arXiv:2603.00933v1 [math.AP] 1 Mar 2026

黎曼流形上具有三次多项式非线性项的 p-拉普拉斯方程的梯度估计

Zhen Qiu、Youde Wang 和 Jun Yang

Abstract. 本文研究一类具有三次多项式非线性项的 p-拉普拉斯方程

$$\Delta_p v + (v-a_1)(v-a_2)(v-a_3) = 0$$

定义在具有 Ricci 曲率下界的完备黎曼流形 M 上，其中 $a_1 < a_2 < a_3$为实常数， $\Delta_p v$ =div($|\nabla v|^{p-2}\nabla v$) 表示 p-拉普拉斯算子。根据解所属区间是 $(a_1, a_2), (a_2, a_3)$ 还是 (a_1, a_3)，我们分别采用对数变换或双曲正切变换，将原方程转化为另一个方程以便进一步分析。通过详细分析新方程线性化算子的下界估计，并结合 Saloff-Coste 的 Sobolev 不等式与 Moser 迭代，我们在对 p 附加一项假设的条件下建立了 Cheng-Yau 型梯度估计。作为应用，我们进一步证明了刘维尔定理和 Harnack 不等式。

数学主题分类： 35J92; 58J05;35B45
关键词： p-拉普拉斯方程；三次非线性项；梯度估计；Moser 迭代

Contents

1. 引言 11.1. 背景与研究动机 21.2. 主要结果 52. 有界解的 $\mathcal{L}(f^\alpha)$ 的下界估计 62.1. 对数变换下的下界 72.2. 双曲正切变换下的下界 143. 主要定理的证明 193. 到 $f = |\nabla w|^2$ 193.2. 局部 L^γ-梯度上界 213.3. 通过 Moser 迭代得到梯度估计：定理 1.2 的证明 243.4. 刘维尔定理与 Harnack 不等式的证明 25参考文献 27

1. Introduction

本文研究一类具有三次多项式非线性的 p-拉普拉斯方程:

$$\Delta_p v + (v-a_1)(v-a_2)(v-a_3) = 0, \quad \text{in } M, \tag{PCN}$$

其中，$(M,\ g)$ 是配备黎曼度量 g 的完备黎曼流形，且$a_1 < a_2 < a_3$ 为实数。这里，$(M,\ g)$ 上的 p-拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_p v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v), \quad \forall\, v \in W^{1,p},$$

这在分布意义下理解。特别是，当 $p = 2$ 时，它恰好就是标准的 Beltrami-拉普拉斯算子。

Zhen Qiu 受到广州大学研究生创新研究项目（编号：JCCX2024- 013）和国家自然科学基金（编号：12201140）的资助。Youde Wang 受到国家自然科学基金（编号：12431003）的资助。Jun Yang 受到国家自然科学基金（编号：12171109）的资助。通讯作者：Jun Yang，jyang2019@gzhu.edu.cn。

1.1. **背景与动机**。半个多世纪以来，结合曲率条件与最大值原理的梯度估计一直主导着流形上几何偏微分方程梯度估计的研究。丘成桐 [43]以及郑绍远和丘成桐 [2] 为调和函数方程的正解建立了梯度估计，即所谓的“Cheng-Yau型梯度估计”

$$\Delta v = 0 \tag{1.1}$$

在里奇曲率有下界的完备黎曼流形上。设（M， g）是一个 n维完备非紧黎曼流形，其里奇曲率 Ric$_g$（M） $\geq$–（$n-1$）κg的 Cheng-Yau 型梯度估计可精确表述为（1.1）

$$\sup_{B_{R/2}(o)} \frac{|\nabla v|^2}{v^2} \leq C(n)\left(\frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R}\right)^2, \quad \forall\, B_{R/2}(o) \subset M,$$

这为解提供了深刻的几何与正则性刻画。对于上述调和函数方程，梯度估计的形式极为简洁。该估计的优雅之处在于，其表达式仅依赖于三个基本量：流形的维数 n 、曲率参数 κ以及区域的半径 R 。正是这种简洁性，使其成为一个极具一般性且适用范围广泛的结果。

值得强调的是，这种梯度估计具有强大的分析意义。由此可以直接推出经典的 Harnack不等式（该不等式描述非负性的保持，以及局部区域内对解的上界和下界的控制，体现了解的正则性与强最大值原理）。此外，梯度估计为 Liouville型定理提供了一种自然的方法：在全空间或有界性条件下，对梯度的增长约束意味着解必为常数。因此，调和方程的梯度估计不仅形式简洁、依赖参数少，而且具有强大的分析效力，是连接几何、分析与偏微分方程的关键桥梁。

过去二十年来，许多作者采用类似的技巧，证明了 p-拉普拉斯方程的梯度估计、刘维尔定理和哈纳克不等式:

$$\Delta_p v = 0.$$

Kotschwar 和 Ni [15] 证明了以下 p-拉普拉斯方程的梯度估计，其假设是完备黎曼流形的截面曲率有一个常数下界。后来，Wang 和 Zhang [36] 采用 Nash-Moser迭代，为正的 p-拉普拉斯函数建立了梯度估计，所需的曲率条件更弱，即里奇曲率有一个下界。Wang 和 Zhang 的工作意义重大，不仅体现在以里奇曲率取代截面曲率，也体现在引入了 Nash-Moser 迭代这一强有力的工具。

另一方面，许多数学家关注黎曼流形 M 或欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$上的下列半线性椭圆方程，该方程以 Lane-Emden 命名

$$\Delta v + v^q = 0. \tag{1.2}$$

例如，Gidas 和 Spruck [5] 在 $1 \leq q < \frac{n+2}{n-2}$ 的情形下证明了刘维尔定理（$n \geq 2$）。最近，Wang 和 Wei [37] 采用纳什-莫泽迭代格式，证明了一个局部 Cheng-Yau型梯度估计，其形式与 [2], 中针对 Lane-Emden方程正解的估计相同，条件是

$$q \in \left(-\infty, \quad \frac{n+1}{n-1} + \frac{2}{\sqrt{n(n-1)}}\right).$$

该梯度估计还表明，只要 M 的里奇曲率非负，就不存在上述 Lane-Emden方程的正弱解，从而改进了 Gidas 和 Spruck 所得的刘维尔定理。随后，对于情形 $q \in (-\infty, \ \frac{n+2}{n-2})$在（1.2）Lu

[19] 建立了完备黎曼流形上、里奇曲率有下界的 Lane-Emden方程（1.2）正解的局部程-丘型对数梯度估计。

人们还研究了 $\mathbb{R}^n$上的超线性椭圆问题

$$\Delta_p v + h(v) = 0. \tag{1.3}$$

当 $h(v) = v^q$ 时，该方程化为 Lane-Emden-Fowler方程

$$\Delta_p v + v^q = 0. \tag{1.4}$$

Serrin 和 Zou 在 [26] 证明了，若 $1 < p < n$ 且 $q > 0$，则定义在 1.4 上的方程 ($\mathbb{R}^n$有正解，当且仅当

$$0 < q < np/(n-p) - 1.$$

最近，受 Wang 和 Zhang 的启发， [36], He、Wang 和 Wei [11] 研究了

$$\Delta_p v + a v^q = 0 \quad \text{on } M \tag{1.5}$$

并采用 Moser 迭代获得正解的对数梯度估计，大幅拓展了 q 刘维尔定理适用的范围；结合 Serrin 和 Zou 的结果 [26] ，他们得到了定义在1.4上的方程 ($\mathbb{R}^n$的最优刘维尔结论。更具体地说，他们证明，在非负里奇曲率的完备黎曼流形上定义的方程 (1.5不存在满足以下条件的正解

$$a > 0 \quad \& \quad q < \frac{n+3}{n-1}(p-1) \quad \text{or} \quad a < 0 \quad \& \quad q > p - 1.$$

需要指出的是，Huang、Guo 和 Guo [13, 定理 1] 提出了一项较弱的结果，但对 p 有额外限制，而这一限制在 [11]中并不需要。不久之后，He、Sun 和 Wang [10]证明了方程（1.4）在具有非负 Ricci 曲率的非紧黎曼流形 M 上的最优刘维尔定理。

在一篇近期预印本中，Wang、Wei 和 Zhang [41]研究了完备非紧黎曼流形上正解（1.4的刘维尔性质和梯度估计。一项关键创新是去除了以往对体积增长的假设。作者为满足 χ 型 Sobolev 不等式的流形建立了体积增长估计，证明 Vol(B_r) $\geq Cr^{2\chi/(\chi-1)}$，这一结果本身具有独立的几何意义。通过采用 Nash-Moser 迭代技术并细致分析线性化算子，他们证明：若 Ricci 曲率负部的$L^{\chi/(\chi-1)}$范数相对于 Sobolev 常数和体积增长阶充分小，则在广泛的参数范围 p 和 q下均不存在正解，包括调和情形（$a = 0$）和 Lane-Emden 情形（$p = 2$, $a = 1$）。此外，在较弱条件 Ric$_-$ 属于 L^γ （其中 $\gamma > \chi/$（$\chi - 1$）下，他们推导出局部对数梯度估计。作为这些分析结果一项引人注目的几何应用，他们证明了关于端的个数的间隙定理：若一个维数为 $n \geq 3$ 、满足 Sobolev 不等式且其 $\|\mathrm{Ric}_-\|_{L^{n/2}}$ 小于一个仅依赖于 n和 Sobolev 常数的常数的完备流形，则它必定只有一个端。

另一方面，波拉契克´、奎特纳和苏普莱 [22]研究了上述超线性椭圆问题（1.3）的非负解的刘维尔型定理与局部性质之间的一些新联系。具体而言，他们提出了一种通用方法，可从刘维尔型定理推导出局部解的普适逐点先验 估计，从而以更简单、统一的方式处理这类问题。具体来说，他们证明了以下结论：

设 $0 < p - 1 < \alpha < p^* - 1$，其中 p^* 是 p 临界指数，并假设

$$\lim_{v \to +\infty} v^{-\alpha} h(v) = \ell \in (0, +\infty).$$

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意区域。则存在 $C = C(p、\ n、\ h) > 0$ （与 Ω 和 v 无关），使得对于 Ω 中满足 $\Delta_p v + h(v) = 0$ 的任意（非负）解 v，都有

$$v + |\nabla v|^{p/(\alpha+1)} \leq C\Big(1 + \big|dist(x, \partial\Omega)\big|^{-p/(\alpha+1-p)}\Big), \quad x \in \Omega.$$

特别地，若对于某个 $R>0$ 有 $\Omega=B_R\setminus\{0\}$，则

$$v+|\nabla v|^{p/(\alpha+1)}\le C\Big(1+|x|^{-p/(\alpha+1-p)}\Big),\quad 0<|x|\le\frac{R}{2}.$$

最近，He、Ma 和 Wang [9] 考虑了 $h(v)=bv^q+cv^r$ 在 (1.3) 中的情形，并针对定义在 (p-拉普拉斯方程（定义于 (M^n,g)，且 $\mathrm{Ric}_g(M)\ge-(n-1)\kappa g$ 由下式给出

$$\begin{cases}\Delta_p v+bv^q+cv^r=0, & \text{in } M;\\ v>0, & \text{in } M;\\ b,c\in\mathbb{R},\ p>1,\ q\le r,\ n\ge 2,\end{cases}$$

其中参数 (b,c,q,r) 属于以下定义的区域:

$$W_1=\left\{(b,c,q,r):b\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{q}{p-1}\right)\ge 0\quad\text{and}\quad c\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{r}{p-1}\right)\ge 0\right\},$$

$$W_2=\left\{(b,c,q,r):c\le 0\quad\text{and}\quad\left|\frac{q}{p-1}-\frac{n+1}{n-1}\right|<\frac{2}{n-1}\right\},$$

$$W_3=\left\{(b,c,q,r):b\ge 0\quad\text{and}\quad\left|\frac{r}{p-1}-\frac{n+1}{n-1}\right|<\frac{2}{n-1}\right\}.$$

作为直接推论，他们推导出：若 $\kappa=0$，则 $v\equiv 1$ 是广义 Allen-Cahn 方程的唯一正解:

$$\Delta_p v+v-v^3=0,\quad\frac{2n+2}{n+3}<p<4,$$

以及广义 Fisher-KPP 方程:

$$\Delta_p v+v-v^2=0,\quad\frac{2n+2}{n+3}<p<3.$$

关于著名的 Allen-Cahn 方程

$$\Delta v+v-v^3=0,$$

该方程源自相变的梯度理论，因此与极小曲面理论有着错综复杂的联系。Hou [12] 分别针对两种情形，推导了有界正光滑解的梯度估计，即 $v\le C\le 1$ 和 $v\le C$ 其中 $C>1$ 定义在里奇曲率下界为 Ric 的完备黎曼流形上$_g\ge Kg$ 且 $K\ge 0$。Lu [18]首次在相同的里奇曲率假设下，得到了 Allen-Cahn 方程局部正解的对数梯度估计。

关于通过 Nash-Moser 迭代得到梯度估计的相关论文，我们也请读者参阅：针对若干类拟线性椭圆方程的文献[7, 8, 20, 35, 34, 42, 28, 21] ，针对半线性椭圆方程的文献 [39, 38, 40, 44]，以及针对一些非线性抛物方程的文献 [23, 14] 。关于临界 p-拉普拉斯方程的进一步讨论，请参阅 Catino、Monticelli 和 Roncoroni [1], 、Ou [24], V´etois [33, 27, 32], 、Catino 和 Monticeli [6], 、Fogagnolo、Malchiodi 和 Mazzieri [4], ，以及其中的参考文献。

本文的研究动机是考虑具有多项式非线性项 $h(v)$ 的 p-拉普拉斯方程，并为其解建立不受正性限制的 Cheng-Yau型梯度估计。为简便起见，我们取

$$h(v)=(v-a_1)(v-a_2)(v-a_3)$$

作为一个玩具模型。更确切地说，我们将推导PCN的梯度估计、Harnack 不等式以及解的 Liouville 性质，其中 $a_1<a_2<a_3$。

1.2. **主要结果。**

在陈述本文的主要结果之前，我们想先给出具有三次多项式非线性（PCN）的 p-Laplacian 方程弱解的定义。

定义 1.1. 若函数 v 属于 p-拉普拉斯方程的弱解，且该方程在 Ω 上具有三次多项式非线性 (PCN)，则称其为该方程的弱解，当 $v \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ 且满足以下等式

$$-\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\langle \nabla v, \nabla \psi\rangle + \int_\Omega (v-a_1)(v-a_2)(v-a_3)\psi = 0, \quad \forall\, \psi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

第一个定理是关于 p-拉普拉斯方程（具有三次多项式非线性（PCN））的经典 Cheng-Yau 型梯度估计。

定理 *1.2.* 设 (M, g) 是一个 n 维完备黎曼流形，且 $Ric_g \geq -(n-1)\kappa g$，其中 $n \geq 2$，并且 κ 是非负常数。假设 v 是定义 *1.1* 意义下的解，满足 p-拉普拉斯方程及其三次多项式非线性（*PCN*），定义于测地球 $B_R(o) \subset M$ 上；该测地球的半径为 R，中心为 $o \in M$。

- 假设 $a_1 < v < a_2$ 或 $a_2 < v < a_3$，并且

$$p \in \left(\frac{2n+2}{n+3},\ 4\right) \tag{1.6}$$

那么 *Cheng-Yau* 型梯度估计成立

$$\sup_{B_{R/2}(o)} \frac{|\nabla v|^2}{|v-a_1|^2} \leq C(n,p)\left(\frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R}\right)^2, \quad \text{for } a_1 < v < a_2, \tag{1.7}$$

and

$$\sup_{B_{R/2}(o)} \frac{|\nabla v|^2}{|a_3-v|^2} \leq C(n,p)\left(\frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R}\right)^2, \quad \text{for } a_2 < v < a_3. \tag{1.8}$$

- 假设 $a_1 < v < a_3$ 并且

$$p \in \left[\frac{2n}{n+1},\ \frac{2n}{n+1} + \frac{(n-1)(1+\sqrt{1-\delta^2})}{(n+1)\delta^2}\right] \cap (1,\infty) \tag{1.9}$$

其中 $\delta := \frac{a_1+a_3-2a_2}{a_3-a_1} \in (-1,1)$。那么 *Cheng-Yau* 型梯度估计成立

$$\sup_{B_{R/2}(o)} \frac{|\nabla v|^2}{4[(v-a_1)(a_3-v)]^2} \leq \frac{C(n,p)}{(a_3-a_1)^2}\left(\frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R}\right)^2. \tag{1.10}$$

注 1.3. 在以往的论文中，例如 [11]，对数变换在 *Cheng-Yau* 型梯度估计的证明及其后续结果中发挥着关键作用。我们将在证明 (1.7) 和 (1.8)时沿用相同的方法，参见引理 *2.1* 和推论*2.3*。对数变换之所以有效，是因为它能将涉及 v 的幂型非线性转化为指数项，而这些指数项是关于 w 的凸函数，由 (2.5) 或 (2.21)给出。凸性确保不同指数项的线性组合在对非线性项配方后，于适当条件下产生占主导地位的正项，这对于第 *2.1* 节中的下界估计至关重要。

然而，在证明(1.10)时，标准对数变换的效果失效了。为恢复这一方法，在第*2.1* 节中，我们需要在(2.23)中引入双曲正切变换。因此，第*2.2* 节是本文的新内容。

此外，应用上述建立的梯度估计，我们还可以得到一些关于 p-拉普拉斯方程的 Liouville 定理和 Harnack 不等式，该方程具有三次多项式非线性（PCN），前提是（M, g）的里奇曲率有下界。

定理 1.4。设(M, g) 是一个 n 维、非紧致且完备的黎曼流形，其里奇曲率非负，且满足 $n \geq 2$。

•假设 p 满足 (1.6)，那么 p-拉普拉斯方程（三次多项式非线性 (PCN) 无解 v，其解位于 (a_1, a_2) 或 (a_2, a_3) 内。
• 假设 p 满足 (1.9)。若 p-拉普拉斯方程（三次多项式非线性项 (PCN) 有解 v，且解位于 (a_1, a_3)内，则 $v \equiv a_2$.

定理 1.5. 设 (M, g) 是一个 n 维非紧致完备黎曼流形，其满足 $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\kappa g$，其中 κ 是一个非负常数，且 $n \geq 2$，并且 v 是定义 *1.1* 意义下的解，它满足 p-拉普拉斯方程（三次多项式非线性(PCN)。

- 若 $a_1 < v < a_2$ 和 p 满足 (1.6)，则有如下 *Harnack*不等式:

$$\frac{v(x) - a_1}{v(y) - a_1} \leq e^{C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R)}, \quad \forall\, x, y \in B_{R/2}(x_0),\ \forall\, x_0 \in M. \tag{1.11}$$

- 若 $a_2 < v < a_3$ 且 p 满足 (1.6)，则有如下 *Harnack*不等式:

$$\frac{a_3 - v(x)}{a_3 - v(y)} \leq e^{C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R)}, \quad \forall\, x, y \in B_{R/2}(x_0),\ \forall\, x_0 \in M. \tag{1.12}$$

- 若 $a_1 < v < a_3$ 且 p 满足 (1.9)，则有如下 *Harnack*不等式:

$$\frac{\big(v(x) - a_1\big)\big(a_3 - v(y)\big)}{\big(v(y) - a_1\big)\big(a_3 - v(x)\big)} \leq e^{C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R)}, \quad \forall\, x, y \in B_{R/2}(x_0),\ \forall\, x_0 \in M. \tag{1.13}$$

注 *1.6.* 注意到 $(a_1, a_2) \subset (a_1, a_3)$ 且 $(a_2, a_3) \subset (a_1, a_3)$，因此，只要 *(1.9)* 中的假设成立，当 v 位于 (a_1, a_2) 或 (a_2, a_3) 内时，定理 *1.2* 中的 *Cheng-Yau*型梯度估计 *(1.10)* 或定理 *1.5* 中的 *Harnack*不等式 *(1.13)* 同样成立。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们首先将 (PCN) 的解v 变换为函数 w，见 (2.5)、(2.21) 或 (2.23)，然后推导出 $\mathcal{L}(|\nabla w|^{2\alpha})$ 的下界估计，其中 $\mathcal{L}$ 是 w 处的 p-拉普拉斯算子的线性化，也已在 (2.1) 中给出。读者可参阅引理 2.1、推论 2.3 和引理 2.5。第 3.1 节中，通过选取足够大的 α 并使用 Saloff-Coste 的 Sobolev 不等式，我们建立一个积分不等式，从而在第 3.2 节中得到 (PCN) 弱解的梯度局部 L^γ上界估计。第 3.3 节中，我们开始进行 Moser 迭代，以获得定理 1.2 中的梯度估计。作为应用，我们证明定理 1.4 和定理 1.5 中的刘维尔定理与 Harnack不等式，详见第 3.4 节。

2. Lower-bound estimate of $\mathcal{L}(f^\alpha)$ for bounded solutions

在任意函数 w 处， p-拉普拉斯算子的线性化算子记为 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathrm{div}\left(f^{p/2-1}\mathcal{A}(\nabla\psi)\right), \tag{2.1}$$

其中

$$f = |\nabla w|^2 \qquad \text{and} \qquad \mathcal{A}(\nabla\psi) = \nabla\psi + (p-2)f^{-1}\langle\nabla\psi, \nabla w\rangle\nabla w. \tag{2.2}$$

回忆一下 [11,引理 23]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^\alpha) =& \alpha\left(\alpha + \frac{p}{2} - 2\right) f^{\alpha+\frac{p}{2}-3}|\nabla f|^2 + 2\alpha f^{\alpha+\frac{p}{2}-2}\left(|\nabla\nabla w|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla w, \nabla w)\right)\\ &+ \alpha(p-2)(\alpha-1)f^{\alpha+\frac{p}{2}-4}\langle\nabla f, \nabla w\rangle^2 + 2\alpha f^{\alpha-1}\langle\nabla\Delta_p w, \nabla w\rangle,\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $\alpha > 0$ 为任意常数。

2.1. **对数变换下的下界。**

在对数变换导文中，例如相关结果的关键步骤，我们在下文引理 2.1和推论 2.3 的证明中也采用相同的方法。然而，在 定理 2.2中，我们将指出，这种变换无法处理另一种情形，该情形将在第 2.2节讨论。

引理 2.1. 设 v 是一个满足 定理 *1.1*意义下的解，且具有性质 $a_1 < v < a_2$，并且 $p \in \left(\frac{2n+2}{n+3}, 4\right)$，则存在两个常数 $\alpha_0 = \alpha_0(n,p) > \frac{3}{2}$和 $\beta_{n,p,\alpha_0} > 0$，它们由 (2.19) 定义，使得下列不等式在 $\{x$ 上逐点成立： $f(x) > 0\}$:

$$\frac{f^{2-\alpha_0-\frac{p}{2}}}{2\alpha_0}\mathcal{L}(f^{\alpha_0}) \geq \beta_{n,p,\alpha_0} f^2 - (n-1)\kappa f - \frac{\mathfrak{C}_1}{2}|\nabla f| f^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

其中 $\mathfrak{C}_1 = \left|p - \frac{2(p-1)}{n-1}\right|$，并且 $f = |\nabla w|^2$ 满足

$$w = -(p-1)\ln\left(v - a_1\right). \tag{2.5}$$

证明。 **步骤 1：方程变换。**

令 $u = v - a_1$，则 $0 < u < b$ 满足 $b = a_2 - a_1 > 0$ 且 $c = a_3 - a_1 > b$,

$$\Delta_p u + u(u-b)(u-c) = 0.$$

应用对数变换

$$u = e^{-\frac{w}{p-1}}, \qquad \text{i.e.,} \quad w = -(p-1)\ln u,$$

我们得到

$$\Delta_p w - |\nabla w|^p - (p-1)^{p-1} e^w \left[e^{-\frac{3w}{p-1}} - (b+c)e^{-\frac{2w}{p-1}} + bc\, e^{-\frac{w}{p-1}}\right] = 0. \tag{2.6}$$

定义一个函数

$$f = |\nabla w|^2$$

以及以下常数

$$\begin{aligned} &b_1 = (p-1)^{p-1}, \quad c_1 = -(b+c)(p-1)^{p-1}, \quad d_1 = bc(p-1)^{p-1}, \\ &q_1 = 1 - \frac{3}{p-1}, \quad r_1 = 1 - \frac{2}{p-1}, \quad s_1 = 1 - \frac{1}{p-1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

我们将方程（2.6）改写为

$$\Delta_p w - f^{p/2} - b_1 e^{q_1 w} - c_1 e^{r_1 w} - d_1 e^{s_1 w} = 0. \tag{2.8}$$

步骤 2. $\mathcal{L}(f^\alpha)$ **的逐点估计。**

为了计算（2.3）中的各项，其中 w 满足（2.8），我们选取 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 作为 TM 上的标准正交标架，并取定义在满足 $f \neq 0$ 的区域上，使得 $e_1 = \nabla w/|\nabla w|$。

♣经过一些计算，我们首先得到以下事实

$$w_1 := \frac{\partial w}{\partial e_1} = f^{\frac{1}{2}}, \qquad w_{11} = \partial_{e_1} f^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \partial_{e_1} f = \frac{1}{2} f^{-1} \langle \nabla w, \nabla f \rangle. \tag{2.9}$$

♣ 利用 $w_1 = f^{\frac{1}{2}}$，我们推导得出

$$\frac{|\nabla f|^2}{f} = 4\sum_{i=1}^{n} w_{1i}^2,$$

由此得到

$$\frac{|\nabla f|^2}{f} \geq 4 w_{11}^2,$$

and

$$|\nabla\nabla w|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} w_{1i}^2 + \sum_{i=2}^{n} w_{ii}^2 \geq \frac{|\nabla f|^2}{4f} + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n} w_{ii}\right)^2. \tag{2.10}$$

关于上述标架， $\Delta_p w$ 具有如下表达式（请参见 [15, 17]）

$$\Delta_p w = f^{\frac{p}{2}-1}\left((p-1)w_{11} + \sum_{i=2}^{n} w_{ii}\right).$$

然后，将此表达式代入（2.8），得到

$$(p-1)w_{11} + \sum_{i=2}^{n} w_{ii} = f + \left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right] f^{1-\frac{p}{2}}$$

因此，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=2}^{n} w_{ii}\right)^2 &= \left(f + \left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right] f^{1-\frac{p}{2}} - (p-1)w_{11}\right)^2 \\ &= f^2 + \left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right]^2 f^{2-p} + (p-1)^2 w_{11}^2 \\ &\quad + 2\left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right] f^{2-\frac{p}{2}} - 2f(p-1)w_{11} \\ &\quad - 2(p-1)\left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right] f^{1-\frac{p}{2}} w_{11}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

♣由（2.8）可得恒等式

$$\langle \nabla \Delta_p w, \nabla w\rangle = \frac{p}{2} f^{p/2-1}\langle \nabla f, \nabla w\rangle + \left[b_1 q_1 e^{q_1 w} + c_1 r_1 e^{r_1 w} + d_1 s_1 e^{s_1 w}\right] f. \tag{2.12}$$

将（2.9）-（2.10）和（2.11）-（2.12）代入（2.3），得到

$$\begin{aligned}\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha) &\geq (2\alpha-1)(p-1)w_{11}^2 + \mathrm{Ric}(\nabla w, \nabla w) + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n} w_{ii}\right)^2 \\ &\quad + pfw_{11} + \left[b_1 q_1 e^{q_1 w} + c_1 r_1 e^{r_1 w} + d_1 s_1 e^{s_1 w}\right] f^{2-\frac{p}{2}} \\ &\geq (2\alpha-1)(p-1)w_{11}^2 + \mathrm{Ric}(\nabla w, \nabla w) + \frac{f^2}{n-1} + \left(p - \frac{2(p-1)}{n-1}\right) fw_{11} \\ &\quad + \frac{\left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right]^2}{n-1} f^{2-p} + H(w) f^{2-p/2} \\ &\quad - \frac{2(p-1)\left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right]}{n-1} f^{1-p/2} w_{11} \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中

$$H(w) := b_1\left(q_1 + \frac{2}{n-1}\right)e^{q_1 w} + c_1\left(r_1 + \frac{2}{n-1}\right)e^{r_1 w} + d_1\left(s_1 + \frac{2}{n-1}\right)e^{s_1 w}.$$

此外，我们注意到

$$\begin{aligned}&(2\alpha-1)(p-1)w_{11}^2 - \frac{2(p-1)\left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right]}{n-1} f^{1-\frac{p}{2}} w_{11} \\ &\geq -\frac{(p-1)\left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right]^2}{(2\alpha-1)(n-1)} f^{2-p}, \end{aligned}$$

进而发现（2.13）可化为

$$\begin{aligned}\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha) \geq \frac{f^2}{n-1} + B_{n,p,\alpha}\left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right]^2 f^{2-p} \\ + \mathrm{Ric}(\nabla w, \nabla w) - \frac{\mathfrak{C}_1}{2} f^{\frac{1}{2}}|\nabla f| + H(w) f^{2-p/2}\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中

$$\mathfrak{C}_1 := \left|p - \frac{2(p-1)}{n-1}\right| \qquad \text{and} \qquad B_{n,p,\alpha} := \frac{1}{n-1} - \frac{p-1}{(2\alpha-1)(n-1)} \overset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n-1} > 0.$$

步骤 3. $H(w)$**的分析**。
我们将对 p的取值范围施加一些额外假设，以抵消来自$H(w)$的负项。

情形 1： 首先，我们考虑如下假设

$$\left|\frac{3}{p-1} - \frac{n+1}{n-1}\right| < \frac{2}{n-1}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{4n}{n+3} < p < 4. \tag{2.15}$$

注意到

$$H(w) = \left(q_1 + \frac{2}{n-1}\right)\left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right] + (r_1 - q_1)c_1 e^{r_1 w} + (s_1 - q_1)d_1 e^{s_1 w},$$

由基本不等式，我们推得以下下界 $A^2 + 2AB \geq -B^2$

$$\begin{aligned}&B_{n,p,\alpha}\left[b_1 e^{q_1 w} + c_1 e^{r_1 w} + d_1 e^{s_1 w}\right]^2 f^{2-p} + H(w) f^{2-p/2} \\ \geq& -\frac{\left(q_1 + \frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}} f^2 + \left[(r_1 - q_1)c_1 e^{r_1 w} + (s_1 - q_1)d_1 e^{s_1 w}\right] f^{2-p/2} \\ \overset{(2.7)}{=}& -\frac{\left(q_1 + \frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}} f^2 + (p-1)^{p-2} e^w \left[-(b+c)u^2 + 2bcu\right] f^{2-p/2} \geq -\frac{\left(q_1 + \frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}} f^2\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式用到了以下事实： $b,\ c > 0,\ p > 1$ 和 $0 < u < b$。

因此，将上述估计代入（2.14）可得

$$\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha) \geq \left(\frac{1}{n-1} - \frac{\left(q_1 + \frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}\right) f^2 + \mathrm{Ric}(\nabla w, \nabla w) - \frac{\mathfrak{C}_1}{2} f^{\frac{1}{2}}|\nabla f|.$$

在条件 $\left|\frac{3}{p-1} - \frac{n+1}{n-1}\right| < \frac{2}{n-1}$ 下，显然有

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \beta_{n,p,\alpha} := \lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{\left(q_1 + \frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{n-1}{4}\left(\frac{3}{p-1} - \frac{n+1}{n-1}\right)^2 > 0.$$

因此，存在一个常数 $\alpha_1 \geq \frac{3}{2}$，使得 $\beta_{n,\ p,\ \alpha} > 0,\ \ \forall\, \alpha \geq \alpha_1$ 和

$$\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha) \geq \beta_{n,p,\alpha} f^2 + \mathrm{Ric}(\nabla w, \nabla w) - \frac{\mathfrak{C}_1}{2} f^{\frac{1}{2}}|\nabla f|.$$

情形 2： 现在我们考虑如下假设

$$\left|\frac{2}{p-1} - \frac{n+1}{n-1}\right| < \frac{2}{n-1}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{3n+1}{n+3} < p < 3. \tag{2.16}$$

我们通过提取 r_1主导项，将 $H(w)$改写如下

$$H(w)=\left(r_1+\frac{2}{n-1}\right)\left[b_1e^{q_1w}+c_1e^{r_1w}+d_1e^{s_1w}\right]+(q_1-r_1)b_1e^{q_1w}+(s_1-r_1)d_1e^{s_1w}.$$

与之前相同，由基本不等式可得类似的估计

$$\begin{aligned}&B_{n,p,\alpha}\left[b_1e^{q_1w}+c_1e^{r_1w}+d_1e^{s_1w}\right]^2f^{2-p}+H(w)f^{2-p/2}\\ \geq&-\frac{\left(r_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}f^2+\left[(q_1-r_1)b_1e^{q_1w}+(s_1-r_1)d_1e^{s_1w}\right]f^{2-p/2}\\ \overset{(2.7)}{=}&-\frac{\left(r_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}f^2+(p-1)^{p-2}e^w\left(-u^3+bcu\right)f^{2-p/2}\geq-\frac{\left(r_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}f^2\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们用到了以下事实

$$-u^3+bcu=u(bc-u^2)\geq u(bc-b^2)=ub(c-b)>0$$

由于 $c>b>0,\quad p>1$ 且 $u=e^{-\frac{w}{p-1}}\in(0,\ b)$。因此，我们得到

$$\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha)\geq\left(\frac{1}{n-1}-\frac{\left(r_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}\right)f^2+\mathrm{Ric}(\nabla w,\nabla w)-\frac{\mathfrak{C}_1}{2}f^{\frac{1}{2}}|\nabla f|.$$

(2.16)中的假设给出

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\beta_{n,p,\alpha}:=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{\left(r_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}\right)=\frac{1}{n-1}-\frac{n-1}{4}\left(\frac{2}{p-1}-\frac{n+1}{n-1}\right)^2>0.$$

因此，存在一个常数 $\alpha_2\geq\frac{3}{2}$，使得 $\beta_{n,\ p,\ \alpha}>0,\quad\forall\alpha\geq\alpha_2$ 且

$$\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha)\geq\beta_{n,p,\alpha}f^2+\mathrm{Ric}(\nabla w,\nabla w)-\frac{\mathfrak{C}_1}{2}f^{\frac{1}{2}}|\nabla f|.$$

情形 3： 下面我们考虑线性项起主导作用的情形，因此需要假设约束条件

$$\left|\frac{1}{p-1}-\frac{n+1}{n-1}\right|<\frac{2}{n-1},\quad\text{i.e.}\quad\frac{2n+2}{n+3}<p<2.\tag{2.17}$$

策略与前面几种情形完全相同。将 $H(w)$ 重写为

$$H(w)=\left(s_1+\frac{2}{n-1}\right)\left[b_1e^{q_1w}+c_1e^{r_1w}+d_1e^{s_1w}\right]+(q_1-s_1)b_1e^{q_1w}+(r_1-s_1)c_1e^{r_1w},$$

结合基本不等式可得

$$\begin{aligned}&B_{n,p,\alpha}\left[b_1e^{q_1w}+c_1e^{r_1w}+d_1e^{s_1w}\right]^2f^{2-p}+H(w)f^{2-p/2}\\ \geq&-\frac{\left(s_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}f^2+\left[(q_1-s_1)b_1e^{q_1w}+(r_1-s_1)c_1e^{r_1w}\right]f^{2-p/2}\\ \overset{(2.7)}{=}&-\frac{\left(s_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}f^2+(p-1)^{p-2}e^w\left[-2u^3+(b+c)u^2\right]f^{2-p/2}\geq-\frac{\left(s_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}f^2\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式用到了这一事实：

$$(b+c)-2u>(b+c)-2b=c-b>0,\quad\forall u=e^{-\frac{w}{p-1}}\in(0,b).$$

因此，我们仍有

$$\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha)\geq\left(\frac{1}{n-1}-\frac{\left(s_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}\right)f^2+\mathrm{Ric}(\nabla w,\nabla w)-\frac{\mathfrak{C}_1}{2}f^{\frac{1}{2}}|\nabla f|$$

其中，在条件（2.17）下，

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\beta_{n,p,\alpha}:=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{\left(s_1+\frac{2}{n-1}\right)^2}{4B_{n,p,\alpha}}\right)=\frac{1}{n-1}-\frac{n-1}{4}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{n+1}{n-1}\right)^2>0.$$

因此，存在一个常数 $\alpha_3\geq\frac{3}{2}$，使得 $\beta_{n,\,p,\,\alpha}>0,\quad\forall\alpha\geq\alpha_3$ 并且

$$\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha)\geq\beta_{n,p,\alpha}f^2+\mathrm{Ric}(\nabla w,\nabla w)-\frac{\mathfrak{C}_1}{2}f^{\frac{1}{2}}|\nabla f|.$$

情形 4： p 的允许范围会因选取哪一个非线性项作为主部而显著不同。在当前情形中，我们将把这三项视为一个组合函数进行分析。

回顾 $u=e^{-w^{p-1}}$ 以及 $H(w)$ 的定义，我们可以得到

$$H(w)=(p-1)^{p-1}u\left[\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}\right)u^2-(b+c)\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{p-1}\right)u+bc\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{1}{p-1}\right)\right].$$

由于 $u>0$ 且 $(p-1)^{p-1}>0,\quad H(w)$ 的符号由二次函数决定

$$Q(u):=\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}\right)u^2-(b+c)\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{p-1}\right)u+bc\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{1}{p-1}\right).$$

我们需要对所有 $u\in(0,b)$ 满足 $Q(u)\geq0$，这将推出 $H(w)\geq0$。在端点处，我们有

$$Q(0)=bc\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{1}{p-1}\right),\qquad Q(b)=\frac{b(c-b)}{p-1}>0.$$

因此，$Q(0)\geq0$，再结合 $b>0,c>0$，将得到

$$\frac{n+1}{n-1}-\frac{1}{p-1}\geq0,\quad\text{i.e.,}\quad p\geq\frac{2n}{n+1}.$$

另一方面，$p-\frac{4n-2}{n+1}$ 和 $\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}$ 符号相同。因此，我们需要考虑以下三种情况。

♣ If

$$\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}<0,$$

$Q(u)$ 在 $(0,b)$ 上的下确界在某个端点处取得。因此，

$$Q(u)\geq\min\{Q(0),Q(b)\}\geq0$$

对所有 $u\in(0,b)$。

♣ If

$$\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}=0,$$

也就是说，二次函数退化为线性函数

$$Q(u)=-\frac{b+c}{p-1}u+\frac{2bc}{p-1},$$

我们观察到

$$\inf_{u\in(0,b)}Q(u)=Q(b)>0.$$

♣ $Q(u)$ 的非负性在 $u \in (0,\ b)$ 时不成立

$$p > \frac{4n-2}{n+1}, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{n+1}{n-1} - \frac{3}{p-1} > 0.$$

事实上，

$$\begin{aligned}
\min_{u\in(0,b)} Q(u) &= \frac{4bc\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{1}{p-1}\right)\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}\right) - (b+c)^2\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{p-1}\right)^2}{4\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}\right)} \\
&= \frac{4bc\left[\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{p-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{p-1}\right)^2\right] - (b+c)^2\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{p-1}\right)^2}{4\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}\right)} \\
&= \frac{-(b-c)^2\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{p-1}\right)^2 - 4bc\left(\frac{1}{p-1}\right)^2}{4\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}\right)} < 0.
\end{aligned}$$

因此，我们假设

$$\frac{2n}{n+1} \le p \le \frac{4n-2}{n+1}. \tag{2.18}$$

注意到

$$\lim_{\alpha\to+\infty} B_{n,p,\alpha} = \frac{1}{n-1} > 0,$$

存在一个常数 $\alpha_4 = \alpha_4(n,\ p) \ge \frac{3}{2}$ 使得不等式 (2.14) 有界 b y

$$\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha) \ge \frac{1}{n-1}f^2 + \mathrm{Ric}(\nabla w, \nabla w) - \frac{\mathfrak{C}_1}{2}f^{\frac{1}{2}}|\nabla f|.$$

因此，我们完成了对**情形 4**的分析。

为了得出**步骤 3**的结论，我们记

$$\alpha_0 := \alpha_0(n,p) = \begin{cases} \alpha_1, & \frac{4n}{n+3} < p < 4; \\ \alpha_2, & \frac{3n+1}{n+3} < p < 3; \\ \alpha_3, & \frac{2n+2}{n+3} < p < 2; \\ \alpha_4, & \frac{2n}{n+1} \le p \le \frac{4n-2}{n+1}; \end{cases}$$

and

$$\beta_{n,p,\alpha_0} := \begin{cases} \beta_{n,p,\alpha_1}, & \frac{4n}{n+3} < p < 4; \\ \beta_{n,p,\alpha_2}, & \frac{3n+1}{n+3} < p < 3; \\ \beta_{n,p,\alpha_3}, & \frac{2n+2}{n+3} < p < 2; \\ \frac{1}{n-1}, & \frac{2n}{n+1} \le p \le \frac{4n-2}{n+1}. \end{cases} \tag{2.19}$$

需要注意的是，上述四个区间可能相交，这意味着相应的参数值 α_0 或 $\beta_{n,\ p,\ \alpha_0}$并不唯一。因此，规定在区间相交时取较小的参数。由于

$$\mathrm{Ric}(\nabla w, \nabla w) \ge -(n-1)\kappa f,$$

我们将上述所有结果归纳为一个统一的表达式

$$\mathcal{L}(f^{\alpha_0}) \geq 2\alpha_0\beta_{n,p,\alpha_0} f^{\alpha_0+\frac{p}{2}} - 2\alpha_0(n-1)\kappa f^{\alpha_0+\frac{p}{2}-1} - \alpha_0\mathfrak{C}_1|\nabla f| f^{\alpha_0+\frac{p-3}{2}}.$$

证明至此完成。 □

注 2.2。 在上述证明的步骤 ***3*** 中， u 对应的区间$(0,b)$ 可以扩展为一个极大区间，且分析仍然成立。经过直接计算，在情形 *1* 中可以将$(0,\ b)$ 替换为$(0,\ \frac{2bc}{b+c})$，在情形 *2* 中替换为$(0,\ \sqrt{bc})$，在情形 *3* 中替换为$(0,\ \frac{b+c}{2})$，并且

$$\left(0,\quad \frac{(b+c)\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{p-1}\right)+\sqrt{(b-c)^2\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{p-1}\right)^2+\frac{4bc}{(p-1)^2}}}{2\left(\frac{n+1}{n-1}-\frac{3}{p-1}\right)}\right)$$

在情形 *4* 中也如此。所有这些极大区间都是$(0,c)$的真子集。重新审视上述引理的证明，我们声称， $a_1 < v < a_2$ 或上述极大区间能保证解的本质有界性，并且在数学上是证明所必需的。然而，这也表明，对具有性质 $a_1 < v < a_3$（即 $0 < u < c$）的解而言，对数变换并不适用，因为关键不等式 $H(w) \geq 0$ 不成立。

推论 2.3. 设 v 是一个解（如 定理 *1.1*中所述），满足界 $a_2 < v < a_3$，且$p \in \left(\frac{2n+2}{n+3},\ 4\right)$，则存在两个常数 $\alpha_0 = \alpha_0(n,p) > \frac{3}{2}$以及 β_{n,p,α_0}，由 (2.19)定义，使得下列不等式在 $\{x$ 上逐点成立：$f(x) > 0\}$:

$$\frac{f^{2-\alpha_0-\frac{p}{2}}}{2\alpha_0}\mathcal{L}(f^{\alpha_0}) \geq \beta_{n,p,\alpha_0} f^2 - (n-1)\kappa f - \frac{\mathfrak{C}_1}{2}|\nabla f| f^{\frac{1}{2}}, \tag{2.20}$$

其中 $\mathfrak{C}_1 = \left|p - \frac{2(p-1)}{n-1}\right|$，且 $f = |\nabla w|^2$ 满足

$$w = -(p-1)\ln\big(a_3 - v\big). \tag{2.21}$$

证明。定义

$$\tilde{u}(x) := a_3 - v(x), \qquad \tilde{c} := a_3 - a_2 > 0, \qquad \tilde{b} := a_2 - a_1 > 0.$$

由于 $a_2 < v < a_3$ 且 $\nabla\tilde{u} = -\nabla v$，我们有 $\tilde{u} = a_3 - v \in (0,\tilde{c})$，$|\nabla\tilde{u}| = |\nabla v|$ 因此

$$\Delta_p\tilde{u} = \operatorname{div}\big(|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}\big) = -\operatorname{div}\big(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\big) = -\Delta_p v.$$

将 $v = a_3 - \tilde{u}$ 代入原非线性项，得到

$$(v-a_1)(v-a_2)(v-a_3) = (a_3-\tilde{u}-a_1)(a_3-\tilde{u}-a_2)(-\tilde{u}) = -\tilde{u}\big(\tilde{u}-\tilde{c}\big)\big(\tilde{u}-(b+\tilde{c})\big),$$

˜其中我们使用了 $b + \tilde{c} = a_3 - a_1$。因此，原方程（PCN）推导为

$$\Delta_p\tilde{u} + \tilde{u}\big(\tilde{u}-\tilde{c}\big)\big(\tilde{u}-(\tilde{b}+\tilde{c})\big) = 0$$

其形式与上一条引理中**步骤 1**的变换后的方程完全相同。因此，应用定理 2.1，任何针对取值位于区间（a_1，a_2）内的解所证明的结果，都可通过适当改变记号直接应用于 $\tilde{u}$（进而应用于 v）。证明完毕。□

2.2. **双曲正切变换下的下界。**

在第2.1节中，平移变换与对数变换结合使用效果显著，因为它能将涉及 v 的代数型非线性转化为指数项，而指数项是关于 w的凸函数。凸性保证了不同指数项的线性组合在对 $H(w)$ 的估计中配方后，在适当条件下会产生一个占主导地位的正项$\beta_{n,\ p,\ \alpha_0} f^2$ 。

遗憾的是，如前所示，当 v 从 a_1经过 a_2 并趋近于 a_3时，标准对数变换会失效。为了恢复第2.1节中的方法，对于任意一个 v 位于（a_1，a_3）且满足（PCN）的解，我们作如下约定

$$m=\frac{a_1+a_3}{2},\quad L=\frac{a_3-a_1}{2}>0,\quad \delta=\frac{m-a_2}{L}=\frac{a_1+a_3-2a_2}{a_3-a_1}, \tag{2.22}$$

然后引入双曲正切变换:

$$v=m+L\tanh w, \tag{2.23}$$

它将 $\mathbb{R}$ 映射到有限区间（a_1，a_3）。顺便一提，双曲正切函数是指数函数的组合，即

$$\tanh w=\frac{e^w-e^{-w}}{e^w+e^{-w}}.$$

这一思路将使我们能够得到 Harnack不等式，更多细节请参见定理 1.5 的证明。

引理2.4. 在变换(2.23)下， p-拉普拉斯方程与三次多项式非线性(PCN) 变换为

$$\Delta_p w-2(p-1)\tanh w|\nabla w|^p-L^{4-p}(1-\tanh^2 w)^{2-p}(\delta+\tanh w)=0. \tag{2.24}$$

证明。 映射 $v=m+L\tanh w$是从 $w\in(-\infty,\infty)$到 $a_1<v<a_3$的双射，其中参数 m 与 L 如（2.22）所定义。对变换 v求导，我们得到

$$\nabla v=L(1-\tanh^2 w)\nabla w=L\operatorname{sech}^2 w\nabla w\quad\text{and}\quad |\nabla v|^2=L^2\operatorname{sech}^4 w|\nabla w|^2.$$

回顾 $\Delta_p v=\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$。我们计算

$$|\nabla v|^{p-2}\nabla v=L^{p-2}\operatorname{sech}^{2(p-2)} w\cdot|\nabla w|^{p-2}\cdot(L\operatorname{sech}^2 w\nabla w)=L^{p-1}\operatorname{sech}^{2p-2} w|\nabla w|^{p-2}\nabla w,$$

从而，取散度后，

$$\begin{aligned}\Delta_p v&=L^{p-1}\Big[\nabla(\operatorname{sech}^{2p-2} w)\cdot(|\nabla w|^{p-2}\nabla w)+\operatorname{sech}^{2p-2} w\operatorname{div}(|\nabla w|^{p-2}\nabla w)\Big]\\&=L^{p-1}\operatorname{sech}^{2p-2} w\Big[\Delta_p w-2(p-1)\tanh w|\nabla w|^p\Big],\end{aligned}$$

其中我们用到了

$$\nabla(\operatorname{sech}^{2p-2} w)=-2(p-1)\tanh w\operatorname{sech}^{2p-2} w\nabla w.$$

我们转而将三次多项式项计算为

$$v-a_1=L(1+\tanh w),\quad v-a_3=L(\tanh w-1),\quad v-a_2=L(\delta+\tanh w)$$

从而

$$\begin{aligned}(v-a_1)(v-a_2)(v-a_3)&=L^3(1+\tanh w)(\delta+\tanh w)(\tanh w-1)\\&=-L^3\operatorname{sech}^2 w(\delta+\tanh w),\end{aligned}$$

其中我们用到了

$$(1+\tanh w)(\tanh w-1)=\tanh^2 w-1=-\operatorname{sech}^2 w.$$

现在，将上述结果代入（PCN）可得

$$L^{p-1}\operatorname{sech}^{2p-2} w\Big[\Delta_p w-2(p-1)\tanh w|\nabla w|^p\Big]-L^3\operatorname{sech}^2 w(\delta+\tanh w)=0$$

并将两边除以 $L^{p-1}\operatorname{sech}^{2p-2} w$ （其严格为正），即可得到

$$\Delta_p w - 2(p-1)\tanh w|\nabla w|^p - \frac{L^{4-p}}{\operatorname{sech}^{2p-4} w}(\delta + \tanh w) = 0.$$

由于

$$\operatorname{sech}^{4-2p} w = (1-\tanh^2 w)^{2-p},$$

所需的方程即可验证。 □

引理 2.5. 假设 $n \geq 2$，且

$$p \in \left[\frac{2n}{n+1}, \quad \frac{2n}{n+1} + \frac{(n-1)(1+\sqrt{1-\delta^2})}{(n+1)\delta^2}\right] \cap (1,\infty).$$

那么存在 $\alpha_0 = \alpha_0(n, p) > \frac{3}{2}$，使得对所有 $\alpha \geq \alpha_0$，在 $\{x : f(x) > 0\}$ 上逐点成立以下不等式:

$$\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha) \geq \mathfrak{C}_{\mathfrak{n},\mathfrak{p}} f^2 - (n-1)\kappa f, \tag{2.25}$$

其中 $f = |\nabla w|^2$ 由 w 给出，见 (2.23)，且

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{n},\mathfrak{p}} := \begin{cases} 2(p-1), & \text{if } p \geq n, \\ \dfrac{2(p-1)^2}{n-1}, & \text{if } 1 < p < n. \end{cases} \tag{2.26}$$

证明。回顾一下，算子 $\mathcal{L}(f^\alpha)$ 的表达式已在 (2.3) 中给出，其中 w 已在 (2.23) 中给出。其估计将分四步进行。

步骤 1：粗略下界。

Let

$$B(w) := L^{4-p}(1-\tanh^2 w)^{2-p}(\delta + \tanh w).$$

对方程 (2.24) 两边求导，并与 ∇w 取内积，得到如下

$$\begin{aligned} \langle \nabla \Delta_p w, \nabla w\rangle &= 2(p-1)\left[(\nabla \tanh w \cdot \nabla w) f^{p/2} + \tanh w \cdot \frac{p}{2} f^{p/2-1}\langle \nabla f, \nabla w\rangle\right] + B'(w) f \\ &= 2(p-1)\operatorname{sech}^2 w f^{1+p/2} + p(p-1)\tanh w f^{p/2-1}\langle \nabla f, \nabla w\rangle + B'(w) f, \end{aligned} \tag{2.27}$$

因为

$$\nabla \tanh w = (1-\tanh^2 w)\nabla w = \operatorname{sech}^2 w \nabla w.$$

选取标准正交标架 $\{e_i\}$ 使得 $e_1 = \frac{\nabla w}{|\nabla w|}$，并将 (2.9)-(2.10) 和 (2.27) 代入 (2.3，我们得到一个下界估计

$$\begin{aligned} \frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha) &\geq (2\alpha-1)(p-1)w_{11}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^n w_{ii}\right)^2 + \operatorname{Ric}(\nabla w, \nabla w) \\ &\quad + f^{1-\frac{p}{2}}\left[2(p-1)\operatorname{sech}^2 w f^{1+p/2} + p(p-1)\tanh w f^{p/2-1}\langle \nabla f, \nabla w\rangle + B'(w) f\right] \\ &= (2\alpha-1)(p-1)w_{11}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^n w_{ii}\right)^2 + \operatorname{Ric}(\nabla w, \nabla w) \\ &\quad + 2(p-1)\operatorname{sech}^2 w f^2 + 2p(p-1)w_{11}\tanh w f + B'(w) f^{2-\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

p-拉普拉斯算子可表示为

$$\Delta_p w = f^{p/2-1}\left[(p-1)w_{11} + \sum_{i=2}^n w_{ii}\right].$$

由方程（2.24），我们得到

$$(p-1)w_{11}+\sum_{i=2}^{n}w_{ii}=2(p-1)\tanh w f+B(w)f^{1-p/2},$$

然后，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=2}^{n}w_{ii}\right)^2=&\left[2(p-1)\tanh w\cdot f+B(w)f^{1-p/2}-(p-1)w_{11}\right]^2\\ =&4(p-1)^2\tanh^2 w\cdot f^2+B(w)^2f^{2-p}+(p-1)^2w_{11}^2\\ &+4(p-1)\tanh w\cdot B(w)f^{2-p/2}-4(p-1)^2\tanh w\cdot fw_{11}\\ &-2(p-1)B(w)f^{1-p/2}w_{11}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha)\geq&\underbrace{(p-1)\left[(2\alpha-1)\,w_{11}^2-\frac{2B(w)}{n-1}f^{1-p/2}w_{11}+2\tanh w\left(p-\frac{2(p-1)}{n-1}\right)fw_{11}\right]}_{:=\mathcal{T}_1}\\ &+\underbrace{\left[\frac{4(p-1)^2\tanh^2 w}{n-1}+2(p-1)\operatorname{sech}^2 w\right]f^2+\frac{B(w)^2}{n-1}f^{2-p}}_{:=\mathcal{T}_2}\\ &+\underbrace{\left[\frac{4(p-1)\tanh w\cdot B(w)}{n-1}+B'(w)\right]f^{2-p/2}}_{:=\mathcal{T}_3}+\operatorname{Ric}(\nabla w,\nabla w).\end{aligned}\tag{2.28}$$

步骤 2. 分析 $\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$ 的非负性。
将 $\mathcal{T}_1$ 视为关于 w_{11} 的二次项，并选择 $\alpha>\frac{3}{2}$，我们可知_$\mathcal{T}_1$ 的最小值为

$$\mathcal{T}_1\geq-\frac{p-1}{4\mathcal{A}}\left(\mathcal{B}^2f^2+2\mathcal{B}\mathcal{C}f^{2-p/2}+\mathcal{C}^2f^{2-p}\right)\geq-\frac{p-1}{4\mathcal{A}}\left(2\mathcal{B}^2f^2+2\mathcal{C}^2f^{2-p}\right),\tag{2.29}$$

其中用到了杨氏不等式，记号如下

$$\mathcal{A}=2\alpha-1>0,\quad \mathcal{B}=2\tanh w\left[p-\frac{2(p-1)}{n-1}\right],\quad \mathcal{C}=-\frac{2B(w)}{n-1}.$$

将（2.29）与项 $\mathcal{T}_2$结合起来，我们选取 α 充分大，从而得到

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2\geq&\left[\frac{4(p-1)^2\tanh^2 w}{n-1}+2(p-1)\operatorname{sech}^2 w-\frac{(p-1)\mathcal{B}^2}{2\mathcal{A}}\right]f^2+\left[\frac{B(w)^2}{n-1}-\frac{(p-1)\mathcal{C}^2}{2\mathcal{A}}\right]f^{2-p}\\ \geq&\left[\frac{2(p-1)^2\tanh^2 w}{n-1}+2(p-1)\operatorname{sech}^2 w\right]f^2+\frac{B(w)^2}{2(n-1)}f^{2-p}\\ \geq&\left[2(p-1)+2(p-1)\frac{p-n}{n-1}\tanh^2 w\right]f^2\\ \geq&\begin{cases}2(p-1)f^2, & \text{if } p\geq n;\\ \dfrac{2(p-1)^2}{n-1}f^2, & \text{if } p<n.\end{cases}\end{aligned}$$

步骤 3。对 $\mathcal{T}_3$ 的非负性进行分析。回顾

$$\delta = \frac{a_1 + a_3 - 2a_2}{a_3 - a_1} \in (-1, 1),$$

and

$$B(w) = L^{4-p}(1 - \tanh^2 w)^{2-p}(\delta + \tanh w).$$

Thus

$$\begin{aligned} B'(w) := \frac{\mathrm{d}B(w)}{\mathrm{d}w} &= L^{4-p}(1 - \tanh^2 w)^{2-p}\left[(1 - \tanh^2 w) - 2(2-p)\tanh w(\delta + \tanh w)\right] \\ &= L^{4-p}(1 - \tanh^2 w)^{2-p}[(2p-5)\tanh^2 w - 2(2-p)\delta \tanh w + 1], \end{aligned}$$

and

$$\mathcal{T}_3 = L^{4-p}(1 - \tanh^2 w)^{2-p}\left[\frac{2p(n+1) - 5n + 1}{n-1}\tanh^2 w + \frac{2p(n+1) - 4n}{n-1}\delta \tanh w + 1\right] f^{2-p/2},$$

其中 $L > 0$ 和

$$1 - \tanh^2 w = \operatorname{sech}^2 w \in (0, 1].$$

定义

$$\mathfrak{g}(z) = \frac{2p(n+1) - 5n + 1}{n-1}z^2 + \frac{2p(n+1) - 4n}{n-1}\delta z + 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

我们将分析 $\mathfrak{g}(\tanh w)$ 的下确界，其中 $\tanh w \in (-1, 1)$，然后确认 $\mathfrak{g}(\tanh w) \geq 0$，使得 $\mathcal{T}_3 \geq 0$。这可以按以下方式完成。

情形 1：考虑 $2p(n+1) - 5n + 1 = 0$ 的情形，即 $p = \frac{5n-1}{2(n+1)}$。由于 $\delta \in (-1, 1)$ 且 $\tanh w \in (-1, 1)$，因此有

$$\mathfrak{g}(\tanh w) = \delta \tanh w + 1 > 0.$$

情形 2：考虑 $2p(n+1) - 5n + 1 > 0$ 的情形，即 $p > \frac{5n-1}{2(n+1)}$。函数 $\mathfrak{g}(z)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是一个凸二次函数，其最小值位于

$$z_0 = -\frac{\delta[2p(n+1) - 4n]}{2[2p(n+1) - 5n + 1]}.$$

$\mathfrak{g}(\tanh w)$ 在 $\tanh w \in (-1,1)$ 上的下确界要么在 z_0（若 $z_0 \in (-1,1)$），要么在某个端点处取得。

♣ 若 $\delta = 0$，则 $z_0 = 0$。因此，$\mathfrak{g}(\tanh w) \geq 1$ 由（2.30）可得。

♣ 我们假设 $\delta \neq 0$，并且进一步假设

$$p \leq \frac{2n}{n+1} + \frac{n-1}{(n+1)(2 - |\delta|)}.$$

这意味着 $z_0 \in \mathbb{R}\backslash(-1,1)$。若 $z_0 \leq -1$，则区间（$-1, 1$）上的下确界在 $t = -1$ 处取得：

$$\mathfrak{g}(-1) = \frac{2p(n+1) - 5n + 1}{n-1} - \frac{[2p(n+1) - 4n]\delta}{n-1} + 1 = \frac{[2p(n+1) - 4n]}{n-1}(1 - \delta) > 0.$$

若 $z_0 \geq 1$，则区间（$-1,1$）上的下确界在 $t = 1$ 处取得：

$$\mathfrak{g}(1) = \frac{2p(n+1) - 5n + 1}{n-1} + \frac{[2p(n+1) - 4n]\delta}{n-1} + 1 = \frac{[2p(n+1) - 4n]}{n-1}(1 + \delta) > 0.$$

汇总上述 p 的允许范围，可得

$$p \in \left(\frac{5n-1}{2(n+1)}, \frac{2n}{n+1} + \frac{n-1}{(n+1)(2 - |\delta|)}\right]$$

其中，假设 $\delta \neq 0$ 确保集合的上界属于 $\left(\frac{5n-1}{2(n+1)}, \frac{3n}{n+1}\right)$，因此值域非空。

♣ 我们假设 $\delta \neq 0$ 并且

$$p > \frac{2n}{n+1} + \frac{n-1}{(n+1)(2-|\delta|)}$$

这意味着 $z_0 \in (-1,\ 1)$，我们观察到

$$\mathfrak{g}(z_0) = 1 - \frac{\delta^2 \left(\frac{2p(n+1)-4n}{n-1}\right)^2}{4\left(\frac{2p(n+1)-5n+1}{n-1}\right)}.$$

我们需要附加条件来确认 $\mathfrak{g}(z_0) \geq 0$，即

$$\frac{2n}{n+1} + \frac{(n-1)(1-\sqrt{1-\delta^2})}{(n+1)\delta^2} \leq p \leq \frac{2n}{n+1} + \frac{(n-1)(1+\sqrt{1-\delta^2})}{(n+1)\delta^2}.$$

直接计算表明，对于任意 $\delta \in (-1,\ 1)\backslash\{0\}$，都有

$$\begin{aligned}\frac{5n-1}{2(n+1)} <& \frac{2n}{n+1} + \frac{(n-1)(1-\sqrt{1-\delta^2})}{(n+1)\delta^2} \\ <& \frac{2n}{n+1} + \frac{n-1}{(n+1)(2-|\delta|)} \\ <& \frac{2n}{n+1} + \frac{(n-1)(1+\sqrt{1-\delta^2})}{(n+1)\delta^2}.\end{aligned}$$

因此，我们将涉及 $\delta \in (-1,\ 1)$ 的 p 范围总结如下：

$$p \in \left(\frac{5n-1}{2(n+1)},\quad \frac{2n}{n+1} + \frac{(n-1)\left(1+\sqrt{1-\delta^2}\right)}{(n+1)\delta^2}\right].$$

情形 3： 关于情形 $2p(n+1) - 5n + 1 < 0$ 的论证，即 $p < \frac{5n-1}{2(n+1)}$。$\mathfrak{g}(\tanh w)$ 的下确界，其中 $\tanh w \in (-1,\ 1)$，必定在两个端点之一处取得：

$$\mathfrak{g}(-1) = \frac{2p(n+1)-5n+1}{n-1} - \frac{[2p(n+1)-4n]\delta}{n-1} + 1,$$

$$\mathfrak{g}(1) = \frac{2p(n+1)-5n+1}{n-1} + \frac{[2p(n+1)-4n]\delta}{n-1} + 1.$$

由于 $\delta \in (-1,1)$，可得

$$\mathfrak{g}(-1) \geq 0 \Leftrightarrow (2p(n+1)-4n)(1+\delta) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \geq \frac{2n}{n+1},$$

$$\mathfrak{g}(1) \geq 0 \Leftrightarrow (2p(n+1)-4n)(1-\delta) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \geq \frac{2n}{n+1}.$$

对于 $\mathfrak{g}(-1) \geq 0$ 和 $\mathfrak{g}(1) \geq 0$，我们都有

$$p \in \left[\frac{2n}{n+1},\ \frac{5n-1}{2(n+1)}\right) \neq \varnothing$$

由于 $\frac{5n-1}{2(n+1)} - \frac{2n}{n+1} = \frac{n-1}{2(n+1)} > 0$ 对于 $n \geq 2$。

到目前为止，我们已经完成了对所有情形的分析。

第 4 步。 p 的允许范围。

考虑到 p-拉普拉斯算子的取值范围，即 $p \in (1,\ \infty)$，我们断言，为使 $\mathcal{T}_3$ 非负， p 的允许范围为

$$p \in \left[\frac{2n}{n+1},\quad \frac{2n}{n+1} + \frac{(n-1)(1+\sqrt{1-\delta^2})}{(n+1)\delta^2}\right] \cap (1,\infty) \quad \text{for} \quad \delta \in (-1,1).$$

综合以上所有情形，并在∇w，∇w处以其下界 $-(n-1)\kappa f$ 替换 (2.28) 中的 Ric，我们断言

$$\frac{f^{2-\alpha-\frac{p}{2}}}{2\alpha}\mathcal{L}(f^\alpha) \geq -(n-1)\kappa f + \begin{cases} 2(p-1)f^2, & \text{if } p \geq n, \\ \dfrac{2(p-1)^2}{n-1}f^2, & \text{if } 1 < p < n. \end{cases}$$

证明已完成。 □

3. Proofs of main theorems

回顾一下：如果 v 是（PCN）的一个解，那么 $f = |\nabla w|^2$ 且 w 由（2.5）、（2.21）或（2.23）给出。为方便记号起见，本节中我们将直接使用这些约定，不再另行说明。

3.1. 关于 $f = |\nabla w|^2$ 的积分不等式。

下文将证明一个对 $f = |\nabla w|^2$ 至关重要的积分估计，它将在 Moser 迭代中发挥关键作用。比较两个逐点下界（2.4）和（2.25），我们将从前者入手，只详细证明相应的积分估计，因为它稍微复杂一些。

为此，我们首先回顾 Saloff-Coste 的 Sobolev 不等式。

引理 3.1 ([25])。 设 $(M^n,\ g)$ 是一个完备黎曼流形，且满足 $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\kappa$，其中 κ 是一个非负常数。对于 $n \geq 2$，存在一个正数 C_n，仅依赖于 n，使得对于所有半径为 $B \subset M$、体积为 R 的球 V，有

$$\forall\, f \in C_0^\infty(B), \quad \|f\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(B)} \leq e^{C_n\left(1+\sqrt{\kappa}R\right)} V^{-\frac{2}{n}} R^2 \left(\int_B |\nabla f|^2 + R^{-2} f^2 \right).$$

对于 $n = 2$，若将 n 替换为某个固定的 $n' > 2$，则上述不等式成立。 □

引理 3.2. 假设 定理 *1.2* 中的所有条件均成立，并且 $\Omega = B_R(o) \subset M$ 是一个测地球，则积分不等式成立

$$\beta_{n,p,\alpha_0} \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2 + \frac{\mathfrak{C}_3}{t} e^{-t_0} V^{\frac{2}{n}} R^{-2} \left\| f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta \right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}}$$

$$\leq \mathfrak{C}_5 t_0^2 R^{-2} \int_\Omega f^{\alpha_0+t+\frac{p}{2}-1}\eta^2 + \frac{\mathfrak{C}_4}{t} \int_\Omega f^{\alpha_0+t+\frac{p}{2}-1}|\nabla\eta|^2,$$

其中 $\beta_{n,\ p,\ \alpha_0}$ 和 α_0 已在 (2.19) 中选定，常数 $\mathfrak{C}_1$，$\mathfrak{C}_2$，$\cdots$，$\mathfrak{C}_{11}$ 依赖于n，p。

证明。 我们选取一个测试函数 $\psi = (f_\varepsilon)^t \eta^2$，其中 $\eta \in C_0^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$ 是一个非负截断函数，$f_\varepsilon = (f-\varepsilon)^+$ 满足 $\varepsilon > 0$，常数 $t > 1$ 将在后面确定。然后，将测试函数乘以 (2.4)，并在 Ω 上积分，得到

$$2\beta_{n,p,\alpha_0}\alpha_0 \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}} f_\varepsilon^t \eta^2 - 2\alpha_0(n-1)\kappa \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}-1} f_\varepsilon^t \eta^2 - \mathfrak{C}_1\alpha_0 \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}-\frac{3}{2}} |\nabla f|^2 f_\varepsilon^t \eta^2$$

$$\leq -\int_\Omega \left\langle f^{\frac{p}{2}-1}\nabla f^{\alpha_0} + (p-2) f^{\frac{p}{2}-2} \langle \nabla f^{\alpha_0}, \nabla u\rangle \nabla u,\ \nabla\psi \right\rangle$$

$$= -\int_\Omega t\alpha_0 f^{\alpha_0+\frac{p}{2}-2} f_\varepsilon^{t-1} |\nabla f|^2 \eta^2 + (p-2) t\alpha_0 f^{\alpha_0+\frac{p}{2}-3} f_\varepsilon^{t-1} \langle \nabla f, \nabla u\rangle^2 \eta^2$$

$$- \int_\Omega 2\eta\alpha_0 f^{\alpha_0+\frac{p}{2}-2} f_\varepsilon^t \langle \nabla f, \nabla\eta\rangle + 2\eta\alpha_0(p-2) f^{\alpha_0+\frac{p}{2}-3} f_\varepsilon^t \langle \nabla f, \nabla u\rangle \langle \nabla u, \nabla\eta\rangle.$$

利用以下不等式：

$$f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2 + (p-2) f_\varepsilon^{t-1} f^{-1} \langle \nabla f, \nabla u\rangle^2 \geq \mathfrak{C}_2 f_\varepsilon^{t-1} |\nabla f|^2$$

其中 $\mathfrak{C}_2=\min\{1,p-1\}>\frac{p-1}{p}$，且

$$f_\varepsilon^t\langle\nabla f,\nabla\eta\rangle+(p-2)f_\varepsilon^t f^{-1}\langle\nabla f,\nabla u\rangle\langle\nabla u,\nabla\eta\rangle\geq-(p+1)f_\varepsilon^t|\nabla f||\nabla\eta|,$$

然后令 $\varepsilon\to0$，我们得到

$$\begin{aligned}&2\beta_{n,p,\alpha_0}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2+\mathfrak{C}_2t\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-3}|\nabla f|^2\eta^2\\&\leq2(n-1)\kappa\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2+\mathfrak{C}_1\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p-3}{2}+t}|\nabla f|^2\eta^2+2(p+1)\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-2}|\nabla f||\nabla\eta|\eta.\end{aligned}$$

我们需要指出这些积分是有意义的，因为 $u\in W^{2,\frac{2}{loc}}(\Omega)\cap C^{1,\beta}(\Omega)$，由此可推出$f\in C^\beta(\Omega)$ 且 $|\nabla f|\in L^2_{loc}$(参见 [3, 30, 31])。

注意以下两个柯西不等式

$$\mathfrak{C}_1f^{\alpha_0+\frac{p-3}{2}+t}|\nabla f|\eta^2\leq\frac{\mathfrak{C}_2t}{4}f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-3}|\nabla f|^2\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_1^2}{\mathfrak{C}_2t}f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2,$$

and

$$2(p+1)f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-2}|\nabla f||\nabla\eta|\eta\leq\frac{\mathfrak{C}_2t}{4}f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-3}|\nabla f|^2\eta^2\ +\ \frac{4(p+1)^2}{\mathfrak{C}_2t}f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2,$$

由此可推出，

$$\begin{aligned}&\beta_{n,p,\alpha_0}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2\ +\ \frac{\mathfrak{C}_2t}{2}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-3}|\nabla f|^2\eta^2\\&\leq2(n-1)\kappa\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2\ +\ \frac{4(p+1)^2}{\mathfrak{C}_2t}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2,\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中我们选取 $t>1$ 足够大，使得

$$\frac{\mathfrak{C}_1^2}{\mathfrak{C}_2t}\leq\beta_{n,p,\alpha_0}.\tag{3.2}$$

此外，将以下估计代入（3.1）的左端

$$\begin{aligned}\frac12\left|\nabla\left(f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right)\right|^2&\leq\left|\nabla f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\right|^2\ +\ f^{\alpha_0+t-1+\frac{p}{2}}|\nabla\eta|^2\\&=\frac{(2\alpha_0+2t+p-2)^2}{16}f^{\alpha_0+t+\frac{p}{2}-3}|\nabla f|^2\eta^2\ +\ f^{\alpha_0+t-1+\frac{p}{2}}|\nabla\eta|^2,\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&\beta_{n,p,\alpha_0}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2\ +\ \frac{4\mathfrak{C}_2t}{(2\alpha_0+2t+p-2)^2}\int_\Omega\left|\nabla\left(f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right)\right|^2\\&\leq2(n-1)\kappa\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2\ +\ \left(\frac{4(p+1)^2}{\mathfrak{C}_2t}+\frac{8\mathfrak{C}_2t}{(2\alpha_0+2t+p-2)^2}\right)\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2.\end{aligned}$$

我们断言存在 $\mathfrak{C}_3=\frac{4\mathfrak{C}_2}{(2\alpha_0+p)^2}$ 和 $\mathfrak{C}_4=\frac{4(p+1)^2}{\mathfrak{C}_2}+2\mathfrak{C}_2$ 满足

$$\frac{\mathfrak{C}_3}{t}\leq\frac{4\mathfrak{C}_2t}{(2\alpha_0+2t+p-2)^2}\qquad\text{and}\qquad\frac{4(p+1)^2}{\mathfrak{C}_2t}+\frac{8\mathfrak{C}_2t}{(2\alpha_0+2t+p-2)^2}\leq\frac{\mathfrak{C}_4}{t}.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\beta_{n,p,\alpha_0}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_3}{t}\int_\Omega\left|\nabla\left(f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right)\right|^2\\\leq&2(n-1)\kappa\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_4}{t}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2.\end{aligned}$$

随后，由于定理 3.1中的 Saloff-Coste 的 Sobolev 不等式

$$e^{-C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}V^{\frac{2}{n}}R^{-2}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}$$
$$\leq\int_\Omega\left|\nabla\left(f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right)\right|^2+R^{-2}\int_\Omega f^{\alpha_0+t+\frac{p}{2}-1}\eta^2,\quad \text{for } n\geq 3,$$

and

$$e^{-C_{n'}(1+\sqrt{\kappa}R)}V^{\frac{1}{2}}R^{-2}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right\|^2_{L^4(\Omega)}$$
$$\leq\int_\Omega\left|\nabla\left(f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right)\right|^2+R^{-2}\int_\Omega f^{\alpha_0+t+\frac{p}{2}-1}\eta^2,\quad \text{for } n=2,\ n'=4,$$

我们得到

$$\beta_{n,p,\alpha_0}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_3}{t}e^{-C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}V^{\frac{2}{n}}R^{-2}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}$$
$$\leq 2(n-1)\kappa\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_4}{t}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2+\frac{\mathfrak{C}_3}{tR^2}\int_\Omega f^{\alpha_0+t+\frac{p}{2}-1}\eta^2,\quad \text{for } n\geq 3,$$

and

$$\beta_{2,p,\alpha_0}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_3}{t}e^{-C_4(1+\sqrt{\kappa}R)}V^{\frac{1}{2}}R^{-2}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right\|^2_{L^4(\Omega)}$$
$$\leq 2\kappa\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_4}{t}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2+\frac{\mathfrak{C}_3}{tR^2}\int_\Omega f^{\alpha_0+t+\frac{p}{2}-1}\eta^2,\quad \text{for } n=2.$$

下文中，为方便起见，对于情形 $n=2$，我们固定 $n'=4$。令

$$c_1(n,p,\alpha_0)=\max\left\{C_n+1,\ 2,\ \frac{\mathfrak{C}_1^2}{\mathfrak{C}_2\beta_{n,p,\alpha_0}}\right\}$$

且 $t_0=c_1(n,\ p,\ \alpha_0)(1+\sqrt{\kappa}R)$，则对任意 $t\geq t_0$，不等式（3.2）成立。因此，选取 $t\geq t_0$ 使其满足

$$2(n-1)\kappa R^2\leq\frac{2(n-1)}{c_1^2(n,p,\alpha_0)}t_0^2\qquad\text{and}\qquad\frac{\mathfrak{C}_3}{t}\leq\frac{\mathfrak{C}_3}{c_1(n,p,\alpha_0)},$$

存在一个非负常数 $\mathfrak{C}_5=\mathfrak{C}_5(n,\ p)$，使得

$$2(n-1)\kappa R^2+\frac{\mathfrak{C}_3}{t}\leq\mathfrak{C}_5t_0^2.$$

因此，

$$\frac{\mathfrak{C}_5t_0^2}{R^2}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_4}{t}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2$$
$$\geq\begin{cases}\beta_{n,p,\alpha_0}\displaystyle\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_3}{t}e^{-t_0}V^{\frac{2}{n}}R^{-2}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)},\quad \text{for } n\geq 3,\\ \beta_{2,p,\alpha_0}\displaystyle\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2+\frac{\mathfrak{C}_3}{t}e^{-t_0}V^{\frac{1}{2}}R^{-2}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right\|^2_{L^4(\Omega)},\quad \text{for } n=2.\end{cases}\tag{3.3}$$

证明完成。 □

3.2. **梯度的局部 L^γ-上界。**

本节将证明 L^γ-拉普拉斯方程的弱解的梯度上界，该方程具有 p-拉普拉斯算子和三次多项式非线性（PCN）。

引理 3.3。 设 (M,g) 是一个完备黎曼流形，满足 $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)\kappa$。假设 v 是定义在测地球 p上的、具有三次多项式非线性的(PCN)拉普拉斯方程的弱解 $B_R(o) \subset M$，则存在一个常数 $\mathfrak{C}_8 = \mathfrak{C}_8(n,p) > 0$ 使得

$$\|f\|_{L^\gamma(B_{\frac{3R}{4}}(o))} \leq \mathfrak{C}_8 V^{\frac{1}{\gamma}} \frac{t_0^2}{R^2}, \quad \gamma := \begin{cases} \dfrac{n}{n-2}\left(\alpha_0 + \dfrac{p}{2} + t_0 - 1\right), & \text{for } n \geq 3, \\ 2\left(\alpha_0 + \dfrac{p}{2} + t_0 - 1\right), & \text{for } n = 2, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中 V 是测地球 $B_R(o)$的体积，且 α_0 的取定与定理 3.2中相同 .

证明。设

$$\Omega_1 = \left\{ f > \frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2}{\beta_{n,p,\alpha_0} R^2} \right\} \quad \text{and} \quad \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1,$$

直接计算表明

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{C}_5 t_0^2}{R^2} \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2 &= \frac{\mathfrak{C}_5 t_0^2}{R^2} \int_{\Omega_1} f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2 \ + \ \frac{\mathfrak{C}_5 t_0^2}{R^2} \int_{\Omega_2} f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2 \\ &\leq \frac{\beta_{n,p,\alpha_0}}{2} \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2 \ + \ \frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2 V}{R^2} \left(\frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2}{\beta_{n,p,\alpha_0} R^2} \right)^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1} \end{aligned}$$

其中 $B_R(o)$的体积记为 $V.$ 。回顾（3.3），然后通过代入上述不等式并选取 $t = t_0$,

$$\begin{aligned} &\frac{\beta_{n,p,\alpha_0}}{2} \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2 + \frac{\mathfrak{C}_3}{t_0} e^{-t_0} V^{\frac{2}{n}} R^{-2} \left\| f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta \right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \\ &\leq \frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2 V}{R^2} \left(\frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2}{\beta_{n,p,\alpha_0} R^2} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} + \frac{\mathfrak{C}_4}{t_0} \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2, \quad \text{for } n \geq 3, \end{aligned} \tag{3.5}$$

and

$$\begin{aligned} &\beta_{2,p,\alpha_0} \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t}\eta^2 + \frac{\mathfrak{C}_3}{t_0} e^{-t_0} V^{\frac{1}{2}} R^{-2} \left\| f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta \right\|^2_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2 V}{R^2} \left(\frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2}{\beta_{2,p,\alpha_0} R^2} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} + \frac{\mathfrak{C}_4}{t_0} \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2, \quad \text{for } n = 2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

根据 采用截断函数法，我们选取满足条件的函数 $\eta_1 \in C_0^\infty(B_R(o))$ g

$$0 \leq \eta_1 \leq 1, \qquad |\nabla\eta_1| \leq \frac{C(n)}{R} \quad \text{in } B_R(o), \qquad \eta_1 \equiv 1 \quad \text{in } B_{\frac{3R}{4}}(o).$$

因此，考虑上述截断函数的命题，取 $\eta = \eta_1^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0}$，并利用 Hölder 不等式和柯西不等式，可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{C}_4}{t_0} \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2 &\leq \frac{\mathfrak{C}_6 t_0}{R^2} \int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^{\frac{2\alpha_0+p+2t_0-2}{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0}} \\ &\leq \frac{\mathfrak{C}_6 t_0}{R^2} \left(\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0}\eta^2 \right)^{\frac{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0-1}{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0}} V^{\frac{1}{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0}} \\ &\leq \frac{\beta_{n,p,\alpha_0}}{2} \left[\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0}\eta^2 + \left(\frac{2\mathfrak{C}_6 t_0}{\beta_{n,p,\alpha_0} R^2} \right)^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0} V \right], \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中我们用到了

$$\mathfrak{C}_4 R^2 |\nabla\eta|^2 \leq \mathfrak{C}_4 |C(n)|^2 \left(\alpha_0 + \frac{p}{2} + t_0\right)^2 \eta^{\frac{2\alpha_0+p+2t_0-2}{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0}} \leq \mathfrak{C}_6 t_0^2 \eta^{\frac{2\alpha_0+p+2t_0-2}{\alpha_0+\frac{p}{2}+t_0}}.$$

将（3.7）代入（3.5）和（3.6），可得 $n \geq 3$

$$\begin{aligned}\left\| f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta \right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq & \frac{t_0}{\mathfrak{C}_3} e^{t_0} V^{1-\frac{2}{n}} R^2 \left[\frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2}{R^2} \left(\frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2}{\beta_{n,p,\alpha_0} R^2} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} \right. \\ & \left. + \frac{2\mathfrak{C}_6 t_0^2}{R^2} \left(\frac{2\mathfrak{C}_6 t_0}{\beta_{n,p,\alpha_0} R^2} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} \right] \\ \leq & \mathfrak{C}_7^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} e^{t_0} V^{1-\frac{2}{n}} t_0^3 \left(\frac{t_0^2}{R^2} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

且对于 $n = 2$

$$\begin{aligned}\left\| f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta \right\|^2_{L^4(\Omega)} \leq & \frac{t_0}{\mathfrak{C}_3} e^{t_0} V^{\frac{1}{2}} R^2 \left[\frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2}{R^2} \left(\frac{2\mathfrak{C}_5 t_0^2}{\beta_{2,p,\alpha_0} R^2} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} \right. \\ & \left. + \frac{2\mathfrak{C}_6 t_0^2}{R^2} \left(\frac{2\mathfrak{C}_6 t_0}{\beta_{2,p,\alpha_0} R^2} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} \right] \\ \leq & \mathfrak{C}_7^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} e^{t_0} V^{\frac{1}{2}} t_0^3 \left(\frac{t_0^2}{R^2} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中常数

$$\mathfrak{C}_7 = \mathfrak{C}_7(n,p) = \left(2\frac{\mathfrak{C}_5 + \mathfrak{C}_6}{\mathfrak{C}_3} + 1 \right) \left(\frac{2\mathfrak{C}_5 + 2\mathfrak{C}_6}{\beta_{n,p,\alpha_0}} + 1 \right)$$

满足

$$\mathfrak{C}_7^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} \geq \frac{2\mathfrak{C}_5}{\mathfrak{C}_3} \left(\frac{2\mathfrak{C}_5}{\beta_{n,p,\alpha_0}} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1} + \frac{\mathfrak{C}_6}{\mathfrak{C}_3 t_0} \left(\frac{2\mathfrak{C}_6}{\beta_{n,p,\alpha_0} t_0} \right)^{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1}.$$

记

$$\mathfrak{C}_8 := \mathfrak{C}_7 \sup_{t_0 \geq 1} e^{\frac{t_0}{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1}} t_0^{\frac{3}{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1}}$$

and

$$\gamma := \begin{cases} \dfrac{n}{n-2} \left(\alpha_0 + \dfrac{p}{2} + t_0 - 1 \right), & \text{for } n \geq 3, \\ 2 \left(\alpha_0 + \dfrac{p}{2} + t_0 - 1 \right), & \text{for } n = 2, \end{cases}$$

由 (3.8) 和 (3.9) 可得以下结果

$$\left\| f\eta^{\frac{2}{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1}} \right\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq \mathfrak{C}_7 e^{\frac{t_0}{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1}} t_0^{\frac{3}{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1}} \frac{V^{\frac{1}{\gamma}} t_0^2}{R^2} \leq \frac{\mathfrak{C}_8 V^{\frac{1}{\gamma}} t_0^2}{R^2}.$$

这里我们使用了

$$t_0^{\frac{3}{\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1}} \leq t_0^{\frac{3}{t_0}} \leq \max_{x \geq 1} x^{\frac{3}{x}} = e^{\frac{3}{e}}.$$

根据 $\eta \equiv 1$ 在$B_{\frac{3R}{4}}(o)$中，可以推出

$$\|f\|_{L^\gamma\left(B_{\frac{3R}{4}}(o)\right)} \leq \frac{\mathfrak{C}_8 V^{\frac{1}{\gamma}} t_0^2}{R^2}.$$

该引理的证明已完成。 □

3.3. 通过 Moser 迭代得到的梯度估计：定理 1.2的证明。

引理 3.4. 设 $(M^n,\ g)$ 是一个完备黎曼流形，且 $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)\kappa$ 且 $n \geq 2$。若 v 是定义在测地球 p上的带有三次多项式非线性项的 (PCN)-拉普拉斯方程的弱解 $B_R(o) \subset M$，则存在一个常数 $\mathfrak{C}_{11} = \mathfrak{C}_{11}(n, p) > 0$，使得

$$\|f\|_{L^\infty(R_{\frac{R}{2}}(o))} \leq \mathfrak{C}_{11}\left(\frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R}\right)^2,$$

其中， V 是测地球 B_R（o）的体积。

证明。 回顾（3.3）去掉左边第一项后的形式

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{C}_5 t_0^2}{R^2}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta^2 \ + \ \frac{\mathfrak{C}_4}{t}\int_\Omega f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta|^2 \\
&\geq \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{C}_3}{t}e^{-t_0}V^{\frac{2}{n}}R^{-2}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}, & \text{for } n \geq 3, \\ \dfrac{\mathfrak{C}_3}{t}e^{-t_0}V^{\frac{1}{2}}R^{-2}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right\|^2_{L^4(\Omega)}, & \text{for } n = 2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

令 $r_k = \frac{R}{2} + \frac{R}{4^k}$ 和 $\Omega_k = B_{r_k}(o)$，并选取满足以下条件的截断函数序列 $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega_k)$

$$0 \leq \eta_k \leq 1, \qquad |\nabla\eta_k| \leq \frac{4^k C}{R} \text{ in } B_{r_k}(o) \qquad \text{and} \qquad \eta_k \equiv 1 \text{ in } B_{r_{k+1}}(o), \tag{3.11}$$

然后将 η 替换为 η_k 于（3.10）中，对于 $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_3 e^{-t_0}V^{\frac{2}{n}}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t_0-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta_k\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_k)} &\leq \mathfrak{C}_5 t_0^2 t\int_{\Omega_k} f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}\eta_k^2 \ + \ \mathfrak{C}_4 R^2\int_{\Omega_k} f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}|\nabla\eta_k|^2 \\
&\leq \left(\mathfrak{C}_5 t_0^2 t + C^2\mathfrak{C}_4 4^{2k}\right)\int_{\Omega_k} f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}
\end{aligned}$$

并且对于 $n = 2$

$$\mathfrak{C}_3 e^{-t_0}V^{\frac{1}{2}}R^{-2}\left\|f^{\frac{\alpha_0+t-1}{2}+\frac{p}{4}}\eta\right\|^2_{L^4(\Omega)} \leq \left(\mathfrak{C}_5 t_0^2 t + C^2\mathfrak{C}_4 4^{2k}\right)\int_{\Omega_k} f^{\alpha_0+\frac{p}{2}+t-1}.$$

对于 $k \in \mathbb{N}^+$，我们令 $\beta_1 := \gamma$，并且

$$\beta_{k+1} := \begin{cases} \dfrac{n}{n-2}\beta_k = \left(\dfrac{n}{n-2}\right)^{k+1}\gamma, & \text{for } n \geq 3, \\ 2\beta_k = 2^{k+1}\gamma, & \text{for } n = 2, \end{cases} \tag{3.12}$$

并且 $t = t_k$ 以这样的方式

$$t_k + \frac{p}{2} + \alpha_0 - 1 = \beta_k.$$

By

$$t_k < \beta_k = \left\{\begin{array}{ll} \left(\dfrac{n}{n-2}\right)^k\left(t_0 + \dfrac{p}{2} + \alpha_0 - 1\right) & \text{for } n \geq 3, \\ 2^k\left(t_0 + \dfrac{p}{2} + \alpha_0 - 1\right) & \text{for } n = 2, \end{array}\right\} \leq 4^{2k}\left(t_0 + \frac{p}{2} + \alpha_0 - 1\right)$$

由 α_0 足够大以及 $\dfrac{n}{n-2} < 4^2$，再结合 $t_0 \geq 1$ 和

$$\mathfrak{C}_9 := \mathfrak{C}_3^{-1}\left[\mathfrak{C}_5 + \mathfrak{C}_5\left(\frac{p}{2} + \alpha_0\right) + C^2\right],$$

于是对于 $n \geq 3$，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_3\left(\int_{\Omega_k} f^{\beta_{k+1}}\eta_k^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}} &\leq e^{t_0}V^{-\frac{2}{n}}\left[\mathfrak{C}_5 t_0^2\left(t_0+\frac{p}{2}+\alpha_0-1\right)\left(\frac{n}{n-2}\right)^k + C^2 4^{2k}\right]\int_{\Omega_k} f^{\beta_k}\\ &\leq e^{t_0}V^{-\frac{2}{n}}4^{2k}\left[\mathfrak{C}_5 t_0^2\left(t_0+\frac{p}{2}+\alpha_0-1\right)+C^2\right]\int_{\Omega_k} f^{\beta_k}\\ &\leq 2\mathfrak{C}_9 t_0^3 e^{t_0}V^{-\frac{2}{n}}4^{2k}\int_{\Omega_k} f^{\beta_k},\end{aligned}$$

且对于 $n=2$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_3\left(\int_{\Omega_k} f^{\beta_{k+1}}\eta_k^{4}\right)^{2} &\leq e^{t_0}V^{-\frac{1}{2}}\left[\mathfrak{C}_5 t_0^2\left(t_0+\frac{p}{2}+\alpha_0-1\right)2^k + C^2 4^{2k}\right]\int_{\Omega_k} f^{\beta_k}\\ &\leq 2\mathfrak{C}_9 t_0^3 e^{t_0}V^{-\frac{1}{2}}4^{2k}\int_{\Omega_k} f^{\beta_k}.\end{aligned}$$

取 β^{-1}次方，作用于上述不等式两边，然后代入（3.11），可得

$$\|f\|_{L^{\beta_{k+1}}(\Omega_{k+1})} \leq \begin{cases}\left(2\mathfrak{C}_9 t_0^3 e^{t_0}V^{-\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{\beta_k}}4^{\frac{2k}{\beta_k}}\|f\|_{L^{\beta_k}(\Omega_k)} & \text{for } n\geq 3;\\ \left(2\mathfrak{C}_9 t_0^3 e^{t_0}V^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\beta_k}}4^{\frac{2k}{\beta_k}}\|f\|_{L^{\beta_k}(\Omega_k)} & \text{for } n=2.\end{cases}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k}=\frac{\beta_1^{-1}}{1-\frac{n-2}{n}}=\frac{n}{2\beta_1} \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\beta_k}=\frac{n^2}{4\beta_1},$$

令 $k\to\infty$ 并选择

$$\mathfrak{C}_{10}=\mathfrak{C}_{10}(n,p,\mathfrak{C}_9)\geq\left(2\mathfrak{C}_9 t_0^3 e^{t_0}\right)^{\frac{n}{2\beta_1}}4^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{\beta_k}},$$

可推出，对所有 $n\geq 2$

$$\|f\|_{L^{\infty}\left(B_{\frac{R}{2}}(o)\right)}\leq\left(2\mathfrak{C}_9 t_0^3 e^{t_0}\right)^{\frac{n}{2\beta_1}}4^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{\beta_k}}V^{-\frac{1}{\beta}}\|f\|_{L^{\beta}\left(B_{\frac{3R}{4}}(o)\right)}\leq\mathfrak{C}_{10}V^{-\frac{1}{\beta}}\|f\|_{L^{\beta}\left(B_{\frac{3R}{4}}(o)\right)}.$$

事实上，很容易看出

$$\mathfrak{C}_9^{\frac{n-2}{2(\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1)}},\quad t_0^{\frac{3(n-2)}{2(\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1)}},\quad e^{\frac{(n-2)t_0}{2(\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1)}},\quad 16^{\frac{n(n-2)}{2(\alpha_0+t_0+\frac{p}{2}-1)}}$$

它们都一致有界，因此可以得到一个依赖于 n 和 p 的上界。

利用3.4式定理 3.3 和 $\mathfrak{C}_{11}=\mathfrak{C}_{10}\mathfrak{C}_8 c_1$，最终得到 L^{∞}梯度函数的上界估计 $f=|\nabla w|^2$

$$\|f\|_{L^{\infty}(B_{\frac{R}{2}}(o))}\leq\mathfrak{C}_{11}\left(\frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R}\right)^2.$$

我们完成了引理以及定理1.2的证明。 □

3.4. **刘维尔定理和 Harnack不等式的证明。**

我们将使用定理 1.2 中的梯度估计来证明定理 1.4 和定理 1.5。

定理 定理 1.4的证明： 定理 1.2 中 $\kappa=0$ 的选择 得出，在$a_1<v<a_2$的情形下，有

$$\frac{|\nabla v(x_0)|}{v(x_0)-a_1}\leq\sup_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)}\frac{|\nabla v|}{v-a_1}\leq C(n,p)R^{-1},\ \forall\, x_0\in M;$$

在 $a_2 < v < a_3$ 的情形下，

$$\frac{|\nabla v(x_0)|}{a_3 - v(x_0)} \leq \sup_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} \frac{|\nabla v|}{a_3 - v} \leq C(n,p)R^{-1}, \ \forall x_0 \in M;$$

在 $a_1 < v < a_3$ 的情形下，我们有

$$\frac{(a_3 - a_1)^2|\nabla v(x_0)|^2}{4[(v(x_0) - a_1)(a_3 - v(x_0))]^2} \leq \sup_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} \frac{(a_3 - a_1)^2|\nabla v|^2}{4[(v - a_1)(a_3 - v)]^2} \leq C(n,p)R^{-1}, \ \forall x_0 \in M.$$

事实上，回顾

$\nabla v = L(1 - \text{双曲正切}^2\, w)\nabla w, \quad v - a_1 = L(1 + \text{双曲正切}\ w)$，以及 $v - a_3 = L$(双曲正切 $w - 1$) 在第 2.2 节中，我们断言

$$\nabla w = \frac{(a_3 - a_1)\nabla v}{2(v - a_1)(a_3 - v)}.$$

然后令 $R \to \infty$，得到

$$\nabla v(x_0) = 0, \quad \forall x_0 \in M,$$

由此可得 $v \equiv$ 为常数，且 $\Delta_p v = 0$。回顾式（PCN）中的三次多项式非线性项，我们注意到仅有的三个常数解是 $v = a_1$, $v = a_2$ 和 $v = a_3$。基于这一观察，我们断言

- 若 p 满足 (1.6) 且 $a_1 < v < a_2$ 或 $a_2 < v < a_3$，方程 (PCN) 无解。
- 若 p 满足 (1.9) 且 $a_1 < v < a_3$，方程 (PCN) 有唯一解$v = a_2$.

证明至此结束。 □

定理 定理 1.5的证明： 根据定理 1.2,

$$|\nabla w(x)| \leq C(n,p)\frac{1 + \sqrt{\kappa}R}{R}, \ \forall x \in M.$$

因此，令 $R \to \infty$,

$$|\nabla w(x)| \leq C(n,p)\sqrt{\kappa}, \quad \forall x \in M. \tag{3.13}$$

对于任意的 fi 给定 $x_0 \in M$、$\forall x \in M$，我们选择连接 x 和 x_0 的极小测地线 $\varphi(t)$:

$$\varphi : [0, \ell] \to M, \quad \varphi(0) = x_0, \quad \varphi(\ell) = x,$$

其中，$\ell = \text{dist}(x, x_0)$ 是 x 和 x_0 之间的距离。不难看出

$$w(x) - w(x_0) = \int_0^\ell \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w \circ \varphi(t) \mathrm{d}t \leq \int_0^\ell \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w \circ \varphi(t) \right| \mathrm{d}t \leq |\nabla w||\varphi'(t)|\ell = C(n,p)\sqrt{\kappa}\ell, \tag{3.14}$$

因此,

$$w(x_0) - C(n,p)\sqrt{\kappa}\ell \leq w(x) \leq w(x_0) + C(n,p)\sqrt{\kappa}\ell. \tag{3.15}$$

- 对于第 $w = -(p-1)\ln(v - a_1$ 中的变换，我们注意到第 $a_1 < v < a_2$ 节 2.1，并得到 $\ell \leq \frac{R}{2}$，从而得到

$$e^{-C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R)/2} \leq \frac{v(x) - a_1}{v(x_0) - a_1} \leq e^{C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R)/2}$$

从而

$$\frac{v(x) - a_1}{v(y) - a_1} \leq e^{C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R)}, \quad \forall x, y \in B_{R/2}(x_0).$$

S类似地，对于满足 $a_2 < v < a_3$ 的变换 $w = -(p-1)\ln(a_3 - v)$，有 s

$$\frac{a_3 - v(x)}{a_3 - v(y)} \leq e^{C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R)}, \quad \forall x, y \in B_{R/2}(x_0).$$

- 对于变换

$$w = \operatorname{arctanh}\left(\frac{v-m}{L}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{v-m}{L}}{1-\frac{v-m}{L}} = \frac{1}{2}\ln\frac{v-a_1}{a_3-v}$$

利用 $a_1 < v < a_3$ 第2.2节中的结论，我们注意到 $\ell \leqq \frac{R}{2}$ 并得到

$$-2C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R) \leq \ln\frac{v(x)-a_1}{a_3-v(x)} - \ln\frac{v(x_0)-a_1}{a_3-v(x_0)} \leq 2C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R),$$

由此可推出

$$\left|\ln\frac{\big(v(x)-a_1\big)\big(a_3-v(y)\big)}{\big(v(y)-a_1\big)\big(a_3-v(x)\big)}\right| \leq 4C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R),$$

即,

$$\frac{\big(v(x)-a_1\big)\big(a_3-v(y)\big)}{\big(v(y)-a_1\big)\big(a_3-v(x)\big)} \leq e^{4C(n,p)(1+\sqrt{\kappa}R)}, \quad \forall\, x, y \in B_{R/2}(x_0).$$

证明至此完成。 □

数据可用性 本文稿没有相关数据。

声明

利益冲突 作者声明不存在利益冲突。

References

[1] Giovanni Catino、Dario D. Monticelli 和 Alberto Roncoroni。关于临界 p -拉普拉斯方程。 *Adv. Math.* 433 109331, 38, 2023 , :论文编号 。 [2] Shiu-Yuen Cheng 和 Shing-Tung Yau。黎曼流形上的微分方程及其几何应用。 *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(3):333–354, 1975. [3] Emmanuele DiBenedetto。 $C^{1+\alpha}$ *Nonlinear*退化椭圆方程弱解的局部正则性。 *Anal.* 7 8 827 850, 1983 , ( ): – . [4] Mattia Fogagnolo、Andrea Malchiodi 和 Lorenzo Mazzieri。关于临界拉普拉斯方程与里奇曲率的一则注记。 *J. Geom. Anal.*, 33(6):论文编号 178, 17, 2023. [5] Basilis Gidas 和 Joel Spruck。非线性椭圆方程正解的整体与局部行为。*Comm. Pure Appl. Math.*, 34(4):525–598, 1981. [6] Dario Daniele Monticelli Giovanni Catino。非负里奇曲率流形上的半线性椭圆方程（先行在线发表）。 *J. Eur. Math. Soc.*, 2024. [7] Dong Han、Jie He 和 Youde Wang。流形上拟线性 Hamilton-Jacobi 型方程的通用梯度估计与刘维尔定理。 *J. Differential Equations*, 449:论文编号 113724, 36, 2025. [8] Dong Han、Matthias Winter 和 Hui Yang。一类拟线性椭圆方程正解的刘维尔定理与梯度估计。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 45(12):4902–4926, 2025. [9] Jie He、Yuanqing Ma 和 Youde Wang。流形上 $\Delta_p v + bv^q + cv^r = 0$ 解的通用对数梯度估计及其应用。 *J. Differential Equations*, 434:论文编号 113233, 39, 2025. [10] Jie He、Linlin Sun、Youde Wang。黎曼流形上 Lane-Emden 方程的最优刘维尔定理。 *arXiv:2411.06956*. [11] Jie He、Youde Wang 和 Guodong Wei。完备黎曼流形上方程 $\Delta_p v + av^q = 0$ 解的梯度估计。 *Math. Z.*, 306(3):论文编号 42, 19, 2024. [12] Songbo Hou。黎曼流形上 Allen-Cahn 方程的梯度估计。 *Proc. Amer. Math. Soc.* 147 2 619 628, 2019 , ( ): – . [13] Guangyue Huang、Qi Guo 和 Lujun Guo。黎曼流形上 $\Delta_p u + au^\sigma = 0$ 正弱解的梯度估计。 *J. Math. Anal. Appl.*, 533(2):论文编号 128007, 16, 2024. [14] Shansong Huang 和 Bin Shen。通过 Moser 迭代研究黎曼流形上多孔介质方程和快速扩散方程的梯度估计。 *Commun. Pure Appl. Anal.*, 24(7):1242–1260, 2025. [15] Brett Kotschwar 和 Lei Ni。 p-调和函数、 $1/H$-流及熵公式的局部梯度估计。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(1):1–36, 2009. [16] Jiayu Li。完备黎曼流形热核的梯度估计及其应用。 *J. Funct. Anal.* 97 2 293 310, 1991 , ( ): – .

[17] Peter Li 和 Shing-Tung Yau。关于 Schr¨odinger 算子的抛物型核。 *Acta Math.*, 156(3- 4):153–201, 1986.

[18] Zhihao Lu。Allen-Cahn型方程的刘维尔定理与 Harnack 不等式。 *Nonlinear Anal.*, 244:论文编号 113552, 11, 2024. [19] ZhiHao Lu。半线性椭圆方程的对数梯度估计与通用界再探。*arXiv:2308.14026*. [20] Yuanqing Ma 和 Youde Wang。完备黎曼流形上一类拟线性椭圆方程的梯度估计与刘维尔定理。 *Southeast Asian Bull. Math.*, 49(1):1–22, 2025. [21] Shitong Niu 和 Jun Sun。伪埃尔米特流形上 $\Delta_b u = 0$和 $\Delta_b u + au\ln u + bu = 0$的解的梯度估计。 *J. Differential Equations*, 429:262–282, 2025. [22] Peter Pol´aˇcik、Pavol Quittner 和 Philippe Souplet。通过刘维尔型定理研究超线性问题中的奇性与衰减估计，I：椭圆方程与方程组。 *Duke Math. J.*, Vol. 139(3):555–579, 2007. [23] Xavier Ramos Oliv´e 和 Shoo Seto。积分 Bakry-´emery Ricci 条件下非线性抛物方程的梯度估计。 *Differential Geom. Appl.*, 98:论文编号 102222, 16, 2025. [24] Qianzhong Ou。临界 p-拉普拉斯方程整体解的分类。 *Math. Ann.*, 392 2 1711 1729, 2025 ( ): – . [25] Laurent Saloff-Coste。黎曼流形上的一致椭圆算子。 *J. Differential Geom.*, 36 2 417 450, 1992 ( ): – . [26] James Serrin 和 Henghui Zou。拟线性椭圆方程与不等式的 Cauchy-Liouville 定理和普遍有界性定理。 *Acta Math.*, 189(1):79–142, 2002. [27] Shaya Shakerian 和 J´erˆome V´etois。加权临界 p-拉普拉斯方程的尖锐逐点估计。*Nonlinear Anal.*, 206:论文编号 112236, 18, 2021. [28] Chong Song 和 Jibo Wu。完备黎曼流形上 $\Delta u + a(x)u^p(\ln(u + c))^q = 0$的通用梯度估计。 *J. Differential Equations*, 434:论文编号 113257, 19, 2025. [29] Chiung-Jue Anna Sung 和 Jiaping Wang。 p-拉普拉斯算子的尖锐梯度估计与谱刚性。*Math. Res. Lett.*, 21(4):885–904, 2014. [30] Peter Tolksdorf。一类更广泛的拟线性椭圆方程的正则性。 *J. Differential Equa-*, ( ): – *tions* 51 1 126 150, 1984 . [31] Karen Uhlenbeck。一类非线性椭圆系统的正则性。 *Acta Math.*, 138(3-4):219–240, 1977. [32] J´erˆome V´etois。临界 p-拉普拉斯方程的先验估计及其在解对称性中的应用。 *J. Differential Equations*, 260(1):149–161, 2016. [33] J´erˆome V´etois。关于 $\mathbb{R}^n$中临界 p-拉普拉斯方程正解分类的一则注记。*Adv. Nonlinear Stud.*, 24(3):543–552, 2024. [34] Jie Wang 和 Youde Wang。黎曼流形上 $\Delta u+a(x)u\log u+b(x)u=0$解的有界性与梯度估计。 *J. Differential Equations*, 402:495–517, 2024. [35] Jie Wang 和 Youde Wang。积分里奇曲率界下 $\Delta u+a(x)u\log u+b(x)u=0$及其抛物型对应方程的梯度估计。 *Comm. Anal. Geom.*, 32(4):923–975, 2024. [36] Xiaodong Wang 和 Lei Zhang。黎曼流形上 p-调和函数的局部梯度估计。*Comm. Anal. Geom.*, 19(4):759–771, 2011. [37] Youde Wang 和 Guodong Wei。黎曼流形上 $\Delta u+au^{p+1}=0$正解不存在性的研究。 *J. Differential Equations*, 362:74–87, 2023. [38] Youde Wang 和 Aiqi Zhang。黎曼流形上 Lichnerowicz型方程的梯度估计与刘维尔定理。 *Results Math.*, 80(3):论文编号 73, 40, 2025. [39] Youde Wang、Aiqi Zhang 和 Hongxing Zhao。黎曼流形上一类椭圆方程的梯度估计与刘维尔定理。 *Commun. Pure Appl. Anal.*, 24(5):840–867, 2025. [40] Youde Wang 和 Liqin Zhang。完备黎曼流形上 $\Delta_p u + \Delta_q u + a|u|^{s-1}u + b|u|^{l-1}u = 0$的梯度估计及其应用。 *Internat. J. Math.*, 36(2):论文编号 2450070, 53, 2025. [41] Y. Wang、G. Wei 和 L. Zhang。积分有界 Ricci 曲率流形上的拟线性方程 $\delta_p v + av^q = 0$及其几何应用。 *arXiv: 2601.01837*, 2026. [42] Wangzhe Wu 和 Qiqi Zhang。 $\mathbb{R}^N$中拟线性椭圆方程的刘维尔定理。 *Front. Math.*, 20 5 979 1005, 2025 ( ): – . [43] Shing-Tung Yau。完备黎曼流形上的调和函数。 *Comm. Pure Appl. Math.*, 28:201– 228, 1975. [44] Fanqi Zeng、Cheng Jin、Peilong Dong 和 Xinying Jiang。光滑度量测度空间上 $\Delta_f v^\tau + \lambda\ x\ v^l = 0$ *Electron. Res. Arch.* 33 7 4307 4326, 2025 ( ) 的 Cheng-Yau 型梯度估计。 , ( ): – .

（ZhenQiu）

School of Mathematics and Information Science Guangzhou University Guangzhou , , , 510006 China.

Email address: qiuzhen97@foxmail.com

（YoudeWang） 1. School of Mathematics and Information Sciences, Guangzhou University 2. State Key Laboratory of Mathematical Sciences (SKLMS) Academy of Mathematics and Systems , , , , , Science Chinese Academy of Sciences Beijing 100190 China 3. School of Mathematical Sciences University of Chinese Academy of Sciences Beijing 100049 , , China.

Email address: wyd@math.ac.cn

（JunYang） School of Mathematics and Information Science Guangzhou University Guangzhou , , , 510006 China.

Email address: jyang2019@gzhu.edu.cn