\kappa^{-1}\log\ P_e^{\mathrm{MDS}}\ (\sigma)\ \ =-D\ (\ \varepsilon+\gamma'\|\varepsilon)$。最大距离可分码在所有速率下均达到可靠性函数；对于二元擦除信道，该函数等于球填充指数 *[20,* 定理 *5.8.3]*。

*P*证明。 $P_e^{\mathrm{MDS}}=\Pr[E>(\varepsilon+\gamma')\kappa]$；对上尾应用Cramˊer定理 [24, 定理 2.2.3] . □

E. 缓存色散与色散二分性

一阶结果 $\sigma^{*}=(1+o(1))\varepsilon\kappa\log\ m$ 确定了最小编码缓存为 $\kappa\to\infty$。现在我们将其细化到二阶，确定缓存色散——这一量决定了有限长度惩罚，并证明推导约束方案的有效色散为零。

定义 4.5（缓存色散）。 $V_{\mathrm{cache}}:=\varepsilon(1-\varepsilon)(\log m)^{2}$。

定理 4.7（二阶编码缓存刻画）。最小的 δ-可靠编码缓存满足：

$$\sigma^{*}(\kappa,\delta)=\kappa\varepsilon\log m+\sqrt{\kappa V_{\mathrm{cache}}}\ \Phi^{-1}(1-\delta)+\tfrac{1}{2}\log\kappa+O(\log m). \tag{4.9}$$

证明。可达性。MDS 方案满足 $P_e^{\mathrm{MDS}}=\Pr[E>r]$，其中 $E\sim\mathrm{Bin}(\kappa,\varepsilon)$。根据 Berry–Esseen 定理并进行连续性校正 [39]: $\Pr[E\le r]=\Phi((r+\frac{1}{2}-\kappa\varepsilon)/\sqrt{\kappa\varepsilon(1-\varepsilon)})\ +O(\kappa^{-1/2})$。令其等于$1-\delta$并求逆，得出 $r=\kappa\varepsilon+\sqrt{\kappa\varepsilon(1-\varepsilon)}\,\Phi^{-1}(1-\delta)\ +O(1)$，于是 $\sigma=r\log\ m+O(\log\ m)$ 得到上界。

反向定理。由定理 4.4(i) 可知， $P_e\ \le\ \delta$ 要求 $\Pr[E\ \le\ r]\ \ge\ 1-\delta-(m-1)^{-1}$。对正态近似求逆，可得相匹配的下界 $\sigma\ge\kappa\varepsilon\log\ m+\sqrt{\kappa\varepsilon(1-\varepsilon)}\log\ m\,\Phi^{-1}(1-\delta)\ -O(\log\ m)$。

匹配。 $\frac{1}{2}\log\kappa$-三阶项来自局部中心极限定理中的格点校正 [43] . □

注 4.3 (与信道色散的联系)。 V_{cache} = 方差$[\imath(X;Y)]$ 对于采用均匀输入 *[21],* 的 m 元二元擦除信道，因为 $\imath(X;Y) = \log m \cdot \mathbf{1}_{Y\neq\perp}$ 取值为$\log m$ （概率为 $1-\varepsilon$）和0 （概率为 ε）。编码缓存问题完全继承了信道的色散，因为 *MDS* 编码同时达到了容量和色散。

a) 推导约束式：零有效色散。：

定理 4.8 （零推导受限色散）**.** 对于 *i.i* 下的推导约束方案 *.d.* 擦除 ε:

$$\sigma^*_{\text{unc}}(\kappa,\delta) = \big(\kappa - N^*(\varepsilon,\delta)\big)\log m + O(\log\kappa), \tag{4.10}$$

其中 $N^*(\varepsilon,\delta) = \lfloor \log(1-\delta)/\log(1-\varepsilon)\rfloor$ （定义 3.7） 与 κ 无关。

证明。 在忠实推导下，所有 $\kappa-r$ 未受保护的依赖项必须同时幸存。令 $P_e = 1-(1-\varepsilon)^N = \delta$，可得 $N = N^*(\varepsilon,\delta)$。每个受保护的依赖项的代价为 $\log m + O(1)$ 比特； $r = \kappa - N^*$保护索引的代价为 $O(\log\kappa)$ 比特。关键观察： N^* 依赖于 δ和 ε，但不依赖于 κ。 □

b) 色散二分性:

定理 4.9 (色散二分性)。 在独立同分布的二元擦除信道$_{m(\varepsilon)}$ 擦除下，若 $\delta \in (0,1)$ 固定:

(I) 已编码方案。 二阶项： $\sqrt{\kappa V_{\text{cache}}}\,\overline{\Phi^{-1}(1-\delta)} = \Theta(\sqrt{\kappa\log m})$。(II) 推导约束式方案。 二阶项: $-N^*(\varepsilon,\delta)\log m = O(\log m)$ （关于 κ 的常数）。(III) 有效色散。 $V_{\text{unc}} = 0$: 推导约束式二阶展开中 $\sqrt{\kappa}$ 的系数为零。

证明。 (I) 和 (II) 由定理 4.7 和 4.8 得出。对于 (III): $\sigma^*_{\text{unc}} = \kappa\log m - N^*\log m + O(\log\kappa)$; 与标准形式 $\kappa\cdot 1\cdot\log m + \sqrt{\kappa V_{\text{unc}}}\Phi^{-1}(1-\delta) + O(\log m)$ 匹配，得到 $V_{\text{unc}} = 0$。 □

注 4.4 （求和与最大值：根本原因）。 编码方案在所有 κ 位置上进行编码，因此相关统计量是和 $E = \sum E_j \sim \text{Bin}(\kappa,\varepsilon)$，它会依中心极限定理集中，并产生 $\sqrt{\kappa}$ 项。推导约束方案要求所有 未受保护 的依赖项都存活下来——这是一个合取，其概率为 $(1-\varepsilon)^N$，由最大值 指示变量$\max_j E_j$ 决定，而非由总和决定。独立同分布的伯努利变量的最大值不呈现中心极限定理型集中；这种结构性不匹配正是色散消失的根本原因。

c) 精化推导惩罚:

定理 4.10 （二阶推导惩罚）。

$$\frac{\sigma^*_{\text{unc}}(\kappa,\delta)}{\sigma^*_{\text{code}}(\kappa,\delta)} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{N^*(\varepsilon,\delta)}{\varepsilon\kappa} - \frac{\Phi^{-1}(1-\delta)\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon^{3/2}\sqrt{\kappa}} + O(\kappa^{-1}). \tag{4.11}$$

惩罚从下方以速率 $\Theta(\kappa^{-1/2})$ 收敛至 $1/\varepsilon$，其速率由编码方案的色散决定。

证明。 令 $\sigma_u := (\kappa - N^*)\log m$，并令 $\sigma_c := \varepsilon\kappa\log m + \Phi^{-1}(1-\delta)\sqrt{\kappa\varepsilon(1-\varepsilon)}\log m + O(\log m)$。将 σ_u/σ_c 展开为 $\varepsilon^{-1}(1-N^*/\kappa)(1-\Phi^{-1}(1-\delta)\sqrt{(1-\varepsilon)/(\varepsilon\kappa)} + O(\kappa^{-1}))$，并合并各项可得 (4.11)。 □

d) 完整错误指数图景:

定理 4.11 （推导约束式：精确错误公式）。 对于具有 $N := \kappa - \lfloor\sigma/\log m\rfloor$ 暴露事实的推导约束方案:

(i) $P_e^{\text{unc}}(\sigma) = 1-(1-\varepsilon)^N$ （精确，对所有 κ）。 (ii) 对于 $N = \gamma\kappa$: 指数 $\gamma|\log(1-\varepsilon)|$，关于 γ 呈线性。 (iii) 对于 $\sigma = (\kappa - c)\log m$ 且 $c = O(1)$: $P_e = 1-(1-\varepsilon)^c$，为一个常数。无需渐近分析；不存在相变。

推论 4.3 （完整错误指数刻画）。 定义 $\rho := \sigma/(\kappa\log m) \in [0,1]$。

(i) $\rho < \varepsilon$: $P_e \to 1$ 以速率 $D(\rho\|\varepsilon)$ （强逆定理）。 (ii) $\rho = \varepsilon$: $P_e = \frac{1}{2} + O(\kappa^{-1/2})$。 (iii) $\rho > \varepsilon$: $P_e \to 0$ 以速率 $D(\rho\|\varepsilon)$ （可靠性）。 (iv) 近容量 ($\rho = \varepsilon + c/\sqrt{\kappa}$ 且 $c \in \mathbb{R}$ 固定): $P_e = \bar{\Phi}(c/\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}) + O(\kappa^{-1/2})$。

所有指数均由 *MDS* 码实现；可靠性函数等于球填充指数 *[20,*定理 *5.8*。*3]*在所有码率下。

证明。 (i) 和 (iii) 由定理 4.6 和推论 4.2 得出。 (ii): 在 $\rho = \varepsilon, r = \varepsilon\kappa$ 处，由中心极限定理可得 $\Pr[E \le \varepsilon\kappa] \to 1/2$。 (iv): 对于 $r = \varepsilon\kappa + c\sqrt{\kappa}$，中心极限定理给出 $\Pr[E > r] = \bar{\Phi}(c/\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}) + O(\kappa^{-1/2})$。 □

F. 联合擦除–污染信道

当前提基同时遭受擦除和虚假添加时，解码器面临一个复合信道。

定义 4.6 (联合擦除–污染信道)。 每个 $b_i \in B$ 都以概率 ε独立地被擦除；此外，还会加入 p 伪增前提 $B^+ \subseteq \mathbb{S}_O \setminus B$。解码器观察到 $\tilde{B} = (B \setminus B^-) \cup B^+$，但无法区分真实事实与虚假事实。定义 $\eta := p/(m+p)$ 以及 $\mathcal{N} := |B^-| + |B^+|$。

假设 4.1 (有界可描述污染)。 B^+ 可由长度为 $O(p\log(m+p))$的索引列表描述，给定 $\langle B \rangle$。

定理 4.12 (擦除–污染加性分离)。 在假设 4.1下：

(I) 已编码： $\sigma^*_{\text{joint}} = \varepsilon\kappa \log\, m + O(\mathcal{N}\log(m+\mathcal{N})) + o(\kappa \log\, m)$。(II) 推导约束式： $\sigma^*_{\text{unc, joint}} = (\kappa - N^*) \log\, m + O(\mathcal{N}\log(m+\mathcal{N})) + O(\kappa)$。(III) 加性结构： $\sigma^* = \sigma^*_{\text{erasure}} + \sigma^*_{\text{pollution}}$，其中 $\sigma^*_{\text{pollution}} = O(\mathcal{N}\log(m+\mathcal{N}))$ 是识别虚假前提的代价。

证明。可达性。缓存存储两个相互独立的组成部分：(a) 擦除纠错（已编码或推导约束式），以及 (b) 用于标识 B^- 和 B^+ 的索引列表，开销为 $O(\mathcal{N}\log(m+\mathcal{N}))$ 比特（引理 3.2）。解码器首先使用 (b) 重建 $B_\cap$，然后通过 (a) 进行擦除解码。

~ ~反向定理。仅给定 B时，解码器必须区分 $B_\cap$和 B，才能进行擦除纠错。候选对 (B^-, B^+) 的数量至少为 $\binom{m}{\ell}\binom{|\mathcal{V}_{m+\mathcal{N}}|}{p}$，因此根据 Fano 不等式 [5, 第 2] 章， $\sigma \geq \Omega(\mathcal{N}\log(m+\mathcal{N}))$。□

推论 4.4 (污染条件下的可靠性)。在推导约束解码且 II 忠实的条件下，如果 $V_0(G(q, B))$ 中没有出现虚假事实，则推导是可靠的。对于特定查询，不可靠概率至多为 $\kappa \cdot \eta$ (并合界)。

V. 精确误差刻画与相图

第四节确立了前提擦除缓存的容量、强反定理指数和色散二分性。本节将误差刻画细化至精确的前置因子精度（Bahadur–Rao，定理 5.1），通过中偏差原理衔接中心极限定理区域与大偏差区域（定理 5.2），并汇总完整的错误概率相图（定理 5.3）。依架构而定的深度—空间重新参数化相图将留待第七节讨论。

A. Bahadur–Rao 精确渐近

定理 4.6 将强反定理指数确定为 $D(\varepsilon - \gamma\|\varepsilon)$；MDS 成功概率 $P_c^{\text{MDS}} = \Pr[\text{Bin}(\kappa,\ \varepsilon) \leq r]$ 以此速率衰减。Bahadur–Rao 定理给出了精确的前置因子。

定理 5.1 (Bahadur–Rao 精确渐近)。 设 $r = \lfloor \sigma/\log\, m \rfloor$，其中 $r = \alpha\kappa$, $\alpha \in (\eta, 1-\eta)$， $|\alpha - \varepsilon| > \eta$，且 $\eta > 0$ 固定。定义倾斜参数

$$t^*(\alpha) := \ln \frac{\alpha(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-\alpha)}\,. \tag{5.1}$$

(i) 下尾（$\alpha < \varepsilon,\ t^* < 0$）：

$$\Pr[\text{Bin}(\kappa, \varepsilon) \leq \alpha\kappa] = \frac{2^{-\kappa D(\alpha\|\varepsilon)}}{(1-e^{t^*})\sqrt{2\pi\kappa\,\alpha(1-\alpha)}}\,\big(1 + O(\kappa^{-1})\big). \tag{5.2}$$

(ii) 上尾（$\alpha > \varepsilon,\ t^* > 0$）：

$$\Pr[\text{Bin}(\kappa, \varepsilon) \geq \alpha\kappa] = \frac{2^{-\kappa D(\alpha\|\varepsilon)}}{(e^{t^*}-1)\sqrt{2\pi\kappa\,\alpha(1-\alpha)}}\,\big(1 + O(\kappa^{-1})\big). \tag{5.3}$$

两个界限在所述的 α范围内均一致成立。

证明。 两部分均由应用于 $E = \sum_{j=1}^{\kappa} E_j$ 的格点 Bahadur–Rao 定理 [23]（另见 [24,定理 3.7。4]）得出，其中 $E_j \sim \text{Ber}(\varepsilon)$。累积量生成函数为 $\Lambda(\theta) = \ln(1-\varepsilon+\varepsilon e^{\theta})$。求解 $\Lambda'(t^*) = \alpha$ 即得 (5.1)；以奈特计的速率函数为 $I(\alpha) = D(\alpha\|\varepsilon) \cdot \ln 2$，因此 $e^{-\kappa I(\alpha)} = 2^{-\kappa D(\alpha\|\varepsilon)}$。倾斜方差为 $\alpha(1-\alpha)$，格点跨度为 $h = 1$。对于 $\alpha < \varepsilon$， $t^* < 0$ 且格点和分母因子为 $(1-e^{t^*})$；对于 $\alpha > \varepsilon$， $t^* > 0$ 且该因子为 $(e^{t^*}-1)$。□

B. 中偏差原理

在中心极限定理区域（$\sigma-\varepsilon\kappa$log $m = O(\sqrt{\kappa}\log m)$，定理 4.7）与大偏差区域（$\varepsilon\kappa\log m-\sigma=\Theta(\kappa\log m)$，定理 4.6）之间，是中偏差区域。

定理 5.2（编码缓存的中偏差）。设 $\sigma_\kappa=\varepsilon\kappa\log m+a_\kappa\sqrt{\kappa}\log m$ 满足 $a_\kappa\to\infty$ 且$a_\kappa=o(\sqrt{\kappa})$。定义 $z_\kappa:=a_\kappa/\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$。则：
（i）指数速率。$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{1}{a_\kappa^2}\ln P_e^*(\sigma_\kappa)=-\frac{1}{2\varepsilon(1-\varepsilon)}$。（ii）精确渐近。$P_e^{\mathrm{MDS}}(\sigma_\kappa)=(1+o(1))\,\frac{e^{-z_\kappa^2/2}}{z_\kappa\sqrt{2\pi}}=(1+o(1))\,\bar{\Phi}(z_\kappa)$。

证明。令 $r_\kappa=\lfloor\varepsilon\kappa+a_\kappa\sqrt{\kappa}\rfloor$ 且 $\alpha_\kappa=r_\kappa/\kappa=\varepsilon+a_\kappa/\sqrt{\kappa}+O(1/\kappa)$。由于 $a_\kappa=o(\sqrt{\kappa})$，$\alpha_\kappa\to\varepsilon$ 和$\kappa D(\alpha_\kappa\|\varepsilon)=a_\kappa^2/(2\varepsilon(1-\varepsilon))+O(a_\kappa^3\kappa^{-1/2})$。

(i) 中偏差区域的速率可由 KL散度的二阶展开得出 [24,定理 3.7。1]。具体而言，将 Bahadur–Rao展开（定理 5.1(ii)）应用于上尾 $\Pr[E>r_\kappa]$：$\ln\Pr[E>r_\kappa]=-a_\kappa^2/(2\varepsilon(1-\varepsilon))+O(a_\kappa^3\kappa^{-1/2})+O(\ln\kappa)$。除以 a_κ^2 并利用 $a_\kappa\to\infty$, $a_\kappa/\sqrt{\kappa}\to0$, $\ln\kappa/a_\kappa^2\to0$ 即可得到该速率。近乎最优性（定理 4.4(iii)）给出 $P_e^*=(1+o(1))P_{\mathrm{MDS}e}$。

(ii) 在中偏差区域，倾斜参数满足 $t_\kappa^*=a_\kappa/(\sqrt{\kappa}\varepsilon(1-\varepsilon))\cdot(1+O(a_\kappa/\sqrt{\kappa}))$，而 Bahadur–Rao 前因子简化为 $\Pr[E>r_\kappa]=(1+o(1))\cdot\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}\,\exp(-a_\kappa^2/(2\varepsilon(1-\varepsilon)))\,\frac{1+o(1)}{a_\kappa\sqrt{2\pi}}$。米尔斯比给出 $\bar{\Phi}(z)=(1+O(z^{-2}))\phi(z)/z$，从而确认与 $\bar{\Phi}(z_\kappa)$ 相符。 □

注记5.1 (中心极限定理与大偏差之间的插值)。当 $a_\kappa=c$（常数）时，$P_e\approx\bar{\Phi}(c/\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)})$可恢复定理 *4.7* 的中心极限定理。当 $a_\kappa=\gamma\sqrt{\kappa}$ 时，$z_\kappa^2/2\approx\kappa D(\varepsilon+\gamma\|\varepsilon)$ 可恢复推论 *4.2* 的大偏差指数。在中偏差区域，错误以拉伸指数 $P_e=\exp(-\Theta(a_\kappa^2))$衰减，其速率由逆归一化离散度 $1/(2\varepsilon(1-\varepsilon))$决定。这里速率公式使用自然对数，对应的以 2 为底的对数$_2$-速率为 $1/(2\varepsilon(1-\varepsilon)\ln2)$。

C. 完整错误概率相图

我们汇总完整的渐近图景。

定理 5.3（完整相图）。设 $\rho:=\sigma/(\kappa$对数 $m)\in[0,1]$。当 $\kappa\to\infty$：已编码方案（MDS/里德-所罗门）：

C1. 深度次容量（$\rho<\varepsilon-\eta$, $\eta>0$ 固定）：$P_e=1-\Theta(\kappa^{-1/2})e^{-\kappa D(\rho\|\varepsilon)}$。C2. 自下方近容量（$\rho=\varepsilon-a_\kappa/\sqrt{\kappa}$, $a_\kappa\to\infty$, $a_\kappa=o(\sqrt{\kappa})$）：$P_e=1-(1+o(1))\,\bar{\Phi}(a_\kappa/\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)})$。C3. 临界窗口（$\rho=\varepsilon+c/\sqrt{\kappa}$, $c\in\mathbb{R}$）：$P_e=\bar{\Phi}(c/\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)})+O(\kappa^{-1/2})$。C4. 自上方近容量（$\rho=\varepsilon+a_\kappa/\sqrt{\kappa}$, $a_\kappa\to\infty$, $a_\kappa=o(\sqrt{\kappa})$）：$P_e=(1+o(1))\,\bar{\Phi}(a_\kappa/\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)})$。C5. 深度超容量（$\rho>\varepsilon+\eta$）：$P_e=\Theta(\kappa^{-1/2})e^{-\kappa D(\rho\|\varepsilon)}$。

推导约束方案：

U1. 次满缓存 *(*$\rho<1-\eta$*)*：$P_e=1-(1-\varepsilon)^{(1-\rho)\kappa}$。U2. 近满缓存 *(*$\rho=1-c/\kappa,\ c>0$*)*：$P_e=1-(1-\varepsilon)^c$。U3. 满缓存 *(*$\rho=1$*)*：$P_e=0$。

证明。渐近区间 C1 和 C5 分别由 Bahadur–Rao展开（定理 5.1(i) 和 (ii)）得出；C2 和 C4 由中偏差原理（定理 5.2）得出；C3 由二阶展开（定理 4.7）得出。渐近区间 U1–U3 由精确公式 $P_e^{\mathrm{unc}}=1-(1-\varepsilon)^N$（定理 4.11）得出。 □

注 5.2 (推导约束方案中不存在相变)。编码方案在 $\rho=\varepsilon$ 处呈现明显的相变，具有五个渐近区间。推导约束方案不存在相变：$P_e=1-(1-\varepsilon)^N$ 是 N 的平滑单调函数，这反映了集体统计效应的缺失——每个依赖项的贡献彼此独立，不存在阈值行为。

注 5.3（深度空间实例化）。定理 *5.3* 的相变图以归一化缓存率 ρ 和依赖数量 κ 表述。第七节通过来自 *CT2*（定理 2.4）的架构依赖映射 $d\mapsto\kappa_{\mathcal{A}}(d)$，在深度空间中重新参数化该图，揭示了合并架构（定理 7.1）中指数级更显著的相变，以及已编码方案与推导约束方案之间的最大误差指数差距（定理 7.3）。

VI. 多查询联合缓存

本节将单查询理论扩展到共享基础事实依赖的 $L \geq 2$ 个查询。共享结构在一阶（重叠去重）和二阶（统计汇聚）上均产生联合编码增益。主要结论如下：（i）最小联合已编码缓存仅取决于有效不同依赖数 n_{eff}（定理 6.1）；（ii）$1/\varepsilon$ 推导惩罚具有普适性，与 L、重叠度和 δ 无关（定理 6.3）；（iii）推导约束方案具有零联合色散，继承单查询二分现象（定理 6.5）。

A. 多查询模型与重叠结构

定义 6.1 (多查询缓存实例)。一个多查询实例 $\mathcal{Q} = (L, m, \varepsilon, (S_\ell)_{\ell=1}^{L})$ 由 L个查询组成，这些查询共享一个基础集 B，且满足 $|B| = m$，其中查询 ℓ 依赖于基础事实子集 $S_\ell \subseteq B$，并满足$|S_\ell| = \kappa$。每个基事实都以概率 ε独立擦除。定义依赖并集 $S := \bigcup_\ell S_\ell$，其中 $n_{\mathrm{eff}} := |S|$，以及重叠指数

$$\Omega := \frac{L\kappa}{n_{\mathrm{eff}}} \geq 1, \tag{6.1}$$

当且仅当 S_ℓ 两两不相交时取等号。一个 δ-可靠方案必须以概率 $\geq 1-\delta$联合恢复全部 L 个查询答案。

定义 6.2 (成对重叠系数)。对于满足所有 $\ell \neq \ell'$均有$|S_\ell \cap S_{\ell'}| = \alpha\kappa$ 的对称实例：$n_{\mathrm{eff}} = (L-(L-1)\alpha)\kappa$，且$\Omega = L/(L-(L-1)\alpha)$。这些公式在共同核心重叠模型(所有成对重叠均来自同一个共享子集)下成立；对于 $L = 2$，无需额外假设也成立。

注 6.1 (重叠的推导结构起源)。对于具有唯一轨迹的忠实程序，多查询推导有向无环图 $G_L := \bigcup_\ell G(q_\ell, B)$ 决定了 $n_{\mathrm{eff}} = |V_0(G_L)|$。在 $\Pi_k^{\|}$ (平衡合并) 下，深度为 j 的单个共享中间节点会产生大小为 $k \cdot 2^{j-1}$ 的基础事实重叠——相对于 j呈指数增长；而在 Π_k(链)下，每个共享节点的重叠度为 $k+j-1 = \Theta(j)$，呈线性增长。这种重叠放大分离 是 *CT2* 容量分离在多查询情形下的表现。

B. 联合容量：已编码与推导约束式

定理 6.1 (联合编码容量)。对于多查询实例 $\mathcal{Q}$:

(I) 一阶。 $\sigma^*_{\mathrm{code}}(\mathcal{Q}) = \varepsilon\, n_{\mathrm{eff}} \log m + O(\sqrt{n_{\mathrm{eff}}} \log m)$。

(II) 二阶。

$$\sigma^*_{\mathrm{code}}(\mathcal{Q}, \delta) = \varepsilon\, n_{\mathrm{eff}} \log m + \sqrt{n_{\mathrm{eff}}\, V_{\mathrm{cache}}}\, \Phi^{-1}(1-\delta) + \tfrac{1}{2} \log n_{\mathrm{eff}} + O(\log m). \tag{6.2}$$

(III) 强逆定理。若 $\sigma < (\varepsilon-\gamma) n_{\mathrm{eff}} \log m$: $\lim_{n_{\mathrm{eff}} \to \infty} \frac{-1}{n_{\mathrm{eff}}} \log P_c^* = D(\varepsilon-\gamma \| \varepsilon)$。

证明。恢复所有 L 查询等价于恢复 S中的 n_{eff} 个不同事实：一旦所有事实都已获得，每个查询答案也就确定了。将一个$(n_{\mathrm{eff}}+r,\ n_{\mathrm{eff}})$ MDS码应用于 S中的事实，其中 $\mathbb{F}_q$，且 $q \geq m$。擦除数量服从 $E \sim \mathrm{Bin}(n_{\mathrm{eff}},\ \varepsilon)$，定理4.1–4.2和4.6的分析也可直接沿用，只需将 κ 替换为 n_{eff}。对于反向定理，将像大小界（引理 4.1）应用于联合问题，可得 $P_c \leq \mathbb{E}[\min(1,\ 2^\sigma / m^E)]$，其中 $E \sim \mathrm{Bin}(n_{\mathrm{eff}},\ \varepsilon)$。 □

定理6.2 （联合推导约束容量）。

$$\sigma^*_{\mathrm{unc}}(\mathcal{Q}, \delta) = \big(n_{\mathrm{eff}} - N^*(\varepsilon, \delta)\big) \log m + O(\log n_{\mathrm{eff}}). \tag{6.3}$$

N^* 未受保护事实可以任意放置在 S中的 n_{eff} 个事实之间；成功概率 $(1-\varepsilon)^{N^*}$仅取决于 N^*，而不取决于重叠结构。

证明。联合成功要求所有 n_{eff} 事实均可用。缓存 $n_{\mathrm{eff}}-N$ 事实会留下 N 未受保护；$(1-\varepsilon)^N \geq 1-\delta$ 给出 $N \leq N^*(\varepsilon,\ \delta)$。 □

C. 普适推导惩罚

定理 6.3 （多查询推导惩罚）。对于多查询实例 $\mathcal{Q}$:

(I) 一阶惩罚。 $\sigma^*_{\mathrm{unc}} / \sigma^*_{\mathrm{code}} \to 1/\varepsilon$ 随着 $\kappa \to \infty$而变化，且独立于 L 和 α。

(II) 二阶精化。

$$\frac{\sigma^*_{\mathrm{unc}}}{\sigma^*_{\mathrm{code}}} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{N^*(\varepsilon, \delta)}{\varepsilon\, n_{\mathrm{eff}}} - \frac{\Phi^{-1}(1-\delta)\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon^{3/2}\sqrt{n_{\mathrm{eff}}}} + O(n_{\mathrm{eff}}^{-1}). \tag{6.4}$$

趋近速率为 $\Theta(n_{\text{eff}}^{-1/2})$，通过 n_{eff} 取决于重叠度：重叠度越高(在 κ固定时， n_{eff} 越小)，有限长度修正越大，因此在任意固定的 κ 下，与 $1/\varepsilon$ 的差距越大。

证明。 证明过程与定理 4.10 相同，只需将 κ替换为 n_{eff}。对于 (I)： $\sigma_u/\sigma_c \to n_{\text{eff}}/(\varepsilon n_{\text{eff}}) = 1/\varepsilon$。对于 (II)：按照定理 4.10 展开 σ_u/σ_c。 □

备注 6.2 （ $1/\varepsilon$ 惩罚的普适性）。 一阶惩罚为 $1/\varepsilon$ ，与 L、 α、 κ 或 δ 无关：它是信道参数的纯函数。编码方案平均每个依赖项需要 ε对数 m 比特（坐标间的代数冗余）；推导约束方案对每个受保护的依赖项需要对数 m 比特，与 ε 无关（没有跨坐标修正）。

D. 联合编码增益

定理 6.4 （联合编码增益）。 令 σ^*_{sep} 表示采用分离编码时的总缓存（每个查询独立编码，可靠性为 δ/L）。

(I) 一阶增益。 $G_1 := \sigma^*_{\text{sep}}/\sigma^*_{\text{joint}} \to \Omega = L\kappa/n_{\text{eff}}$。 (II) 二阶增益。 $G_2 = L\sqrt{\kappa}\,\Phi^{-1}(1-\delta/L)\,/\,(\sqrt{n_{\text{eff}}}\,\Phi^{-1}(1-\delta))$。对于 $L=2$， $\alpha=0$， $\delta=0.1$： $G_2 \approx 1.81$。

证明。 (*I*) $\sigma^*_{\text{sep}} = (1+o(1))\varepsilon L\kappa$对数 m； $\sigma^*_{\text{joint}} = (1+o(1))\varepsilon n_{\text{eff}}$对数 m；比值为 Ω。 (*II*) 在分离编码下，二阶总量为 $L\sqrt{\kappa}V_{\text{cache}}\Phi^{-1}(1-\delta/L)$；联合二阶项为$\sqrt{n_{\text{eff}}}V_{\text{cache}}\Phi^{-1}(1-\delta)$。 □

备注 6.3 (联合编码增益的分解)。 总增益可分解为去重增益Ω （共享事实只编码一次）以及来自两个来源的池化增益： 方差降低（$\sqrt{n_{\text{eff}}} < L\sqrt{\kappa}$ 当Ω > 1）和可靠性分配（$\Phi^{-1}(1-\delta/L) > \Phi^{-1}(1-\delta)$，针对 $L \geq 2$）。

E. 多查询色散与池化

定理 6.5 （多查询色散二分性）。 对于多查询实例 $\mathcal{Q}$:

(I) 编码色散。 $V_{\text{joint}} = n_{\text{eff}} \cdot V_{\text{cache}}$； 每个查询： $V_{\text{joint}}/L = (\kappa/\Omega) \cdot V_{\text{cache}} \leq \kappa \cdot V_{\text{cache}}$。 (II) 推导约束色散。 $V_{\text{unc}} = 0$ (与单查询情形相同)。(III) 池化不等式。

$$\sum_{\ell=1}^{L} \sqrt{|S_\ell|\,V_{\text{cache}}}\;\Phi^{-1}(1-\delta/L) \;\geq\; \sqrt{n_{\text{eff}}\,V_{\text{cache}}}\;\Phi^{-1}(1-\delta), \tag{6.5}$$

当且仅当 $L=1$ 时取等号。

证明。 (I) 和 (II) 由定理 6.1 和定理 6.2 的二阶展开得出。对于 (III)：由于 $n_{\text{eff}} \leq L\kappa$, $L\sqrt{\kappa} \geq \sqrt{L\,n_{\text{eff}}} \geq \sqrt{n_{\text{eff}}}$； 结合 $\Phi^{-1}(1-\delta/L) > \Phi^{-1}(1-\delta)$， 对于 $L \geq 2$ 可得该不等式。 □

F. 容量区域与大-L 尺度

定理 6.6 (多查询容量区域)。 在异质可靠性条件下$(\delta_1, \ldots, \delta_L)$ 且 $\delta_{\min} :=$ 最小值$_\ell\,\delta_\ell$:已编码： $\sigma \geq \varepsilon n_{\text{eff}}$ 对数 $m + \sqrt{n_{\text{eff}}}V_{\text{cache}}\;\Phi^{-1}(1-\delta_{\min}) + O($对数 $m)$。推导约束式： $\sigma \geq (n_{\text{eff}} - N^*(\varepsilon, \delta_{\min}))$ 对数 $m + O($对数 $n_{\text{eff}})$。在这两种模型中，起决定作用的约束都是最严格的可靠性要求。

证明。 对全部 n_{eff} 个事实的联合恢复可确保所有查询成功；起约束作用的事件是 $\delta_{\min}$。对于编码方案, $\Pr[E \leq r] \geq 1-\delta_{\min}$ 决定 r。对于推导约束方案， $(1-\varepsilon)^N \geq 1-\delta_{\min}$ 给出$N \leq N^*(\varepsilon,\ \delta_{\min})$。 □

定理 6.7 （随查询数量的扩展）。 考虑“公共核心”模型中的 L个查询，其中$|\bigcap_\ell S_\ell| = \alpha\kappa$ 且其余所有事实均为私有。当 $L \to \infty$ 且 κ 固定时:

(I) $n_{\text{eff}} = \alpha\kappa + L(1-\alpha)\kappa$。(II) 每查询编码缓存: $\sigma_{\text{code}}/L \to \varepsilon(1-\alpha)\kappa\log\, m$。(III) 每查询未编码缓存: $\sigma_{\text{unc}}/L \to (1-\alpha)\kappa\log\, m$。(IV) 每查询惩罚： $(\sigma_{\text{unc}}/L)\;/\;\sigma_{\text{code}}/L) \to 1/\varepsilon$。

证明。 (I) 在公共核心模型中： $n_{\text{eff}} = \alpha\kappa + L(1-\alpha)\kappa$。 (II) $\sigma_{\text{code}}/L = \varepsilon[(1-\alpha)\kappa + \alpha\kappa/L]\log\, m + O(\sqrt{\kappa}/L\log\, m)$。 (III) $\sigma_{\text{unc}}/L = (1-\alpha)\kappa\log\, m + (\alpha\kappa - N^*(\varepsilon,\ \delta))\log\, m/L + O(\log\, n_{\text{eff}}/L)$。 (IV) 比率 $\to (1-\alpha)/(\varepsilon(1-\alpha)) = 1/\varepsilon$。 □

注 *6.4*（相同缓存下的指数交叉）。在相同的归一化缓存率 $\rho = \sigma/(n_{\text{eff}} \log m)$ 下，编码可靠性指数 $D(\rho\|\varepsilon)$（严格凸，从 $\rho = \varepsilon$ 处的 *0* 开始递增）与推导约束成功指数 $(1-\rho)|\log(1-\varepsilon)|$（线性递减，在 $\rho = 1$ 处降至 *0*）恰好在某个 $\rho^* \in (\varepsilon, 1)$ 处交叉一次。当低于 ρ^* 时，推导约束方案的指数更大（其工作点远离其容量 $\rho = 1$）；当高于 ρ^* 时，已编码方案占优。然而，在可靠性 δ 相同的情况下，已编码方案使用的缓存始终更少，比例为 $1/\varepsilon$。

VII. 架构参数化的深度空间分析

定理 5.3 的相图以归一化缓存率 $\rho = \sigma/(\kappa \log m)$ 表述，并将依赖数量 κ 视为自由参数。现在，我们通过代入 CT2（定理 2.4）中的架构依赖映射 $\kappa = \kappa_{\mathcal{A}}(d)$，在深度空间中对该相图重新参数化：$\kappa_{\text{chain}}(d) = k + d - 1$ 和 $\kappa_{\text{merge}}(d) = k \cdot 2^{d-1}$。这表明，相变在深度空间中的位置、宽度和陡峭程度均依赖于架构，从而在 CT2（容量分离）与错误概率图景之间建立了直接桥梁。

A. 深度空间相变

定义 7.1（深度空间临界深度与过渡宽度）。固定缓存预算 $\sigma > 0$、擦除率 $\varepsilon \in (0, 1)$、目标可靠性 $\delta_1 < \delta_2 \in (0, 1)$ 以及架构 $\mathcal{A} \in \{\text{链}, \text{合并}\}$。临界深度 $d^*(\sigma, \mathcal{A})$ 满足 $\sigma = \varepsilon\, \kappa_{\mathcal{A}}(d^*) \log m$。过渡宽度 $\Delta d(\sigma, \mathcal{A})$ 是 P_e 从 δ_1 过渡到 δ_2 的深度区间。

定理 7.1（架构相关的深度空间相变）。固定 $\sigma > 0$，$\varepsilon \in (0, 1)$，并令 $r := \lfloor \sigma / \log m \rfloor$。

（I）临界深度。链：$d_c^* = r/\varepsilon - k + 1$。合并：$d_m^* = 1 + \log_2(r/(\varepsilon k))$。两者均为实数值；整数舍入会引入 $O(1)$ 误差。

（II）编码过渡宽度。

（a）链：$\Delta d_c^{\text{code}} = \Theta(\sqrt{d_c^*})$。

（b）合并：$\Delta d_m^{\text{code}} = \Theta(2^{-d_m^*/2})$。

（III）推导约束过渡宽度。

（a）链：$\Delta d_c^{\text{unc}} = \Theta(1/\varepsilon)$。（

b）合并：$\Delta d_m^{\text{unc}} = O(\log(1/\delta))$。

(IV) 尖锐度比。$\Delta d_c^{\text{code}} / \Delta d_m^{\text{code}} = \Theta(\sqrt{d_c^* \cdot 2^{d_m^*/2}}) \to \infty$：合并架构在深度空间中的相变陡峭程度呈指数级提升。

证明。*(I)* 求解 $r = \varepsilon \kappa_{\mathcal{A}}(d^*) + O(1)$ 以求得 d^*：链给出 $d_c^* = r/\varepsilon - k + 1$；合并给出 $2^{d_m^* - 1} = r/(\varepsilon k)$。

(II) 在深度 $d^* + \Delta d$ 且缓存 σ 固定时：对于链，$\kappa(d^* + \Delta d) = \kappa(d^*) + \Delta d$，因此中心极限定理转移要求 $\Delta\kappa = O(\sqrt{\kappa(d^*)})$，得出 $\Delta d = O(\sqrt{d^*})$。对于合并，$\kappa(d^* + \Delta d) = \kappa(d^*) \cdot 2^{\Delta d}$；对较小的 Δd 进行线性化，$\varepsilon\kappa(d^*) \Delta d \ln 2 = O(\sqrt{\varepsilon \kappa(d^*)})$，得出 $\Delta d = O(1/\sqrt{\varepsilon \kappa(d^*)}) = \Theta(2^{-d^*/2})$。

(III) 对于链：每个深度单位增加一个暴露依赖，因此 $\Delta d = \log((1-\delta_2)/(1-\delta_1))/\log(1-\varepsilon) = \Theta(1/\varepsilon)$。对于合并：暴露依赖项在每个深度单位上加倍，因此 $\Delta d = \log_2(\log(1-\delta_2)/\log(1-\delta_1)) = O(\log(1/\delta))$。

(IV) 由 (II) 直接得出。 □

B. 深度空间中的精确渐近

推论 7.1（深度空间 Bahadur–Rao 实例化）。固定 $\sigma > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$，并令 $r := \lfloor \sigma / \log m \rfloor$。令 $d^*(\sigma, \mathcal{A})$ 由 $\sigma = \varepsilon\, \kappa_{\mathcal{A}}(d^*) \log m$（定义 *7.1*）定义。对于任意 $d > d^*$，定义有效归一化缓存率

$$\alpha_{\mathcal{A}}(d) := \frac{r}{\kappa_{\mathcal{A}}(d)}.$$

于是 $\alpha_{\mathcal{A}}(d) < \varepsilon$，因此该编码方案处于强逆（下尾）区间。特别地，定理 *5.1*(i) 给出

$$P_c^{\text{MDS}}(d, \mathcal{A}) = \frac{2^{-\kappa_{\mathcal{A}}(d)\, D(\alpha_{\mathcal{A}}(d)\|\varepsilon)}}{(1 - e^{t^*(\alpha_{\mathcal{A}}(d))}) \sqrt{2\pi \kappa_{\mathcal{A}}(d)\, \alpha_{\mathcal{A}}(d)(1 - \alpha_{\mathcal{A}}(d))}} \big(1 + O(\kappa_{\mathcal{A}}(d)^{-1})\big). \tag{7.1}$$

证明。由于对于两种架构，$d > d^*$ 和 $\kappa_{\mathcal{A}}(d)$ 关于 d 均严格递增，因此有 $\kappa_{\mathcal{A}}(d) > \kappa_{\mathcal{A}}(d^*)$。此外，根据 d^* 的定义，$r \approx \varepsilon\,\kappa_{\mathcal{A}}(d^*)$ 至多相差一个 $O(1)$ 的整数取整项。因此

$$\alpha_{\mathcal{A}}(d) = \frac{r}{\kappa_{\mathcal{A}}(d)} < \frac{\varepsilon\,\kappa_{\mathcal{A}}(d^*) + O(1)}{\kappa_{\mathcal{A}}(d)} < \varepsilon$$

对所有充分大的 $\kappa_{\mathcal{A}}(d)$均成立，这正是深度—空间渐近所关注的情形。将$\kappa = \kappa_{\mathcal{A}}(d)$和 $\alpha = \alpha_{\mathcal{A}}(d)$代入定理 5.1(i)，得到 (7.1)。 □

定理 7.2（深度—空间中等偏差）。固定一个缓存序列 $\sigma_d = \varepsilon\kappa_{\mathcal{A}}(d)\log m + a_d\sqrt{\kappa_{\mathcal{A}}(d)\log m}$，其中 $a_d \to \infty$ 且 $a_d = o(\sqrt{\kappa_{\mathcal{A}}(d)})$。根据定理 5.2：
(a) 链 *($\kappa = \Theta(d)$)*：约束 $a_d = o(\sqrt{d})$ 给出 $P_e \sim exp(-\Theta(a_d^2))$，其中 $a_d^2 = o(d)$；选择 $a_d = d^{1/4}$ 可得到具有代表性的拉伸指数衰减 $P_e \sim exp(-\Theta(\sqrt{d}))$。*(b)* 合并 *($\kappa = \Theta(2^d)$)*：约束 $a_d = o(2^{d/2})$ 给出 $P_e \sim exp(-\Theta(a_d^2))$，其中 $a_d^2 = o(2^d)$；选择 $a_d = 2^{d/4}$ 可得到 $P_e \sim exp(-\Theta(2^{d/2}))$。

每单位深度下，合并架构实现了指数级更快的错误衰减，继承了 *CT2* 的容量分离。

证明。定理 5.2(i) 给出 $\ln P_e \sim -a_d^2/(2\varepsilon(1-\varepsilon))$。该架构通过 $\kappa_{\mathcal{A}}(d)$ 体现，而后者控制着 $a_d = o(\sqrt{\kappa})$ 的可行范围：对于链，$a_d = o(\sqrt{d})$；对于合并，$a_d = o(2^{d/2})$。 □

C. 最大错误指数差距

前述深度-空间分析量化了已编码方案的相变如何随架构而变得更加尖锐。现在我们将证明，在误差指数层面衡量的已编码缓存需求与推导约束缓存需求之间的差距，在低可靠性下达到最大值，并且等于一阶推导惩罚。

定理 7.3 (最大错误指数差距**)**。令 $\varepsilon \in (0, 1/2]$。对于指数水平 $E \in (0, |\log(1-\varepsilon)|)$，定义已编码缓存率 $\rho_{\mathrm{code}}(E)$：$= D^{-1}(E\|\varepsilon)$ (上分支，$\rho > \varepsilon$) 以及推导约束的缓存率$\rho_{\mathrm{unc}}(E)$：$= 1-E/|\log(1-\varepsilon)|$。则：

（I）比值 h（E）：$= \rho_{\mathrm{unc}}$（E）$/\rho_{\mathrm{code}}$（E）在 （0, $|\log(1-\varepsilon)|$）上严格递减。（II）在低指数下：

$$\lim_{E\to 0^+} h(E) = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{7.2}$$

恢复一阶推导惩罚。
（III）在高指数下：h（E）$\to 0$ 当 $E \to |\log(1-\varepsilon)|$时，因为 $\rho_{\mathrm{unc}} \to 0$，而 ρ_{code} 则始终有界且远离零。

（IV）存在唯一的交叉点 $E^* \in$ （0, $|\log(1-\varepsilon)|$），满足 h（E^*）$= 1$：当 $E < E^*$ 时，受推导约束的方案需要严格更多的缓存；当 $E > E^*$ 时，它需要严格更少的缓存。

证明。$D^{-1}(E\|\varepsilon)$ 的上分支在 $(0, D(1\|\varepsilon)]$ $= (0, \log(1/\varepsilon)]$ 上定义良好；由于 $\varepsilon \le 1/2$，$\log(1/\varepsilon) \ge |\log(1-\varepsilon)|$，因此所述定义域包含于可行范围内。
(I). $h'(E) = (\rho_u'\rho_c - \rho_u\rho_c')/\rho_c^2$与 $\rho_u' = -1/|\log(1-\varepsilon)| < 0$ 以及 $\rho_c' = 1/D'(\rho_c\|\varepsilon) > 0$（因为 $D'(\rho\|\varepsilon) > 0$ 对于 $\rho > \varepsilon$）。分子中的两项均为负，因此 $h'(E) < 0$。
(II)。当 $E \to 0^+$ 时：$\rho_{\mathrm{code}} \to \varepsilon$ 和 $\rho_{\mathrm{unc}} \to 1$；该比值收敛到 $1/\varepsilon$。
(III). 当 $E = |\log(1-\varepsilon)|$ 时：$\rho_u = 0$；$\rho_c = D^{-1}(|\log(1-\varepsilon)|\,\|\,\varepsilon)$，因为方程 $D(\rho\|\varepsilon) = |\log(1-\varepsilon)|$有一个解 $\rho \in (\varepsilon,\ 1]$，这是由上述可行性所确立的。因此 $h \to 0$。
(IV)。由于 h 连续且从 $1/\varepsilon > 1$ 严格递减至 0，介值定理保证存在唯一的 E^*，使得 $h(E^*) = 1$。 □

注释 7.1（操作性解释）。推导惩罚在低指数水平（较小的E）时最为严重：此时，编码方案在接近其容量阈值 $\rho = \varepsilon$ 的位置运行，并利用统计集中，而推导约束方案则无法做到这一点。在高指数水平（$E > E^*$）时，情况则相反：推导约束方案的线性缓存–指数权衡比编码方案的凸权衡更高效。在深度空间中，与链相比，合并架构指数级增大的 κ（d^*）将优势和劣势都放大了 Θ（2^d）倍。

D. CT2–CT4 桥接

注释 7.2（从 CT1 到深度空间图景的完整逻辑链）。深度空间的重新参数化清晰地展现了以下逻辑链。CT1 确立了每步信息率 $\log m$ 比特，该信息率以因子 $\log m$ 的形式进入 V_{cache}。CT2 确定了架构依赖映射 $d \mapsto \kappa_{\mathcal{A}}(d)$：对链而言是线性的，对合并而言是指数级的。定理 5.3 的相图适用于每个 κ；架构将其映射为依赖深度的图景。过渡宽度 $\Delta d \propto 1/\sqrt{\kappa'(d)}$是容量增长率的“倒数”：$\kappa'_c = 1$与 $\kappa'_m = \Theta(2^d)$；合并架构的导数大得多，因此过渡也锐利得多。CT4 的深度–韧性二象性（定理 3.8）是 $\sigma = 0$ （纯原生韧性）这一特殊情形：$d^*_{\text{chain}} = N^* - k + 1 = \Theta(\delta/\varepsilon)$，$d^*_{\text{merge}} = 1 + \log_2(N^*/k) = \Theta(\log(\delta/\varepsilon))$。中等偏差结果（定理 7.2）连接了 $\Delta d = O(1)$附近的中心极限定理区域与 $\Delta d = \Theta(d^*)$处的大偏差区域，而 Bahadur–Rao 前因子（推论 7.1）则提供了精确的有限d 评估。

VIII. 数值验证

本节通过精确计算和蒙特卡罗模拟，验证第三至第七节的核心有限长度预测。除非另有说明，我们采用 $m = 256$ （因此为 $\log_2 m = 8$ 比特）和 $k = 2$。所有已编码-缓存数值结果均将 κ 视为 不同的 基础事实依赖项的数量（$\kappa = \kappa(q,\ B)$，定义 2.7），这与不同坐标区域（引理 2.3）一致。

A. 计算方法（简述）

所有实验均使用 Python 3.11 执行，所用 SciPy 版本为 1.12 [44]，NumPy 版本为 1.26。对于编码方案，二项分布尾概率 $\Pr[\text{Bin}(\kappa,\ \varepsilon) \le r]$ 通过 scipy.stats.binom.cdf 计算（对于所报告的范围，其精度达到机器精度），并通过累积分布函数反演获得最小奇偶校验位数 r^*。对于推导约束方案，精确错误概率 $P_e^{\text{unc}} = 1 - (1-\varepsilon)^N$ 以闭式形式进行评估。

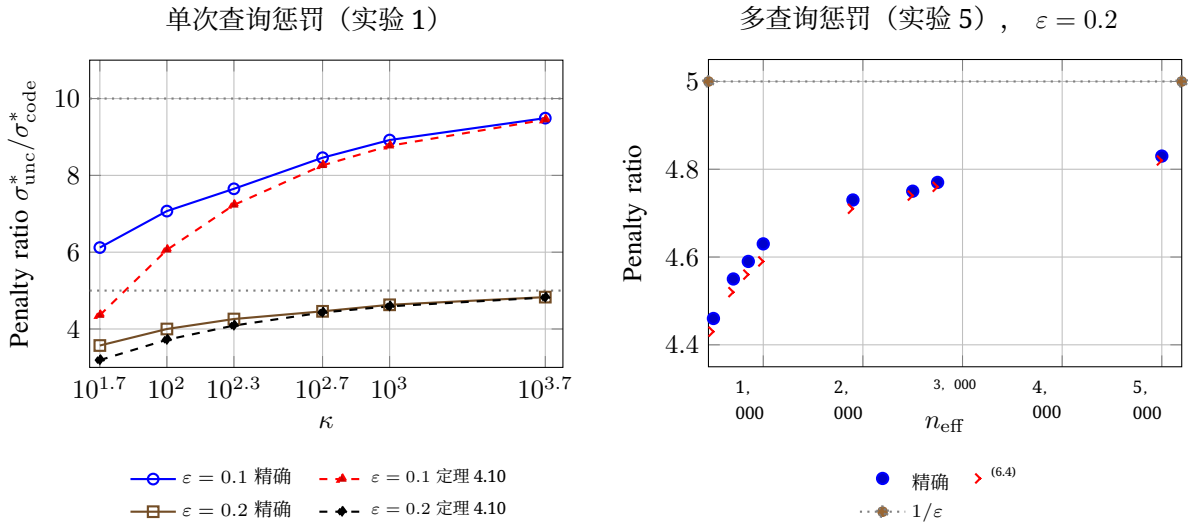

图 2. 惩罚比率及向 $1/\varepsilon$ 的收敛（实验 1 和 5）。所有图例均置于绘图区域之外，以免遮挡曲线。

B. 实验 1 和 5：推导惩罚收敛与普适性

图 2（左）验证了定理 4.3 和 4.10。在 $\varepsilon = 0.1$ 处，精确比率从 $\kappa = 50$ 时的 6.12 上升至 $\kappa = 5000$ 时的 9.49，达到一阶极限 $1/\varepsilon = 10$ 的 6% 以内；闭式二阶预测 (4.11) 以递减的相对误差跟踪精确值（ $\kappa = 50$ 处为 29%， $\kappa = 5000$ 处为 0.4%），从而确认了 $\Theta(\kappa^{-1/2})$ 收敛速率。在 $\varepsilon = 0.2$ 处，模式类似，精确比率在 $\kappa = 5000$ 处达到 4.83，而极限为 $1/\varepsilon = 5$。

图 2（右）验证了定理 6.3 的多查询普适性：在八种 $(L,\ \alpha)$ 配置中，当$n_{\text{eff}} \in [500, 5000]$时，惩罚比率仅取决于 n_{eff}，而非分别取决于 L 或 α；对于所有条目，二阶预测 (6.4) 与精确比率的误差均在 2% 以内。

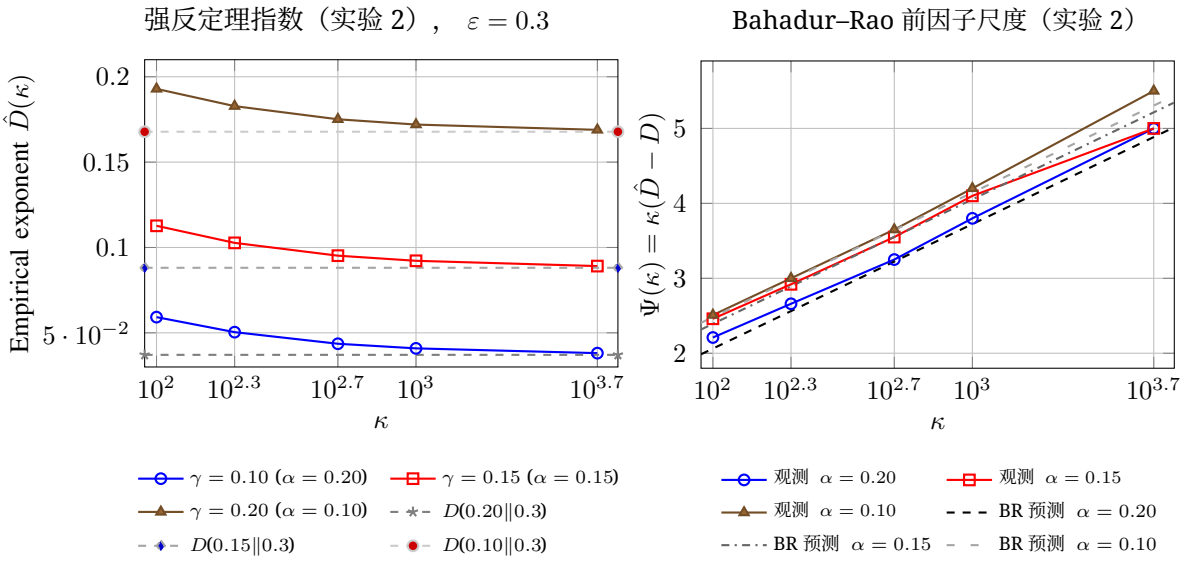

图 3. 强反定理指数与 Bahadur–Rao 前因子验证（实验 2）。左图展示如定理 4.6 所述的收敛 $\hat{D}(\kappa) \to D(\alpha\|\varepsilon)$；右图验证定理 5.1 中的 $\frac{1}{2}\log_2 \kappa$ 前因子缩放。图例置于绘图区域之外。

C. 实验 *2*：指数与 *Bahadur–Rao* 前因子

图 3（左）绘制了由精确二项 ˆCDF 计算得到的经验指数 $\hat{D}(\kappa) := -\kappa^{-1}\log_2 P_c^{\mathrm{MDS}}$，并与 KL散度 $D(\alpha\|\varepsilon)$（水平虚线）对照。对全部三个差距取值，均可看到从上方的收敛 $D \to D$；在 $\kappa = 5000$ 处的相对误差分别为 2.6%（$\gamma = 0.10$）、1.2%（$\gamma = 0.15$）和 0.6%（$\gamma = 0.20$），并随指数增大而减小，因为多项式预因子在总量中所占比例变小。

图 3（右）展示了重新缩放后的前因子量 $\Psi(\kappa) := \kappa(\hat{D} - D)$。Bahadur–Rao 展开 (5.2) 预测 $\Psi_{\mathrm{BR}}(\kappa) = \frac{1}{2}\log_2 \kappa + c(\alpha)$，$\alpha = 0.20$，$c(0.20) = -1.26$，$c(0.15) = -0.93$，$c(0.10) = (-0.84)$，$\Psi(\kappa) = \kappa(\hat{D} - D)$，$\kappa = 100$，$\kappa = 5000$。

$\log(\ )$，其中常数 ( )、( )、( ) 随 而变。观测结果符合预测的 $\frac{1}{2}\log_2 \kappa$ 增长：从 到 的增幅与理论值 2.82 相差不超过 5%，三个 α 值均如此，这证实了有限 κ 下的“超额”指数完全可由 Bahadur–Rao 前因子解释。

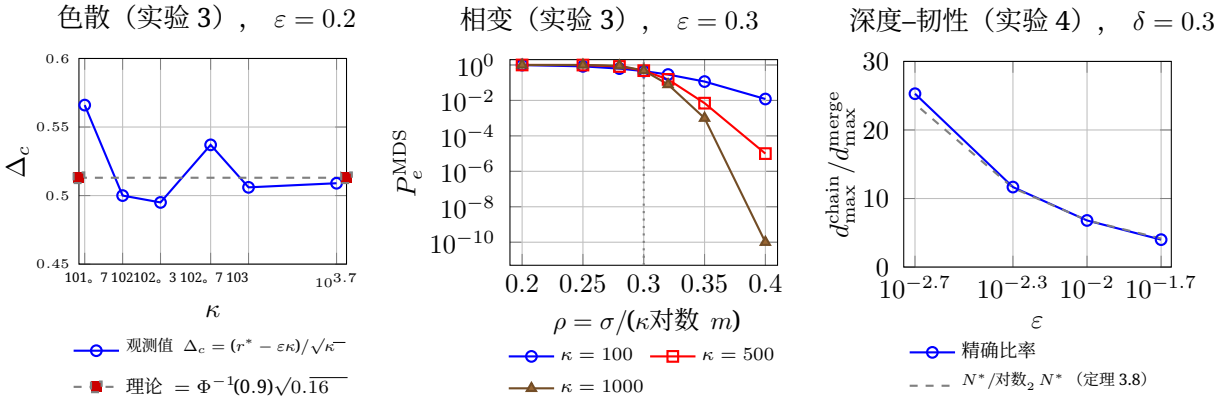

图4。实验 3–4。左：已编码二阶修正 Δ_c 稳定在色散预测常数处，而推导约束修正恒为零（定理 4.8）。中：随着 κ 增大，编码相变在 $\rho = \varepsilon = 0.3$（垂直虚线）附近变得更加陡峭；对数刻度的 y轴显示了超容量区域中的指数误差衰减。右：架构相关的深度–韧性差距随 $\varepsilon \to 0$增大。

D. 实验 *3* 和 *4*：色散、相变与深度–韧性

图4（左）验证了色散二分性（定理 4.9）：归一化编码修正 $\Delta_c := (r^* - \varepsilon\kappa)/\sqrt{\kappa}$ 围绕预测值 $\Phi^{-1}(0.9)\sqrt{0.16} = 0.513$ 振荡（小幅波动源于对 r^*的整数约束），而推导约束修正对所有 κ恒为零，这反映了 $V_{\mathrm{unc}} = 0$（定理 4.8）。

图4（中）展示了对数误差概率轴上的编码相变。P_e 从 0.9 降至 0.1 所需的窗口从 $\Delta\rho \approx 0.15$（$\kappa = 100$ 时）缩短至 $\Delta\rho \approx 0.04$（$\kappa = 1000$时），而超容量区域（$\rho > \varepsilon$）中的指数误差衰减随着 κ 增大而变得更加陡峭，这与定理 5.3 中的 C1–C5 区域相符。

图4（右）验证了深度–韧性二象性（定理 3.8）：随着 $\varepsilon \to 0$，链与合并的最大深度比按 $\Theta(N^*/\log N^*)$ 增长，与渐近预测的差距在 6% 以内。在 $\varepsilon = 0.002$时，链推导出 177 层深度，而合并仅限于 7 层——差距为 $25\times$ 。

E. 实验*6*：蒙特卡罗验证（保留在第*VIII*节）

为进行独立验证，避免依赖闭式评估，我们在两个参数区间下对前提擦除过程进行蒙特卡罗模拟。每次试验中，抽取一个擦除计数 $E \sim \mathrm{Bin}(\kappa,\ \varepsilon)$；当且仅当满足 $E \le r$ 时，编码方案成功；而推导约束方案成功的条件是所有 N 个暴露依赖项均未被擦除，即 $E_{\exp} = 0$，其中 $E_{\exp} \sim \mathrm{Bin}(N,\ \varepsilon)$。表 I 报告了 $N_{\mathrm{mc}} = 10^6$ 次试验的结果，并给出 95% Clopper–Pearson 置信区间。

表 I 蒙特卡罗验证（$N_{\mathrm{mc}} = 10^6$）。面板A：$\varepsilon = 0.2,\ \kappa = 500$。面板 B：$\varepsilon = 0.3,\ \kappa = 100$。“置信区间”表示95% Clopper–Pearson 区间。

面板A（$\varepsilon = 0.2,\ \kappa = 500$）

方案参数	P_e(精确值)		$\hat{P_e}$ (蒙特卡洛)	95%置信区间
已编码	$r = 90$	0.856	0.857	[0.856, 0.858]
已编码	$r = 100$	0.473	0.473	[0.472, 0.474]
已编码	$r = 111$	0.100	0.100	[0.100, 0.101]
已编码	$r = 120$	0.012	0.012	[0.012, 0.013]
Unc	$N = 10$	0.893	0.892	[0.892, 0.893]
Unc	$N = 3$	0.488	0.488	[0.487, 0.489]
Unc	$N = 1$	0.200	0.200	[0.199，0.201]

面板 B($\varepsilon = 0.3,\ \kappa = 100$)

方案参数	P_e（精确）		$\hat{P_e}$（蒙特卡洛）	95%置信区间
已编码	$r = 20$	0.984	0.984	[0.983, 0.984]
已编码	$r = 25$	0.837	0.837	[0.837, 0.838]
已编码	$r = 30$	0.451	0.451	[0.450, 0.452]
已编码	$r = 35$	0.116	0.116	[0.116, 0.117]
Unc	$N = 5$	0.832	0.832	[0.831, 0.832]
Unc	$N = 3$	0.657	0.657	[0.656, 0.658]
Unc	$N = 1$	0.300	0.300	[0.299, 0.301]

在所有情形下，蒙特卡洛估计值均在抽样不确定性范围内与精确值相符，这支持了已编码和推导约束解码的有限长度公式（定理 4.4 和 4.11）。

F. 数值结果总结

图 2–4 和表 I 共同印证了本文的关键预测：(i) 推导惩罚收敛至$1/\varepsilon$，并满足二阶精化（定理 4.10 和 6.3）；(ii) 低于编码阈值时，成功概率以 KL 散度速率衰减，并带有 Bahadur–Rao 前因子（定理 4.6 和 5.1）；(iii) 编码缓存呈现非零色散和锐化相变，而推导约束方案的色散实际上为零（定理 4.9）；(iv) 架构相关的深度–韧性差距随 $\varepsilon \to 0$ 增长（定理 3.8）。

IX. 讨论

a) 推导惩罚作为基本极限：本文的核心观点是，要求解码器给出逻辑推导——而不只是输出正确答案——会使最小可靠缓存相较于编码缓存增加 $1/\varepsilon$ 倍（定理 4.3）。这种惩罚具有普适性：它仅取决于信道擦除率 ε，且不受查询数量、查询重叠结构或目标可靠性 δ 的影响（定理 6.3）。其证明论根源在于定理 3.5 所揭示的结构性缓存刚性：在忠实推导且轨迹唯一的条件下，只有位于目标查询推导有向无环图中的缓存事实才能提升韧性，因此无法实现 MDS 码所利用的跨坐标纠错。

b) 与编码缓存和信道编码的关系：由Maddah-Ali和Niesen开创的编码缓存文献 [22]研究广播信道上的缓存辅助传输，其中编码多播消息相对于无编码放置可获得乘性增益。我们的设定在结构上有所不同：“接收方”是一个证明引擎，它只能通过有效推理步骤将缓存的逻辑事实与存留前提相结合，而不是任意的代数译码器。我们的可达性结果（定理 4.2）中使用的最大距离可分码与网络编码缓存中的相同，但逆定理机制完全不同——它依赖于有向无环图约束，而非割集界或网络拓扑。在信道编码方面，强反定理指数 $D(\rho\|\varepsilon)$（定理 4.6）和可靠性函数（推论 4.2）与经典的 m元二元擦除信道指数一致，因为最大距离可分码在所有速率上均达到二元擦除信道的球填充界 [20, 定理 5.8。3]。缓存色散$V_{\mathrm{cache}} = \varepsilon(1-\varepsilon)(\log m)^2$ 同样与均匀输入下 m元二元擦除信道的信道色散相匹配 [21],，从而证实编码缓存问题精确继承了该信道的二阶行为。

c) 色散二分性及其操作性后果：推导约束方案的零有效色散（定理 4.9）可以说是最引人注目的结构性发现。它意味着相对于 $\sqrt{\kappa}$ 的有限长度惩罚消失：二阶项为 $-N^{*}\log\ m\ =\ O(\log\ m)$，与 κ无关。所有已知的针对无记忆信道的达到容量的编码方案都表现出正色散 [21]，因此色散消失是推导约束的一个独特标志。其操作性根源在于求和 统计量（编码方案：总擦除计数 $E=\sum E_{j}$，由中心极限定理支配）与合取（推导约束式：所有 N 未受保护事实都必须存留，由不具有中心极限定理型集中的乘积概率支配）之间的区别。这一二分性在多查询场景（定理 6.5）中依然存在，其中联合编码色散按 $n_{\mathrm{eff}}\cdot V_{\mathrm{cache}}$ 缩放，而推导约束色散始终恒为零。

d) 架构依赖性： 第七节的深度-空间分析表明，CT2（定理 2.4）中依赖架构的容量映射 $d\mapsto\kappa_{\mathcal{A}}(d)$ 会传递到所有下游量：临界深度、过渡宽度、每个深度单位的误差指数以及最大韧性深度。与链相比，合并架构的指数增长 $\kappa_{\mathrm{merge}}(d)\ =k\cdot 2^{d-1}$ 会带来陡峭得多的相变（定理 7.1）以及小得多的最大韧性深度（定理 3.8），从而确立了推导中并行性的精确信息论代价。更广泛地说，这表明决定噪声鲁棒性的参数是推导程序的分支因子，而不仅仅是其深度。

e) 局限性： 若干建模假设限制了当前结果的适用范围。首先，独立同分布擦除模型是信道解释的核心：像大小界（引理 4.1）和 Bahadur–Rao 渐近结果（定理 5.1）都利用了独立性。在相关擦除的情况下——例如，相关事实共用一个物理存储子系统时——有效信道会具有记忆，而二项式擦除计数则会被更复杂的统计量取代。其次，不同坐标区域 $\kappa(q,\ B)\ =\ a(q)$ 是简洁的二元擦除信道$_{m}(\varepsilon)^{\otimes\kappa}$ 因子分解的基础。引理 2.3 保证当 $a=o(\sqrt{m})$ 时，这一条件对 $1-o(1)$ 比例成立；但对于非常深的查询，元数可能超过该阈值，因此需要修正的信道模型。成本模型（定义 2.16）将推导步骤视为单位成本，忽略了规则应用复杂度或缓存查找开销可能存在的差异；更细粒度的模型可能会改变 CT3 的临界频率。

f) 开放问题： 我们着重指出五个研究方向。

(i) 自适应缓存。 当前框架在观察擦除模式之前就固定了缓存 S 。一种˜自适应协议可在部分观察到 B 之后迭代更新缓存，从而有望降低推导惩罚。自适应情况下， $1/\varepsilon$ 因子是否依然存在尚无定论；结构刚性定理（定理 3.5）在每一轮中仍然成立，但多轮交互或许能够绕过该定理。

(ii) 相关擦除与对抗性擦除。 将该理论扩展至马尔可夫模型或最坏情况擦除模型，需要采用超越独立同分布框架 [20]的信道编码技术。推导惩罚可能取决于相关结构；由于像大小界依赖乘积分布，因此需要新的逆定理技术。

(iii) 近似推导。 如果解码器可以输出一个在适当度量下与 q 相差不超过 ϵ的公式 $\hat{}q$ （例如模型的对称差），推导惩罚可能会降低。这与数据库理论中的近似查询回答 [1]以及有损信源编码 [5]相关。

（*iv*）一般分支架构。定理 3.8(III)表明， b 元合并可实现 $d_{\max}(b)\ =\ 1\ +\log_{b}(N^{*}/k)$，其韧性容量为 $N^{*}\log\ m$。能否存在同时实现次对数级深度增长和线性韧性深度的架构，仍是一个悬而未决的问题；要取得这样的结果，就必须跳出固定分支范式。

（*v*）增强型证明系统下的阈值行为。推导约束方案不会出现相变（注 5.2）。如果为证明引擎增添概率推理或基于采样的搜索，所形成的“随机证明系统”或许会引入集体统计效应和阈值行为。刻画增强型证明系统能否弥合 $1/\varepsilon$ 差距，抑或这一惩罚是任何演绎机制固有的，仍是一个基础性开放问题。

X. 结论

本文为基于推导的推理引擎中的前提擦除缓存建立了一个信息论框架，确定了当前提基遭受独立同分布随机丢失时，实现可靠查询恢复的基本极限。

该框架建立在四条编码定理之上。CT1表明，忠实的 Datalog 程序中的每个推导步骤恰好携带 $\log m$ 比特的条件算法信息。CT2揭示，在相同推导深度 d下，元组组装链（$\kappa=k+d-1$）与平衡合并架构（$\kappa=k\cdot 2^{d-1}$）之间存在指数级容量分离。CT3确定了一个临界访问频率 $f_{c}=\Theta(\rho_{s}\cdot\log(m+d))$，用以区分缓存与按需推导分别最优的两种情形。CT4证明，在速率为 ε 的独立同分布擦除下、韧性目标为 δ时，最小推导约束缓存为 $\sigma_{\mathrm{unc}}^{*}=(\kappa-N^{*})\log\ m+O(\kappa)$ with$N^{*}\approx\delta/\varepsilon$，并将查询的条件信息分解为可靠缓存与噪声信道容量之和。

核心结果是推导惩罚：比值 $\sigma^*_{\mathrm{unc}}/\sigma^*_{\mathrm{code}}$ 收敛至 $1/\varepsilon$，且这一结论在查询数量、重叠结构与可靠性目标上普遍成立。该惩罚源于结构化缓存刚性定理：在具有唯一轨迹的忠实推导下，只有目标查询的推导有向无环图内的缓存事实才对韧性有贡献，从而排除了最大距离可分码在m元擦除信道上所利用的跨坐标纠错。

除了刻画一阶容量外，本文还完整刻画了错误概率。低于编码容量阈值时，成功概率以 KL 散度速率 $D(\rho\|\varepsilon)$衰减，并具有精确的 Bahadur–Rao 前因子；高于该阈值时，MDS码在所有速率下都能达到球填充指数。两种解码器模型呈现出色散二分性：编码方案继承了二元擦除信道的信道色散$V_{\mathrm{cache}} = \varepsilon(1-\varepsilon)(\log m)^2$,，产生一个 $\Theta(\sqrt{\kappa}\log\ m)$ 二阶项；而推导约束方案的有效色散恒为零——这是推导约束的一种结构性特征，源于和统计量（总擦除计数，由中心极限定理支配）与合取（所有未受保护的依赖项都必须存活，由乘积概率支配）之间的区别。完整相图包含五种编码情形和三种推导约束情形，后者没有相变。在多查询场景中，联合编码利用重叠去重和统计汇聚，但 $1/\varepsilon$惩罚仍然存在，是一个仅取决于信道参数的普适常数。

来自 CT2 的架构依赖映射 $d \mapsto \kappa_{\mathcal{A}}(d)$ 会影响整个错误概率图景：与链相比，合并架构的依赖呈指数级增长，因而在深度空间中产生陡峭得多的相变，最大韧性深度指数级缩小，且单位深度错误衰减快得多，由此确立了推导中并行性的精确信息论代价。全部四个编码定理及其后续推论——包括惩罚、色散和相图结果——都适用于等价的逻辑表示（定理 2.8），从而确保这些量是底层推理系统的典范不变量，而非特定编码方式的产物。

当前结果建立在若干结构性假设之上——独立同分布的前提擦除、具有唯一轨迹的忠实推导，以及基础集规模较大的渐近区间 m——因此，定量结论未必能直接推广到存在相关噪声或对抗噪声、推理系统不忠实或非确定、推导架构超出本文所研究的两个 Datalog 程序，或有限长度偏差不可忽略的小规模实例等情形。 $1/\varepsilon$ 推导惩罚能否在自适应缓存协议、近似推导或融入概率推理的扩展证明系统下继续成立，仍是一个开放问题。这些研究方向将当前框架与更广泛的问题联系起来：在含噪计算的输出中，要求具备逻辑结构而非仅仅正确性，究竟要付出怎样的根本信息论代价。

附录 A 逻辑基底、信息公理与噪声模型

在全文中，我们固定一个形式逻辑系统 $\mathcal{L}$ ，取为带最小不动点算子的一阶逻辑FO(LFP) [27], ，并扩展为多重排序，其中至少包括 Obj（实体）、Time（时间点）和 Carrier（载体）。我们将讨论范围限制在离散且有界的时间域 $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ 上的有限结构。在此限制下， $\mathcal{L}$ 是一致的；对于每个有限结构 $\mathcal{M}$ 和公式 $\varphi \in \mathcal{L}$，其满足关系 $\mathcal{M} \models \varphi$ 都是可判定的；并且，根据 Immerman–Vardi定理 [28], [29], FO(LFP) 恰好刻画了有序有限结构上的多项式时间可计算性质。

定义 A.1 （可表达且可有效表示的状态集）。 如果存在一个有限的 $\mathcal{L}$-签名 Σ 和一个有限的 $\mathcal{L}$-结构，其论域包含 X 和 T（的编码），且成员资格 $s \in S(X,T)$ 以及所有用于描述状态动力学的关系都能由 $\mathcal{L}$ 在 Σ 上的公式定义，那么状态集 $S(X,T)$ 便是可用 $\mathcal{L}$ 表达的。若每个 $s \in S(X,T)$ 都具有有限编码，且可据此有效地计算相关的$\mathcal{L}$谓词，则称其可有效表示。 *[33]*。

假设 A.1 (固定的有效证明系统与演绎闭包)。 我们固定一个适用于$\mathcal{L}$ 的有效证明系统PS，使得证明检查是可判定的。我们用 $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ 表示在PS中，从有限公式集 Γ 可推导出良构公式 φ，并定义演绎闭包算子 $Cn(\Gamma) := \{\varphi : \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi\}$.

公理 A.1 (二元属性（双域信息）)。 信息由两个状态域(S_O, S_C)建模，其中 S_O 是语义/本体状态集， S_C 是载体/物理状态集。

公理 A.2 (存在时长（域上的时间与优先关系）)。 存在时间域$(T_O, \prec_O)$ 和$(T_C, \prec_C)$ ，以及时间索引映射时间$_O$: $S_O \to T_O$ 和时间$_C$: $S_C \to T_C$。此外，还存在一个固定的跨域优先关系 $\prec$，使得每当载体状态 s_c 是语义状态 s_o的可启用实现时，我们有

$$\mathsf{time}_O(s_o) \prec \mathsf{time}_C(s_c).$$

公理 A.3 (状态表示（有效可编码性）**)**。 存在有限二进制表示 $\mathit{enc}_O : S_O \to \{0,1\}^*$ 和 $\mathit{enc}_C : S_C \to \{0,1\}^*$，使得：
(R1) 可判定同一性：编码状态之间的相等性是可判定的。**(R2)** 谓词的有效求值：在固定逻辑 $\mathcal{L}$ 中，用于描述 S_O 和 S_C 上的成员资格与结构的所有关系/谓词，都可以根据编码有效求值。

公理 A.4（使能映射（可计算全定义性与满射覆盖））。 存在一个关系 $R_{\mathcal{E}} \subseteq S_O \times S_C$ 以及由此诱导的集合值映射 $\mathcal{E}$： $S_O \Rightarrow S_C$, $\mathcal{E}(s_o) := \{s_c \in S_C : (s_o, s_c) \in R_{\mathcal{E}}\}$，使得：
（*E1*）语义状态上的全定义性：对于每个 $s_o \in S_O$, $\mathcal{E}(s_o) \neq \varnothing$。（*E2*）对载体实在的满射覆盖：对于每个 $s_c \in S_C$，都存在 $s_o \in S_O$，使得 $s_c \in \mathcal{E}(s_o)$。等价地，$\bigcup_{s_o \in S_O} \mathcal{E}(s_o) = S_C$。（*E3*）可计算使能选择器：存在一个部分可计算函数 $e:\ \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$，使得对于每个 $s_o \in S_O$， $e(\mathit{enc}_O(s_o))$ 都会停机，并对某个 $s_c \in \mathcal{E}(s_o)$ 等于 $\mathit{enc}_C(s_c)$。（*E4*）实现的时间先行性：如果 $s_c \in \mathcal{E}(s_o)$，那么 $\mathit{time}_O(s_o) \prec \mathit{time}_C(s_c)$。

根据公理 A.4，存在一个关系 $R_{\mathcal{E}} \subseteq S_O \times S_C$。我们将诱导出的集合值启用（实现）映射记为

$$\mathcal{E} : S_O \Rightarrow S_C,\ \mathcal{E}(s_o) := \{\, s_c \in S_C :\ (s_o, s_c) \in R_{\mathcal{E}} \,\}. \tag{1.1}$$

定义 A.2（可计算启用（实现）机制）。 关系 $R_{\mathcal{E}} \subseteq S_O \times S_C$（等价地，式（1.1）中诱导出的 $\mathcal{E}$）若满足公理 *A.4* 的所有子句（E1）–（E4），则称为可计算使能机制 。

定义 A.3（信息实例）。 信息实例是一个元组

$$\mathcal{I} \;=\; \langle S_O, T_O, S_C, T_C, \mathsf{time}_O, \mathsf{time}_C, R_{\mathcal{E}} \rangle,$$

其中，（S_O、S_C）是两个状态域（公理 *A.1*），时间$_O$、时间$_C$是时间索引映射（公理 *A.2*），而 $R_{\mathcal{E}}$ 是一个可计算使能机制（定义 *A.2*）。

定义 A.4（子签名之间的组合解释）。 设 Σ_1、Σ_2 是 $\mathcal{L}$ 的子签名。一个组合解释 τ： $\Sigma_1 \hookrightarrow \Sigma_2$ 在 $\mathcal{L}$ 中由以下部分组成：（i）对于 Σ_1的每个类型 s，在 Σ_2上的一个域公式 $\delta_s(y)$；（ii）对于 Σ_1的每个关系符号 R，在 Σ_2上的一个公式 $\tau_R(y_1, \ldots, y_n)$ 。映射 τ通过标准递归子句扩展到 Σ_1 的所有公式。

定义 A.5 (同义状态集**)**。 状态集 $S_1(X_1, T_1)$ 和 $S_2(X_2, T_2)$，均可在 $\mathcal{L}$ 中表示为良构公式族 Φ_1 和 Φ_2（假定为有限或可有效枚举）在子签名 Σ_1和 Σ_2上的解释，若满足以下条件，则称它们相对于 $\mathcal{L}$同义，记作 $S_1 \equiv_{\mathcal{L}} S_2$：

(i) 在 $\mathcal{L}$中存在组合解释 $\tau_{12} : \Sigma_1 \hookrightarrow \Sigma_2$ 和 $\tau_{21} :\ \Sigma_2 \hookrightarrow \Sigma_1$，并且
(ii) 存在一个双射 $\sigma : \Phi_1 \to \Phi_2$,
使得对每个 $\varphi \in \Phi_1$, $\vdash_{\mathcal{L}} \quad \sigma(\varphi) \quad \leftrightarrow\ \tau_{12}(\varphi)$都成立，并且生成元上满足往返一致性（双向可解释性）。

定义 A.6 (理想信息**)**。 若信息实例 $\mathcal{I}$ 相对于 $\mathcal{L}$满足以下条件，则称其为理想的：

$$S_O \equiv_{\mathcal{L}} S_C.$$

假设 A.2 (集合运算的共同语义宇宙**)**。 存在一个固定的环境集合 $\mathbb{S}_O$，使得所有考虑的语义状态集均满足 $S_O \subseteq \mathbb{S}_O$。此外， $\mathbb{S}_O$ 可被有效表示，即 enc_O 和时间$_O$ 可扩展为 $\mathbb{S}_O$，且 $\mathbb{S}_O$ 对于用于在附录 *A* 中构造同义代表的语法重命名/解释封闭（特别是，引理 *A.1* 中生成的代表可选为 $\mathbb{S}_O$ 的子集）。

定义 A.7（噪声语义基（集合扰动））。 设 $S_O \subseteq \mathbb{S}_O$ 为预期语义状态集。与 S_O 相关联的噪声语义基是任何以下形式的集合

$$\tilde{S}_O := (S_O \setminus S_O^-) \cup S_O^+,$$

其中 $S_O^- \subseteq S_O$（丢失状态）， $S_O^+ \subseteq \mathbb{S}_O \setminus S_O$（伪状态）。

引理 A.1（签名同构下的语义可迁移性）。 设 $\mathcal{L} = \mathrm{FO(LFP)}$ 是定义在有限关系结构上的底层逻辑系统。对于任何可在子签名 $\Sigma = \{R_1, \ldots, R_n\}$ 上用 $\mathcal{L}$ 表达的状态集 S（X、T），以及任何元数匹配 $\Sigma' = \{R'_1, \ldots, R'_n\}$，都存在一个可在 Σ' 上表达的 S'（Y、T'），使得 $S \equiv_{\mathcal{L}} S'$。

证明。 一致地重命名符号 $R_j \mapsto R'_j$ 并传递生成公式族；由此通过语法同构得到一个双可解释性见证。 □

定义 A.8 （噪声信息（相对于固定载体的语义描述））。 固定一个载体域 S_C。A与 S_C 相关的噪声信息是一个抽象对象

$$\tilde{\mathcal{I}} = \langle \tilde{S}_O,\, S_C,\, (\tau_{OC}, \tau_{CO}, \sigma) \rangle,$$

其中 $(\tau_{OC}, \tau_{CO}, \sigma)$ 见证 $S_O \equiv_{\mathcal{L}} S_C$。

命题 A.1 (载体固定噪声信息的存在性)。 设 $\mathcal{I}$ 是一个语义域为 S_O、载体域为 S_C 的信息实例。那么，对任意 $\tilde{S}_O$ 满足 $\tilde{S}_O = S_O \setminus S_O^- \cup S_O^+$，存在一个形式为$(\cdot)$的噪声语义基，使得 $S_O \equiv_{\mathcal{L}} \tilde{S}_C$，从而得到一个语义分量为 S_O 的噪声信息对象 $\tilde{\mathcal{I}}$。

证明。 应用引理 A.1，得到某个语义表示 $S'_O \equiv_{\mathcal{L}} S_C$，然后令 $S_O^- := S_O \setminus S'_O$ 且 $S_O^+ := S'_O \setminus S_O$。

□

附录B
强反定理指数：详细计算

以下计算用于定理 4.6。我们验证， $u \geq 0$ 上的 $g_0(u) := u(\varepsilon - \gamma) + \log(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-u})$ 的最小值满足 $-g_0^* = D(\varepsilon' \| \varepsilon)$，其中 $\varepsilon' := \varepsilon - \gamma$。

令 $\alpha := \varepsilon'(1-\varepsilon)/[\varepsilon(1-\varepsilon')]$ 和 $u^* = -$对数 α：

$$-g^* = -\varepsilon' \log \alpha - \log(1-\varepsilon+\varepsilon\alpha).$$

第二个对数的真数可化简为 ：

$$1-\varepsilon+\varepsilon\alpha = (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon'} = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'}.$$

因此：

$$\begin{aligned} -g^* &= -\varepsilon' \log \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varepsilon')} - \log \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'} \\ &= -\varepsilon' \log \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \varepsilon' \log \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'} + \log \frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon} \\ &= \varepsilon' \log \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + (1-\varepsilon') \log \frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon} = D(\varepsilon' \| \varepsilon). \end{aligned}$$

致谢

在本文的撰写和修订过程中，我收到了上海交通大学计算机科学学院RuiWang副教授许多富有见地的意见，也从与博士生Yiming Wang、Chun Li、Hu Xu、Siyuan Qiu、Zeyan Li、Jiashuo Zhang、Junxuan He和Xiao Wang的定期学术讨论中获得了许多启发和帮助。在此谨向他们致以诚挚的谢意。

参考文献

[1] S. Abiteboul、R. Hull 和 V. Vianu，《数据库基础》。Addison-Wesley，1995年。 [2] P. Lewis、E. Perez、A. Piktus、F. Petroni、V. Karpukhin、N. Goyal、H. K¨uttler、M. Lewis、W.-t. Yih、T. Rockt¨aschel 等，“面向知识密集型自然语言处理任务的检索增强生成”，《神经信息处理系统进展》，第 33 卷，9474，2020年 9459页。 – 。 [3] T. B. Brown、B. Mann、N. Ryder、M. Subbiah、J. Kaplan、P. Dhariwal 等，“语言模型是少样本学习者”，《神经信息处理系统进展》，第 33 卷，第 1877–1901 页，2020年。 [4] C. E. Shannon，“通信的数学理论”，《贝尔系统技术期刊》，第 27 卷，第 3 期，第 379–423 页，1948年。 [5] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，《信息论基础》，第 2 版。John Wiley & Sons，2006年。 [6] A. N. Kolmogorov，“信息定量定义的三种方法”，《信息传输问题》，第 1 卷，第 1 期，第 1–7 页，1965年。 [7] M. Li 和 P. Vit´anyi，《柯尔莫哥洛夫复杂度及其应用导论》，第 3 版。Springer，2008年。 [8] C. H. Bennett，“逻辑深度与物理复杂度”，《通用图灵机：半世纪回顾》，第 227–257 页，1988年。 [9] S. Chaudhuri、R. Krishnamurthy、S. Potamianos 和 K. Shim，“利用物化视图优化查询”，载于《IEEE国际数据工程会议》，1995年，第 190–200 页。 [10] A. Gupta 和 I. S. Mumick，“物化视图：技术、实现与应用”，《IEEE知识与数据工程汇刊》，第 13 卷，第 3 期，第 521–528 页，1997年。 [11] V. Harinarayan、A. Rajaraman 和 J. D. Ullman，“高效实现数据立方体”，《ACM SIGMOD记录》，第 25 卷，第 2 期，第 205–216 页，1996年。 [12] D. D. Sleator 和 R. E. Tarjan，“列表更新与分页规则的摊销效率”，《ACM通讯》，第 28 卷，第 2 期，第 202–208 页，1985年。 [13] L. A. Belady，“虚拟存储计算机替换算法研究”，《IBM系统期刊》，第 5 卷，101，1966年 2，78第。 – 。 [14] N. Megiddo 和 D. S. Modha，“ARC：一种自适应、低开销的替换缓存”，载于《FAST》，第 3 卷，2003年，第 115–130 页。 [15] A. Darwiche 和 P. Marquis，“知识编译图谱”，《人工智能研究期刊》，第 17 卷，第 229–264 页，2002年。 [16] A. C.-C. Yao，“表格是否应该排序？”，《ACM期刊》，第 28 卷，第 3 期，第 615–628 页，1981年。

[17] A. Borodin 和 S. Cook，“通用顺序计算模型中排序的时间—空间权衡”，载于《逻辑、自动机与计算复杂性：Stephen A. Cook 文集》，2023年，第 245–260 页。[18] I. Wegener，《布尔函数的复杂性》。John Wiley & Sons, Inc.，1987年。[19] H. Vollmer，《电路复杂性导论：一种统一方法》。Springer Science & Business Media，1999年。[20] R. G. Gallager，《信息论与可靠通信》。Springer，1968年，第 588 卷。[21] Y. Polyanskiy、H. V. Poor 和 S. Verd´u，“有限码长区间内的信道编码速率”，《IEEE 信息论汇刊》，第 56 卷，第 5 期，第 2307–2359 页，2010年。[22] M. A. Maddah-Ali 和 U. Niesen，“缓存的基本极限”，《IEEE 信息论汇刊》，第 60 卷，第 5 期，第 2856–2867 页，2014年。[23] R. R. Bahadur 和 R. R. Rao，“关于样本均值的偏差”，《数学统计年刊》，第 31 卷，第 4 期，第 1015–1027 页，1960年。[24] A. Dembo 和 O. Zeitouni，《大偏差技术及其应用》。Springer Science & Business Media，2009年，第 38 卷。[25] A. d. Garcez 和 L. C. Lamb，“神经符号人工智能：第 3 12 406，2023年 56，11，12 387 rd 波”，《人工智能评论》，卷。号，第 – 页。[26] K. Bollacker、C. Evans、P. Paritosh、T. Sturge 和 J. Taylor，“Freebase：一个协作创建的图数据库，用于组织人类知识”，载于 ACM SIGMOD，2008年，第 1247–1250 页。[27] N. Immerman，《描述复杂性》，《计算机科学研究生教材》系列。Springer，1999年。[28] N. Immerman，“可在多项式时间内计算的关系查询”，载于第十四届 ACM 计算理论年度研讨会论文集，1982年，第 147–152 页。[29] M. Y. Vardi，“关系查询语言的复杂性”，载于第十四届 ACM 计算理论年度研讨会论文集，1982年，第 137–146 页。[30] J. Xu、J. Tang、X. Ma、B. Xu、S. Yanli 和 Q. Yongjie，“客观信息论：一个六元组模型与 9 类度量指标”，载于 2014年科学与信息会议。IEEE，2014年，第 793–802 页。[31] J.Xu，“基于统一模型的一般信息度量研究与应用”，《IEEE 计算机汇刊》，2024年。[32] J. Xu、C. Liu、X. Tan、X. Zhu、A. Wu、H. Wan、W. Kong、C. Li、H. Xu、K. Kuang 和 F. Wu，“用于提升人工智能模型训练效率的一般信息度量”，《人工智能评论》，第 58 卷，第 289 页，2025年。[33] S. Qiu 和 J. Xu，“逻辑视角下一般状态形式化方法研究”，《数学》，第 13 卷，第 20 期，第 3324 页，2025年。[34] E. Dantsin、T. Eiter、G. Gottlob 和 A. Voronkov，“逻辑编程的复杂性与表达能力”，《ACM 计算调查》（CSUR），第 33 卷，第 3 期，第 374–425 页，2001年。[35] K. Kunen，《集合论：独立性证明导论》。Elsevier，2014年，第 102 卷。[36] D. K¨onig，“有限图与无限图理论”，载于《有限图与无限图理论》。Springer，1990年，第 45–421 页。[37] T. H. Cormen、C. E. Leiserson、R. L. Rivest 和 C. Stein，《算法导论》。MIT 出版社，2022年。[38] M. Aigner 和 G. M. Ziegler，《来自天书的证明》，德国柏林，第 1 卷，第 2 期，第 7 页，1999年。[39] W. Feller，《概率论及其应用导论》，第 2 卷。John Wiley & Sons，1991年，第 2 卷。[40] F. J. MacWilliams 和 N. J. A. Sloane，《纠错码理论》。Elsevier，1977年，第 16 卷。[41] S. Borade、B. Nakibo˘glu 和 L. Zheng，“不等差错保护：一种信息论视角”，《IEEE 信息论汇刊》，第 55 卷，第 12 期，第 5511–5539 页，2009年。[42] W. Hoeffding，“有界随机变量之和的概率不等式”，《美国统计学会杂志》，第 58 卷，第 301 期，第 13–30 页，1963年。[43] V. V. Petrov，《独立随机变量之和》。Springer Science & Business Media，2012年。[44] P. Virtanen、R. Gommers、T. E. Oliphant、M. Haberland、T. Reddy、D. Cournapeau、E. Burovski、P. Peterson、W. Weckesser、J. Bright 等，“SciPy 1.0：用于科学计算的基础算法”，《自然·方法》，第 17 卷，第 3 期，第 261–272 页，2020年。