arXiv:2603.00934v1 [math.OC] 1 Mar 2026

均衡不变性、近端性与代理化：随机非光滑博弈中的 Moreau 平滑最佳响应路径

Zhuoyu Xiao* Uday V. Shanbhag†

2026年3月3日

摘要

最佳响应（BR）方案是学习非合作博弈均衡的重要途径。然而，现有最佳响应（BR）方案的速率保证通常要求玩家目标函数满足严格的光滑性条件，并且能够获得适当定义的特征值界，这大大限制了此类方案的适用范围；对于一大类具有期望值目标函数的非光滑非凸博弈，几乎没有方案能够实现高效求解。这促使我们研究适用于非光滑目标函数的 Moreau 平滑 BR 方案。首先，我们考虑不确定性下的一类非光滑强凸博弈（但可能是非单调的）。通过提出均衡不变性结论，我们给出同步和异步方案，并为其提供线性和次线性速率保证及相应的复杂度结论。其次，对于弱凸玩家目标函数，我们将代理化纳入 Moreau 平滑最佳响应，并证明所得的平滑拟纳什均衡（QNE）是原弱凸博弈的 $\mathcal{O}(\eta)$-QNE，其中 $\eta > 0$ 表示 Moreau 平滑参数。在这一设定下，我们再次提出同步和异步 BR 方案，并为其提供线性和次线性速率及相应的复杂度界。针对一系列此类博弈开展的初步数值实验结果颇具前景。

关键词：非光滑博弈、纳什均衡、准纳什均衡、弱凸、最佳响应方案、代理化

1 引言

纳什均衡（NE） [31] 是 N人非合作博弈中的一个基本解概念，在不完全竞争的工程与经济系统 [11], 以及近年来的机器学习 [24]中都具有自然的现实意义。本文研究一种经 Moreau 平滑处理的最佳响应（BR）框架，以应对不确定性与非光滑性带来的挑战。我们关注 N人非合作博弈 $\mathcal{G}$（$\mathbf{f}$ X, $\boldsymbol{\xi}$），其中$\mathbf{f}$ 表示玩家特定目标函数的集合，即$\mathbf{f}$ $\triangleq \{f_i\}_{i=1}^N$； X 表示玩家特定策略集的笛卡尔积，即 $X \triangleq \prod_{i=1}^N X_i$；随机性则由定义在概率空间（$\Omega$ $\mathcal{F}$， $\mathbb{P}$）上的随机变量 $\boldsymbol{\xi}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ 表示。在该博弈中，对于任意$i \in [N]$，第 i个玩家求解

$$\min_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x_{-i}) \triangleq \mathbb{E}\left[\tilde{f}_i(x_i, x_{-i}, \boldsymbol{\xi})\right], \tag{1}$$

*密歇根大学工业与运筹工程系，安娜堡，密歇根州 48109。电子邮箱：zyxiao@umich.edu。

†通讯作者。密歇根大学工业与运筹工程系，安娜堡，密歇根州 48109。电子邮箱：udaybag@umich.edu。

最佳响应映射具有压缩性时的同步最佳响应						
文献	适用性	随机性	几乎必然替代		Rate	复杂度
[10]	凸 $+C^2$	✗	✗	-	线性	✗
[21, 22]	凸 $+C^2$	✓	✗	✓	线性	✓
[7, 36, 39]	非凸 + 直接导数一致性	✗	✓	-	线性	-
MS-SBR	凸 $+ C^0$	✓	✗	✓	线性	✓
MS-SSBR	弱凸 $+C^0$	✓	✓	✓	线性	✓
基于可能性的异步 BR						
文献	适用性	随机性	几乎必然替代		Rate	复杂度
[20]	凸 $+C^1$	✓	✗	✓	✗	✗
MS-ABR	凸 $+ C^0$	✓	✗	√		✓
MS-SABR	弱凸 $+C^0$	✓	✓	√		✓

表1：与现有 BR方案的比较（d.d.c.：直接导数一致性）。

其中 $X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ 是凸且闭的，$X_{-i} \triangleq \prod_{j\neq i} X_j$，并且 $x_{-i} = (x_j)_{j\neq i} \in X_{-i}$。此外，$\Xi \triangleq \{\xi(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$，且对于任意 $i \in [N]$，$\tilde{f}_i(\bullet, x_{-i}, \xi)$是给定 x_{-i} 和 ξ时的一个可能非光滑的实值函数。

1.1 相关工作

在连续策略博弈中，纳什均衡的存在性通常依赖于参与者目标函数的凸性，而在非凸情形下，均衡可能不存在 [37, 38]。最近，研究者利用 Bouligand 驻点性引入了一种较弱的解概念——拟纳什均衡（QNE） [37]。目前已发展出两种主要的纳什均衡计算算法范式：（I）梯度响应方案。在这类方案中，参与者通过梯度步更新策略。早期研究借鉴了单调变分不等式（VI）理论中的技术 [10, 18, 21, 49]，，后续研究则在 Minty 型条件 [1, 13, 46] 或伪单调性及其变体 [8, 14, 15, 17, 19, 50]的框架下，考虑了单调性更弱的变分不等式。我们近期的工作 [47] 放宽了凸性假设，并考察了多种非单调情形，为随机非凸光滑博弈中的拟纳什均衡建立了最后迭代收敛保证。（II）最佳响应方案。这类方法 [10, 20, 21, 22] 考察了同步或异步版本，但要求目标函数具备凸性和光滑性；而 [7, 36, 39] 则通过代理化将相关条件放宽至拟纳什均衡情形。我们在表1中总结了许多先前的工作，并指出了所提出方案的新颖之处。然而，这些放宽后的方法要求极限点满足方向导数一致性条件（见 [7]），而这一条件通常难以验证。因此，仍存在显著的研究空白。

不足： 在易于验证的假设下，对于随机（非）凸、非光滑且可能非单调的情形，目前尚无具备速率与复杂度保证、可用于求解精确或近似均衡的最优反应方案。

1.2 概述与贡献

第 2 节介绍预备知识后，第 3 节和第 4 节将阐述我们的主要算法。最后，我们将在第 5 节和第 6 节分别介绍数值实验并给出总结性评论。我们的贡献在于为两类博弈开发了不精确采样驱动的最优反应方案。

(I) 非光滑非单调强凸博弈。以往针对强凸博弈的 BR 方案依赖于对玩家目标函数的 C^2 要求，以及获取相关二阶导数矩阵的适当特征值 [10, 22]。与之相反，我们提出了一个框架，允许玩家特定函数为非光滑函数，且拼接次梯度映射可能非单调。我们发现了一项令人意外的均衡不变性：对于任意正的平滑参数 η，原始非光滑博弈的纳什均衡与 Moreau 平滑博弈的纳什均衡等价。基于此，我们得以提出两种 Moreau 平滑 BR 方案。**(I.A)线性收敛的同步 *BR* 方案**。我们提出的 Moreau 平滑同步最佳响应（**MS-SBR**）方案以线性速率收敛，近似样本复杂度为 $\mathcal{O}(N\epsilon^{-2})$；其保证基于一项适当的压缩性条件，并利用了平滑问题的利普希茨性质。值得注意的是，我们的保证依赖于更精细的分析，而非特征值界。**(I.B) 次线性收敛的异步 *BR* 方案**。以往的结果 [6, 20, 36, 39], 在势性条件下证明了异步 BR 方案所生成迭代序列的渐近收敛，但未提供收敛速率或复杂度保证。与之不同，我们提出了 Moreau 平滑异步最佳响应方案（**MS-ABR**），并通过引入残差函数来改进分析，以此为基础给出次线性收敛速率以及近似复杂度保证 $\mathcal{O}(N^2\eta^{-3}\epsilon^{-6})$，其中 η 不必接近零。

(II) 非光滑弱凸博弈。 应对非光滑性和非凸性的一种途径是基于代理化的方法，这类方法通常在极限点 x^∞处采用一致性条件，例如 [7, 25, 36]。然而，这类条件通常难以事先验证。为此，我们考虑一种依赖于对该博弈的 Moreau平滑对应博弈进行代理化的框架，并提出一类用于计算拟纳什均衡的 Moreau光滑化替代最优反应方案。值得注意的是，我们证明， η平滑博弈的一个 QNE 是原弱凸博弈的一个 $\mathcal{O}(\eta)$-QNE。**(II.A)线性收敛的同步最优反应方案**。 与 **(I.A)** 类似，我们提出一种 Moreau 平滑同步替代最佳响应（**MS-SSBR**）方案，其线性收敛速率对应的近似样本复杂度为 $\mathcal{O}(N\eta^{-2}\epsilon^{-2})$。**(II.B) 次线性收敛的异步最优反应方案**。 我们还提出了异步版本（**MS-SABR**），其具有几乎必然收敛保证、次线性收敛速率保证，以及约为 $\mathcal{O}(N^2\eta^{-5}\epsilon^{-6})$ 的总体复杂度。收敛与复杂度结果汇总于表2。

方案	收敛	Rate	样本复杂度
MS-SBR	几乎必然收敛（定理 3.1） 均值收敛（定理 3.2）	线性 (定理 3.2)	$\approx \mathcal{O}(N\epsilon^{-2})$ (定理 3.3)
MS-ABR	几乎必然收敛 (定理 3.4) 均值收敛（定理 3.5）	次线性 （定理 3.5）	$\approx \mathcal{O}(N^2\eta^{-3}\epsilon^{-6})$ （定理 3.6）
MS-SSBR	几乎必然收敛（定理 4.2） 均值收敛（定理 4.3）	线性 （定理 4.3）	$\approx \mathcal{O}(N\eta^{-2}\epsilon^{-2})$ （定理 4.4）
MS-SABR	几乎必然收敛（定理 4.5） 均值收敛（定理 4.6）	次线性 （定理 4.6）	$\approx \mathcal{O}(N^2\eta^{-5}\epsilon^{-6})$ （定理 4.7）

表2：贡献总结。

符号说明。 随机变量 $\boldsymbol{\xi}$ 的期望和一次实现分别记为 $\mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}]$ 和 ξ。记号 $\mathrm{int}(X)$ 和 $\mathbf{1}_X(x)$ 分别表示 X 的内部和 X 的示性函数。给定闭凸集 $X \subseteq$ 、 $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$、 $x \in X$ 和方向 $d \in \mathbb{R}^n$，$f'(x;\, d)$、 $\partial f(x)$ 和 $\mathcal{N}_X(x)$ 分别表示 f 在 x 沿 d 的方向导数、f （凸时）在 x 处的次微分，以及 X 在 x 处的法锥。

2 预备知识

本节将介绍一些必要的背景知识。

2.1 替代方法

代理化方法，也称逐次凸近似 [39], 或主化–最小化[27, 45] ，已被用于求解非凸优化 [12, 26, 36, 39, 40, 45]。我们考虑一阶替代函数，它们既不要求 L-光滑性，也不要求主化性质。

定义 2.1. 给定一个光滑但可能非凸的 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和 $x \in \mathrm{dom}(f)$，凸$\widehat{\ }$函数 $f(\bullet;\, x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$在 x附近是 $f(\bullet)$的一阶替代函数，当且仅当满足以下两个局部性质$\widehat{\ }$：(i) 函数值相等，即 $f(x;\, x) = f(x)$；以及(ii) 梯度相等，即$\widehat{\ }\nabla f(x;\, x) = \nabla f(x)$。□

f在 x附近满足定义 2.1 的最简单替代函数是线性替代函数，其定义为 $\widehat{f}(\bullet;\, x) \triangleq f(x) + \nabla f(x)^\top(\bullet - x)$, 因此，对于给定的 x_{-i}，玩家 i 在 x_i 附近的玩家特定函数 $f_i(\bullet,\ x_{-i})$ 的线性替代函数和二次替代函数对于 $M > 0$分别如下:

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \ \widehat{f}_i(\bullet, x_{-i}; x_i) \triangleq f_i(x) + \nabla_{x_i} f_i(x)^\top(\bullet - x_i);\ \text{and}\\
&(ii)\ \ \widehat{f}_i(\bullet, x_{-i}; x_i) \triangleq f_i(x) + \nabla_{x_i} f_i(x)^\top(\bullet - x_i) + \tfrac{M}{2}\|\bullet - x_i\|^2.
\end{aligned}
$$

2.2 凸情形和弱凸情形中的 Moreau 包络

解决非光滑性问题的一种自然方法是通过光滑近似对非光滑函数进行平滑，从而能够利用光滑优化中的技术。这些技术包括 Nesterov平滑 [33], Moreau平滑 [30], Ben-Tal-Teboulle平滑 [3], 和随机平滑 [44]。 f 的 Moreau 包络 f^η 定义为

$$
f^\eta(x) \triangleq \min_y \left\{ f(y) + \tfrac{1}{2\eta}\,\|\, y - x\,\|^2 \right\}.
$$

近端点 $\widehat{x} \triangleq \mathrm{prox}_{\eta f}(x)$ 满足（见 [2, 9]）

$$
\nabla f^\eta(x) \in \partial f(\widehat{x}),\ \ \|\widehat{x} - x\| = \eta\|\nabla f^\eta(x)\|,\ \ f(\widehat{x}) \le f(x). \tag{2}
$$

请注意，上述性质对于凸函数和弱凸函数均成立。接下来，我们回顾凸性条件下 Moreau 包络的一些性质（参见 [2, 16]）。

¯**命题 2.1.** 考虑一个闭的、凸的适当函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 及其 Moreau 包络$f^\eta(x)$，其中 $\eta > 0$。则以下结论成立：(i) x^*是 f在 $\mathbb{R}^n$上的极小值点，当且仅当 x^*是 f^η在 $\mathbb{R}^n$上的极小值点；(ii) f^η是 $\frac{1}{\eta}$-光滑的；(iii) 若 f在 $\mathbb{R}^n$上是 μ-强凸的，则 f^η在 $\mathbb{R}^n$上是 $\frac{\mu}{\eta\mu+1}$-强凸的。

□

由 Nurminskii 首先引入于 [34], , 若函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 满足函数 $f(\bullet) + \frac{\rho}{2}\|\bullet\|^2$ 为凸函数，则称其为 ρ-弱凸函数。弱凸函数在优化和学习中有广泛应用 [9]。 ρ-弱凸函数 f 的次微分可自然地定义为 $\partial f(x) \triangleq \partial h(x) - \rho x = \partial\left[f(x) + \frac{\rho}{2}\|x\|^2\right] - \rho x$, 其中 $\partial h(x)$ 是按照凸分析定义的 h 的次微分。以下命题给出了弱凸函数的方向导数与次微分之间的关系，并恢复了凸分析中的经典结果。

命题 2.2. 给定一个正常、闭且 ρ-弱凸函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 且 $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$，对每个 $d \in \mathbb{R}^n$, $f'(x;\, d) = \max\limits_{u\in\partial f(x)}\{\langle u, d\rangle\}$。

证明。 我们将凸函数 h 定义为 $h(x) \triangleq f(x) + \frac{\rho}{2}\|x\|^2$。因此我们有 $f(x) = h(x) - \frac{\rho}{2}\|x\|^2$。根据 [29], 中的命题 4.24和定理 4.30，我们知道凸函数 h 是方向可微的，并且我们有

$$f'(x;d) = h'(x;d) - \langle \rho x, d\rangle = \max_{v\in\partial h(x)}\{\langle v, d\rangle\} - \langle \rho x, d\rangle = \max_{v\in\partial h(x)}\{\langle v - \rho x, d\rangle\}.$$

由于 f 的次微分定义为 $\partial f(x) = \partial h(x) - \rho x$，因此可得

$$f'(x;d) = \max_{v-\rho x\in\partial h(x)-\rho x}\{\langle v - \rho x, d\rangle\} = \max_{u\in\partial f(x)}\{\langle u, d\rangle\},$$

由此完成证明。 □

若 f 是 ρ-弱凸的，则当 $\eta < \rho^{-1}$ 时，Moreau 包络 f^η 为 C^1，且 $\nabla f^\eta(x) = \eta^{-1}(x - \operatorname{prox}_{\eta f}(x))$。接下来，我们形式化弱凸函数的Moreau包络的 L-光滑性。

命题 2.3 ([41, 引理 12])。 给定一个适当的闭 ρ-弱凸函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。对于任意 $\eta < \rho^{-1}$, ∇f^η 是 L-Lipschitz 的，且

$$L = \begin{cases} \frac{1}{\eta}, & \text{if } \eta\rho \le \frac{1}{2}, \\ \frac{\rho}{1-\eta\rho}, & \text{if } \eta\rho \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

也就是说，我们有 $\|\nabla f^\eta(x) - \nabla f^\eta(y)\| \le L\|x - y\|$。 □

2.3 弱凸性下的拟纳什均衡

通过布利冈德（ 或 B-）驻点性 [7], , 拟纳什均衡（QNE）在 [37 中被引入].

定义 2.2 （B-驻点性下的拟纳什均衡）。 考虑一个有 N 个玩家的博弈，对于任意 $i \in [N]$, $f_i(\bullet, x_{-i})$ 关于给定的 x_{-i} 方向可微。假设对于任意 $i \in [N]$, X_i 都是凸函数。那么，若元组 x^* 满足 x_i^* 是 $f_i(\bullet, x_{-i}^*)$ 的一个 B-驻点，则称其为拟纳什均衡（QNE），即

$$f_i'(x_i^*, x_{-i}^*; x_i - x_i^*) \ge 0,\ \forall x_i \in X_i \tag{3}$$

对于任意 $i \in [N]$ 以及任意给定的 x_{-i}^* 均成立。 □

现在，我们给出弱凸博弈背景下拟纳什均衡的另一种定义。其证明可由命题 2.2 得出。

命题 2.4 （弱凸性下的拟纳什均衡）。 考虑一个 N 人玩家博弈，对于任意 $i \in [N]$, $f_i(\bullet, x_{-i})$ 关于给定的 x_{-i} 是弱凸的。假设对于任意 $i \in [N]$, X_i 是凸的。那么，元组 x^* 是拟纳什均衡，当且仅当对于任意 $i \in [N]$,

$$0 \in \partial_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) + \mathcal{N}_{X_i}(x_i^*). \tag{4}$$

证明。 假设 $x^* = (x_i^*)_{i=1}^N$ 是拟纳什均衡。根据命题 2.2，对于任意 $i \in [N]$，有 $\max_{u_i \in \partial_{x_i} f(x_i^*,\, x_{-i}^*)} \{\langle u_i, x_i - x_i^* \rangle\} \geq 0, \quad \forall x_i \in X_i$. 因此，存在 $u_i^* \in \partial_{x_i} f(x_i^*,\ x_{-i}^*)$ 使得 $\langle u_i^*,\ x_i - x_i^* \rangle \geq 0$ 从而对于任意 $x_i \in X_i$，有 $\langle -u_i^*,\ x_i - x_i^* \rangle \leq 0$。由于 X_i 是凸的，根据法锥的定义可得

$$-u_i^* \in \mathcal{N}_{X_i}(x_i^*) \implies 0 \in u_i^* + \mathcal{N}_{X_i}(x_i^*) \implies 0 \in \partial_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) + \mathcal{N}_{X_i}(x_i^*).$$

通过证明逆命题即可得出该结果（将论证反向即可）。 □

接下来，我们证明在弱凸性和紧性条件下拟纳什均衡的存在性。

定理 2.1 （拟纳什均衡的存在性）。 考虑一个 N 人非合作博弈，其中对于任意$i \in [N]$, $f_i(\bullet, x_{-i})$, 函数是 ρ_i-弱凸的，且对于任意 x_{-i}， X_i 非空、紧且凸。那么，这样的弱凸博弈存在拟纳什均衡。

证明。 对于每个 ρ_i-弱凸函数 $f_i(\bullet, x_{-i})$，我们可以将其写成 dc 型分解（dc 表示“凸函数之差”）： $f_i(x_i, x_{-i}) = \left[f_i(x_i, x_{-i}) + \frac{\rho_i}{2}\|x_i\|^2\right] - \left[\frac{\rho_i}{2}\|x_i\|^2\right]$. 于是，拟纳什均衡的存在性可由 [36, 命题 4.2]直接得出。 □

我们知道，在光滑条件下，QNE 可简化为

$$\nabla_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*)^\top (x_i - x_i^*) \geq 0, \ \forall x_i \in X_i,$$

对任意 $i \in [N]$ 均成立。因此，变分不等式 VI $(X,\ F)$ 的解集，其中 $X \triangleq \prod_{i=1}^N X_i$且 $F(x) \triangleq (\nabla_{x_i} f_i(x_i,\ x_{-i}))_{i=1}^N$，刻画了 QNE。光滑条件下的存在性结果可见 [47]。

3 随机强凸非单调博弈的非精确 BR方案

本节将探讨如何求解随机强凸但非光滑且可能非单调博弈的纳什均衡。我们首先证明，对于任意 $\eta > 0$，Moreau平滑下的纳什均衡保持不变；如下述命题所示，这构成了命题 2.1-(i) 在博弈论中的一个新对应结果。随后，我们将在第 3.1 节和第 3.2 节分别介绍同步最优反应方案（**MS-SBR**）及其异步变体（**MS-ABR**）。

命题 3.1（莫罗平滑下纳什均衡的不变性）。考虑 N 个玩家的博弈$\mathcal{G}(\mathrm{f}\ X, \xi)$，其中对于任意 $i \in [N]$，玩家特定函数 $f_i(\bullet, x_{-i})$ 对给定的 x_{-i} 是 σ_i-强凸但非光滑的。那么对于任意 $\eta > 0$, x^* 是 $\mathcal{G}(\mathrm{f}\ X, \xi)$ 的纳什均衡，当且仅当 x^* 是 Moreau 平滑博弈 $\mathcal{G}(\bar{\mathrm{f}}^{\,\eta}, \mathbb{R}^n, \xi)$ 的纳什均衡，其中 $\bar{f}_i^{\eta}(\bullet, x_{-i})$ 是 $\bar{f}_i(\bullet, x_{-i})$ 的 Moreau 包络 $\triangleq f_i(\bullet, x_{-i}) + \mathbf{1}_{X_i}(\bullet)$，且第 i 个玩家求解

$$\min_{x_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \bar{f}_i^{\eta}(x_i, x_{-i}), \ \forall i \in [N].$$

证明。纳什均衡的不变性可由 [16, 引理 2]以及强凸非光滑优化的一阶最优性条件 [29, 定理 7.15]立即推出。此处略去证明。

□

对于任意正的平滑参数 η，这一均衡不变性至关重要，有助于在接下来的两节中开发高效算法。

3.1 强凸条件下的 MS-SBR

基于命题 3.1，我们提出一种 Moreau 平滑同步最佳响应（**MS-SBR**）方案，其中 $\varepsilon_i^k > 0$ 是玩家 i 在第 k次迭代中采用的不精确度。

算法 1 Moreau 平滑同步最佳响应（**MS-SBR**）

初始化：初始化 $k = 0$，给定 η，K，$\{\varepsilon_i^k\}_{i,\ k}$，以及 $x^0 = (x_i^0)_{i=1}^N \in X$。迭代直至 $k \geq K$：通过求解子问题计算 $x^{k+1} = (x_i^{k+1})_{i=1}^N \in X$

$$x_i^{k+1} \in \{z \in X_i : \mathbb{E}[\|z - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \leq (\varepsilon_i^k)^2 \text{ a.s.}\},\ \forall i \in [N], \tag{5}$$

其中，最佳响应解 $\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)$ 定义为

$$\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) \triangleq \underset{z_i \in \mathbb{R}^{n_i}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \bar{f}_i^{\eta}(z_i, x_{-i}^k) + \tfrac{\mu}{2}\|z_i - x_i^k\|^2 \right\},\ \forall i \in [N]. \tag{6}$$

返回：返回 x^K 作为最终估计。

3.1.1 收敛性分析

我们采用假设 A 来建立 **MS-SBR** 的收敛保证。

假设 A。(A1) 对任意 $i \in [N]$，每个 $f_i(\bullet, x_{-i})$ 都是 σ_i-强凸且 C^0，对任意 x_{-i} 均成立。(A2) 对任意 $i \in [N]$，每个 $\nabla_{x_i} \bar{f}_i^{\eta}(x_i, \bullet)$ 对任意 x_i 均为 $\bar{L}_{-i}$-Lipschitz。(A3)（压缩性质）我们定义矩阵

$$\Gamma_1 \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\sigma_1/(\eta\sigma_1+1)+\mu} & \frac{\bar{L}_{-1}}{\sigma_1/(\eta\sigma_1+1)+\mu} & \cdots & \frac{\bar{L}_{-1}}{\sigma_1/(\eta\sigma_1+1)+\mu} \\ \frac{\bar{L}_{-2}}{\sigma_2/(\eta\sigma_2+1)+\mu} & \frac{\mu}{\sigma_2/(\eta\sigma_2+1)+\mu} & \cdots & \frac{\bar{L}_{-2}}{\sigma_2/(\eta\sigma_2+1)+\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\bar{L}_{-N}}{\sigma_N/(\eta\sigma_N+1)+\mu} & \frac{\bar{L}_{-N}}{\sigma_N/(\eta\sigma_N+1)+\mu} & \cdots & \frac{\mu}{\sigma_N/(\eta\sigma_N+1)+\mu} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

矩阵 Γ_1 的谱范数严格小于 1，即 $\|\Gamma_1\| < 1$。

注 3.1。为便于阐述，我们省略 L_{-i} 对 η的依赖关系。 □

定理 3.1（**MS-SBR** 的几乎必然收敛）。考虑 N 玩家强凸博弈$\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$ 及其 Moreau 平滑博弈 $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{f}}^{\eta}, \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\xi})$。令 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 由 **MS-SBR** 生成。假设假设 A 成立，且 $\varepsilon_i^k \geq 0$，其中对任意 $i \in [N]$，$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_i^k < \infty$。则有以下结论。

(i) 映射 $\widehat{x}^{\eta}(\bullet) = (\widehat{x}_i^{\eta}(\bullet))_{i=1}^N$ 是压缩的，因此不动点是唯一的。(ii) 元组 x^* 是 $\widehat{x}^{\eta}(\bullet)$ 的唯一不动点，当且仅当 x^* 是唯一的纳什均衡。(iii) 序列 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 几乎必然收敛到 x^*。

证明。(i) 由于 $f_i(\bullet,\ x_{-i})$ 是 σ_i-强凸的，我们知道 $f_i(\bullet,\ x_{-i})$ 也是 σ_i-强凸的。由命题 2.1 可知，$\bar{f}_i^{\eta}(\bullet,\ x_{-i})$ 是 $\frac{\sigma_i}{\eta\sigma_i+1}$-强凸的。与 [10, 的证明类似

pp. 479], 对于任意 $i \in [N]$ 和任意 $w,\ y \in X$,

$$\begin{aligned}
0 \le\ & (\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w))^\top \big[(\nabla_{x_i} \bar{f}_i^\eta(\widehat{x}_i^\eta(w), w_{-i}) + \mu(\widehat{x}_i^\eta(w) - w_i)) \\
& - (\nabla_{x_i} \bar{f}_i^\eta(\widehat{x}_i^\eta(y), y_{-i}) + \mu(\widehat{x}_i^\eta(y) - y_i))\big] \\
=\ & (\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w))^\top (\nabla_{x_i} \bar{f}_i^\eta(\widehat{x}_i^\eta(w), w_{-i}) - \nabla_{x_i} \bar{f}_i^\eta(\widehat{x}_i^\eta(y), y_{-i})) \\
& + (\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w))^\top \mu(\widehat{x}_i^\eta(w) - \widehat{x}_i^\eta(y)) + (\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w))^\top \mu(y_i - w_i) \\
\le\ & (\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w))^\top (\nabla_{x_i} \bar{f}_i^\eta(\widehat{x}_i^\eta(w), w_{-i}) - \nabla_{x_i} \bar{f}_i^\eta(\widehat{x}_i^\eta(y), w_{-i})) \\
& + (\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w))^\top (\nabla_{x_i} \bar{f}_i^\eta(\widehat{x}_i^\eta(y), w_{-i}) - \nabla_{x_i} \bar{f}_i^\eta(\widehat{x}_i^\eta(y), y_{-i})) \\
& - \mu \|\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w)\|^2 + \mu \|\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w)\| \|y_i - w_i\|.
\end{aligned}$$

根据假设 A，对于任意 $i \in [N]$，我们有

$$\begin{aligned}
0 \le & -\Big(\tfrac{\sigma_i}{\eta\sigma_i+1} + \mu\Big) \|\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w)\|^2 + \bar{L}_{-i} \|\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w)\| \|y_{-i} - w_{-i}\| \\
& + \mu \|\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w)\| \|y_i - w_i\| \\
\Longrightarrow\ \|\widehat{x}_i^\eta(y) - \widehat{x}_i^\eta(w)\| \le & \tfrac{\mu}{\frac{\sigma_i}{\eta\sigma_i+1}+\mu} \|y_i - w_i\| + \tfrac{\bar{L}_{-i}}{\frac{\sigma_i}{\eta\sigma_i+1}+\mu} \|y_{-i} - w_{-i}\| \\
\le & \tfrac{\mu}{\frac{\sigma_i}{\eta\sigma_i+1}+\mu} \|y_i - w_i\| + \tfrac{\bar{L}_{-i}}{\frac{\sigma_i}{\eta\sigma_i+1}+\mu} \sum_{j \ne i} \|y_j - w_j\|
\end{aligned}$$

对于任意 $i \in [N]$，该式成立。因此，我们推得

$$\begin{bmatrix} \|\widehat{x}_1^\eta(y) - \widehat{x}_1^\eta(w)\| \\ \vdots \\ \|\widehat{x}_N^\eta(y) - \widehat{x}_N^\eta(w)\| \end{bmatrix} \le \Gamma_1 \begin{bmatrix} \|y_1 - w_1\| \\ \vdots \\ \|y_N - w_N\| \end{bmatrix}.$$

根据假设 (A3)，我们证明了 $\widehat{x}^\eta(\bullet) = (\widehat{x}_i^\eta(\bullet))_{i=1}^N$ 是压缩的。

(ii) 的证明可直接由无约束强凸光滑优化的一阶最优性条件及命题 3.1 得出。(iii) 的证明与 [22, 命题 1] 的证明相同，此处略去。

□

注 3.2. 我们的结果放宽了求解强凸博弈的基于压缩的 BR 方案所要求的 C^2 光滑性假设，将其减弱为显著宽松的 C^0 要求。此外，通过上述方法，[10] 中的分析要求可从 C^2 放宽至 C^1；该方法只需要 Lipschitz 条件，而不需要特征值界。这里再补充两点说明。(i) 从 (7) 可以看出，若 $(N-1)L_{-i} < \frac{\sigma_i}{\eta\sigma_i+1}$ 对任意 $i \in [N]$ 均成立（其中 L_{-i} 取决于 η），则有 $\|\Gamma_1\|_\infty < 1$。(ii) 这种方法不适用于弱凸情形；为解决弱凸性问题，我们将代理化纳入平滑化 BR 框架。□

接下来，我们推导由 **MS-SBR** 生成的迭代序列的线性收敛速率。

定理 3.2（**MS-SBR** 的线性收敛速率）。考虑 **MS-SBR**，其中对于任意 $i \in [N]$，我们有 $\mathbb{E}[\|x_i^0 - x_i^*\|] \le C_1$，其中某个 $C_1 > 0$，且 $\varepsilon_i^k \triangleq \nu^{k+1}$，其中某个 $\nu \in (0,1)$。假设假设 A 成立。定义 $c_1 \triangleq \max\{\|\Gamma_1\|, \nu\}$ 并

$$e_k \triangleq \mathbb{E}\left[\left\|\begin{bmatrix} \|x_1^k - x_1^*\| \\ \vdots \\ \|x_N^k - x_N^*\| \end{bmatrix}\right\|\right]. \tag{8}$$

Th对于任意 $q_1 \in (c_1,\ 1)$ 和 $D_1 \triangleq 1/\log\left((q_1/c_1)^e\right)$，$e_k \le \sqrt{N}(\overline{C}_1 + D_1) q_1^k, \quad \forall k \ge 0$.

证明。 证明与 [22, 命题 3], 的证明相同，此处从略。 □

人们可能会问如何以可处理的方式验证假设（A2）。我们接下来通过考虑一个涵盖许多经典博弈（如纳什–古诺博弈）的设定来说明这种可验证性。

引理 3.1. 考虑一个 N人博弈，其中第 i位玩家的特定目标函数由 $f_i(\bullet, x_{-i}) \triangleq g_i(\bullet) + p_i(x_{-i})^\top(\bullet)$给出，其中 $g_i(\bullet)$是凸的。假设 $\|p_i(x_{-i}) - p_i(y_{-i})\| \leq L^p_{-i}\|x_{-i} - y_{-i}\|$ 对某个 $L^p_{-i} > 0$ 以及任意 $x_{-i}, y_{-i} \in X_{-i}$成立。则假设（A2）成立，即$\|\nabla_{x_i} \bar{f}^\eta_i(x_i, x_{-i}) - \nabla_{x_i} \bar{f}^\eta_i(x_i, y_{-i})\| \leq L^p_{-i}\|x_{-i} - y_{-i}\|$对给定的 $x_i \in X_i$以及任意 x_{-i}, $y_{-i} \in X_{-i}$成立。

证明。梯度为 $\nabla_{x_i} \bar{f}^\eta_i(x_i, x_{-i}) = \frac{1}{\eta}(x_i - \mathrm{prox}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x_{-i})}(x_i))$。由于 $\bar{f}_i(x_i, x_{-i}) = \bar{g}_i(x_i) + p_i(x_{-i})^\top x_i$, 其中 $\bar{g}_i(x_i) \triangleq g_i(x_i) + \mathbf{1}_{X_i}(x_i)$, 因此 $\mathrm{prox}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x_{-i})}(x_i) = \mathrm{prox}_{\eta \bar{g}_i(\bullet)}(x_i - \eta p_i(x_{-i}))$, 并且

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla_{x_i} \bar{f}^\eta_i(x_i, x_{-i}) - \nabla_{x_i} \bar{f}^\eta_i(x_i, y_{-i})\| = \tfrac{1}{\eta}\|\mathrm{prox}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x_{-i})}(x_i) - \mathrm{prox}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, y_{-i})}(x_i)\| \\
&= \tfrac{1}{\eta}\|\mathrm{prox}_{\eta \bar{g}_i(\bullet)}(x_i - \eta p_i(x_{-i})) - \mathrm{prox}_{\eta \bar{g}_i(\bullet)}(x_i - \eta p_i(y_{-i}))\| \\
&\leq \tfrac{1}{\eta}\|\eta(p_i(x_{-i}) - p_i(y_{-i}))\| = \|p_i(x_{-i}) - p_i(y_{-i})\| \leq L^p_{-i}\|x_{-i} - y_{-i}\|,
\end{aligned}
$$

其中，倒数第二个不等式源于近端算子 [2, Theorem 6.42] 的非扩张性，以及 $\bar{g}_i(\bullet)$ 是凸函数这一事实。 □

3.1.2 复杂度分析

受 [16, Section 2.4], 启发，我们采用非精确莫罗平滑梯度法（IMGM）求解 (6)，以获得一个非精确最佳响应解。对于给定的 x^k 和迭代次数 $j_{i,k}$，我们初始化 $z_i^{k,0} \triangleq x_i^k$，然后从 $t = 0, \cdots, j_{i,k} - 1$ 开始执行以下非精确梯度下降步骤:

$$
z_i^{k,t+1} \triangleq z_i^{k,t} - \gamma(\nabla_{x_i} \bar{f}^\eta_i(z_i^{k,t}, x^k_{-i}) + \mu(z_i^{k,t} - x_i^k) + \bar{w}_i^{k,t}),\ \forall i \in [N], \tag{IMGM}
$$

其中，γ是一个常数步长。经过j_i步后，我们令 $x_i^{k+1} = z_{i}^{k,j_{i,k}}$。我们知道，$\nabla_{x_i} \bar{f}^\eta_i(z_i^{k,t}, x^k_{-i}) = \frac{1}{\eta}(z_i^{k,t} - \mathrm{prox}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x^k_{-i})}(z_i^{k,t}))$。由于 $\mathrm{prox}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x^k_{-i})}(z_i^{k,t})$ 是一个随机强凸问题的精确解，而该解无法在有限时间内获得，因此我们可以计算越来越精确的近似解 $\widehat{\mathrm{prox}}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x^k_{-i})}(z_i^{k,t})$。我们希望设定

$$
\nabla_{x_i} \bar{f}^\eta_i(z_i^{k,t}, x^k_{-i}) + \bar{w}_i^{k,t} = \tfrac{1}{\eta}(z_i^{k,t} - \widehat{\mathrm{prox}}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x^k_{-i})}(z_i^{k,t})) \tag{9}
$$

$$
\implies \bar{w}_i^{k,t} = \tfrac{1}{\eta}(\mathrm{prox}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x^k_{-i})}(z_i^{k,t}) - \widehat{\mathrm{prox}}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x^k_{-i})}(z_i^{k,t})). \tag{10}
$$

将 (9) 代入 (IMGM) 后可以看到，实际操作中我们按如下方式更新 $z_i^{k,t+1}$

$$
z_i^{k,t+1} \triangleq z_i^{k,t} - \gamma\left(\tfrac{1}{\eta}(z_i^{k,t} - \widehat{\mathrm{prox}}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x^k_{-i})}(z_i^{k,t})) + \mu(z_i^{k,t} - x_i^k)\right),\ \forall i \in [N]
$$

我们采用投影随机次梯度法（PSSM） [32, 第 2 节1] ，以获得非精确解 $\widehat{\mathrm{prox}}_{\eta \bar{f}_i(\bullet, x^k_{-i})}(z_i^{k,t})$。给定 $z_i^{k,t}$和迭代次数 $T_i^k(t)$，我们初始化 $y_i^{k,t,0} \triangleq z_i^{k,t}$，并按照以下方式从 $t' = 0, \cdots, T_i^k(t) - 1$开始执行随机次梯度步:

$$
y_{i,t'+1}^{k,t} = \Pi_{X_i}\left[y_{i,t'}^{k,t} - \tfrac{1}{(\sigma_i + \eta^{-1})(t'+1)} g_i(y_{i,t'}^{k,t}, x^k_{-i}, \xi_{i,t'}^{k,t})\right],\ \forall i \in [N], \tag{PSSM}
$$

其中，$g_i(y^k_{,i\,t'}, x^k_{-i}, \xi^k_{,i\,t'}) \in \partial_{x_i}\tilde{f}_i(y^k_{,i\,t'}, x^k_{=i}, \xi^k_{,i\,t'}) + \frac{1}{\eta}(y^k_{,i\,t'} - z^k_{,i\,t})$ 是无偏次梯度的一种选取。经过 $T_i^k(t)$ 步后，我们令 $\widehat{\text{prox}}_{\eta\bar{f}_i(\bullet,x^k_{-i})}(z^k_{,i\,t}) \triangleq y^k_{,i\,T_i^k(t)}$。下面的引理给出了 (IMGM) 的期望线性收敛速率。证明与 [16, 定理 3-(i)]类似。

命题 3.2（IMGM 的线性收敛率）。假设假设 (A1) 成立，且次梯度预言机有界。考虑由 (IMGM) 生成、步长为常数 $\gamma = 1/(\eta^{-1} + \mu)$ 的迭代序列 $\{z_i^{k,t}\}_{t\geq 0}$。假设在 (IMGM) 的 t^{th} 更新中，我们采用 $T_i^k(t) \triangleq \lfloor T_i^k(0)\beta^{-(t+1)} \rfloor$ 步 (PSSM)，其中 $\beta \in$ 属于 $(0,1)$，且 T_i^k 属于 (0)。那么，对于任意 k，有

$$\mathbb{E}[\|z_i^{k,t} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \leq \Theta\widehat{p}^t, \ \forall t \geq 0,$$

其中 $\widehat{p} \in$ 属于 $(\beta,1)$，且 $\Theta \geq 1$ 取决于随机次梯度预言机的二阶矩界。

证明。在继续之前，我们定义 $\bar{z}^k_{,i\,t+1}$ 如下：

$$\bar{z}_i^{k,t+1} \triangleq z_i^{k,t} - \gamma(\nabla_{x_i}\bar{f}_i^{\eta}(z_i^{k,t}, x^k_{-i}) + \mu(z_i^{k,t} - x_i^k)), \ \forall i \in [N].$$

由于我们选择了常数步长 $\gamma = 1/(\eta^{-1} + \mu)$，通过应用 [5, 定理 3.10], ，我们可以得到上界 $\|\bar{z}^k_{,i\,t+1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \leq q\|z^k_{,i\,t} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2$，其中 $q \triangleq 1 - \frac{1}{\kappa} \in$ 属于 $(0,1)$，且 $\kappa \triangleq \frac{1/\eta+\mu}{\eta\sigma_{i+1}()+\mu_{\sigma_i}/}$ 由于 $q \in$ 属于 $(0,1)$，存在某个 $\delta > 0$ 使得 $(1+\delta)q < 1$。因此，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\|z_i^{k,t+1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \leq (1+\tfrac{1}{\delta})\mathbb{E}[\|z_i^{k,t+1} - \bar{z}_i^{k,t+1}\|^2 \,|\, x^k] + (1+\delta)\mathbb{E}[\|\bar{z}_i^{k,t+1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \\
&\leq (1+\tfrac{1}{\delta})\mathbb{E}[\|z_i^{k,t+1} - \bar{z}_i^{k,t+1}\|^2 \,|\, x^k] + (1+\delta)q\mathbb{E}[\|z_i^{k,t} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \\
&= (1+\tfrac{1}{\delta})\tfrac{\gamma^2}{\eta^2}\mathbb{E}[\|\widehat{\text{prox}}_{\eta\bar{f}_i(\bullet,x^k_{-i})}(z_i^{k,t})) - \text{prox}_{\eta\bar{f}_i(\bullet,x^k_{-i})}(z_i^{k,t}))\|^2 \,|\, x^k] + (1+\delta)q\mathbb{E}[\|z_i^{k,t} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \\
&< (1+\tfrac{1}{\delta})\mathbb{E}[\|\widehat{\text{prox}}_{\eta\bar{f}_i(\bullet,x^k_{-i})}(z_i^{k,t})) - \text{prox}_{\eta\bar{f}_i(\bullet,x^k_{-i})}(z_i^{k,t}))\|^2 \,|\, x^k] + (1+\delta)q\mathbb{E}[\|z_i^{k,t} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k],
\end{aligned} \tag{11}$$

其中最后一个不等 式成立是因为 $\gamma = 1/(\eta^{-1} + \mu) < \eta$。由 [32, 第2.1], 节我们有 e

$$\mathbb{E}[\|\widehat{\text{prox}}_{\eta\bar{f}_i(\bullet,x^k_{-i})}(z_i^{k,t})) - \text{prox}_{\eta\bar{f}_i(\bullet,x^k_{-i})}(z_i^{k,t}))\|^2 \,|\, x^k] \leq \tfrac{Q}{T_i^k(t)},$$

其中 $Q > 0$ 取决于随机次梯度预言机的二阶矩界。由此可得

$$\mathbb{E}[\|z_i^{k,t+1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \leq (1+\delta)q\mathbb{E}[\|z_i^{k,t} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] + \tfrac{(1+1/\delta)Q}{T_i^k(t)}.$$

令 $\beta \triangleq (1+\delta)q < 1$ 且 $T_i^k(t) \triangleq \lfloor T_i^k(0)\beta^{-(t+1)} \rfloor$，其中 $T_i^k(0) > 0$。因此，我们可以推出以下结果

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|z_i^{k,t+1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] &\leq \beta\mathbb{E}[\|z_i^{k,t} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] + \tfrac{(1+1/\delta)Q\beta^{t+1}}{T_i^k(0)} \\
&\leq \beta\left(\beta\mathbb{E}[\|z_i^{k,t-1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] + \tfrac{(1+1/\delta)Q\beta^{t}}{T_i^k(0)}\right) + \tfrac{(1+1/\delta)Q\beta^{t+1}}{T_i^k(0)} \\
&= \beta^2\mathbb{E}[\|z_i^{k,t-1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] + 2\tfrac{(1+1/\delta)Q\beta^{t+1}}{T_i^k(0)} \\
&\leq \cdots \leq \beta^{t+1}\mathbb{E}[\|z_i^{k,0} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] + (t+1)\tfrac{(1+1/\delta)Q\beta^{t+1}}{T_i^k(0)}.
\end{aligned}$$

可以证明，存在某个 $\widehat{p} \in (\beta, 1)$，使得 $(t+1)\beta^{t+1} < \widehat{D}\widehat{p}^{t+1}$ 对于 $t \geq 0$ 和 $\widehat{D} > {}^{1}\log(\widehat{p}/\beta)^{e}$ 成立。因此,一我们得到

$$\mathbb{E}[\|z_i^{k,t} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \mid x^k] \leq \Theta\widehat{p}^t,$$

~其中 $\Theta = \max\{\mathbb{E}[\|z_i^{k,0} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \mid x^k] + (1+1/\delta)T_i^k\ {}^{0}{}^{QD}() 1\}$。由此完成证明。 □

以下引理对后续分析很有用。

引理 3.2. 对于任意 $A > 0$ 和 $B > 0$，有 $A^{\log(B)} = B^{\log(A)}$。

$^{\log_A(B)}$ ^{1}证明。 可以观察到 $A^{\log}(B) = A^{\log_A(e)} = (A^{\log_A(B)})^{\log_A(e)}$ $= B^{\log A}$。 □

现在我们可以证明**MS-SBR**的复杂度。

定理 3.3 （MS-SBR 的复杂度）。 考虑**MS-SBR**，其中随机 BR 问题 (6)~通过 (IMGM) 计算。假设假设 A 成立，且对于给定的 x_{-i} 和 ξ，每个次微分 $\partial_{x_i} f_i(\bullet, x_{-i}, \xi)$ 在 X_i 上有界。在与定理 3.2 和命题 3.2 相同的设置下，以下结论成立。

(i)（迭代复杂度）给定 $\epsilon > 0$，经过至多 $K(\epsilon)$ 次迭代，我们有 $e_k \leq \epsilon$，其中 $K(\epsilon)$ 定义为式 (8) 中的

$$K(\epsilon) \triangleq \left\lceil \frac{\log(\sqrt{N}(C_1+D_1)/\epsilon)}{\log(1/q_1)} \right\rceil. \tag{12}$$

(ii)（样本复杂度）假设对于某个 $T > 0$ 以及任意 i 和 k，$T_i^k(0) \leq T$ 成立。我们选择 $\nu \triangleq \|\Gamma_1\|$、$\delta_1 > 0$，使得 $\widehat{p} \triangleq \beta^{1/(1+\delta_1)} < 1$，并选择 $\delta_2 > 0$，使得 $q_1 \triangleq v^{1/(1+\delta_2)} < 1$。定义 $\delta \triangleq$ 为 $\{\delta_1, \delta_2\}$ 的最大值，并令 $\bar{v} \triangleq (1/v^2)^{(\log(1/\beta)/\text{对数}(1/\widehat{p}))} > 1$。那么，玩家 i 达到 $e_k \leq \epsilon$ 所需的总样本复杂度 $S_i(\epsilon)$ 可由以下上界给出

$$S_i(\epsilon) \leq \frac{T\bar{v}^2}{(1-\beta)(\bar{v}-1)} \left(\frac{\sqrt{N}(C_1+D_1)}{\epsilon} \right)^{2(1+\delta)^2}. \tag{13}$$

证明。(i) 根据定理 3.2，要确保 $e_k \leq \epsilon$，只需满足 $\sqrt{N}(C_1 + D_1) q_1^k \leq \epsilon$，这亚即得到式 (12)。(ii) 我们先考虑第 k 次外层迭代，并给出 (IMGM) 中 $j_{i,\,k}$ 的表达式。回顾一下，我们在定理 3.2 中设置了 $\varepsilon_i^k \triangleq \nu^{k+1}$。根据命题 3.2，由于 $\Theta \geq 1$，我们有

$$\mathbb{E}[\|x_i^{k+1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \mid x^k] = \mathbb{E}[\|z_i^{k,j_{i,k}} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \mid x^k] \leq \Theta\widehat{p}^{j_{i,k}} \leq (v^{k+1})^2,$$

这意味着 $j_{i,\,k} = \left\lceil \frac{2(k+1)\log(1/v)}{\log(1/\widehat{p})} \right\rceil$。因此，在第 k 次外层迭代中，我们可以将 $\sum_{t=0}^{j_{i,\,k}-1} T_i^k(t)$ 界定为

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{j_{i,k}-1} T_i^k(t) &\leq \sum_{t=0}^{j_{i,k}-1} T_i^k(0)\beta^{-t} \leq T \sum_{t=0}^{j_{i,k}-1} \beta^{-t} \leq \frac{\beta T}{1-\beta} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{j_{i,k}} \\
&\leq \frac{T}{1-\beta} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\log(1/v^{2(k+1)})}{\log(1/\widehat{p})}} \overset{\text{Lemma 3.2}}{=} \frac{T}{1-\beta} \left(\frac{1}{v^{2(k+1)}}\right)^{\frac{\log(1/\beta)}{\log(1/\widehat{p})}},
\end{aligned}$$

其中 $\beta \in (0,\ 1)$。因此，在 $K(\epsilon)$ 次迭代中，玩家 i 的总体样本复杂度（记为 $S_i(\epsilon)$）可界定为

$$
\begin{aligned}
S_i(\epsilon) &= \sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1} \sum_{t=0}^{j_{i,k}-1} T_i^k(t) \le \sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1} \frac{T}{1-\beta} \left(\frac{1}{v^{2(k+1)}}\right)^{\frac{\log(1/\beta)}{\log(1/\widehat{p})}} \\
&= \frac{T}{1-\beta} \sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1} \left(\frac{1}{v^{2(k+1)}}\right)^{\frac{\log(1/\beta)}{\log(1/\widehat{p})}} \le \frac{T\bar{v}}{(1-\beta)(\bar{v}-1)} (\bar{v})^{K(\epsilon)} \\
&\le \frac{T\bar{v}^2}{(1-\beta)(\bar{v}-1)} (\bar{v})^{\frac{\log(\sqrt{N}(C_1+D_1)/\epsilon)}{\log(1/q_1)}} \overset{\text{Lemma 3.2}}{=} \frac{T\bar{v}^2}{(1-\beta)(\bar{v}-1)} \left(\frac{\sqrt{N}(C_1+D_1)}{\epsilon}\right)^{\frac{\log(\bar{v})}{\log(1/q_1)}},
\end{aligned} \tag{14}
$$

对数 $(1/\beta)$ 其中 $\bar{v} > 1$ 定义为 $\bar{v} \triangleq (1/v^2)$ 对数 $(1/\widehat{p})$。由于我们定义了 $\widehat{p} \triangleq \beta^{1/(1+\delta_1)} < 1$、$q_1 \triangleq v^{1/(1+\delta_2)} < 1$ 和 $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$，因此可得

$$
\frac{\log(\bar{v})}{\log(1/q_1)} = \frac{2\log(1/\beta)}{\log(1/\widehat{p})} \frac{\log(1/v)}{\log(1/q_1)} = 2(1+\delta_1)(1+\delta_2) \le 2(1+\delta)^2. \tag{15}
$$

将 (15) 代入 (14)，即可得到所需的界 (13)。 □

3.2 强凸条件下的 MS-ABR

推导收敛保证的另一种途径是利用势性这一概念，该概念源自 Monderer 和 Shapley 的开创性工作 [28]。我们提出了一种基于势性的异步最优反应方案，并针对适当定义的残差推导出非渐近次线性收敛速率和复杂度保证；后者是一个新颖的结果。

算法 2 Moreau平滑异步最佳响应（**MS-ABR**）

初始化：初始化 $k = 0$，给定 η，K，$\{\varepsilon_i^k\}_{i,\ k}$，以及 $x^0 = (x_i^0)_{i=1}^N \in X$。令 $0 < p_i < 1$ 为选择玩家 i 的概率，使得 $\sum_{i=1}^N p_i = 1$。I

迭代直至 $il\ k \ge K$：

(i) 以概率 $p_{i(k)}$ 选取玩家 $i(k) \in [N]$。(ii) 玩家 i

(k) 更新其策略 $x_{i\ k}^{k+1}$ $()$ 如下：

$$
x_{i(k)}^{k+1} \in \{z \in X_{i(k)} : \mathbb{E}[\|z - \widehat{x}_{i(k)}^{\eta}(x^k)\|^2 \mid x^k] \le (\varepsilon_{i(k)}^k)^2 \text{ a.s.}\}, \tag{16}
$$

其中，最佳响应解 $\widehat{x}_{i\ (k)}^{\eta}(x^k)$ 定义为

$$
\widehat{x}_{i(k)}^{\eta}(x^k) \triangleq \underset{z_i \in \mathbb{R}^{n_{i(k)}}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \overline{f}_{i(k)}^{\eta}(z_i, x_{-i(k)}^k) + \frac{\mu}{2}\|z_i - x_{i(k)}^k\|^2 \right\}. \tag{17}
$$

其他玩家的策略保持不变，即对于 $i \ne i(k)$，$x_i^{k+1} = x_i^k$ 和 $\varepsilon_i^k = 0$。返回：返回 x^K 作为最终估计。

在本小节中，我们定义残差 $G_n^{\eta}(x) \triangleq (G_{n_i}^{\eta}(x))_{i=1}^N$，其中第 i 个分量定义为 $G_{n_i}^{\eta}(x) \triangleq \nabla_{x_i} \overline{f}_i^{\eta}(x_i,\ x_{-i})$。

引理 3.3. 对于任意 $k \ge 0$，$\|G_{n_i}^{\eta}(x^k)\| \le \frac{1+|1-\gamma\mu|+\gamma/\eta}{\gamma} \|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k\|$ 对任意 $\gamma > 0$ 均成立。若 $\gamma > 0$ 满足 $\gamma\mu > 1$，则 $\|G_{n_i}^{\eta}(x^k)\| \le (\mu + 1/\eta)\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k\|$。

证明。 对于任意 $k \geq 0$，以下结论对任意 $\gamma > 0$ 均成立。

$$\begin{aligned}
&\|G_{n_i}^{\eta}(x^k)\| = \tfrac{1}{\gamma}\|\gamma\nabla_{x_i}\bar{f}_i^{\eta}(x_i^k, x_{-i}^k)\| \\
&= \tfrac{1}{\gamma}\|x_i^k - (x_i^k - \gamma\nabla_{x_i}\bar{f}_i^{\eta}(x_i^k, x_{-i}^k)) + \widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\| \\
&\leq \tfrac{1}{\gamma}\|x_i^k - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\| + \underbrace{\tfrac{1}{\gamma}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - (x_i^k - \gamma\nabla_{x_i}\bar{f}_i^{\eta}(x_i^k, x_{-i}^k))\|}_{(i)}.
\end{aligned}$$

由于 $\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)$ 是无约束最佳响应问题 (17) 的解，因此

$$\begin{aligned}
\text{(i)} &= \tfrac{1}{\gamma}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - \gamma\underbrace{(\nabla_{x_i}\bar{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k), x_{-i}^k) + \mu(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k))}_{=0} - x_i^k + \gamma\nabla_{x_i}\bar{f}_i^{\eta}(x_i^k, x_{-i}^k)\| \\
&= \tfrac{1}{\gamma}\|(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k) - \gamma\mu(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k) - \gamma(\nabla_{x_i}\bar{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k), x_{-i}^k) - \nabla_{x_i}\bar{f}_i^{\eta}(x_i^k, x_{-i}^k))\| \\
&\leq \tfrac{|1-\gamma\mu|}{\gamma}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k\| + \tfrac{\gamma/\eta}{\gamma}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k\|,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由命题 2.1-(ii) 得出。于是我们有

$$\|G_{n_i}^{\eta}(x^k)\| \leq \tfrac{1+|1-\gamma\mu|+\gamma/\eta}{\gamma}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k\|.$$

如果我们选择 $\gamma > 0$ 使得 $\gamma\mu > 1$, $\|G_{n_i}^{\eta}(x^k)\| \leq (\mu + 1/\eta)\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k\|$。 □

本小节考虑以下假设。

假设 B. (B1) 每个 X_i 还具有紧性，且直径为 $d_i > 0$。我们定义$d \triangleq \max_{i\in[N]} d_i$。(B2)（势性）给定 $\eta > 0$，存在一个势函数 $P\colon X \to \mathbb{R}$，使得对于任意 $x_i, y_i \in X_i$以及任意 $x_{-i} \in X_{-i}$，对所有 $i \in [N]$，$\bar{f}_i^{\eta}(x_i, x_{-i}) - \bar{f}_i^{\eta}(y_i, x_{-i}) = P(x_i, x_{-i}) - P(y_i, x_{-i})$ 均成立。

接下来，我们考虑一类可证明满足假设 (B2) 的聚合博弈。

引理 3.4. 考虑 N玩家聚合博弈，其中每个 $f_i(x_i, x_{-i}) \triangleq g_i(x_i) + \sum_{j=1}^N h(x_j)$以及 $g_i(\bullet)$和 $h(\bullet)$均为凸。则存在势函数 $P(x) \triangleq \sum_{i=1}^N [g_i + \mathbf{1}_{X_i} + h]^{\eta}(x_i)$，使得假设 (B2) 成立。

证明。 由定义，$\bar{f}_i(x_i, x_{-i}) = g_i(x_i) + \sum_{j=1}^N h(x_j) + \mathbf{1}_{X_i}(x_i) = [g_i + \mathbf{1}_{X_i} + h](x_i) + \sum_{j\neq i} h(x_j)$。由于$(f(\bullet) + a)^{\eta}(x) = f^{\eta}(x) + a$对任意与 x无关的 $a \in \mathbb{R}$成立，$\bar{f}_i^{\eta}(x_i, x_{-i}) = [g_i + \mathbf{1}_{X_i} + h]^{\eta}(x_i) + \sum_{j\neq i} h(x_j)$。于是，我们可以利用势函数的定义完成证明。 □

3.2.1 收敛性分析

我们以势函数上的以下递推关系开始本小节。

定理 3.4 （MS-ABR 的几乎必然收敛）。考虑随机 N 玩家博弈$\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$，其中给定 x_{-i}时，每个 $f_i(\bullet, x_{-i})$ 都是 σ_i-强凸的。假设假设 B 成立且 $\eta > 0$。令 $\{x^k\}_{k\geq 0}$ 由 **MS-ABR** 生成。假设 $\mu > \frac{1}{2\eta}$ 成立。那么，对于任意$k \geq 0$，我们有

$$\mathbb{E}[P(x^{k+1}) \,|\, x^k] \leq P(x^k) - \left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right)\sum_{i=1}^N p_i\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k) - x_i^k\|^2 + \tfrac{d}{\eta}\varepsilon_{\max}^k, \tag{18}$$

其中 $\varepsilon_{\max}^k \triangleq \max_{i\in[N]} \varepsilon_i^k$ and $d > 0$ 在假设（B1）中定义。如果另外满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{\max}^k < \infty$，那么 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 的每个极限点几乎必然是纳什均衡。

证明。 根据命题 2.1，我们知道每个 $\bar{f}_i^{\eta}(\bullet,\ x_{-i})$ 都是 $\frac{1}{\eta}$-Lipschitz 光滑的。根据下降引理 [2, 引理 5.7],，我们有

$$\begin{aligned}\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k), x^k_{-i(k)}) \le \bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x^k_{i(k)}, x^k_{-i(k)}) \\ + \nabla_{x_{i(k)}}\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x^k_{i(k)}, x^k_{-i(k)})^{\top}(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}) + \tfrac{1}{2\eta}\|\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}\|^2.\end{aligned} \tag{19}$$

根据无约束最佳响应问题 (17) 的最优性条件，可得

$$0 = \nabla_{x_{i(k)}}\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k), x^k_{-i(k)}) + \mu(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}). \tag{20}$$

由强凸性可知

$$\begin{aligned}(\nabla_{x_{i(k)}}\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k), x^k_{-i(k)}) - \nabla_{x_{i(k)}}\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x^k_{i(k)}, x^k_{-i(k)}))^{\top}(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}) \\ \ge \tfrac{\sigma_{i(k)}}{\eta\sigma_{i(k)}+1}\|\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}\|^2 \ge 0.\end{aligned} \tag{21}$$

结合 (20) 和 (21)，可得

$$\nabla_{x_{i(k)}}\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x^k_{i(k)}, x^k_{-i(k)})^{\top}(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}) \le -\mu\|\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}\|^2. \tag{22}$$

将 (19) 和 (22) 相加，可得

$$\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k), x^k_{-i(k)}) \le \bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x^k_{i(k)}, x^k_{-i(k)}) - \left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right)\|\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}\|^2. \tag{23}$$

我们知道 $\widehat{x}_i^{\eta}{}_{(k)}(x^k) \in X_{i(k)}$。根据势性假设 (B2)，可推得

$$\begin{aligned}P(x^{k+1}) - P(x^k) &= P(x^{k+1}_{i(k)}, x^k_{-i(k)}) - P(x^k_{i(k)}, x^k_{-i(k)}) \\ &= \bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x^{k+1}_{i(k)}, x^k_{-i(k)}) - \bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x^k_{i(k)}, x^k_{-i(k)}) \\ &= \underbrace{\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x^{k+1}_{i(k)}, x^k_{-i(k)}) - \bar{f}^{\eta}_{i(k)}(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k), x^k_{-i(k)})}_{(i)} \\ &\quad + \underbrace{\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k), x^k_{-i(k)}) - \bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x^k_{i(k)}, x^k_{-i(k)})}_{(ii)}.\end{aligned}$$

根据中值定理，对于某个$\lambda \in (0,1)$，存在 $x'_{i(k)} = \lambda x_i^{k+1}{}_{k}{}_{()} + (1-\lambda)\widehat{x}_i^{\eta}{}_{(k)}(x^k)$，使得

$$\begin{aligned}(i) &\le \|\nabla_{x_{i(k)}}\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(x'_{i(k)}, x^k_{-i(k)})\|\|x^{k+1}_{i(k)} - \widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k)\| \\ &= \tfrac{1}{\eta}\|x'_{i(k)} - \mathrm{prox}_{\eta\bar{f}^{\eta}_{i(k)}(\bullet, x^k_{-i(k)})}(x'_{i(k)})\|\|x^{k+1}_{i(k)} - \widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k)\| \le \tfrac{d}{\eta}\|x^{k+1}_{i(k)} - \widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k)\|,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由假设（B1）得出。对于（ii），根据（23），我们有

$$(ii) \le -\left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right)\|\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}\|^2.$$

结合 (i) 和 (ii) 上的界，我们可以得到

$$P(x^{k+1}) \le P(x^k) - \left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right)\|\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}\|^2 + \tfrac{d}{\eta}\|x^{k+1}_{i(k)} - \widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k)\|.$$

通过取条件期望 $\mathbb{E}[\bullet \mid x^k]$ 并应用条件詹森不等式，可得

$$\mathbb{E}[P(x^{k+1}) \mid x^k] \le P(x^k) - \left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right) \mathbb{E}[\|\widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k) - x^k_{i(k)}\|^2 \mid x^k] + \tfrac{d}{\eta}\varepsilon^k_{i(k)}.$$

注意到 $\mathbb{P}[i(k) = i] = p_i$ 且 $\varepsilon^k_{\max} = \max_{i\in[N]} \varepsilon^k_i$，我们可以得到

$$\mathbb{E}[P(x^{k+1}) \mid x^k] \le P(x^k) - \left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right) \sum_{i=1}^{N} p_i \|\widehat{x}^{\eta}_i(x^k) - x^k_i\|^2 + \tfrac{d}{\eta}\varepsilon^k_{\max},$$

如所欲证。证明 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 几乎必然收敛到某一纳什均衡的其余部分，其进行方式与 [20, 定理 1]类似。

□

如果我们考虑随机化输出 x^{R_K}，其中 R_K 在 $\{0, 1, \cdots, K-1\}$上均匀分布，而 K 为总迭代次数，则利用引理 3.3 中定义的残差 $G^{\eta}_n(x)$，我们可以得到**MS-ABR** 的次线性收敛速率。

定理 3.5 （MS-ABR 的次线性收敛速率）**.** 考虑随机 N玩家博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$，其中对任意 $i \in [N]$, 在给定 x_{-i}时 $f_i(\bullet, x_{-i})$为 σ_i-强凸。设假设 B 成立。令 $\{x^k\}_{k\ge 0}$ 为由**MS-ABR**生成的序列。考虑与定理 3.4 相同的设定。假设对任意 $i \in [N]$有 $\mu \ge 1/\eta$、 $p_i = 1/N$，对任意 $k \in \{0, 1, \cdots, K-1\}$ 有 $\varepsilon^k_{\max} = 1/K$，且 $\gamma > 0^-$使得 $\gamma\mu > 1$。若 $d > 0$ 是依赖于 d的某个常数，则对任意 $K \ge 0$,

$$\mathbb{E}[\|G^{\eta}_n(x^{R_K})\|^2] \le \tfrac{8N\bar{d}}{\eta K}. \tag{24}$$

证明。 对（18）两边取无条件期望，可得

$$\mathbb{E}[P(x^{k+1})] \le \mathbb{E}[P(x^k)] - \left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right) \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbb{E}[\|\widehat{x}^{\eta}_i(x^k) - x^k_i\|^2] + \tfrac{d}{\eta}\varepsilon^k_{\max}.$$

代入 $\mu \ge 1/\eta$、 $p_i = 1/N$ 和 $\varepsilon^k_{\max} = 1/K$，重新整理各项，并对从 $k = 0$ 到 $K-1$ 的项求和，可得

$$\tfrac{1}{2\eta}\tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[\|\widehat{x}^{\eta}_i(x^k) - x^k_i\|^2] \le \mathbb{E}[P(x^0) - P_{\min}] + \tfrac{d}{\eta} \triangleq \bar{d}.$$

两边除以 K，选择满足 $\gamma\mu > 1$ 的 $\gamma > 0$，根据引理 3.3，可得 $\mathbb{E}[\|G^{\eta}_n(x^{R_K})\|^2] \le \frac{8N\bar{d}}{\eta K}$。

—— □

3.2.2 复杂度分析

基于上述次线性收敛速率保证，我们现在可以推导 MS-ABR 的复杂度结果。与 MS-SBR 相同，我们采用 (IMGM) 求解下层无约束 BR 问题（17）。

定理 3.6 （MS-ABR 的复杂度）。 考虑随机 N 人博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$，其中对于任意 $i \in [N]$, $f_i(\bullet, x_{-i})$ 对给定的 x_{-i} 是 σ_i-强凸的。假设假设 B 成立。令 $\{x^k\}_{k\ge 0}$ 为由 **MS-ABR** 生成的序列。在命题 3.2 和定理 3.4–3.5 的设定下，以下结论成立。

(i)（迭代复杂度）我们有，经过至多 $K(\epsilon)$ 次迭代后， $\mathbb{E}[\|G^{\eta}_n(x^{R_K})\|] \le \epsilon$，其中 $K(\epsilon)$ 定义为

$$K(\epsilon) \triangleq \left\lceil \tfrac{8N\bar{d}}{\eta\epsilon^2} \right\rceil.$$

(ii)（样本复杂度）假设对于某个 $T>0$ 以及任意 i 和 k，$T_i^k(0)\le T$ 成立。我们选择任意满足 $\widehat{p}\triangleq\beta^{1/(1+\delta)}<1$ 的$\delta>0$。那么，玩家 i 达到 $\mathbb{E}[\|G_n^\eta(x^{R_K})\|]\le\epsilon$ 所需的期望总样本复杂度 $S_i(\epsilon)$ 可由以下式子上界

$$S_i(\epsilon)\le\frac{9^{3+2\delta}TN^{2+2\delta}\bar{d}^{3+2\delta}}{(1-\beta)\eta^{(3+2\delta)}\epsilon^{(6+4\delta)}}.$$

证明。(i) 中关于 $K(\epsilon)$ 的界直接由定理 3.5 得出。现在我们推导 (ii) 中的样本复杂度界。由命题 3.2，我们有

$$\mathbb{E}[\|x_{i(k)}^{k+1}-\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k)\|^2\,|\,x^k]=\mathbb{E}[\|z_{i(k)}^{k,j_{i(k),k}}-\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k)\|^2\,|\,x^k]\le\Theta\widehat{p}^{j_{i(k),k}}\le\frac{1}{K^2},$$

这意味着 $j_{i(k),k}=\left\lfloor\frac{}{\log(K^2)\log(1/\widehat{p})}\right\rfloor$，因为 $\Theta\ge1$。因此，在第 k 次外层迭代时，我们将样本复杂度界定为

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{j_{i(k),k}-1}T_{i(k)}^k(t)&\le\sum_{t=0}^{j_{i(k),k}-1}T_{i(k)}^k(0)\beta^{-t}\le T\sum_{t=0}^{j_{i(k),k}-1}\beta^{-t}\le\frac{\beta T}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{j_{i(k),k}}\\&\le\frac{T}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\log(K^2)}{\log(1/\widehat{p})}}\overset{\text{Lemma 3.2}}{=}\frac{T}{1-\beta}\left(K^2\right)^{\frac{\log(1/\beta)}{\log(1/\widehat{p})}},\end{aligned}$$

其中 $\beta\in(0,1)$。令 $j_{i,k}=0$ 对任意 $i\ne i(k)$ 成立。因此，经过 $K(\epsilon)$ 次迭代后，玩家 i 达到 $\mathbb{E}[\|G_n^\eta(x^{R_K})\|]\le\epsilon$ 的期望样本复杂度的界为

$$\begin{aligned}S_i(\epsilon)&=\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1}\sum_{t=0}^{j_{i,k}-1}T_i^k(t)\right]=p_i\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1}\sum_{t=0}^{j_{i,k}-1}T_i^k(t)\,\middle|\,i(k)=i\right]\\&\le p_i\sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1}\frac{T}{1-\beta}\left(K^2\right)^{\frac{\log(1/\beta)}{\log(1/\widehat{p})}}=\frac{p_iT}{1-\beta}K^{3+2\delta},\end{aligned}$$

因为我们定义 $\widehat{p}\triangleq\beta^{1/(1+\delta)}$，故 $\frac{\log(1/\beta)}{\log(1/\widehat{p})}=1+\delta$。将 (i) 中定义的 $K(\epsilon)$ 与 $p_i=1/N$ 代入，我们可推导出如下最终结果。

$$S_i(\epsilon)\le\frac{p_iT}{1-\beta}\left(\frac{9N\bar{d}}{\eta\epsilon^2}\right)^{3+2\delta}=\frac{9^{3+2\delta}TN^{2+2\delta}\bar{d}^{3+2\delta}}{(1-\beta)\eta^{(3+2\delta)}\epsilon^{(6+4\delta)}}.$$

□

注 3.3。先前的异步方案 [20] 无法提供清晰的速率与复杂度保证。我们通过利用残差函数克服这一不足。此外，我们阐明了 η 的依赖关系，以帮助理解这些方案的行为；但需要提醒的是，η 无需趋于零。□

4 In随机弱凸博弈的精确 BR 方案

本节聚焦于随机弱凸博弈。在小节 4.1 中，我们推导平滑 QNE 与原始 QNE 之间的近似关系。**MS-SSBR**和**MS-SABR** 方案及其收敛性质将分别在小节 4.2 和 4.3 中介绍。

4.1 Moreau 包络下的近似QNE

引理 [16, Lemma 2] 和命题 [41, Proposition 7.3], 分别确立了无约束凸问题和弱凸问题的 Moreau 包络下极小点的不变性。然而，对于约束情形，目前尚无相关结果；其难点在于近端点可能落在约束集之外。这里我们考虑随机 N 人博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$，其中每个$f_i(\bullet, x_{-i})$ 对任意 x_{-i} 都是 ρ_i-弱凸的。考虑 Moreau 平滑博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}^\eta, X, \boldsymbol{\xi})$，对于任意 $i \in [N]$ 且给定 x_{-i}，第 i 个玩家求解

$$\min_{x_i \in X_i} f_i^\eta(x_i, x_{-i}),\ \forall i \in [N],$$

其中，$f_i^\eta(\bullet, x_{-i})$ 是 $f_i(\bullet, x_{-i})$ 的 Moreau 包络，且 $\eta < \min_{i\in[N]} \rho_i^{-1}$。我们将证明，$\mathcal{G}(\mathbf{f}^\eta, X, \boldsymbol{\xi})$ 的一个 QNE 是 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$ 的一个 $\mathcal{O}(\eta)$-近似QNE。首先，我们将 ϵ-QNE 定义如下。

定义 4.1（ϵ-QNE）。考虑 N 人玩家博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$，其中对于任意 $i \in [N]$，第 i 个玩家特定函数 $f_i(\bullet, x_{-i})$ 在给定 x_{-i} 时是弱凸的。若对于任意 $i \in [N]$，$f_i'(x_i^*, x_{-i}^*;\ x_i - x_i^*) \geq -\epsilon$ 对任意 $x_i \in X_i$ 均成立，则称 x^* 是一个 ϵ-QNE。□

回顾：集值映射 $F\colon X \rightrightarrows Y$ 被称为在 X [43, 定义9.26]上是 L-Lipschitz的，如果存在正常数 L，使得对任意 $x_1, x_2 \in X$，有 $F(x_1) \subseteq F(x_2) + L\|x_1 - x_2\|\mathbb{B}_Y$，其中 $\mathbb{B}_Y$ 是 Y中的单位球。

定理 4.1（QNE近似）。考虑 N玩家随机弱凸博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$及其Moreau平滑对应博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}^\eta, X, \boldsymbol{\xi})$，其中 $\eta < \min_{i\in[N]} \rho_i^{-1}$。假设(i)每个 X_i是凸且紧的；且(ii)对任意 $i \in [N]$，每个次微分 $\partial_{x_i} f_i(\bullet, x_{-i})$ 对任意 x_{-i}是 L_i-Lipschitz的。假设 x^*是 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ \eta, X, \boldsymbol{\xi})$的一个拟纳什均衡。若上界 $\|\nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^*, x_{-i}^*)\| \leq M^*$对任意 $i \in [N]$及某个 $M^* > 0$一致成立，则 x^*是 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ \ X, \boldsymbol{\xi})$的一个 ηLDM^*-拟纳什均衡，其中$L \triangleq \max_{i\in[N]} L_i$ 且 $D \triangleq \max_{i\in[N]} D_{X_i}$。

证明。对于任意 $i \in [N]$，根据拟纳什均衡的定义，我们知道

$$\nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^*, x_{-i}^*)^\top (x_i - x_i^*) \geq 0,\ \forall x_i \in X_i.$$

根据 ϵ-拟纳什均衡的定义，只需证明对于任意 $i \in [N]$，我们有 th at

$$\begin{aligned} & f_i'(x_i^*, x_{-i}^*; x_i - x_i^*) \geq -\eta LDM^*,\ \forall x_i \in X_i \\ \equiv & \max_{u_i \in \partial_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*)} \{\langle u_i, x_i - x_i^*\rangle\} \geq -\eta LDM^*,\ \forall x_i \in X_i. \end{aligned}$$

由命题 2.2。我们定义近端点 $\widehat{x}_i^* \triangleq \mathrm{prox}_{\eta f_i}(\bullet,\ x_{-i}^*)(x_i^*)$。由 (2) 及假设可得

$$\begin{aligned} \nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^*, x_{-i}^*) &\in \partial_{x_i} f_i(\widehat{x}_i^*, x_{-i}^*) \subseteq \partial_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) + L_i\|\widehat{x}_i^* - x_i^*\|\mathbb{B}^{n_i} \\ &= \partial_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) + \eta L_i\|\nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^*, x_{-i}^*)\|\mathbb{B}^{n_i} \\ &\subseteq \partial_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) + \eta L_i M^*\mathbb{B}^{n_i} \subseteq \partial_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) + \eta LM^*\mathbb{B}^{n_i}. \end{aligned}$$

因此，存在 $v \in \mathbb{B}^{n_i}$，使得 $\|v\| \leq 1$且 $\nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^*,\ x_{-i}^*) - \eta LM^* v \in \partial_{x_i} f_i(x_i^*,\ x_{-i}^*)$。因此，我们可以推导出对于任意 $x_i \in X_i$，都有

$$\begin{aligned} \max_{u_i \in \partial_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*)} \{\langle u_i, x_i - x_i^*\rangle\} &\geq \langle \nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^*, x_{-i}^*) - \eta LM^* v, x_i - x_i^*\rangle \\ &= \langle \nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^*, x_{-i}^*), x_i - x_i^*\rangle - \langle \eta LM^* v, x_i - x_i^*\rangle \geq -\eta LDM^*, \end{aligned}$$

由于根据柯西–施瓦茨不等式有 $\langle \eta LMv,\ x_i - x_i^*\rangle \leq \eta LDM^*$。因此，$x^*$是弱凸博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$ 的 (ηLDM^*)-拟纳什均衡。 □

注 4.1. 有人可能会问，何时 $\|\nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^*,\ x_{-i}^*)\| \le M^*$成立。考虑两种特殊情形。(i) 如果 $x^* \in \mathrm{int}(X)$，则有 $M^* = 0$，这意味着 x^*是 $\mathcal{G}$(f X，ξ) 的精确拟纳什均衡。(ii) 如果对任意 x_{-i}，每个 $f_i(\bullet,\ x_{-i})$ 还都是 L_i^0-Lipschitz 连续的，那么根据 [4, 引理 3.3] 可知$\|\nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^*,\ x_{-i}^*)\| \le L_0 \triangleq \max_{i\in[N]} L_i^0$。于是 $M^* = L_0$，且 x^*是弱凸博弈 $\mathcal{G}$(f X，ξ) 的 $\eta L D L_0$-拟纳什均衡。□

4.2 弱凸性下的MS-SSBR

接下来，我们考虑针对随机弱凸博弈的莫罗平滑替代同步最佳响应方案，其中采用Moreau包络 f_i^η $(\bullet, y_{-i})$在 y_i附近的二次替代函数，记为 $\widehat{f}_i^\eta(\bullet, y_{-i};\ y_i)$，定义为

$$\widehat{f}_i^\eta(\bullet, y_{-i}; y_i) \triangleq f_i^\eta(y_i, y_{-i}) + \nabla_{x_i} f_i^\eta(y_i, y_{-i})^\top(\bullet - y_i) + \tfrac{\mu}{2}\|\bullet - y_i\|^2, \tag{25}$$

其中 $\mu > 0$ 为某个正常数。该二次替代函数在 y_i附近满足两个匹配性质：

（i）（函数值匹配） $\widehat{f}_i^\eta(y_i, y_{-i};\ y_i) = f_i^\eta(y_i, y_{-i})$；（ii）
（梯度匹配） $\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^\eta(y_i, y_{-i};\ y_i) = \nabla_{x_i} f_i^\eta(y_i, y_{-i})$。

我们在算法3中给出**MS-SSBR** 方案。此时，第k次迭代的最佳响应解 $\widehat{x}_i^\eta$ (x^k)由替代最佳响应问题(27)定义。

算法3 莫罗平滑替代同步最佳响应（**MS-SSBR**）

初始化：初始化 $k = 0$，给定 η，K，$\{\varepsilon_i^k\}_{i,\ k}$，以及 $x^0 = (x_i^0)_{i=1}^N \in X$。

迭代，直到 $k \ge K$：通过求解子问题计算 $x^{k+1} = (x_i^{k+1})_{i=1}^N \in X$ s

$$x_i^{k+1} \in \{z \in X_i : \mathbb{E}[\|z - \widehat{x}_i^\eta(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \le (\varepsilon_i^k)^2 \text{ a.s.}\},\ \forall i \in [N], \tag{26}$$

其中，$\varepsilon_i^k > 0$ 是玩家 i 在第 k 次迭代中采用的不精确度，并且

$$\widehat{x}_i^\eta(x^k) \triangleq \operatorname*{argmin}_{z_i \in X_i} \widehat{f}_i^\eta(z_i, x_{-i}^k; x_i^k),\ \forall i \in [N]. \tag{27}$$

返回：返回 x^K 作为最终估计。

4.2.1 收敛性分析

为建立**MS-SSBR**的几乎必然收敛，我们作如下假设。为简洁起见，对给定的 $y \in X$及任意 $i \in [N]$，我们将 $\widehat{f}_i^\eta(\bullet, y)$记为 $\triangleq \widehat{f}_i^\eta(\bullet, y_{-i};\ y_i)$。

假设C. (C1) 对任意 $i \in [N]$，给定 $x_i \in X_i$，存在某个 L_i，$L_{-i} > 0$取决于式 (25) 中采用的 μ，使得对任意 y，$w \in X$，都有 $\|\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^\eta(x_i,\ y) - \nabla_{x_i}\widehat{f}_i^\eta(x_i,\ w)\| \le$ $L_i\|y_i - w_i\| + L_{-i}\|y_{-i} - w_{-i}\|$. (C2)（压缩性质）矩阵 Γ_2 的谱范数严格小于 1，即 $\|\Gamma_2\| < 1$，其中 Γ_2 定义为

$$\Gamma_2 \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\widehat{L}_1}{\mu} & \frac{\widehat{L}_{-1}}{\mu} & \cdots & \frac{\widehat{L}_{-1}}{\mu} \\ \frac{\widehat{L}_{-2}}{\mu} & \frac{\widehat{L}_2}{\mu} & \cdots & \frac{\widehat{L}_{-2}}{\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\widehat{L}_{-N}}{\mu} & \frac{\widehat{L}_{-N}}{\mu} & \cdots & \frac{\widehat{L}_N}{\mu} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

注 4.2. 有人可能会问，我们能否选取足够大的 $\mu > 0$ 来满足假设 ^(C2)。事实上，由于每个 L_i 对 μ 都存在隐式依赖，增大 μ 并不一定能保证 (C2) 成立。□

定理 4.2 （MS-SSBR 的几乎必然收敛）。 考虑随机 N 玩家弱凸博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$ 及其 Moreau 平滑博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}^{\eta}, X, \boldsymbol{\xi})$，其中 $\eta < \min_{i\in[N]} \rho_i^{-1}$。令$\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 由 **MS-SSBR** 生成。假设 C 成立，且对于任意 $i \in [N]$，有 $\varepsilon_i^k \geq 0$ with$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_i^k < \infty$。则以下结论成立。

(i) 映射 $\widehat{x}^{\eta}(\bullet) = (\widehat{x}_i^{\eta}(\bullet))_{i=1}^N$ 是压缩的，且具有唯一不动点。
(ii) 若 x^* 是 $\widehat{x}^{\eta}(\bullet)$的唯一不动点，则 x^* 是 $\mathcal{G}(\mathbf{f}^{\eta}, X, \boldsymbol{\xi})$ 在 X 上的唯一拟纳什均衡。因此， x^* 是 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$ 的 $\mathcal{O}(\eta)$-拟纳什均衡。
(iii) 序列 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 几乎必然收敛到 x^*。

证明。 (i) 的证明与定理 3.1-(i) 类似。事实上，对于任意 $i \in [N]$ 和任意$y,\ w \in X$，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (\widehat{x}_i^{\eta}(y) - \widehat{x}_i^{\eta}(w))^{\top}(\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(w), w) - \nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(y), y)) \\
&= (\widehat{x}_i^{\eta}(y) - \widehat{x}_i^{\eta}(w))^{\top}(\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(w), w) - \nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(y), w)) \\
&\quad + (\widehat{x}_i^{\eta}(y) - \widehat{x}_i^{\eta}(w))^{\top}(\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(y), w) - \nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(y), y)) \\
&\leq -\mu\|\widehat{x}_i^{\eta}(y) - \widehat{x}_i^{\eta}(w)\|^2 + \|\widehat{x}_i^{\eta}(y) - \widehat{x}_i^{\eta}(w)\|\|\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(y), w) - \nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(y), y))\|.
\end{aligned}
$$

由上述不等式和假设 (C1) 可知

$$
\begin{aligned}
&\mu\|\widehat{x}_i^{\eta}(y) - \widehat{x}_i^{\eta}(w)\| \leq \|\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(y), w) - \nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(y), y))\| \\
&\leq \widehat{L}_i\|y_i - w_i\| + \widehat{L}_{-i}\|y_{-i} - w_{-i}\| \leq \widehat{L}_i\|y_i - w_i\| + \widehat{L}_{-i}\sum_{j\neq i}\|y_j - w_j\|,
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{bmatrix} \|\widehat{x}_1^{\eta}(y) - \widehat{x}_1^{\eta}(w)\| \\ \vdots \\ \|\widehat{x}_N^{\eta}(y) - \widehat{x}_N^{\eta}(w)\| \end{bmatrix} \leq \Gamma_2 \begin{bmatrix} \|y_1 - w_1\| \\ \vdots \\ \|y_N - w_N\| \end{bmatrix}.
$$

根据假设 (C2)，我们已证明 $\widehat{x}^{\eta}(\bullet) = (\widehat{x}_i^{\eta}(\bullet))_{i=1}^N$ 是压缩的。(ii) 可直接由约束强凸光滑优化的一阶最优性条件，结合梯度匹配性质和定理 4.1 得出。(iii) 的证明与 [22,命题 1] 相同，此处略去。

□

与定理 3.2 类似，我们可以得到 MS-SSBR 的线性收敛速率。

定理 4.3 （MS-SSBR 的线性收敛速率）。 考虑 **MS-SSBR**，其中对于任意 $i \in [N]$，都有$\mathbb{E}[\|x_i^0 - x_i^*\|] \leq C_2$，对于某个 $C_2 > 0$，以及对于某个 $\nu \in$都有 $\varepsilon_i^k \triangleq \nu^{k+1}$（0，1）。假设假设 C 成立。定义 $c_2 \triangleq$ max $\{\|\Gamma_2\|, \nu\}$。考虑在（8）中定义的期望误差 e_k。则对于任意 $q_2 \in$（c_2，1）、 $\underline{D_2} \triangleq 1/\log$（（$q_2/c_2$）^{e}）以及任意 $k \geq 0$，以下结论成立。 $e_k \leq \sqrt{N}$（$C_2 + D_2$）q_2^k. □

注 4.3. 与 [7, 36] 中需要极限一致性条件不同，定理 4.3 证明了在弱凸情形下，无需施加此类极限条件即可实现线性收敛。不过，假设 (C2) 隐含地保证了该弱凸博弈在 X 上表现出某种局部类凸行为。当 $N = 1$ 时，这种行为与 [23, 定理 4.3], 中的结果相符；该结果表明，在满足二次增长条件且初始化选择恰当时，弱凸优化可实现线性收敛。□

4.2.2 复杂度分析

本小节中，我们考虑如何高效求解 Moreau 平滑替代最佳响应问题。考虑时期 k 第 i 个玩家的问题，即式 (27)。在继续之前，我们证明：在闭凸集上，最小化一个适当定义的（可能取期望值的）强凸二次函数（其强凸性常数和 Lipschitz 光滑性常数相同），可归结为对一个取期望值的向量进行投影。

引理 4.1。 考虑在闭凸集 $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ 上，对一个 α-强凸且 α-利普希茨光滑的函数$f(y) \triangleq \frac{1}{2}\alpha y^\top y + \mathbb{E}[\tilde{b}(\boldsymbol{\xi})]^\top y + c$进行最小化。则有以下结论。(i) h在 Y上的唯一极小点为 $y^* = \Pi_Y\left[-\frac{b}{\alpha}\right]$, 其中 $b \triangleq \mathbb{E}[\tilde{b}(\boldsymbol{\xi})]$。(ii) 对任意 $y_0 \in \mathbb{R}^n$，有$y^* = \Pi_Y\left[y_0 - \frac{1}{\alpha}\nabla f(y_0)\right]$。

证明。 (i) 唯一极小点 y^* 是梯度映射 [2,pp. 177]的唯一不动点。因此，我们有

$$y^* = \Pi_Y\left[y^* - \tfrac{1}{\alpha}\nabla f(y^*)\right] = \Pi_Y\left[y^* - (y^* + \tfrac{b}{\alpha})\right] = \Pi_Y\left[-\tfrac{b}{\alpha}\right].$$

(ii) 注意到 $\Pi_Y\left[y_0 - \frac{1}{\alpha}\nabla f(y_0)\right] = \Pi_Y\left[-\frac{b}{\alpha}\right] = y^*$. □

˜可以看出，获得 y^* 需要估计 $b = \mathbb{E}[b(\boldsymbol{\xi})]$ ，并从任意 $y^0 \in \mathbb{R}^n$出发执行一次投影梯度步。由于 $\widehat{f}_i^\eta$ 恰好是具有相同强凸性与Lipschitz 光滑性常数的二次函数，我们可以看到

$$\widehat{x}_i^\eta(x^k) = \Pi_{X_i}\left[z_i - \tfrac{1}{\mu}\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^\eta(z_i, x_{-i}^k; x_i^k)\right] \tag{29}$$

对任意 $z_i \in X_i$成立。简而言之，平滑代理最佳响应问题归结为对底层期望的估计问题。受上述结果启发，我们提出如下一步非精确莫罗平滑梯度法（O-IMGM）来求解该问题。

$$z_i^0 \leftarrow x_i^k,\ z_i^1 \triangleq \Pi_{X_i}\left[z_i^0 - \tfrac{1}{\mu}(\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^\eta(z_i^0, x_{-i}^k; x_i^k) + w_i^k)\right],\ x_i^{k+1} \leftarrow z_i^1. \tag{O-IMGM}$$

根据梯度匹配性质，我们可以看到

$$z_i^1 = \Pi_{X_i}\left[z_i^0 - \tfrac{1}{\mu}(\nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^k, x_{-i}^k) + \mu(z_i^0 - x_i^k) + w_i^k)\right].$$

类似于对(IMGM)的讨论， $\nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i^k, x_{-i}^k) + w_i^k = \frac{1}{\eta}(x_i^k - \widehat{\text{prox}}_{\eta f_i(\bullet, x_{-i}^k)}(x_i^k))$, 其中$\widehat{\text{prox}}_{\eta f_i(\bullet, x_{-i}^k)}(x_i^k)$是$\text{prox}_{\eta f_i(\bullet, x_{-i}^k)}(x_i^k)$的一个近似。由此可得

$$w_i^k = \tfrac{1}{\eta}(\text{prox}_{\eta f_i(\bullet, x_{-i}^k)}(x_i^k) - \widehat{\text{prox}}_{\eta f_i(\bullet, x_{-i}^k)}(x_i^k)). \tag{30}$$

因此，在实际实现中，我们将 z_i^1 更新为

$$z_i^1 = \Pi_{X_i}\left[z_i^0 - \tfrac{1}{\mu}\left(\tfrac{1}{\eta}(x_i^k - \widehat{\text{prox}}_{\eta f_i(\bullet, x_{-i}^k)}(x_i^k)) + \mu(z_i^0 - x_i^k)\right)\right],$$

其中，我们仍然采用随机次梯度法（SSM）来获得非精确解$\widehat{\text{prox}}_{\eta f_i(\bullet,\ x_{-i}^k)}(x_i^k)$。因此， w_i^k的二阶矩界很大程度上取决于（SSM）的迭代次数T_i^k。

引理 4.2（O-IMGM 的二阶矩误差界）。 假设次梯度预言机一致有界。假设我们在第 k 次外层迭代中实现（O-IMGM）时，采用随机次梯度法（SSM）并进行 T_i^k 次迭代。那么 $\mathbb{E}[\|x_i^{k+1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \le \frac{Q'}{\mu^2\eta^2 T_i^k}$，其中 $Q' > 0$ 是一个取决于次梯度预言机界的常数。

证明。 通过调用 [32, 第 2 节1],中的类似次线性收敛速率结果

$$\mathbb{E}[\|x_i^{k+1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \overset{\text{(O-IMGM)}}{=} \mathbb{E}[\|z_i^1 - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,|\, x^k] \overset{(29)}{\le} \tfrac{1}{\mu^2}\mathbb{E}[\|w_i^k\|^2]$$
$$\overset{(30)}{=} \tfrac{1}{\mu^2\eta^2}\mathbb{E}[\|\widehat{\mathrm{prox}}_{\eta f_i(\bullet, x_{-i}^k)}(x_i^k) - \mathrm{prox}_{\eta f_i(\bullet, x_{-i}^k)}(x_i^k)\|^2] \le \tfrac{Q'}{\mu^2\eta^2 T_i^k},$$

其中， $Q' > 0$ 取决于次梯度预言机的界。 □

基于上述引理，我们推导出 **MS-SSBR** 的复杂度结果。

定理 4.4（MS-SSBR 的复杂度）。 考虑通过 (O-IMGM) 求解随机 Moreau 平滑 BR 问题 (27) 的 **MS-SSBR** 。假设假设 C 成立。在与定理 4.3 和引理 4.2 相同的参数设置下，以下结论成立。

（i）（迭代复杂度）经过至多 $K(\epsilon)$ 次迭代后，我们有 $e_k \le \epsilon$，其中 e_k 在 (8) 中定义， $K(\epsilon)$ 定义如下

$$K(\epsilon) \triangleq \left\lceil \tfrac{\log(\sqrt{N}(C_2+D_2)/\epsilon)}{\log(1/q_2)} \right\rceil.$$

（ii）（样本复杂度）我们选择 $\nu \triangleq \|\Gamma_2\|$ 和 $\delta > 0$，使得 $q_2 \triangleq \nu^{1/(1+\delta)} < 1$。玩家 i 达到 $e_k \le \epsilon$ 所需的总体样本复杂度 $S_i(\epsilon)$ 可界定为

$$S_i(\epsilon) \le \tfrac{2Q'}{\mu^2\eta^2(1-\nu^2)\nu^2}\left(\tfrac{\sqrt{N}(C_2+D_2)}{\epsilon}\right)^{2(1+\delta)}.$$

证明。 (i) 的证明与定理 3.3-(i) 类似。现在证明 (ii)。我们首先考虑第 k 次外层迭代，并给出 (SSM) 中 T_i^k 的表达式。回顾一下，我们在定理 4.3 中设定了 $\varepsilon_i^k \triangleq \nu^{k+1}$。根据引理 4.2，对于玩家 i，有

$$\mathbb{E}\left[\|x_i^{k+1} - \widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|^2 \,\middle|\, x^k\right] \le \tfrac{Q'}{\mu^2\eta^2 T_i^k} \le (\nu^{k+1})^2,$$

这意味着 $T_i^k = \left\lceil \frac{Q'}{\mu^2\eta^2\nu^{2(k+1)}} \right\rceil \le \frac{2Q'}{\mu^2\eta^2\nu^{2(k+1)}}$。因此，在 $K(\epsilon)$ 次迭代期间， $S_i(\epsilon)$ 可由以下式子上界：

$$\sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1} T_i^k \le \tfrac{2Q'}{\mu^2\eta^2}\sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1}\tfrac{1}{\nu^{2(k+1)}} \le \tfrac{2Q'}{\mu^2\eta^2(1-\nu^2)\nu^2}\left(\tfrac{1}{\nu^2}\right)^{\frac{\log(\sqrt{N}(C_2+D_2)/\epsilon)}{\log(1/q_2)}}$$
$$\overset{\text{Lemma 3.2}}{=} \tfrac{2Q'}{\mu^2\eta^2(1-\nu^2)\nu^2}\left(\tfrac{\sqrt{N}(C_2+D_2)}{\epsilon}\right)^{\frac{\log(1/\nu^2)}{\log(1/q_2)}}.$$

由于我们设定了 $q_2 \triangleq \nu^{1/(1+\delta)} < 1$，因此 $\log(1/\nu^2)/\log(1/q_2) = 2(1+\delta)$。因此， $S_i(\epsilon)$ 可由以下式子上界：

$$S_i(\epsilon) \le \tfrac{2Q'}{\mu^2\eta^2(1-\nu^2)\nu^2}\left(\tfrac{\sqrt{N}(C_2+D_2)}{\epsilon}\right)^{2(1+\delta)},$$

按需。 □

算法 4 Moreau平滑代理异步最佳响应（**MS-SABR** ）

初始化：初始化 $k=0$，给定 η，K，$\{\varepsilon_i^k\}_{i,\ k}$，以及 $x^0=(x_i^0)_{i=1}^N\in X$。令 $0<p_i<1$ 为选择玩家 i 的概率，使得 $\sum_{i=1}^N p_i=1$。

迭代直至 $k\geq K$：

(i) 以概率 $p_{i(k)}$选择玩家 $i(k)\in[N]$。

(ii) 玩家 $i(k)$按如下方式更新其策略 $x_{i\ k}^{k+1}$ ()：

$$x_{i(k)}^{k+1}\in\{z\in X_{i(k)}:\mathbb{E}[\|z-\widehat{x}_{i(k)}^{\eta}(x^k)\|^2\,|\,x^k]\leq(\varepsilon_{i(k)}^k)^2\ \text{a.s.}\},\tag{31}$$

其中

$$\widehat{x}_{i(k)}^{\eta}(x^k)\triangleq\operatorname*{argmin}_{z_i\in X_{i(k)}}\widehat{f}_{i(k)}^{\eta}(z_i,x_{-i(k)}^k;x_{i(k)}^k).\tag{32}$$

其他参与者的策略保持不变，即对于 $i\neq i(k)$，$x_i^{k+1}=x_i^k$和 $\varepsilon_i^k=0$。返回：返回 x^K 作为最终估计。

4.3 弱凸性下的 MS-SABR

在本小节中，我们考虑一种异步情形，其中随机选取的玩家可以执行更新。

我们定义残差 $G_{X,\ \gamma}^{\eta}(x)\triangleq(G_{X_i,\ \gamma}^{\eta}(x))_{i=1}^N$，其中第 i 个分量定义为：对任意 $i\in[N]$ 及某个 $\gamma>0$，有 $G_{X_i,\ \gamma}^{\eta}(x)\triangleq\frac{1}{\gamma}(x_i-\Pi_{X_i}[x_i-\gamma\nabla_{x_i}f_i^{\eta}(x_i,\ x_{-i})])$。

引理 4.3. 对于任意 $k\geq 0$，我们有

$$\|G_{X_i,\gamma}^{\eta}(x^k)\|\leq\tfrac{1+|1-\gamma\mu|}{\gamma}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k\|.$$

如果 $\gamma>0$ 满足 $\gamma\mu>1$, $\|G_{X_i,\ \gamma}^{\eta}(x^k)\|\leq\mu\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k\|$。

证明。 对于任意 $k\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\|G_{X_i,\gamma}^{\eta}(x^k)\|=\tfrac{1}{\gamma}\|x_i^k-\Pi_{X_i}[x_i^k-\gamma\nabla_{x_i}f_i^{\eta}(x_i^k,x_{-i}^k)]\|\\
&=\tfrac{1}{\gamma}\|x_i^k-\Pi_{X_i}[x_i^k-\gamma\nabla_{x_i}f_i^{\eta}(x_i^k,x_{-i}^k)]+\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|\\
&\leq\tfrac{1}{\gamma}\|x_i^k-\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)\|+\underbrace{\tfrac{1}{\gamma}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-\Pi_{X_i}[x_i^k-\gamma\nabla_{x_i}f_i^{\eta}(x_i^k,x_{-i}^k)]\|}_{(i)}.
\end{aligned}\tag{33}$$

根据不动点性质和梯度匹配性质，我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)&=\Pi_{X_i}[\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-\gamma\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k),x_{-i}^k;x_i^k)]\\
&=\Pi_{X_i}\Big[\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-\gamma\Big[\nabla_{x_i}f_i^{\eta}(x_i^k,x_{-i}^k)+\mu(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k)\Big]\Big].
\end{aligned}$$

因此，根据投影的非扩张性，可得

$$(i)\leq\tfrac{1}{\gamma}\|(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k)-\gamma\mu(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k)\|=\tfrac{|1-\gamma\mu|}{\gamma}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k\|.\tag{34}$$

将 (33) 与 (34) 结合，我们得到$\|G_{X_i,\gamma}^{\eta}(x^k)\|\leq\frac{1+|1-\gamma\mu|}{\gamma}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k\|$. 若选取 $\gamma>0$使得 $\gamma\mu>1$, 则有$\|G_{X_i,\gamma}^{\eta}(x^k)\|\leq\mu\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k\|$。 □

在本小节中，我们考虑如下假设。

假设 D. (D1) 对任意 $i \in [N]$， X_i 都是紧的。(D2)（势性）给定 $\eta > 0$，存在势函数 $P\colon X \to \mathbb{R}$，使得对任意 $x_i, y_i \in X_i$ 以及任意 $x_{-i} \in X_{-i}$， $f_i^\eta(x_i, x_{-i}) - f_i^\eta(y_i, x_{-i}) = P(x_i, x_{-i}) - P(y_i, x_{-i})$ $\forall i \in [N]$成立。(D3) 存在某个常数 $M > 0$，使得对任意 $i \in [N]$和任意 $x \in X$，$\|\nabla_{x_i} f_i^\eta(x_i, x_{-i})\| \le M$一致成立。

注 4.4. 与注 4.1 相同，当给定的 x_{-i} 下，每个 $f_i(\bullet, x_{-i})$ 都是 L_i^0-利普希茨连续时，我们可以在假设 (D3) 中令 $M = \max_{i\in[N]} L_i^0$。□

4.3.1 收敛性分析

以下定理的证明与定理 3.4 的证明类似。

定理 4.5（MS-SABR 几乎必然收敛）。考虑随机 N 玩家博弈$\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X,\ \boldsymbol{\xi})$，其中，对于给定的 x_{-i}，每个 $f_i(\bullet,\ x_{-i})$ 都是 ρ_i-弱凸的。假设假设 D 成立。令 $\{x^k\}_{k\ge 0}$ 为 MS-SABR 生成的序列。我们选择 $\eta > 0$，使得对于任意$i \in [N]$，都有 $\eta\rho_i \le \frac{1}{2}$。假设 $\mu > \frac{1}{2\eta}$ 成立。那么，对于任意 $k \ge 0$，有

$$\mathbb{E}[P(x^{k+1}) \,|\, x^k] \le P(x^k) - \left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right) \sum_{i=1}^N p_i \left\| \widehat{x}_i^\eta(x^k) - x_i^k \right\|^2 + M\varepsilon_{\max}^k, \tag{35}$$

其中 $\varepsilon_{\max}^k \triangleq \max\limits_{i\in[N]} \varepsilon_i^k$。如果对于任意 $i \in [N]$，每个 $\nabla_{x_i} f^\eta(\bullet)$ 都是 C^1，且有 $\sum_{k=0}^\infty \varepsilon_{\max}^k < \infty$，那么 $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ 的每个极限点几乎必然是一个 $\mathcal{O}(\eta)$-拟纳什均衡。

证明。根据命题 2.3 以及 $\eta\rho_i \le \frac{1}{2}$对于任意 $i \in [N]$成立这一事实，我们知道每个 $f_i^\eta(\bullet,\ x_{-i})$ 都是 $\frac{1}{\eta}$-利普希茨光滑的。根据下降引理 [2,引理 5.7],，我们有

$$\begin{aligned} f_{i(k)}^\eta(\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k), x_{-i(k)}^k) &\le f_{i(k)}^\eta(x_{i(k)}^k, x_{-i(k)}^k) \\ &\quad + \nabla_{x_{i(k)}} f_{i(k)}^\eta(x_{i(k)}^k, x_{-i(k)}^k)^\top (\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k) - x_{i(k)}^k) + \tfrac{1}{2\eta}\|\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k) - x_{i(k)}^k\|^2. \end{aligned}$$

根据替代最佳响应问题 (32) 的最优性条件以及梯度匹配性质，可得

$$\begin{aligned} 0 &\le \nabla_{x_{i(k)}} \widehat{f}_{i(k)}^\eta(\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k), x_{-i(k)}^k; x_{i(k)}^k)^\top (x_{i(k)}^k - \widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k)) \\ &= \nabla_{x_{i(k)}} f_{i(k)}^\eta(x_{i(k)}^k, x_{-i(k)}^k)^\top (x_{i(k)}^k - \widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k)) - \mu\|x_{i(k)}^k - \widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k)\|^2. \end{aligned}$$

将上述两个不等式相加，可得

$$f_{i(k)}^\eta(\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k), x_{-i(k)}^k) \le f_{i(k)}^\eta(x_{i(k)}^k, x_{-i(k)}^k) - \left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right) \|\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k) - x_{i(k)}^k\|^2. \tag{36}$$

根据势性假设（D2），我们推导得出

$$\begin{aligned} &P(x^{k+1}) - P(x^k) = P(x_{i(k)}^{k+1}, x_{-i(k)}^k) - P(x_{i(k)}^k, x_{-i(k)}^k) \\ &= f_{i(k)}^\eta(x_{i(k)}^{k+1}, x_{-i(k)}^k) - f_{i(k)}^\eta(x_{i(k)}^k, x_{-i(k)}^k) \\ &= \underbrace{f_{i(k)}^\eta(x_{i(k)}^{k+1}, x_{-i(k)}^k) - f_{i(k)}^\eta(\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k), x_{-i(k)}^k)}_{(i)} \\ &\quad + \underbrace{f_{i(k)}^\eta(\widehat{x}_{i(k)}^\eta(x^k), x_{-i(k)}^k) - f_{i(k)}^\eta(x_{i(k)}^k, x_{-i(k)}^k)}_{(ii)}. \end{aligned}$$

对 (i) 应用中值定理，并利用 (36) 对 (ii) 进行界定，可知存在 $z_{i\,k}^{k+1}\ (\,)\ =\lambda x_{i\,k}^{k+1}\ (\,)+(1-\lambda)\widehat{x}_i^{\eta}$ $_{(k)}$ (x^k)，其中 $\lambda\in$ 属于 (0，1)，使得

$$\begin{aligned}P(x^{k+1})-P(x^k)\le&\|\nabla_{x_{i(k)}}f_{i(k)}^{\eta}(z_{i(k)}^{k+1},x_{-i(k)}^{k})\|\|x_{i(k)}^{k+1}-\widehat{x}_{i(k)}^{\eta}(x^k)\|\\&-\left(\mu-\tfrac{1}{2\eta}\right)\|\widehat{x}_{i(k)}^{\eta}(x^k)-x_{i(k)}^{k}\|^2.\end{aligned}$$

根据有界性假设 (D3)，我们有

$$P(x^{k+1})\le P(x^k)+M\left\|x_{i(k)}^{k+1}-\widehat{x}_{i(k)}^{\eta}(x^k)\right\|-\left(\mu-\tfrac{1}{2\eta}\right)\left\|\widehat{x}_{i(k)}^{\eta}(x^k)-x_{i(k)}^{k}\right\|^2.$$

取条件期望 $\mathbb{E}[\bullet\,|\,x^k]$ 并应用条件詹森不等式，可得

$$\mathbb{E}[P(x^{k+1})\,|\,x^k]\le P(x^k)-\left(\mu-\tfrac{1}{2\eta}\right)\mathbb{E}\left[\left\|\widehat{x}_{i(k)}^{\eta}(x^k)-x_{i(k)}^{k}\right\|^2\,\middle|\,x^k\right]+M\varepsilon_{i(k)}^{k}.$$

注意到 $\mathbb{P}[i(k)=i]=p_i$ 且 $\varepsilon_{\max}^{k}=\max\limits_{i\in[N]}\varepsilon_i^k$，我们可以推得

$$\mathbb{E}[P(x^{k+1})\,|\,x^k]\le P(x^k)-\left(\mu-\tfrac{1}{2\eta}\right)\sum_{i=1}^{N}p_i\left\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k\right\|^2+M\varepsilon_{\max}^{k},$$

which 完成了证明。若进一步有 $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_{\max}^{k}<\infty$，则可得 t o

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}p_i\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k\|^2<\infty\ \text{a.s.}$$

$_{\infty}$通过应用 [42, 定理 1]。由此可得，对于任意 $i\in[N]$，我们有 $\sum\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k\|^2<\infty$ 几乎处处$_{k=0}$，因此

$$\lim_{k\to\infty}\|\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k\|=0\ \ \text{a.s.}\tag{37}$$

根据假设 (D1)，令 $\bar{x}$ 为序列 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 的一个聚点。于是，存在一个子序列$\mathcal{K}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty,k\in\mathcal{K}}x^k=\bar{x}.\tag{38}$$

由（37）和（38）可知，对任意 $i\in[N]$，我们有

$$\lim_{k\to\infty,k\in\mathcal{K}}\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)=\bar{x}_i\ \ \text{a.s.}\tag{39}$$

我们拟证明聚点 $\bar{x}$ 是 $\mathcal{G}(\mathbf{f}^{\eta},X,\boldsymbol{\xi})$的拟纳什均衡。我们用反证法假设存在 $\bar{y}_i\in X_i$ 使得

$$0>(\bar{y}_i-\bar{x}_i)^{\top}\nabla_{x_i}f_i^{\eta}(\bar{x}_i,\bar{x}_{-i}).\tag{40}$$

由于 $\bar{y}_i\in X_i$，根据一阶最优性条件，我们可得

$$\begin{aligned}0\le&\nabla_{x_i}\widehat{f}_i^{\eta}(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k),x_{-i}^k;x_i^k)^{\top}(\bar{y}_i-\widehat{x}_i^{\eta}(x^k))\\=&[\nabla_{x_i}f_i^{\eta}(x_i^k,x_{-i}^k)+\mu(\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)-x_i^k)]^{\top}(\bar{y}_i-\widehat{x}_i^{\eta}(x^k)).\end{aligned}\tag{41}$$

由于我们假设，对于任意 $i\in[N]$，每个 $\nabla_{x_i}f^{\eta}(\bullet)$ 都是 C^1，由 (38) 和 (39)，对 (41) 取极限 $k\overset{\mathcal{K}}{\to}\infty$，可得$\nabla_{x_i}f_i^{\eta}(\bar{x}_i,\ \bar{x}_{-i})^{\top}(\bar{y}_i-\bar{x}_i)\ge 0$，这与 (40) 矛盾。因此，$\bar{x}$ 是 Moreau 平滑博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}^{\eta},\ X,\ \boldsymbol{\xi})$ 的拟纳什均衡，故根据定理 4.1，$\bar{x}$ 是一个 $\mathcal{O}(\eta)$-拟纳什均衡。 □

同样，通过考虑随机化输出，我们可以推导出次线性收敛速率 t.

定理 4.6（MS-SABR 的次线性收敛速率）。考虑随机 N 玩家博弈 $\mathcal{G}(\mathbf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$，其中每个 $f_i(\bullet, x_{-i})$ 对给定的 x_{-i} 都是 ρ_i-弱凸的。假设假设 D 成立。令$\{x^k\}_{k\geq 0}$ 为 MS-SABR 生成的序列。考虑与定理 4.5 相同的设定。假设我们选择 $\gamma > 0$，使得对于任意 $i \in [N]$，$\gamma\mu > 1, \mu \geq 1/\eta$，$p_i = 1/N$，且对于任意 $k \in \{0, 1, \cdots, K-1\}$，$\varepsilon^k_{\max} = 1/K$。那么对于任意 $k \geq 0$，有 $\mathbb{E}[\|G^{\eta}_{X,\gamma}(x^{R_K})\|^2] \leq \frac{2N\bar{M}}{\eta K}$，其中 $M > 0$ 是一个依赖于假设 (D3) 中定义的 M 的常数。

证明。对等式 (35) 两边取无条件期望，可得

$$\mathbb{E}[P(x^{k+1})] \leq \mathbb{E}[P(x^k)] - \left(\mu - \tfrac{1}{2\eta}\right) \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbb{E}\left[\left\|\widehat{x}^{\eta}_i(x^k) - x^k_i\right\|^2\right] + M\varepsilon^k_{\max}.$$

代入 $\mu \geq 1/\eta$、$p_i = 1/N$ 和 $\varepsilon^k_{\max} = 1/K$，整理各项，并从 $k = 0$ 到 $K-1$ 求和，可得

$$\tfrac{1}{2\eta}\tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\left\|\widehat{x}^{\eta}_i(x^k) - x^k_i\right\|^2\right] \leq \underbrace{\mathbb{E}[P(x^0) - P_{\min}] + M}_{\triangleq \bar{M}}.$$

然后将两边除以 K。由于我们选择 $\gamma > 0$ 使得 $\gamma\mu > 1$ 和 $\mu = 1/\eta$，根据引理 4.3，可得 $\mathbb{E}[\|G^{\eta}_{X,\gamma}(x^{R_K})\|^2] \leq \frac{2N\bar{M}}{\eta K}$，其中 R_K 在 $\{0, 1, \cdots, K-1\}$中均匀分布，证毕。

□

4.3.2 复杂度分析

基于上述次线性收敛速率保证，我们现在可以推导**MS-SABR**的复杂度结果。与**MS-SSBR**相同，我们采用 (O-IMGM) 求解低层代理 dBR 问题 (32)。

定理 4.7（MS-SABR 的复杂度）。考虑随机 N 人博弈 $\mathcal{G}$（$\mathbf{f}$ X，$\boldsymbol{\xi}$），其中，对于给定的 x_{-i}，每个 f_i（$\bullet$，x_{-i}）都是 ρ_i-弱凸的。假设假设 D 成立。令 $\{x^k\}_{k\geq 0}$ 为由 **MS-SABR** 生成的序列。在与定理 4.5 和定理 4.6 相同的设置下，我们有

（i）（迭代复杂度）经过最多 $K(\epsilon)$ 次迭代后，我们有 $\mathbb{E}[\|G^{\eta}_{X,\gamma}(x^{R_K})\|] \leq \epsilon$，其中 $K(\epsilon)$ 定义为

$$K(\epsilon) \triangleq \left\lceil \tfrac{2N\bar{M}}{\eta\epsilon^2} \right\rceil.$$

（ii）（样本复杂度）玩家 i 为实现 $\mathbb{E}[\|G^{\eta}_{X,\gamma}(x^{R_K})\|] \leq \epsilon$ 所需的期望总样本复杂度 $S_i(\epsilon)$ 可以界定为

$$S_i(\epsilon) \leq \tfrac{54Q'N^2\bar{M}^3}{\eta^5\epsilon^6},$$

其中，$Q' > 0$ 是来自引理 4.2 的某个常数。

证明。（i）中关于 $K(\epsilon)$ 的界可直接由定理 4.6 得出。现在我们推导（ii）中的样本复杂度界。由引理 4.2 可知，

$$\mathbb{E}\left[\|x^{k+1}_{i(k)} - \widehat{x}^{\eta}_{i(k)}(x^k)\|^2 \,\middle|\, x^k\right] \leq \tfrac{Q'}{\mu^2\eta^2 T^k_{i(k)}} \leq (\varepsilon^k_{i(k)})^2 \leq \tfrac{1}{K^2},$$

这意味着 $T_{i\,(k)}^k = \left\lceil \frac{Q'K^2}{\mu^2\eta^2} \right\rceil \le \frac{2Q'K^2}{\mu^2\eta^2}$。令 $T_j^k = 0$ 对任意 $j \neq i(k)$ 成立。因此，在 $K(\epsilon)$ 次迭代期间，玩家 i 达到 $\mathbb{E}[\|G_{X,\gamma}^{\eta}(x^{\overline{R_K}})\|] \le \epsilon$ 所需的期望样本数不超过

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1} T_i^k\right] = p_i \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1} T_i^k \,\middle|\, i(k)=i\right] + (1-p_i)\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1} T_i^k \,\middle|\, i(k)\neq i\right]$$
$$\le p_i \sum_{k=0}^{K(\epsilon)-1} \frac{2Q'K^2}{\mu^2\eta^2} = p_i \frac{2Q'K^3}{\mu^2\eta^2}.$$

回顾一下，我们选择了 $\mu = 1/\eta$和 $p_i = 1/N$，根据 $K(\epsilon) = \left\lceil \frac{2N\bar{M}}{\eta\epsilon^2} \right\rceil \le \frac{3N\bar{M}}{\eta\epsilon^2}$这一事实，可以得到

$$S_i(\epsilon) \le p_i \frac{2Q'K^3}{\mu^2\eta^2} \le \frac{54Q'N^2\bar{M}^3}{\eta^5\epsilon^6},$$

由此完成证明。 □

注 4.5. 通过比较 **MS-ABR** 和 **MS-SABR**，可以看出，在弱凸情形下，平滑参数 η 对总体样本复杂度有显著影响。较小的平滑参数能够带来更好的近似效果，但相应地需要更高的总体样本复杂度。□

5 数值实验

本节将在三个不同的博弈论问题上测试我们提出的方案。

5.1 随机强凸 Nash-Cournot 博弈

我们首先将**MS-SBR**应用于强凸古诺博弈，其中第 i个玩家求解

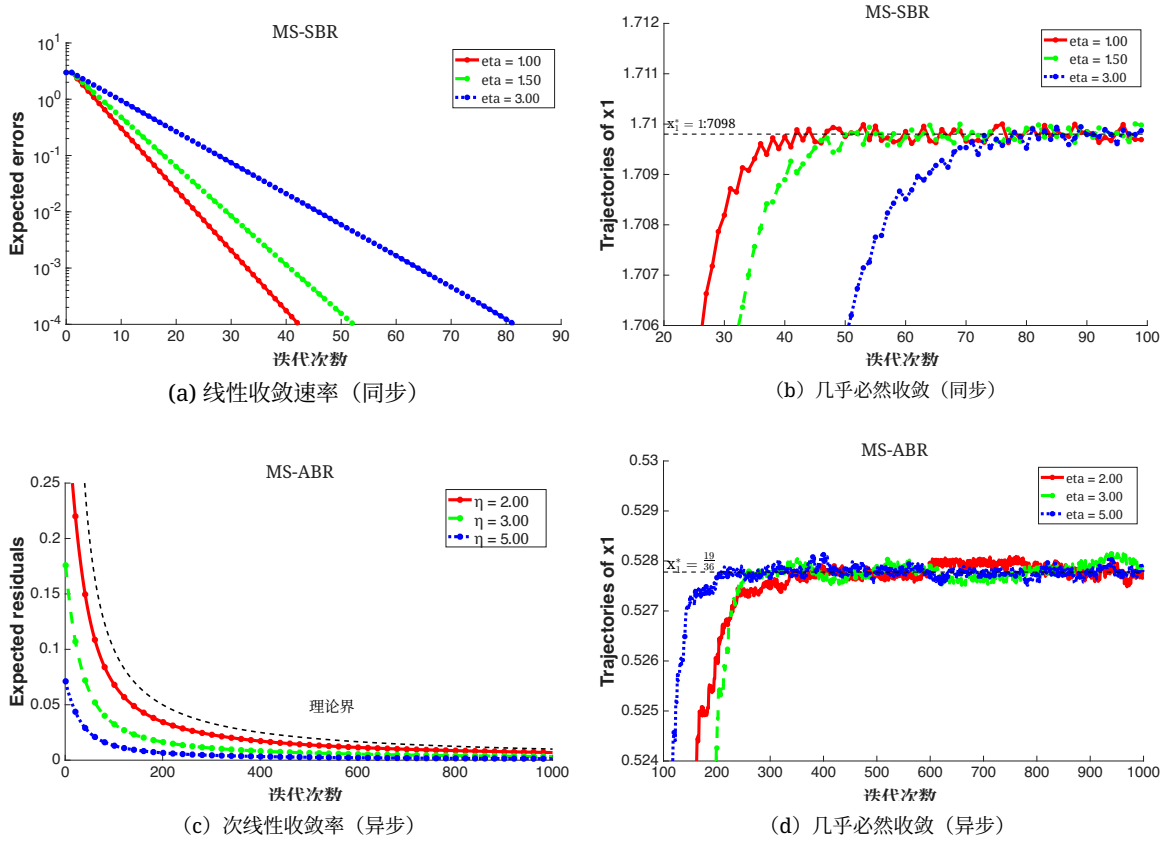
$$\min_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x_{-i}) \triangleq \mathbb{E}[\tilde{c}_i(\boldsymbol{\xi})] g_i(x_i) - \mathbb{E}[\tilde{p}(\bar{x}, \boldsymbol{\xi})] x_i, \ \forall i \in [N],$$

其中 $\mathbb{E}[\tilde{c}_i(\boldsymbol{\xi})]g_i(x_i)$是玩家 i 的私人成本函数， $\mathbb{E}[\tilde{p}(\bar{x}, \boldsymbol{\xi})]$ 是带有 $\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i$的期望价格函数。**(I)** 问题参数。我们指定 $N = 4$ ，并假设对任意 i， $X_i = [0, 20]$， $\xi \sim \mathsf{U}[0, 1]$， $\tilde{c}_i(\xi) = (2 + i/N)\xi$对任意 $i \in [N]$成立，而线性逆需求函数定义为 $\tilde{p}(\bar{x}, \xi) \triangleq a(\xi) - b(\xi)\bar{x}$ ，其中 $a(\xi) = 4\xi$ 且 $b(\xi) = 0.02\xi$。令 g_i 为强凸非光滑函数，由 $g_i(x_i) \triangleq \max\{0.5x_i^2, x_i^2 - 2\}$给出。在数值实验中，我们测试三个平滑参数 $\eta_1 = 1.0$、 $\eta_2 = 1.5$和 $\eta_3 = 3.0$，它们均满足压缩性条件**(A3)**。**(II)** 实现。我们设定 $x^0 = \mathbf{0}$。 e_k的经验线性收敛率，即**(8)**中给出的期望误差，对于 $\mu = 2.0$ 如图**1-(a)**所示，该结果是对**10**条样本路径进行平均得到的。可以观察到，较大的 η 会导致较慢的收敛，因为当 η 变大时， Γ 的范数更接近**1**。我们在图**1-(b)**中绘制了 $\{x_1^k\}_{k=0}$ 的轨迹，其中黑色虚线表示真实均衡 x_1^*。针对 μ 的不同选择，经验期望误差见表**3**。

5.2 随机强凸拥堵问题

受 [48], 启发，我们考虑一个 N人强凸拥塞博弈，其中第 i个玩家求解

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x_{-i}) \triangleq \mathbb{E}[\tilde{g}_i(x_i, \boldsymbol{\xi})] - \sum_{j=1}^N h(x_j),$$



(a) 线性收敛速率（同步）　(b) 几乎必然收敛（同步）

(c) 次线性收敛率（异步）　(d) 几乎必然收敛（异步）

图 1：随机强凸博弈中的 **MS-SBR** 和 **MS-ABR** 。

其中 $g_i(x_i) \triangleq \mathbb{E}[\tilde{g}_i(x_i, \boldsymbol{\xi})]$ 表示玩家 i的效用函数， $\sum_{j=1}^{N} h(x_j)$为总拥塞成本。由引理 3.4 可知，此类博弈满足势性假设(B2)。(I) 问题参数。 在本例中，我们考虑 $N = 6$ 个参与者。假设每个 $X_i = [0, 10]$, $\xi \sim \mathbf{U}[-1, 1]$, $\tilde{g}_i(x_i, \xi) \triangleq (1 + i/(3N) + 0.5\xi) \min\{x_i, \frac{1}{2}x_i + 3\}$，且对任意 $i \in [N]$有 $h(x_i) = x_i^2$。在数值实验中，我们考虑三个不同的Moreau平滑值 $\eta_1 = 2.\bar{0}$、 $\eta_2 = 3.0$和 $\eta_3 = 5.0$。(II) 实现。 我们将初始化设为 $x^0 = \mathbf{0}$ ，并采用(24)中定义的期望残差。对10条样本路径平均得到的次线性收敛速率以及**MS-ABR** 的几乎必然收敛分别示于图1-(c)和图1-(d)。与**MS-SBR**相比，可以观察到异步 BR 更新过程在较大的 η下收敛更快。

e_K	$\mu = 2.0$	$\mu = 4.0$	$\mu = 6.0$	$\mu = 8.0$
$\eta = 1.0$	2.49e-11	9.08e-7	3.66e-5	2.33e-4
$\eta = 1.5$	1.87e-9	9.71e-6	1.82e-4	7.63e-4
$\eta = 3.0$	1.45e-6	3.11e-4	1.71e-3	3.74e-3

表3：不同 μ经过 $K = 100$ 次迭代后的经验期望误差 .

5.3 随机弱凸纳什-古诺问题

在许多经济模型中，生产成本并非本质上单调。规模经济 [35] 可能最初通过固定成本分摊、专业化和效率提升降低平均成本或边际成本。然而，这些收益是有限的。在更大规模下，拥堵、协调摩擦和资源约束等因素可能提高平均成本或边际成本，从而导致规模不经济。

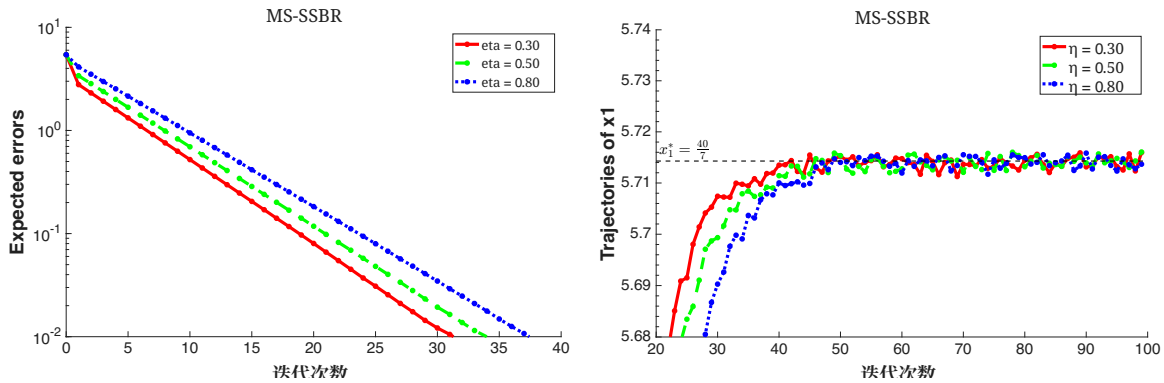
在此，我们考虑如下随机弱凸纳什-古诺问题 :

$$\min_{x_i \in X_i} \; f_i(x_i, x_{-i}) \triangleq \underbrace{\mathbb{E}[\tilde{c}_i(\boldsymbol{\xi})](a_i(x_i)x_i + g_i(x_i))}_{\triangleq c_i(x_i)} - \mathbb{E}[\tilde{p}(\bar{x}, \boldsymbol{\xi})]x_i, \; \forall i \in [N],$$

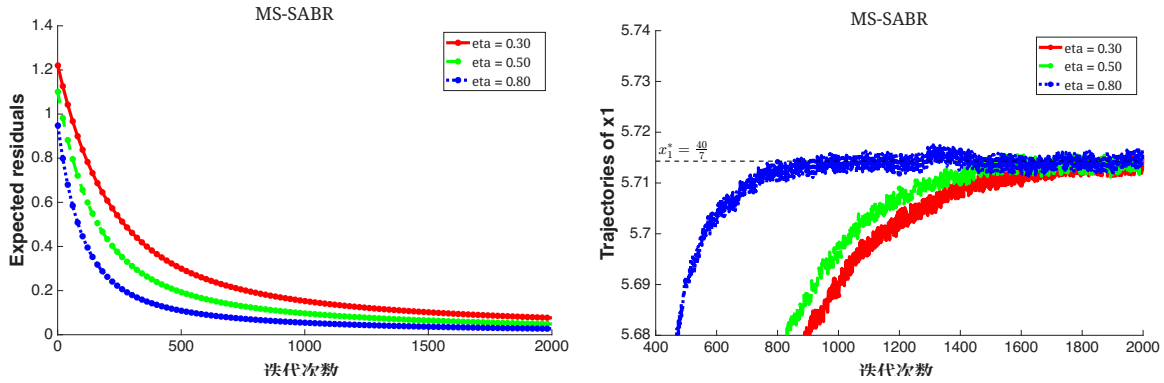
其中 a_i 表示规模平均成本，它最初因规模经济而下降，随后上升。训练成本 g_i 在达到足够熟练程度后线性下降至零。总成本由 $c_i(x_i) \triangleq \mathbb{E}[\tilde{c}_i(\boldsymbol{\xi})](a_i(x_i)x_i + g_i(x_i))$定义。期望价格为$\mathbb{E}[\tilde{p}(\bar{x}, \boldsymbol{\xi})]$，其中 $\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i$。（I）问题参数。在本例中，我们考虑 $N = 4$ 个参与者。假设每个 $X_i = [3, 12]$，$\xi \sim \mathsf{U}[-1, 1]$，$\tilde{c}_i(\xi) = 1 + 0.1\xi$ 对任意 $i \in [N]$，$\tilde{p}(\bar{x}, \xi) = a(\xi) - b(\xi)\bar{x}$，其中 $a(\xi) = 2 + \xi$ 且 $b(\xi) = 0.02 + 0.01\xi$。假设 $a_i(x_i) = \max\left\{-\frac{1}{8}x_i + 1, \frac{1}{8}x_i\right\}$ 且 $g_i(x_i) = \max\{4 - x_i, 0\}$。因此，我们可以看出 $c_i(x_i) = \max\left\{-\frac{1}{8}x_i^2 + 4, \frac{1}{8}x_i^2\right\}$，它是一个对任意 $i \in [N]$具有 $\rho_i = \frac{1}{4}$的弱凸函数。三种不同的Moreau平滑取值 $\eta_1 = 0.3$、$\eta_2 = 0.5$ $\eta_3 = 0.8$ 以及将在数值实验中进行测试，因为在异步最优响应更新中，我们要求对任意$i \in [N]$ 有 $\eta\rho_i \leq \frac{1}{2}$。在这些参数选择下，所考虑的博弈满足压缩性条件(C2)和光滑势性假设(D2)，因为所有参与者求解同一问题。（II）实现。我们对MS-SSBR和MS-SABR均将初始化设为 $x^0 = 4\mathsf{e}_4$。图2-(a)展示了MS-SSBR通过对10条样本路径进行平均得到的经验线性收敛，而图2-(b)说明了几乎必然收敛。对于MS-SABR，对10条样本路径平均后的次线性收敛速率见图2-(c)，渐近行为见图2-(d)。值得注意的是，$x^* = \frac{40}{7}\,\mathsf{e}_4$ 位于X的内部。根据注4.1，x^* 是原始随机弱凸博弈 $\mathcal{G}(\mathsf{f}\ X, \boldsymbol{\xi})$的精确拟纳什均衡。

6 结语

现有用于计算随机连续策略凸/非凸非光滑博弈中均衡的最佳响应方案存在若干缺陷。具体而言，同步方案往往要么施加严格的光滑性要求，要么必须在极限点处满足复杂条件，而异步方案则明显缺乏速率与复杂性保证，尤其是在计算拟纳什均衡方面。在本工作中，我们通过开发同步与异步的 Moreau 平滑 BR 方案来弥补这些空白，用于计算具有期望值目标函数的 (i) 强凸与 (ii) 弱凸非光滑博弈的均衡。为应对 (i)，我们证明莫罗平滑使均衡集保持不变，从而为开发线性收敛同步方案及其次线性收敛异步对应方案提供了途径。我们通过叠加代理化来应对 (ii)，由此得到一个相对廉价的最佳响应子问题，并同样开发了线性收敛同步方案及其次线性收敛异步对应方案。我们提供了初步数值结果以支持我们的理论主张。未来工作预计将处理一系列问题，包括两阶段问题和分层设置。



(a) 线性收敛速率（同步）　(b) 几乎必然收敛（同步）



(c) 次线性收敛率（异步）　(d) 几乎必然收敛（异步）

图 2：随机弱凸博弈中的 **MS-SSBR** 和**MS-SABR** 。

参考文献

[1] Sina Arefizadeh 与 Angelia Nedić。非单调变分不等式。载于*IEEE* 第*60*届年度 *Allerton*通信、控制与计算会议，第1–7页，2024年。[2] Amir Beck。优化中的一阶方法。MOS-SIAM优化系列，2017年。[3] Aharon Ben-Tal 与 Marc Teboulle。一种用于不可微优化问题的平滑技术。载于 《优化：第五届法德会议论文集》，第1–11页，2006年。[4] Axel Böhm 与 Stephen J. Wright。弱凸复合函数的变参数平滑。《优化理论与应用杂志》，188(3):628–649，2021年。[5] Sebastien Bubeck。凸优化：算法与复杂性。《机器学习基础与趋势》，8(3-4):231–357，2015年。[6] Shisheng Cui 与 Uday V. Shanbhag。关于单调与势随机分层博弈中的均衡计算。《数学规划》，198(2):1227–1285，2023年。[7] Ying Cui 与 Jong-Shi Pang。《现代非凸不可微优化》。MOS-SIAM优化系列，2021年。

[8] Cong D. Dang 和 Guanghui Lan. 关于广义单调算子变分不等式的非欧几里得外梯度方法的收敛性质。计算优化与应用，60(2):277–310，2015年。[9] Damek Davis 和 Dmitriy Drusvyatskiy. 弱凸函数的随机模型驱动最小化。*SIAM* 优化杂志，29(1):207–239，2019年。[10] Francisco Facchinei 和 Jong-Shi Pang.《纳什均衡：变分方法》。《信号处理与通信中的凸优化》，剑桥大学出版社，2009年。[11] Drew Fudenberg 和 David K. Levine.《博弈中的学习理论》。麻省理工学院出版社，1998年。[12] Mingyi Hong、Xiangfeng Wang、Meisam Razaviyayn 和 Zhi-Quan Luo. 块坐标下降方法的迭代复杂度分析。《数学规划》，163(1):85–114，2017年。[13] Kevin Huang 和 Shuzhong Zhang. 超越单调变分不等式：求解方法与迭代复杂度。太平洋优化杂志，20(3):403–428，2024年。[14] Alfredo N. Iusem、Alejandro Jofré、Roberto I Oliveira 和 Philip Thompson. 用于随机变分不等式的基于方差的线搜索外梯度方法。*SIAM* 优化杂志，29(1):175–206，2019年。[15] Alfredo N. Iusem、Alejandro Jofré、Roberto Imbuzeiro Oliveira 和 Philip Thompson. 用于随机变分不等式的方差缩减外梯度方法。*SIAM* 优化杂志，27(2):686–724，2017年。[16] Afrooz Jalilzadeh、Uday V. Shanbhag、Jose H. Blanchet 和 Peter W. Glynn. 用于非光滑随机凸规划的平滑变样本量加速近端方法。随机系统，12(4):373–410，2022年。[17] Aswin Kannan 和 Uday V. Shanbhag. 用于拟单调随机变分不等式问题及其变体的最优随机外梯度方案。计算优化与应用，74(3):779–820，2019年。[18] Jayash Koshal、Angelia Nedić 和 Uday V. Shanbhag. 用于随机变分不等式问题的正则化迭代随机逼近方法。*IEEE* 自动控制汇刊，58(3):594–609，2013年。[19] Georgios Kotsalis、Guanghui Lan 和 Tianjiao Li. 随机变分不等式的简单最优方法，I：算子外推。*SIAM* 优化杂志，32(3):2041–2073，2022年。[20] Jinlong Lei 和 Uday V. Shanbhag. 用于随机势博弈、模型设定错误的势博弈及非凸优化的异步方案。运筹学，68(6):1742–1766，2020年。[21] Jinlong Lei 和 Uday V. Shanbhag. 用于随机纳什均衡问题的分布式变样本量梯度响应与最佳响应方案。*SIAM* 优化杂志，32(2):573–603，2022年。[22] Jinlong Lei、Uday V. Shanbhag、Jong-Shi Pang 和 Suvrajeet Sen. 关于随机纳什博弈的同步、异步和随机化最佳响应方案。运筹学数学，45(1):157–190，2020年。

[23] Feng-Yi Liao、Lijun Ding 和 Yang Zheng. 弱凸函数的误差界、PL条件与二次增长，以及近端点方法的线性收敛。*arXiv:2312.16775v2*，2023年。[24] Tianyi Lin、Chi Jin 和 Michael I. Jordan. 极小极大优化的近最优算法。载于学习理论会议，第2738–2779页。PMLR，2020年。[25] Junyi Liu、Ying Cui 和 Jong-Shi Pang. 求解非光滑非凸复合随机规划及其在风险度量最小化中的应用。运筹学数学，47(4):3051–3083，2022年。[26] Julien Mairal. 增量主化-最小化优化及其在大规模机器学习中的应用。*SIAM* 优化杂志，25(2):829–855，2015年。[27] Barry R. Marks 和 Gordon P. Wright. 一种用于非凸数学规划的一般内近似算法。运筹学，26(4):681–683，1978年。[28] Dov Monderer 和 Lloyd S. Shapley. 势博弈。《博弈与经济行为》，14(1):124–143，1996年。[29] Boris S. Mordukhovich 和 Nguyen M. Nam.《凸分析及其应用简明教程》。施普林格，2023年。[30] Jean-Jacques Moreau.《希尔伯特空间中的邻近性与对偶性》。《法国数学会通报》，93:273–299，1965年。[31] 约翰·纳什. 非合作博弈。《数学年刊》，54(2):286–295，1951年。[32] Arkadi Nemirovski、Anatoli Juditsky、Guanghui Lan 和 Alexander Shapiro. 随机规划的鲁棒随机逼近方法。*SIAM* 优化杂志，19(4):1574–1609，2009年。[33] Yu Nesterov. 非光滑函数的平滑最小化。《数学规划》，103(1):127–152，2005年。[34] E. A. Nurminskii. 求解非线性规划问题的拟梯度法。《控制论》，9:145–150，1973年。[35] Arthur O'sullivan、Steven M. Sheffrin 和 Kathy Swan.《经济学：实践中的原理》。2003年。[36] Jong-Shi Pang 和 Meisam Razaviyayn. 非合作博弈的统一分布式算法。《网络大数据》，剑桥大学出版社，2016年。[37] Jong-Shi Pang 和 Gesualdo Scutari. 带侧约束的非凸博弈。*SIAM* 优化杂志，21(4):1491–1522，2011年。[38] Jong-Shi Pang 和 Gesualdo Scutari. 非凸认知无线电博弈中的联合感知与功率分配：准纳什均衡。*IEEE* 信号处理汇刊，61(9):2366–2382，2013年。[39] Meisam Razaviyayn. 逐次凸近似：分析与应用。博士论文，明尼苏达大学，2014年。

[40] Meisam Razaviyayn、Mingyi Hong 和 Zhi-Quan Luo。非光滑优化中分块逐次最小化方法的统一收敛性分析。*SIAM* 优化杂志，23(2):1126–1153，2013年。[41] Marien Renaud、Arthur Leclaire 和 Nicolas Papadakis。关于弱凸函数的 Moreau 包络性质。*arXiv:2509.13960v2*，2025年。[42] Herbert Robbins 和 David Siegmund。关于非负几乎超鞅的收敛定理及其若干应用。统计优化方法，第233–257页，1971年。[43] R. Tyrrell Rockafellar 和 Roger J-B Wets。变分分析。施普林格，1998年。[44] V.A. Steklov。关于某些由二阶微分方程定义的函数的渐近表达式及其在将任意函数展开为按各种函数排列的级数中的应用。哈尔科夫数学学会通讯，10:97–199，1907年。[45] Ying Sun、Prabhu Babu 和 Daniel P. Palomar。信号处理、通信和机器学习中的主化-最小化算法。*IEEE* 信号处理汇刊，65(3):794–816，2016年。[46] Daniil Vankov、Angelia Nedić 和 Lalitha Sankar。Popov 方法求解非单调随机变分不等式的最后迭代收敛性。载于*OPT2023*：第*15*届机器学习优化年度研讨会，第1–27页，2023年。[47] Zhuoyu Xiao 和 Uday V. Shanbhag。通过梯度响应方案计算随机非凸非单调博弈中的均衡。*arXiv:2504.14056v2*，2025年。[48] Huibing Yin、Uday V. Shanbhag 和 Prashant G. Mehta。具有缩放拥塞成本和共享约束的纳什均衡问题。*IEEE* 自动控制汇刊，56(7):1702–1708，2011年。[49] Farzad Yousefian、Angelia Nedić 和 Uday V Shanbhag。用于非 Lipschitz 随机多用户优化和纳什博弈的自调节随机逼近方案。*IEEE* 自动控制汇刊，61(7):1753–1766，2016年。[50] Farzad Yousefian、Angelia Nedić 和 Uday V. Shanbhag。关于随机变分不等式问题随机逼近方法中的平滑、正则化和平均。《数学规划》，165(1):391–431，2017年。