二维非均匀不可压缩黏弹性系统的整体解

CHENGFEI AI、YONG WANG* 和 YUNSHUN WU

摘要。本文研究仅具有速度耗散的非均匀不可压缩黏弹性系统在 $\mathbb{R}^2$ 上强解的整体存在性。由于时间权重具有临界性，针对 $\mathbb{R}^3$ 上相应问题的方法无法直接应用于二维情形。为克服主要困难，我们首先通过引入有效张量，将原系统转化为一个适当的耗散系统。随后，我们建立了一种新的分数阶时间加权能量框架，并结合精巧的交换子估计和双线性估计，在不借助黏弹性系统中常见的“散度-旋度”结构的情况下，证明了强解的整体存在性。

arXiv:2603.00953v1 [math.AP] 1 Mar 2026

1. 引言

黏弹性流体具有丰富的流变现象，并广泛应用于工业和工程领域（例如洗发水、番茄酱、钻井泥浆、天然沥青、涂料、生物流体、聚合物溶液等），近年来受到了广泛关注。作为一类特殊的非牛顿流体，黏弹性流体兼具（黏性）液体和（弹性）固体的特性，其许多物理性质不同于牛顿流体，例如在低雷诺数下会出现弹性失稳和弹性湍流（参见例如 [16, 55]）。本文致力于分析非均匀不可压缩黏弹性系统 (1.1)。该系统是通过能量变分方法推导得到的，如 [1] 所示，尽管它已在 [26] 中被直接提出。

具体而言，我们研究二维（2D）非齐次不可压缩粘弹性系统的柯西问题:

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_t + u \cdot \nabla \tilde{\rho} = 0, \\ \tilde{\rho} u_t + \tilde{\rho} u \cdot \nabla u + \nabla p = \mu \Delta u + c^2 \operatorname{div}(\tilde{\rho} \mathbb{F} \mathbb{F}^{\top}), \\ \mathbb{F}_t + u \cdot \nabla \mathbb{F} = \nabla u \mathbb{F}, \\ \operatorname{div} u = 0, \qquad\qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{1.1}$$

其初始数据为

$$(\tilde{\rho}, u, \mathbb{F})(x,t)\,|_{t=0} = (\tilde{\rho}_0(x), u_0(x), \mathbb{F}_0(x)) \to (1, 0, \mathbb{I}) \quad \text{as} \quad x \to \infty. \tag{1.2}$$

这里，$\tilde{\rho} > 0$ 表示流体密度，$u \in \mathbb{R}^2$ 表示速度场，$\mathbb{F} \in \mathbb{M}^{2\times 2}$（由行列式为正的 2×2 矩阵构成的集合）表示流体的形变梯度，p 表示压力（拉格朗日乘子），而 $\mathbb{I}$是单位矩阵。常数$\mu > 0$ 和$c > 0$ 分别表示剪切黏度和弹性波传播速度。上标 $\top$表示转置。

我们首先从不同角度回顾关于（均匀或非均匀）不可压缩与可压缩黏弹性流体的若干重要结果。当 (1.1) 中密度为常数（记为$\tilde{\rho} \equiv 1$）时，由 Lin 等人 [45] 首先提出的约化系统 (1.1) 刻画了均匀不可压缩黏弹性流体的动力学行为。设 $\mathbb{E} = \mathbb{F} - \mathbb{I}$ 为形变张量 $\mathbb{F}$ 相对于作为其平衡态的单位矩阵 $\mathbb{I}$的扰动。对于二维柯西问题，Lin 等人 [45] 分析了具有“div”结构 $\operatorname{div}\mathbb{E}^{\top} = 0$的辅助向量场，进而证明了在无需额外阻尼机制或（黏性）耗散效应的情况下小强解的整体存在性。随后，Lei 等人 [42]建立了如下“curl”结构

$$\nabla_k \mathbb{E}^{ij} - \nabla_j \mathbb{E}^{ik} = \mathbb{E}^{lj} \nabla_l \mathbb{E}^{ik} - \mathbb{E}^{lk} \nabla_l \mathbb{E}^{ij}. \tag{1.3}$$

2020数学主题分类。 35Q35；35B40；76A10。关键词和短语。 非齐次不可压缩粘弹性系统；分数阶时间加权能量；强解。

*通讯作者：Yong Wang，wangyongxmu@163.com。

结合“div”结构与“curl”结构，Lei 等人 [42] 证明了全局小解在 2 与 3 个空间维数下的存在性。此外，Chen 和张 [6] 采用另一种“curl-free”结构 $\nabla\times(\mathbb{F}^{-1}-\mathbb{I})=0$ 来研究同一问题。借助尺度不变方法，张和方 [63] 证明了不可压缩黏弹性流体在临界L^p框架中的适定性。此后，方、张和訾 [11] 考虑了色散效应，并证明了大初始速度集中于低频部分的解在临界空间 $\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}$,中的整体适定性。胡和吴 [31] 在有限能量弱解类中得到了不可压缩黏弹性系统的弱强唯一性。此外，张 [62], 、方-訾 [10] 以及蒋-蒋 [34] 考虑了一类大初值，并得到了强解的整体存在性。基于上述“div-curl”结构，带固边界区域中的初边值问题以及自由边界问题也分别在 [7, 13, 20, 46],中得到研究。更多相关研究工作请参阅 [12, 21, 22, 35, 39, 41, 43, 58] 及其所引文献。

对于与 (1.1) 对应的可压缩情形，以下三个恒等式在获得整体解方面起着至关重要的作用：

$$\tilde{\rho}\det\mathbb{F}=1; \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div}(\tilde{\rho}\mathbb{F}^{\top})=0; \tag{1.5}$$

$$\mathbb{F}^{lk}\nabla_l\mathbb{F}^{ij}-\mathbb{F}^{lj}\nabla_l\mathbb{F}^{ik}=0. \tag{1.6}$$

这里，(1.5) 和 (1.6) 也称为“散度-旋度”结构。显然，将 (1.4) 和 (1.5) 中的一个与 (1.6) 结合起来，即可推出另一个恒等式；参见 [32]。利用恒等式 (1.4)–(1.6)（有时称为内在性质），Qian 和 Zhang [50] 证明了临界 Besov 空间中柯西问题的局部大解和全局小解；另见 [19, 28]。对于初边值问题，Qian [51] 和 Hu 等人 [29] 建立了平衡态附近强解的整体适定性，其中前者采用能量方法，后者运用了极大正则性理论。此外，Chen 和 Wu [4] 证明了强解在H^2-索об列夫空间中的指数衰减率。Wang 等人 [59]证明了有界区域中具有静电效应的三维可压缩黏弹性流体全局小强解的存在性（其中静电势满足狄利克雷-诺伊曼混合边界条件）。最近，Gu 等人 [17] 研究了半空间中可压缩黏弹性方程的消失黏性极限。Hu 等人 [25] 研究了初始速度较大的可压缩黏弹性流的不可压缩极限。Huang 等人 [33] 证明了无限条带中无表面张力的黏弹性流体三维自由边界问题的整体适定性。关于可压缩情形的更多相关结果，请参见 [24, 32, 49, 56, 60, 61, 65] 及其中的参考文献。对于齐次不可压缩和可压缩情形，采用类似的处理方法，在恒等式 (1.4)–(1.6) 的基础上，文献 [9, 18, 26, 36, 52] 中给出了一些关于非齐次不可压缩粘弹性系统 (1.1) 的结果。然而，即使不使用“散度-旋度”结构恒等式 (1.5)–(1.6)，也可以证明非齐次不可压缩粘弹性系统 (1.1) 的柯西问题的整体适定性，这是一个全新且困难的问题。最近，Zhu [64, 66]通过优雅的时间加权能量框架，将最棘手的“非线性项”视作“线性项”，研究了三维全空间中不借助“散度-旋度”结构的齐次不可压缩和可压缩黏弹性系统小解的整体存在性。随后，我们通过引入一个新的有效张量，将原系统转化为适当的耗散系统，并在 [1]中将文献 [64, 66] 的结果推广到了非齐次不可压缩系统 (1.1)。

迄今为止，尚不清楚如何在不利用“散度-旋度”结构的情况下，在二维全空间中证明非齐次不可压缩粘弹性系统 (1.1) 在 Sobole夫空间框架下的整体适定性。由于时间权重具有临界性，[1] 中针对三维系统所采用的方法无法直接推广到二维情形。该领域最具启发性的工作主要包括：Lin 等人 [47]在周期区域中建立了二维齐次不可压 Oldroyd-B 模型的整体适定性，其结果对 (1.1) 的齐次不可压缩情形同样成立（参见 [64] 中的论证）。需要注意的是，由于庞加莱不等式失效， [47] 中使用的方法无法应用于二维全空间。Chen 和 Zhu [5] 通过精心设计的分数阶时间加权能量框架，证明了二维全空间中齐次不可压缩黏弹性系统在 Sobole夫空间框架下小解的整体存在性。然而，这还不足以

利用 [5, 47] 中的方法证明非齐次不可压缩粘弹性系统 (1.1) 解的整体适定性。主要困难如下: 由于系统 (1.1) 中的密度并非常数，(1.1) 中的速度方程是一个变系数抛物型方程，因此无法直接通过亥姆霍兹投影算子消去压力项 ∇p。与此同时，要捕捉密度 $\tilde{\rho}$ 和形变 $\mathbb{F}$ 的阻尼机制也十分棘手。为了克服上述困难，我们需要像本文所做的那样，构建一个更精细的分数阶时间加权能量框架。

本文的创新之处主要体现在以下几个方面。首先，如何处理（2.10）中的$\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2} \lesssim \|\nabla u\|^{1-\theta}_{\dot{H}^{s_1-s_0}}\|\nabla u\|^{\theta}_{\dot{H}^2}\|\nabla\rho\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2}$，以闭合辅助能量 $\mathcal{E}_a(t)$? 由于积分 $\int_0^\infty (1+t)^{-1}dt = \infty$无界，通常很难得到 $\|\nabla u\|^{1-\theta}_{\dot{H}^{s_1-s_0}}\|\nabla u\|^{\theta}_{\dot{H}^2}$的耗散估计。为此，依据对加权指标$s_0$ 和s_1 更精细的选取，如下所述

$$\frac{\sqrt{7}-1}{3} < s_1 < 1, \quad \max\Big\{s_1, \frac{3s_1^2-2s_1+2}{3s_1}\Big\} < s_0 < \min\{1+s_1, 2s_1\}$$

使得 $(1+2s_2-\theta^{1-\ 0} > 1_s)$，由此可推导出 $\int_0^\infty (1+t)^{-\frac{(1+s_1-s_0)}{2-\theta}}dt < \infty$, 进而得到估计 (2.11)。类似地，我们也可以得到 (2.17) 和 (2.55) 的估计。

其次，在估计基本能量 $\mathcal{E}_0(t)$ 时，主要难点在于处理系统 (2.4) 第一方程中的压力项 $\frac{1}{\rho+1}\nabla p$。我们的思路是通过 $\frac{1}{\rho+1}\nabla p := \nabla \tilde{p}$，将压力 p 变换为 $\tilde{p}$，从而克服压力项 ∇p 无法通过亥姆霍兹投影算子直接消去的问题。

最后，为了得到引理 2.4 中所述的分数阶时间加权能量 $\mathcal{E}_1(t)$ 的估计，由于密度并非常数，后续分析中出现了若干新的关键难点。特别是，难以估计 (2.54) 中的 J_5 和 (2.71) 中的 J_{10}。为了有效控制这两项 J_5 和 J_{10}，通常需要对 $\|g(\rho)\,\mathrm{div}\,G\|_{H^{s_1-s_0}}\|\nabla u\|_{H^{1+s_1-s_0}}$ 进行耗散估计，而这似乎无法通过 [5] 中的先前方法实现。幸运的是，通过定义适当的辅助能量 $\mathcal{E}_a(t)$（其中包含 $\|\rho(t')\|_{H^{s_1-s_0}}$），我们可以证明 $\|\rho(t')\|_{H^{s_1-s_0}}$ 在 (2.17) 中有界。此外，我们在引理 A.5 中推导出一个新的双线性估计，它是 [5] 中命题 2.4 的推广。利用辅助能量 $\mathcal{E}_a(t)$ 和引理 A.5，我们最终得到了 J_5 和 J_{10}, 的估计，即 (2.66) 和 (2.85)。

记号。本文中，我们用$a \lesssim b$ 表示$a \le Cb$，用$a \gtrsim b$ 表示$a \ge Cb$，其中$C > 0$为一般常数。关系$a \sim b$ 表示$a \lesssim b$ 且$a \gtrsim b$。除非特别强调，我们用C 表示一个普适正数常数。令 $\nabla^k = \partial_x^k$ 为通常的$k \ge 0$ 阶空间导数，其中k为整数。此外，当$s < 0$ 或s 不是正整数时，∇^s 表示 Λ^s，即

$$\nabla^s f = \Lambda^s f := \mathscr{F}^{-1}(|\xi|^s \mathscr{F} f),$$

其中 $\mathscr{F}$ 为通常的傅里叶变换算子，$\mathscr{F}^{-1}$ 为其逆算子（例如参见 [2]）。我们用 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$（$s \in \mathbb{R}$）表示 $\mathbb{R}^n$ 上的齐次索об列夫空间，其范数$\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$定义为 $\|f\|_{\dot{H}^s} := \|\Lambda^s f\|_{L^2}$。而$H^s(\mathbb{R}^n)$和$L^p(\mathbb{R}^n)$分别表示通常的索об列夫空间和勒贝格空间，其范数分别为 $\|\cdot\|_{H^s}$ 和 $\|\cdot\|_{L^p}$。为简便起见，对于标量值函数或向量值函数，我们不区分函数空间。

现在我们可以给出主要结果。

定理 1.1. 假设初始数据$(\tilde{\rho}_0, u_0, \mathbb{F}_0)$ 满足 $\mathrm{div}\, u_0 = 0$，且存在充分小的常数 $\varepsilon > 0$使得，

$$\|u_0\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} + \|\tilde{\rho}_0 - 1\|_{H^2\cap\dot{H}^{s_1-s_0}} + \|\mathbb{F}_0 - \mathbb{I}\|_{H^2} + \|G_0\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} \le \varepsilon, \tag{1.7}$$

其中 s_0,s_1 是满足以下界的任意给定常数

$$\frac{3s_1^2-2s_1+2}{3s_1} < s_0 < 2s_1, \quad \frac{\sqrt{7}-1}{3} \approx 0.5486 < s_1 < 1. \tag{1.8}$$

那么，柯西问题(1.1)–(1.2) 存在唯一的整体解$(\tilde{\rho}, u, \mathbb{F})(t)$，使得

$$\sup_{0\le t\le\infty}\big[\|u(t)\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} + \|(\tilde{\rho}-1)(t)\|^2_{H^2\cap\dot{H}^{s_1-s_0}} + \|(\mathbb{F}-\mathbb{I})(t)\|^2_{H^2} + \|G(t)\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\big]$$

$$+\int_0^{\infty}(1+t)^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u(t)\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\,dt\le\varepsilon,$$

其中 $G:=\tilde{\rho}\mathbb{F}\mathbb{F}^{\top}-\mathbb{I}$。

我们在下文给出若干注记。

注 1.1. 根据第 *2* 节中各种能量的定义，定理 *1.1* 中关于初始数据 $\|(u_0,G_0)\|_{\cdot H^{-s_1}}+\|\tilde{\rho}_0-1\|_{\cdot H^{s_1-s_0}}<\varepsilon$ 的小性假设不能去掉。此外，正如 *[5]* 中所述，若初始数据$(\tilde{\rho}_0,u_0,\mathbb{F}_0)$ 仅属于非负指标索伯列夫空间 $H^2(\mathbb{R}^2)$，则在没有*"div-curl"*结构帮助的情况下，非齐次不可压缩粘弹性系统 (1.1) 整体经典解的存在性仍然未知。

注 1.2. 实际上，s_0 与 s_1 的精确选取有效于封闭辅助能量$\mathcal{E}_a(t)$。并且 s_0 与 s_1 的取值范围也是非空的（例如，$s_1=0.549,s_0=1.08$）。特别地，时间加权指标 $1+2s_1-s_0$ 由 *(2.55)* 的估计确定。

注 1.3. 这里我们对(1.8)中 s_0,s_1 的上界和下界作一些说明。首先，鉴于时间加权能量设置(2.6)–(2.7)，我们始终假设 $s_1<s_0<1+s_1$。在 *(2.11)* 中，在 $s_0>s_1$，下，我们进一步要求 $s_0>\frac{3s_1^2-2s_1+2}{1+2s_1}$，使得 $\frac{1+2s_1-\theta}{1+2s_1-s_0}>1$ 且 $\theta=s_0-s_1$。~~并且由于(2.55)，我们需要 $s_1<1$和 $s_0<2s_1$。因此，~~我们假设

$$\frac{3s_1^2-2s_1+2}{3s_1}<s_0<2s_1,$$

这与(2.17) 和(2.55)一起蕴含

$$\frac{\sqrt{7}-1}{3}<s_1<1.$$

本文其余部分组织如下。在第 2 节中，我们首先将系统 (1.1) 转化为一个合适的耗散系统，然后仔细估计各种能量，包括时间加权部分。在第 3 节中，借助前述结果，我们通过连续性论证证明定理 1.1。在附录 A 中，我们给出一些在前述各节中经常使用的有用结果。

2. 能量框架

在本节中，我们首先对系统 (1.1) 进行适当的变换。然后给出在后续各节中起重要作用的各种能量和有用结果。

2.1. **重新表述**。

由于正系数 $\mu>0,c>0$ 在 (1.1) 中的具体取值在本文中并不重要，因此在本文其余部分我们取 $\mu=c=1$，并定义 $\rho:=\tilde{\rho}-1$。接下来，为了有效分析 (1.1)，我们给出有效张量G 的定义如下

$$G:=\tilde{\rho}\mathbb{F}\mathbb{F}^{\top}-\mathbb{I}. \tag{2.1}$$

并且我们有

$$(\tilde{\rho}\mathbb{F}\mathbb{F}^{\top})_t+(u\cdot\nabla\tilde{\rho})\mathbb{F}\mathbb{F}^{\top}+\tilde{\rho}(u\cdot\nabla\mathbb{F})\mathbb{F}^{\top}+\tilde{\rho}\mathbb{F}(u\cdot\nabla\mathbb{F}^{\top})=\tilde{\rho}(\nabla u\mathbb{F})\mathbb{F}^{\top}+\tilde{\rho}\mathbb{F}\mathbb{F}^{\top}(\nabla u)^{\top}. \tag{2.2}$$

由 (2.1) 和 (2.2)，我们可以推导出有效张量G的演化

$$G_t+u\cdot\nabla G+Q(\nabla u,G)=2D(u), \tag{2.3}$$

其中 $Q(\nabla u,G)=-\nabla uG-G(\nabla u)^{\top}$ 且 $D(u)=\frac{1}{2}(\nabla u+(\nabla u)^{\top})$。

结合 (1.1) 和 (2.3)，建立如下新系统

$$\begin{cases}u_t-\Delta u+u\cdot\nabla u+(1-\frac{1}{\rho+1})\Delta u+\frac{1}{\rho+1}\nabla p+(1-\frac{1}{\rho+1})\operatorname{div}G=\operatorname{div}G,\\ G_t+u\cdot\nabla G+Q(\nabla u,G)=2D(u),\\ \operatorname{div}u=0,\qquad\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+.\end{cases} \tag{2.4}$$

2.2. **若干精细能量**。

基于上述分析，对于任意$t > 0$，我们可以给出新系统 (2.4) 的以下各种精细能量。首先定义如下基本能量:

$$\mathcal{E}_0(t) := \sup_{0\le t'\le t} (\|u(t')\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} + \|G(t')\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}) + \int_0^t \left(\|\nabla u(t')\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} + \|\mathbb{P}\operatorname{div} G(t')\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\right) dt', \quad (2.5)$$

其中 $\mathbb{P} = \mathbb{I} + \nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}$ 是亥姆霍兹投影算子（参见 [57]）。接下来，
分数阶时间加权能量定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(t) := &\sup_{0\le t'\le t} (1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|u(t')\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2} + \|\mathbb{P}\operatorname{div} G(t')\|^2_{\dot{H}^{s_1-s_0}\cap\dot{H}^1})\\ &+ \int_0^t (1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|\nabla u(t')\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2} + \|\mathbb{P}\operatorname{div} G(t')\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1})\, dt', \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中 s_0,s_1 是任意给定的正数，且满足 $s_1 < s_0 < s_1 + 1$。
Mor此外，为了得到 $(\rho, \mathbb{F} - \mathbb{I})$ 的一致界，我们还需要以下辅助能量

$$\mathcal{E}_a(t) := \sup_{0\le t'\le t} \left(\|\rho(t')\|^2_{H^2\cap\dot{H}^{s_1-s_0}} + \|(\mathbb{F}-\mathbb{I})(t')\|^2_{H^2}\right). \quad (2.7)$$

最后，总能量 $\mathcal{E}_{total}(t)$ 定义如下

$$\mathcal{E}_{total}(t) := \mathcal{E}_0(t) + \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_a(t). \quad (2.8)$$

接下来，我们还回顾以下一个有用的结果。

引理 2.1. 设 $[\mathbb{F}_{ij}]_{2\times 2}, u$ 分别为某个光滑张量和二维向量。则有

$$\mathbb{P}\operatorname{div}(u\cdot\nabla\mathbb{F}) = \mathbb{P}(u\cdot\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}\mathbb{F}) + \mathbb{P}(\nabla u\cdot\nabla\mathbb{F}) - \mathbb{P}(\nabla u\cdot\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{F}),$$

其中， $\nabla u\cdot\nabla\mathbb{F}$ 和 $\nabla u\cdot\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{F}$ 的第 i 个分量表示为

$$\begin{aligned}[\nabla u\cdot\nabla\mathbb{F}]_i &= \sum_{j=0}^{2}\partial_j u\cdot\nabla\mathbb{F}_{ij};\\ [\nabla u\cdot\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{F}]_i &= \partial_i u\cdot\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{F}.\end{aligned}$$

证明. 参见 [64]中的命题 3.1。 □

2.3. **辅助能量 $\mathcal{E}_a(t)$的估计**。

引理 2.2. 设 $\mathcal{E}_a(t)$ 按式 *(2.7)* 定义。则有以下估计

$$\mathcal{E}_a(t) \lesssim \mathcal{E}_a(0) + \mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}_{total}(t) + \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}_a(t)\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}_{total}(t) \quad (2.9)$$

对任意 $t > 0$。

证明。 将 (1.1) 中的第一方程与 ρ 取 L^2- 内积，并利用引理 A.1、H¨older 不等式和 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho\|^2_{L^2} &\le \|u\cdot\nabla\rho\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2}\\ &\lesssim \|u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2}\\ &\lesssim \|\nabla u\|^{1-\theta}_{\dot{H}^{s_1-s_0}}\|\nabla u\|^{\theta}_{\dot{H}^2}\|\nabla\rho\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2},\end{aligned} \quad (2.10)$$

其中 $\theta = \frac{0-1}{s_1-s_0}$。对 (2.10) 关于$t'$ 在 $(0, t)$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}\|\rho(t)\|^2_{L^2} &\lesssim \|\rho_0\|^2_{L^2} + \mathcal{E}_a(t)\int_0^t \|\nabla u\|^{1-\theta}_{\dot{H}^{s_1-s_0}}\|\nabla u\|^{\theta}_{\dot{H}^2}\, dt'\\ &\lesssim \mathcal{E}_a(0) + \mathcal{E}_a(t)\Big(\int_0^t (1+t')^{-\frac{1+2s_1-s_0}{2}(1-\theta)}(1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}(1-\theta)}\|\nabla u\|^{1-\theta}_{\dot{H}^{s_1-s_0}}\\ &\quad (1+t')^{-\frac{1+2s_1-s_0}{2}\theta}(1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}\theta}\|\nabla u\|^{\theta}_{\dot{H}^2}\, dt'\Big)\end{aligned}$$

$$\lesssim \mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\sup_{0\le t'\le t}\Big((1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}}\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\Big)^{1-\theta}$$
$$\times\Big(\int_0^t(1+t')^{-\frac{1+2s_1-s_0}{2}}(1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}\theta}\|\nabla u\|_{\dot H^2}^{\theta}\,dt'\Big)$$
$$\lesssim \mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_1^{\frac{(1-\theta)}{2}}(t)\Big(\int_0^t(1+t')^{-\frac{1+2s_1-s_0}{2-\theta}}\,dt'\Big)^{\frac{2-\theta}{2}}\Big(\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^2}^2\,dt'\Big)^{\frac{\theta}{2}}$$
$$\lesssim \mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)\lesssim \mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_{total}^{\frac12}(t), \tag{2.11}$$

其中 s_0,s_1 需满足 $\frac25<s_1<1$，$\max\{s_1,\frac{3}{s_1^2-2s_1+2}\}<s_0<1+s_1$。

对(1.1)的第一方程应用 ∇^2，将所得方程与 $\nabla^2\rho$作L^2–内积，并结合$\mathrm{div}u=0$，类似于(2.10)和(2.11)的估计，我们有

$$\|\nabla^2\rho(t)\|_{L^2}^2\lesssim\|\nabla^2\rho_0\|_{L^2}^2+\int_0^t(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2\rho\|_{L^2}^2+\|\nabla^2u\|_{L^6}\|\nabla\rho\|_{L^3}\|\nabla^2\rho\|_{L^2})\,dt'$$
$$\lesssim\|\nabla^2\rho_0\|_{L^2}^2+\int_0^t(\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|\nabla^2\rho\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|\rho\|_{\dot H^2}^2)\,dt'$$
$$\lesssim\|\nabla^2\rho_0\|_{L^2}^2+\mathcal{E}_a(t)\Big(\int_0^t(1+t')^{-\frac{1+2s_1-s_0}{2}}(1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\,dt'\Big)$$
$$\lesssim\mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)\lesssim\mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_{total}^{\frac12}(t). \tag{2.12}$$

接下来，将(1.1)中第三个方程与 $\mathbb{F}-\mathbb{I}$作L^2–内积，并将所得方程关于t' 在(0,t)上积分，我们有

$$\|(\mathbb{F}-\mathbb{I})(t)\|_{L^2}^2\lesssim\|\mathbb{F}_0-\mathbb{I}\|_{L^2}^2+\int_0^t(\|u\cdot\nabla(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^2}+\|\nabla u(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^2})\|\mathbb{F}-\mathbb{I}\|_{L^2}\,dt'$$
$$\lesssim\|\mathbb{F}_0-\mathbb{I}\|_{L^2}^2+\int_0^t[(\|u\|_{L^\infty}\|\nabla(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\mathbb{F}-\mathbb{I}\|_{L^2})\|\mathbb{F}-\mathbb{I}\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^2}\|\mathbb{F}-\mathbb{I}\|_{L^2}]\,dt'$$
$$\lesssim\mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\int_0^t(\|u\|_{L^\infty}+\|\nabla u\|_{L^\infty})\,dt'+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\int_0^t\|\nabla u\|_{L^2}\,dt'$$
$$\lesssim\mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\int_0^t(\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^2}+\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2})\,dt'+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\int_0^t\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^2}\,dt'$$
$$\lesssim\mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)\lesssim\mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_{total}^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_{total}^{\frac12}(t). \tag{2.13}$$

对(1.1)的第三个方程应用 ∇^2，将所得方程与 $\nabla^2(\mathbb{F}-\mathbb{I})$作$L^2$–内积，并将$t'$ 在(0,t)上积分，我们有

$$\|\nabla^2(\mathbb{F}-\mathbb{I})(t)\|_{L^2}^2\lesssim\|\nabla^2(\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{L^2}^2+\int_0^t(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^2}^2+\|\nabla^2u\|_{L^6}\|\nabla(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^3}\|\nabla^2(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^2}$$
$$+\|\nabla^3u\|_{L^2}\|\mathbb{F}-\mathbb{I}\|_{L^\infty}\|\nabla^2(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^2}+\|\nabla^3u\|_{L^2}\|\nabla^2(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^2})\,dt'$$
$$\lesssim\mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)$$
$$\lesssim\mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_{total}^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_{total}^{\frac12}(t). \tag{2.14}$$

Next，我们考虑 $0<\alpha<2$的情形。应用引理 A.1和杨氏不等式，我们有

$$\||\nabla|^\alpha(\rho,(\mathbb{F}-\mathbb{I}))(t)\|_{L^2}^2\lesssim[\|(\rho,(\mathbb{F}-\mathbb{I}))(t)\|_{L^2}^{\frac{2-\alpha}{2}}\|\nabla^2(\rho,(\mathbb{F}-\mathbb{I}))(t)\|_{L^2}^{\frac{\alpha}{2}}]^2$$
$$\lesssim\|(\rho,(\mathbb{F}-\mathbb{I}))(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla^2(\rho,(\mathbb{F}-\mathbb{I}))(t)\|_{L^2}^2$$
$$\lesssim\mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_{total}^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_{total}^{\frac12}(t). \tag{2.15}$$

最后，我们来建立关于 $\|\rho(t')\|_{\dot H^{s_1-s_0}}$ 的以下估计：

$$\frac12\frac{d}{dt}\|\rho\|_{\dot H^{s_1-s_0}}^2=-\langle u\cdot\nabla\rho,\rho\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \|u\cdot\nabla\rho\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\|\rho\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\\
&= \|\operatorname{div}(\rho u)\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\|\rho\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\\
&\lesssim (\||\nabla|^{1+s_1-s_0}\rho\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}+\|\rho\|_{L^2}\||\nabla|^{1+s_1-s_0}u\|_{L^\infty})\|\rho\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\\
&\lesssim (\||\nabla|^{1+s_1-s_0}\rho\|_{L^2}\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}^{1-\theta_1}\|\nabla u\|_{\dot H^2}^{\theta_1}+\|\rho\|_{L^2}\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}^{1-\theta_2}\|\nabla u\|_{\dot H^2}^{\theta_2})\|\rho\|_{\dot H^{s_1-s_0}},
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

其中 $\theta_1 = \frac{0-1}{s_2+s_0-s_1}$, $\theta_2 = \frac{1}{2+s_0-s_1}$。

将 (2.16) 从 0 到t积分，得到

$$
\begin{aligned}
\|\rho(t)\|_{\dot H^{s_1-s_0}}^2 &\lesssim \|\rho_0\|_{\dot H^{s_1-s_0}}^2+\mathcal{E}_a(t)\int_0^t(\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}^{1-\theta_1}\|\nabla u\|_{\dot H^2}^{\theta_1}+\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}^{1-\theta_2}\|\nabla u\|_{\dot H^2}^{\theta_2})\,dt'\\
&\lesssim \mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a(t)\sup_{0\le t'\le t}\Big((1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}}\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\Big)^{1-\theta_2}\\
&\quad\times\Big(\int_0^t(1+t')^{-\frac{1+2s_1-s_0}{2}}(1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}\theta_2}\|\nabla u\|_{\dot H^2}^{\theta_2}\,dt'\Big)\\
&\lesssim \mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_1^{\frac{1-\theta_2}{2}}(t)\Big(\int_0^t(1+t')^{-\frac{1+2s_1-s_0}{2-\theta_2}}\,dt'\Big)^{\frac{2-\theta_2}{2}}\\
&\quad\times\Big(\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^2}^2\,dt'\Big)^{\frac{\theta_2}{2}}\\
&\lesssim \mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)\lesssim \mathcal{E}_a(0)+\mathcal{E}_a(t)\mathcal{E}_{total}^{\frac12}(t),
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

其中，s_0, s_1 需满足 $\frac{2}{5}<s_1<1$，$\max\{s_1, \frac{3}{s_1^2-2s_3}, \frac{1+2}{s_1}\}<s_0<1+s_1$。结合 (2.11)-(2.15) 和 (2.17) 的结果，我们立即得到 (2.9)。引理 2.2 证毕。

□

2.4. **基本能量 $\mathcal{E}_0(t)$的估计**。

在本小节中，为了估计基本能量 $\mathcal{E}_0(t)$，主要难点在于处理系统 (2.4) 第一方程中的压力项 $\frac{1}{\rho+1}\nabla p$。为此，我们首先将压力 p变换为 $\tilde p$：

$$
\nabla\tilde p := \frac{1}{\rho+1}\nabla p. \tag{2.18}
$$

注 2.1. (2.18) 中的定义是有效的。事实上，可以由 [15] 得到，(u,p) 是下述斯托克斯问题的解

$$
\begin{cases}
-\Delta u+\nabla p=-(\rho+1)u_t-(\rho+1)u\cdot\nabla u+\operatorname{div}G, & x\in\mathbb{R}^2,\\
\operatorname{div}u=0, & x\in\mathbb{R}^2.
\end{cases}
\tag{2.19}
$$

对 (2.18) 应用 $-\operatorname{div}$，得到

$$
-\Delta\tilde p=-\operatorname{div}\Big(\frac{1}{\rho+1}\nabla p\Big). \tag{2.20}
$$

通过求解上述关于 $\tilde p$ 的泊松方程，我们可以得到

$$
\tilde p=\int_{\mathbb{R}^2}\Phi(x-y)\operatorname{div}\Big(\frac{1}{\rho(y)+1}\nabla p(y)\Big)\,dy, \tag{2.21}
$$

其中 $\Phi(x), 0\neq x\in\mathbb{R}^2$ 是拉普拉斯方程的基本解（参见 [8]）。接下来，利用引理 A.6，我们得到如下估计

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\tilde p\|_{L^2}&\lesssim \|\frac{1}{1+\rho}\|_{L^\infty}\|\nabla p\|_{L^2}\\
&\lesssim \|\nabla p\|_{L^2}\lesssim\|f\|_{L^2},
\end{aligned}
$$

其中 $f = -(\rho+1)u_t - (\rho+1)u\cdot\nabla u + \mathrm{div} G$.
由 (2.18) 可知，系统 (2.4) 可写为

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u\cdot\nabla u + (1-\frac{1}{\rho+1})\Delta u + \nabla\tilde{p} + (1-\frac{1}{\rho+1})\,\mathrm{div}\, G = \mathrm{div}\, G, \\ G_t + u\cdot\nabla G + Q(\nabla u, G) = 2D(u), \\ \mathrm{div}\, u = 0, \qquad\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2.22}$$

基本能量 $\mathcal{E}_0(t)$ 的估计可由以下引理建立。

引理 2.3。 假设 $\mathcal{E}_0(t)$ 如 *(2.5)* 中所定义，则有以下估计

$$\mathcal{E}_0(t) \lesssim \mathcal{E}_{01}(0) + \mathcal{E}_{total}(t) + \mathcal{E}^{\frac{3}{2}}_{total}(t) + \mathcal{E}^{\frac{9}{4}}_{total}(t), \tag{2.23}$$

对任意 $t > 0$。

证明。 我们将基本能量 $\mathcal{E}_0(t)$ 的估计分为两个步骤。为此，我们首先将基本能量 $\mathcal{E}_0(t)$ 分为以下两部分

$$\mathcal{E}_{01}(t) = \sup_{0\le t'\le t}(\|u(t')\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} + \|G(t')\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}) + \int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\,dt',$$
$$\mathcal{E}_{02}(t) = \int_0^t \|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\, G(t')\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\,dt'.$$

步骤 1. $\mathcal{E}_{01}(t)$ 的估计。
对 (2.22) 作用算子 $\nabla^k (k = -s_1, 2)$。然后对 (2.22) 中相应方程的 $(2\nabla^k u, \nabla^k G)$ 取内积。得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(2\|u\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} + \|G\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\right) + \|\nabla u\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{2.24}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle \mathrm{div}\, G, 2u\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} + \langle 2D(u), G\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}; \\ I_2 &= -\langle u\cdot\nabla u, 2u\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2} - \langle u\cdot\nabla G, G\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}; \\ I_3 &= -\langle Q(\nabla u, G), G\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}; \\ I_4 &= -2\left\langle \frac{\rho}{\rho+1}(\Delta u + \mathrm{div}\, G), u\right\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}. \end{aligned}$$

对于 I_1,，由分部积分及对称性 $G_{ij} = G_{ji}$ 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=-s_1,2}\int_{\mathbb{R}^2} 2\Big(\nabla^k\,\mathrm{div}\, G\nabla^k u + \sum_{i,j=1}^2 \nabla^k\frac{\partial_j u_i + \partial_i u_j}{2}\nabla^k G_{ij}\Big)dx \\ &= \sum_{k=-s_1,2} 2\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\nabla^k\,\mathrm{div}\, G\nabla^k u - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\nabla^k u_i\nabla^k\partial_j G_{ij} + \nabla^k u_j\nabla^k\partial_i G_{ij}}{2}\Big)dx \\ &= \sum_{k=-s_1,2} 2\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\nabla^k\,\mathrm{div}\, G\nabla^k u - \sum_{i,j=1}^2 \nabla^k u_i\nabla^k\partial_j G_{ij}\Big)dx \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

利用I_2, 散度为零条件、H¨older不等式、引理 A.4 和 Sobolev嵌入定理，我们有

$$\begin{aligned} I_2 &= -2\left\langle [|\nabla|^{-s_1}, u\cdot\nabla]u, |\nabla|^{-s_1}u\right\rangle_{L^2} - \left\langle [|\nabla|^{-s_1}, u\cdot\nabla]G, |\nabla|^{-s_1}G\right\rangle_{L^2} \\ &\quad - 2\left\langle \nabla^2(u\cdot\nabla u), \nabla^2 u\right\rangle_{L^2} - \left\langle \nabla^2(u\cdot\nabla G), \nabla^2 G\right\rangle_{L^2} \\ &\lesssim \|[|\nabla|^{-s_1}, u\cdot\nabla]u\|_{L^2}\|u\|_{\dot{H}^{-s_1}} + \|[|\nabla|^{-s_1}, u\cdot\nabla]G\|_{L^2}\|G\|_{\dot{H}^{-s_1}} + \|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2 u\|^2_{L^2} \\ &\quad + \|\nabla^2 u\|_{L^3}\|\nabla G\|_{L^6}\|\nabla^2 G\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2 G\|^2_{L^2} \\ &\lesssim \|\nabla^2 u\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^{s_0-s_1}}\|(u,G)\|^2_{\dot{H}^{-s_1}} + \|\nabla^2 u\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^1}\|(u,G)\|^2_{\dot{H}^2} \end{aligned}$$

$$+\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^2}\|G\|_{\dot{H}^{1-s_1}\cap\dot{H}^2}\|\nabla^2 G\|_{L^2}. \tag{2.26}$$

对时间积分（2.26）可得

$$\begin{aligned}\int_0^t |I_2(t')|\,dt' &\lesssim \mathcal{E}_0(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)\int_0^t\Big(\|u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}}\|\nabla G\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}}\|\nabla^2 G\|_{L^2}\Big)\\ &\quad+\|\nabla u\|_{\dot{H}^2}\|\nabla G\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|\nabla u\|_{\dot{H}^2}\|\nabla^2 G\|_{L^2}\Big)dt'\\ &\lesssim \mathcal{E}_0(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)\lesssim \mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t).\end{aligned} \tag{2.27}$$

根据引理 A.1、引理 A.5 和 H¨older 不等式，对于 I_3, ，有

$$\begin{aligned}|I_3| &\lesssim \|Q(\nabla u,G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|G\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|Q(\nabla u,G)\|_{\dot{H}^2}\|G\|_{\dot{H}^2}\\ &\lesssim \|\nabla^2 u\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^{s_0-s_1}}\|G\|^2_{\dot{H}^{-s_1}}+(\|G\|_{L^\infty}\|\nabla^3 u\|_{L^2}+\|\nabla^2 u\|_{L^3}\|\nabla G\|_{L^6}+\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2 G\|_{L^2})\|G\|_{\dot{H}^2}\\ &\lesssim \|\nabla^2 u\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^{s_0-s_1}}\|G\|^2_{\dot{H}^{-s_1}}+(\|G\|_{\dot{H}^{1-s_1}\cap\dot{H}^2}\|\nabla u\|_{\dot{H}^2}+\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^2}\|G\|_{\dot{H}^{1-s_1}\cap\dot{H}^2})\|G\|_{\dot{H}^2}\\ &\quad+\|\nabla u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\|\nabla^2 G\|_{L^2}\|G\|_{\dot{H}^2}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

将 (2.28) 从 0 积分到 t，得到

$$\int_0^t |I_3(t')|\,dt' \lesssim \mathcal{E}_0(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)\lesssim \mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t). \tag{2.29}$$

Let

$$g(\rho):=\frac{\rho}{\rho+1}.$$

对于 I_4, ，应用 H¨older 不等式、引理 A.1–A.3 和引理 A.5，得到

$$\begin{aligned}|I_4| &\lesssim \|g(\rho)(\operatorname{div} G+\Delta u)\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|u\|_{\dot{H}^{s_1}}+\|g(\rho)(\operatorname{div} G+\Delta u)\|_{\dot{H}^1}\|u\|_{\dot{H}^3}\\ &\lesssim \Big(\|g(\rho)\operatorname{div} G\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|g(\rho)\Delta u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\Big)\|u\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\Big(\|g(\rho)\|_{L^\infty}\|\operatorname{div} G+\Delta u\|_{\dot{H}^1}\\ &\quad+\|\nabla g(\rho)\|_{L^3}\|\operatorname{div} G+\Delta u\|_{L^6}\Big)\|u\|_{\dot{H}^3}\\ &\lesssim \Big(\|\operatorname{div}(g(\rho)G)-\nabla(g(\rho))G\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|\nabla\rho\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^{s_0-s_1}}\|\Delta u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\Big)\|u\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\Big(\|g(\rho)\|_{L^\infty}\|\operatorname{div} G+\Delta u\|_{\dot{H}^1}\\ &\quad+\|\nabla g(\rho)\|_{L^3}\|\operatorname{div} G+\Delta u\|_{L^6}\Big)\|u\|_{\dot{H}^3}\\ &\lesssim \Big(\|\operatorname{div}(g(\rho)G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|\nabla(g(\rho))G\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|\rho\|_{H^2}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\Big)\|u\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\Big(\|\nabla^2 G\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{\dot{H}^2}\\ &\quad+\|G\|_{\dot{H}^{1-s_1}\cap\dot{H}^2}+\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\Big)\|\rho\|_{H^2}\|u\|_{\dot{H}^3}\\ &\lesssim \Big(\|\rho\|_{L^3}\||\nabla|^{1-s_1}G\|_{L^6}+\||\nabla|^{1-s_1}\rho\|_{L^2}\|G\|_{L^\infty}+\|\nabla G\|_{\dot{H}^{s_0-(1+s_1)}\cap\dot{H}^{1+s_1-s_0}}\|\rho\|_{\dot{H}^{1-s_1}}\\ &\quad+\|\rho\|_{H^2}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\Big)\|u\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\Big(\|\nabla^2 G\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{\dot{H}^2}+\|G\|_{\dot{H}^{1-s_1}\cap\dot{H}^2}+\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\Big)\|\rho\|_{H^2}\|u\|_{\dot{H}^3}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

将 (2.30) 从 0 积分到 t，得到

$$\begin{aligned}\int_0^t |I_4(t')|\,dt' &\lesssim \mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_0(t)\\ &\lesssim \mathcal{E}_a^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t).\end{aligned} \tag{2.31}$$

最后，将 (2.25)、(2.27)、(2.29) 和 (2.31) 代入 (2.24)，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{01}(t) &\lesssim \|(u_0,G_0)\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}+\mathcal{E}_a^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t)\\ &\lesssim \mathcal{E}_0(0)+\mathcal{E}_{total}^{\frac32}(t).\end{aligned} \tag{2.32}$$

步骤 2. $\mathcal{E}_{02}$ 的估计（t）。

将系统 (2.4) 的第一方程乘以 $\rho+1$，并对所得方程使用算子 $\mathbb{P}$，可得

$$\mathbb{P}(\rho u_t)+u_t-\Delta u+\mathbb{P}(\rho u\cdot\nabla u)+\mathbb{P}(u\cdot\nabla u)=\mathbb{P}(\operatorname{div} G). \tag{2.33}$$

对 (2.33) 应用 $\nabla^k(k=-s_1,1)$，并与 $\nabla^k\mathbb{P}(\mathrm{div}G)$ 取内积，可得

$$\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}=I_5+I_6+I_7+I_8+I_9, \tag{2.34}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_5&=-\langle\Delta u,\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1};\\
I_6&=\langle\mathbb{P}(u\cdot\nabla u),\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1};\\
I_7&=\langle\mathbb{P}(\rho u\cdot\nabla u),\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1};\\
I_8&=\langle u_t,\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1};\\
I_9&=\langle\mathbb{P}(\rho u_t),\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}.
\end{aligned}$$

对于 I_5, , 容易看出

$$\begin{aligned}
\int_0^t|I_5(t')|\,dt'&\lesssim\int_0^t\|\Delta u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\,dt'\\
&\lesssim\mathcal{E}_{01}^{\frac12}(t)\mathcal{E}_{02}^{\frac12}(t).
\end{aligned}\tag{2.35}$$

对于 I_6, , 由于黎斯算子 $\mathcal{R}_i=(-\Delta)^{-\frac12}\nabla_i$ 从 L^2 到自身的有界性，对于任意向量 u, $\|\mathbb{P}u\|_{L^2}\lesssim\|u\|_{L^2}$。利用引理 A.3 和引理 A.5，我们可以得出

$$\begin{aligned}
I_6&\lesssim\|u\cdot\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|u\cdot\nabla u\|_{\dot{H}^1}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^1}\\
&\lesssim\|\nabla^2u\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^{s_0-s_1}}\|u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\Big(\|u\|_{L^\infty}\|\nabla^2u\|_{L^2}\\
&\quad+\|\nabla u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\Big)\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^1}\\
&\lesssim\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\|u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\Big(\|u\|_{\dot{H}^{1-s_1}\cap\dot{H}^2}\|\nabla^2u\|_{L^2}\\
&\quad+\|u\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\Big)\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^1}.
\end{aligned}\tag{2.36}$$

将（2.36）从 0 积分到 t，可得

$$\begin{aligned}
\int_0^t|I_6(t')|\,dt'&\lesssim\sup_{0\le t'\le t}\|u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\int_0^t\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}\,dt'\\
&\quad+\sup_{0\le t'\le t}\|u\|_{\dot{H}^2}\int_0^t\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^1}\,dt'\\
&\quad+\sup_{0\le t'\le t}(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|u\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\int_0^t(1+t')^{-(1+2s_1-s_0)}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^1}\,dt'\\
&\lesssim\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1(t)\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)\lesssim\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t).
\end{aligned}\tag{2.37}$$

对于 I_7, , 利用 H¨older 不等式、引理 A.1–A.3 和引理 A.5，可得

$$\begin{aligned}
I_7&\lesssim\|\rho u\cdot\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\text{散度 }G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|\rho u\cdot\nabla u\|_{\dot{H}^1}\|\mathbb{P}(\text{散度 }G)\|_{\dot{H}^1}\\
&\lesssim\|\nabla(\rho u)\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^{s_1}}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\Big(\|\rho\|_{L^\infty}\|u\cdot\nabla u\|_{\dot{H}^1}\\
&\quad+\|\nabla\rho\|_{L^3}\|u\cdot\nabla u\|_{L^6}\Big)\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^1}\\
&\lesssim\Big[(\||\nabla|^{1-s_1}\rho\|_{L^2}+\||\nabla|^{1+s_1}\rho\|_{L^2})\|u\|_{L^\infty}+\|\rho\|_{L^3}\||\nabla|^{1-s_1}u\|_{L^6}+\|\rho\|_{L^\infty}\||\nabla|^{1+s_1}u\|_{L^2}\Big]\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}\\
&\quad+\Big(\|u\cdot\nabla u\|_{\dot{H}^1}+\|u\cdot\nabla u\|_{L^6}\Big)\|\rho\|_{H^2}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^1}\\
&\lesssim\|u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\|\rho\|_{H^2}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^{-s_1}}+\|u\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\|\rho\|_{H^2}\|\mathbb{P}(\mathrm{div}\,G)\|_{\dot{H}^1}.
\end{aligned}\tag{2.38}$$

将 (2.38) 从 0 积分到t，并使用 H¨older 不等式，可得

$$\int_0^t|I_7(t')|\,dt'\lesssim\mathcal{E}_0(t)\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1^{\frac32}(t). \tag{2.39}$$

对I_8, 应用分部积分以及 $\mathbb{P}u=u$后，I_8 可改写如下

$$I_8=-\frac{d}{dt}\langle\nabla u,G\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}+\langle\nabla u,G_t\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{d}{dt}\langle \nabla u, G\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1} + \langle \nabla u, 2D(u) - u\cdot\nabla G - Q(\nabla u, G)\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\\
&:= I_{81} + I_{82},
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_{81} &= -\frac{d}{dt}\langle \nabla u, G\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1};\\
I_{82} &= \langle \nabla u, 2D(u) - u\cdot\nabla G - Q(\nabla u, G)\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}.
\end{aligned}
$$

利用分部积分、H¨older 不等式和引理 A.1，可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^t I_{81}(t')\,dt' &= -\langle \nabla u, G\rangle_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\Big|_0^t\\
&\lesssim \|\nabla u(t)\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\|G(t)\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1} + \|\nabla u_0\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\|G_0\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\\
&\lesssim \mathcal{E}_{01}(t).
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

对I_{82}, 应用散度为零条件 div$u = 0$ 和引理 A.5，可得

$$
\begin{aligned}
I_{82} &\lesssim \|\nabla u\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1} + \|\nabla^2 u\|_{\dot{H}^{-s_1}}\|u\otimes G\|_{\dot{H}^{-s_1}} + \|\nabla^3 u\|_{L^2}\|u\cdot\nabla G\|_{L^2}\\
&\quad + \|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\|Q(\nabla u, G)\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\\
&\lesssim \|\nabla u\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1} + \|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^{s_1}}\|G\|_{\dot{H}^{-s_1}} + \|\nabla u\|_{\dot{H}^2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla G\|_{L^2}\\
&\quad + \|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\Big(\|\nabla^2 u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^{s_1}}\|G\|_{\dot{H}^{-s_1}} + \|\nabla G\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6} + \|G\|_{L^\infty}\|\nabla^2 u\|_{L^2}\Big)\\
&\lesssim \|\nabla u\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1} + \|\nabla u\|^2_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\|G\|_{\dot{H}^{-s_1}} + \|\nabla u\|_{\dot{H}^2}\|u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\|\mathbb{P}(\operatorname{div} G)\|_{\dot{H}^{s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\\
&\quad + \|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^2}\|G\|_{\dot{H}^{-s_1}} + \|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_1}\cap\dot{H}^1}\|u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\|\mathbb{P}(\operatorname{div} G)\|_{\dot{H}^{s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

将 (2.42) 从 0 积分到t，得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^t I_{82}(t')\,dt' &\lesssim \mathcal{E}_{01}(t) + \mathcal{E}_{01}^{\frac{3}{2}}(t) + \mathcal{E}_{01}(t)\mathcal{E}_1^{\frac{1}{2}}(t) + \mathcal{E}_1^{\frac{3}{2}}(t)\\
&\lesssim \mathcal{E}_{total}(t) + \mathcal{E}_{total}^{\frac{3}{2}}(t).
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

结合 (2.41) 和 (2.43)，可得

$$
\int_0^t |I_8(t')|\,dt' \lesssim \mathcal{E}_{total}(t) + \mathcal{E}_{total}^{\frac{3}{2}}(t).
\tag{2.44}
$$

为建立I_9, 的估计，将 div 应用于系统 (2.4) 的第二个方程，可得

$$
\operatorname{div} G_t + \operatorname{div}(u\cdot\nabla G) + \operatorname{div} Q(\nabla u, G) = \Delta u.
\tag{2.45}
$$

接下来，利用分部积分，并结合系统 (1.1) 的第一方程和 (2.45)，我们推导得

$$
\begin{aligned}
I_9 &= \sum_{k=-s_1,1}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}\nabla^k(\mathbb{P}(\rho u))\nabla^k\mathbb{P}(\operatorname{div} G)\,dx - \sum_{k=-s_1,1}\int_{\mathbb{R}^2}\nabla^k(\mathbb{P}(\rho_t u))\nabla^k\mathbb{P}(\operatorname{div} G)\,dx\\
&\quad - \sum_{k=-s_1,1}\int_{\mathbb{R}^2}\nabla^k(\mathbb{P}(\rho u))\nabla^k\mathbb{P}(\operatorname{div} G_t)\,dx\\
&= \sum_{k=-s_1,1}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}\nabla^k(\mathbb{P}(\rho u))\nabla^k\mathbb{P}(\operatorname{div} G)\,dx + I_{91} + I_{92},
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_{91} &= \sum_{k=-s_1,1}\int_{\mathbb{R}^2}\nabla^k[\mathbb{P}((u\cdot\nabla\rho)u)]\nabla^k\mathbb{P}(\operatorname{div} G)\,dx;\\
I_{92} &= \sum_{k=-s_1,1}\int_{\mathbb{R}^2}\nabla^k(\mathbb{P}(\rho u))\nabla^k\mathbb{P}[\Delta u - \operatorname{div}(u\cdot\nabla G) - \operatorname{div} Q(\nabla u, G)]\,dx.
\end{aligned}
$$

接下来，利用 H¨older 不等式、引理 A.1–A.3 和引理 A.5，我们得到以下估计I_{91}, I_{92} as follows$I_{91} \lesssim \|(u\cdot\nabla\rho)u\|_{\cdot H^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\operatorname{div} G)\|_{\cdot H^{-s_1}} + \|(u\cdot\nabla\rho)u\|_{\cdot H^1}\|\mathbb{P}(\operatorname{div} G)\|_{\cdot H^1}$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \|\operatorname{div}(\rho u\otimes u)-\rho u\cdot\nabla u\|_{\dot H^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^{-s_1}}+\Big(\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla^2\rho\|_{L^2}\\
&\quad+\|u\|_{L^\infty}\|\nabla(u\cdot\nabla\rho)\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^6}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^3}\Big)\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^1}\\
&\lesssim \Big(\||\nabla|^{1-s_1}(\rho u\otimes u)\|_{L^2}+\|\rho u\cdot\nabla u\|_{\dot H^{-s_1}}\Big)\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^{-s_1}}+\|u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|\rho\|_{H^2}\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^1}\\
&\lesssim \Big(\||\nabla|^{1-s_1}(\rho u)\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}+\|\rho u\|_{L^3}\||\nabla|^{1-s_1}u\|_{L^6}+\|\nabla(\rho u)\|_{\dot H^{-s_1}}\|\nabla u\|_{\dot H^{-s_1}}\Big)\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^{-s_1}}\\
&\quad+\|u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|\rho\|_{H^2}\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^1}\\
&\lesssim \Big(\|u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}+\|u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|\nabla u\|_{\dot H^{-s_1}}\Big)\|\rho\|_{H^2}\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^{-s_1}}+\|u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|\rho\|_{H^2}\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^1}
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

and

$$
\begin{aligned}
I_{92}&\lesssim \|\nabla(\rho u)\|_{\dot H^{-s_1}}\|\nabla u\|_{\dot H^{-s_1}}+\|\nabla(\rho u)\|_{L^2}\|\nabla^3u\|_{L^2}+\|\nabla(\rho u)\|_{\dot H^{-s_1}}\|u\cdot\nabla G\|_{\dot H^{-s_1}}+\|\rho u\|_{\dot H^2}\|\nabla(u\cdot\nabla G)\|_{L^2}\\
&\quad+\|\nabla(\rho u)\|_{\dot H^{-s_1}}\|Q(\nabla u,G)\|_{\dot H^{-s_1}}+\|\rho u\|_{\dot H^2}\|\nabla(Q(\nabla u,G))\|_{L^2}\\
&\lesssim \Big(\||\nabla|^{1-s_1}\rho\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}+\|\rho\|_{L^\infty}\||\nabla|^{1-s_1}u\|_{L^2}\Big)\Big(\|\nabla u\|_{\dot H^{-s_1}}+\|\nabla u\|_{\dot H^{-s_1}\cap\dot H^{s_1}}\|\nabla G\|_{\dot H^{-s_1}}\\
&\quad+\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_1}\cap\dot H^{s_1}}\|G\|_{\dot H^{-s_1}}\Big)+\Big(\|\rho\|_{L^\infty}\|\nabla^2u\|_{L^2}+\|\nabla^2\rho\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\Big)\Big(\|\nabla^2u\|_{L^2}\|G\|_{L^\infty}+\|\nabla u\|_{L^6}\|\nabla G\|_{L^3}\\
&\quad+\|u\|_{L^\infty}\|\nabla^2G\|_{L^2}\Big)+\Big(\|\nabla\rho\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}+\|\rho\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}\Big)\|\nabla u\|_{\dot H^2}\\
&\lesssim \|\rho\|_{H^2}\Big[\|u\|^2_{\dot H^{1-s_1}\cap\dot H^2}+\|u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|\nabla u\|_{\dot H^{-s_1}}(1+\|\nabla G\|_{\dot H^{-s_1}})+\|u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|\nabla G\|_{\dot H^{-s_1}}\\
&\quad+\|\nabla u\|^2_{\dot H^{-s_1}\cap\dot H^2}\|G\|_{\dot H^{-s_1}}\Big]+\|\rho\|_{H^2}\|u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|G\|_{\dot H^{1-s_1}\cap\dot H^2}+\|\rho\|_{H^2}\|u\|_{\dot H^{1-s_1}\cap\dot H^2}\|\nabla u\|_{\dot H^2}.
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

将 (2.47) 和 (2.48) 代入 (2.46)，并对 (2.46) 从 0 积分到 t，得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^t|I_9(t')|\,dt'&\lesssim \sup_{0\le t'\le t}\Big(\|\rho u\|_{\dot H^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^{-s_1}}+\|\rho u\|_{\dot H^1}\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^1}\Big)+\mathcal{E}_1(t)\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)\\
&\quad+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_0(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1(t)\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)\\
&\lesssim \sup_{0\le t'\le t}\Big(\|\nabla\rho\|_{\dot H^{-s_1}\cap\dot H^{s_1}}\|u\|_{\dot H^{-s_1}}\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^{-s_1}}+\|\rho\|_{L^\infty\cap\dot H^1}\|u\|_{L^\infty\cap\dot H^1}\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)\|_{\dot H^1}\Big)\\
&\quad+\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\Big(\mathcal{E}_1(t)\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_0(t)+\mathcal{E}_1(t)+\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)\Big)\\
&\lesssim \mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\Big(\mathcal{E}_0(t)+\mathcal{E}_1(t)+\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t)\Big).
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

将 (2.35)、(2.37)、(2.39)、(2.44) 和 (2.49) 的所有估计合并起来，并将 (2.34) 从 0 积分到t，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{02}(t)&=\int_0^t\|\mathbb{P}(\operatorname{div}G)(t')\|^2_{\dot H^{-s_1}\cap\dot H^1}\,dt'\\
&\lesssim \mathcal{E}_{01}^{\frac12}(t)\mathcal{E}_{02}^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1(t)\mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)+\mathcal{E}_{total}(t)+\mathcal{E}_{total}^{\frac32}(t)\\
&\lesssim \mathcal{E}_0(0)+\mathcal{E}_{total}(t)+\mathcal{E}_{total}^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_{total}^{\frac94}(t).
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

由 (2.32) 和 (2.50) 的估计，最终可得

$$
\mathcal{E}_0(t)\lesssim\mathcal{E}_0(0)+\mathcal{E}_{total}(t)+\mathcal{E}_{total}^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_{total}^{\frac94}(t).
\tag{2.51}
$$

因此，引理 2.3 的证明完成。

□

2.5. **分数阶时间加权能量 $\mathcal{E}_1(t)$的估计**。

在本小节中，我们将建立分数阶时间加权能量 $\mathcal{E}_1(t)$ 的估计。具体而言，我们证明以下结果。

引理 2.4。 假设 $\mathcal{E}_1(t)$ 按式 *(2.6)* 定义。则给出如下估计 n

$$
\mathcal{E}_1(t)\lesssim\mathcal{E}_1(0)+\mathcal{E}_{total}(t)+\mathcal{E}_{total}^{\frac32}(t)
\tag{2.52}
$$

对任意 $t > 0$。

证明：类似于引理 2.3 的证明策略，我们仍将分数阶时间加权能量 $\mathcal{E}_1(t)$ 分为以下两部分：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{11}(t) = &\sup_{0\le t'\le t}(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|u(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}+\|\mathbb{P}\operatorname{div}G(t')\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1})\\&+\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\,dt',\\\mathcal{E}_{12}(t) = &\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}\,dt'.\end{aligned}$$

步骤 1。$\mathcal{E}_{11}(t)$ 的估计。

分别对式 $(2.22)_1$,$(2.22)_2$, 应用算子 ∇^{1+k}、$\nabla^k\mathbb{P}\mathrm{div}$、$(k = s_1 - s_0, 1)$，得到

$$\begin{cases}\nabla^{k+1}u_t-\nabla^{k+1}\Delta u+\nabla^{k+1}(u\cdot\nabla u)+\nabla^{k+1}[\frac{\rho}{\rho+1}(\Delta u+\operatorname{div}G)]+\nabla^{k+1}\nabla\tilde p=\nabla^{k+1}\operatorname{div}G,\\\nabla^k\mathbb{P}\operatorname{div}G_t+\nabla^k\mathbb{P}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G)+\nabla^k\mathbb{P}\operatorname{div}Q(\nabla u,\mathbb{F},\tilde\rho)=\nabla^k\Delta u.\end{cases}\tag{2.53}$$

然后分别与 $(2.53)_1, (2.53)_2$, 中的 $(\nabla^{k+1}u,\ \nabla^k\mathbb{P}\,\mathrm{div}G)$ 作内积。乘以时间权重 $(1+t')^{1+2s_1-s_0}$, , 可得

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{d}{dt}\left[(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|u(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}+\|\mathbb{P}\operatorname{div}G(t')\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1})\right]\\&+(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6,\end{aligned}\tag{2.54}$$

其中

$$\begin{aligned}J_1&=\frac{1+2s_1-s_0}{2}(1+t')^{2s_1-s_0}(\|u(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}+\|\mathbb{P}\operatorname{div}G(t')\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1});\\J_2&=(1+t')^{1+2s_1-s_0}\langle\operatorname{div}G,u\rangle_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}+(1+t')^{1+2s_1-s_0}\langle\Delta u,\mathbb{P}\operatorname{div}G\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1};\\J_3&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\langle u\cdot\nabla u,u\rangle_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2};\\J_4&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\langle\mathbb{P}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G),\mathbb{P}\operatorname{div}G\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1};\\J_5&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\langle g(\rho)(\operatorname{div}G+\Delta u),u\rangle_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2};\\J_6&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\langle\mathbb{P}\operatorname{div}Q(\nabla u,G),\mathbb{P}\operatorname{div}G\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1}.\end{aligned}$$

对于J_1, , 利用 H¨older 不等式和引理 A.1，可得

$$\begin{aligned}\int_0^t|J_1(t')|\,dt'\lesssim&\int_0^t\|u(t')\|^{\frac{2}{1+2s_1-s_0}}_{\dot H^{1-s_1}}\cdot\left[(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}}\right]^{\frac{2s_1-s_0}{1+2s_1-s_0}}dt'\\&+\int_0^t\|\mathbb{P}\operatorname{div}G(t')\|^{\frac{2}{1+2s_1-s_0}}_{\dot H^{-s_1}}\cdot\left[(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}}\right]^{\frac{2s_1-s_0}{1+2s_1-s_0}}dt'\\&+\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}+\|\mathbb{P}\operatorname{div}G(t')\|^2_{\dot H^1})\,dt'\\\lesssim&\,\mathcal{E}_0^{\frac{1}{1+2s_1-s_0}}(t)\mathcal{E}_1^{\frac{2s_1-s_0}{1+2s_1-s_0}}(t)+\mathcal{E}_1(t),\end{aligned}\tag{2.55}$$

其中s_0, s_1 需满足 $\frac{\sqrt{7}-1}{3}<s_1<1$, $\max\{s_1, \frac{3s_1^2-2s_1}{1+2s_1}\}<s_0<2s_1$。

对于J_2, , 类似于（2.25），应用分部积分和散度为零条件 $\mathrm{div}u = 0$，可得

$$J_2=0.\tag{2.56}$$

对于 J_3, , 利用引理 A.1 和引理 A.4，我们推导得出

$$\begin{aligned}J_3\lesssim&(1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(\|[|\nabla|^{s_1-s_0},u\cdot\nabla]\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}+\||\nabla|^{s_1-s_0}(\nabla u\cdot\nabla u)\|_{L^2}\|u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}\Big)\\&+(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2u\|^2_{L^2}\\\lesssim&(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}}+(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\|u\|^2_{\dot H^2}.\end{aligned}\tag{2.57}$$

将 (2.57) 从 0 积分到t，可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^t |J_3(t')|\,dt'\\
&\lesssim \sup_{0\le t'\le t}(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\int_0^t(1+t')^{-\frac{1+2s_1-s_0}{2}}(1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\,dt'\\
&\lesssim \mathcal{E}_1^{\frac32}(t).
\end{aligned}\tag{2.58}$$

对于J_4, , 我们利用引理 2.1 并将$J_4=J_{41}+J_{42}+J_{43}$,改写为，其中

$$\begin{aligned}
J_{41}&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle\mathbb{P}(u\cdot\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G),\mathbb{P}\operatorname{div}G\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1};\\
J_{42}&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle\mathbb{P}(\nabla u\cdot\nabla G),\mathbb{P}\operatorname{div}G\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1};\\
J_{43}&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\left\langle\mathbb{P}(\nabla u\cdot\nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}G),\mathbb{P}\operatorname{div}G\right\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1}.
\end{aligned}$$

考虑到事实 $\mathbb{P}\mathbb{P}=\mathbb{P}$，利用分部积分、散度为零条件以及引理 A.3–A.5，，我们可以如下处理前两项J_{41},J_{42}：

$$\begin{aligned}
J_{41}&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle(u\cdot\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G),\mathbb{P}\mathbb{P}\operatorname{div}G\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1}\\
&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle(u\cdot\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G),\mathbb{P}\operatorname{div}G\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1}\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(\|[|\nabla|^{s_1-s_0},u\cdot\nabla]\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{L^2}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{s_1-s_0}}+\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|^2_{\dot H^1}\Big)\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}}+\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^1}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|^2_{\dot H^1}\Big)
\end{aligned}\tag{2.59}$$

and

$$\begin{aligned}
J_{42}&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(\,\langle\mathbb{P}\operatorname{div}(\nabla u\otimes G),\mathbb{P}\operatorname{div}G\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}}+\langle\mathbb{P}(\nabla u\cdot\nabla G),\mathbb{P}\operatorname{div}G\rangle_{\dot H^1}\Big)\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(\|\nabla u\otimes G\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\|\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{s_1-s_0}}+\|\nabla u\cdot\nabla G\|_{\dot H^1}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^1}\Big)\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big[\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|G\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\|\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\\
&\quad+(\|\nabla^2u\|_{L^4}\|\nabla G\|_{L^4}+\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2G\|_{L^2})\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^1}\Big].
\end{aligned}\tag{2.60}$$

将 (2.59)、(2.60) 从 0 积分到t，得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^t|J_{41}(t')|\,dt'\\
&\lesssim\sup_{0\le t'\le t}(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1}\int_0^t\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^1}\,dt'\\
&\lesssim\mathcal{E}_1^{\frac32}(t)
\end{aligned}\tag{2.61}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_0^t|J_{42}(t')|\,dt'\\
&\lesssim\sup_{0\le t'\le t}\|G\|_{\dot H^{-s_1}\cap\dot H^2}\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla^2u\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}\,dt'\\
&\quad+\sup_{0\le t'\le t}(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1}\int_0^t\|\nabla^2u\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap\dot H^1}\,dt'\\
&\lesssim\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t).
\end{aligned}\tag{2.62}$$

接下来，利用黎斯算子 $\mathcal{R}_i=(-\Delta)^{-\frac12}\nabla_i$从$L^2$到自身的有界性，我们可以如下处理最后一项$J_{43}$：

$$\begin{aligned}
J_{43}=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(&\left\langle\nabla u\cdot\nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}G,\mathbb{P}\operatorname{div}G\right\rangle_{\dot H^{s_1-s_0}}\\
&+\left\langle\nabla u\cdot\nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}G,\mathbb{P}\operatorname{div}G\right\rangle_{\dot H^1}\Big)
\end{aligned}$$

$$\lesssim (1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big[\|\nabla^2 u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap \dot H^{s_0-s_1}}\|(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{s_1-s_0}}$$
$$+(\|\nabla^2 u\|_{L^4}\|\nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div} G\|_{L^4}+\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div} G\|_{L^2})\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^1}\Big]$$
$$\lesssim (1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(\|\nabla^2 u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap \dot H^{s_0-s_1}}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}}+\|\nabla^2 u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap \dot H^1}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}\cap \dot H^1}\Big). \quad (2.63)$$

对 (2.63) 从 0 到t积分，得到

$$\int_0^t |J_{43}(t')|\,dt' \lesssim \sup_{0\le t'\le t}(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}\cap \dot H^1}\int_0^t \|\nabla^2 u\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap \dot H^1}\,dt'$$
$$\lesssim \mathcal{E}_1^{\frac{3}{2}}(t). \quad (2.64)$$

利用J_5, H¨older 不等式、引理 A.1 和引理 A.5，我们得到

$$J_5 \lesssim (1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(\|g(\rho)(\Delta u+\operatorname{div} G)\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}+\|g(\rho)(\Delta u+\operatorname{div} G)\|_{\dot H^1}\|\nabla u\|_{\dot H^2}\Big)$$
$$\lesssim (1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big[(\|g(\rho)\Delta u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}+\|g(\rho)\operatorname{div} G\|_{\dot H^{s_1-s_0}})\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}+\|g(\rho)(\Delta u+\operatorname{div} G)\|_{\dot H^1}\|\nabla u\|_{\dot H^2}\Big]$$
$$\lesssim (1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big[(\|\nabla\rho\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap \dot H^{s_0-s_1}}\|\Delta u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}+\||\nabla|^\sigma\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{-r_1}\cap \dot H^{r_1}}\|\rho\|_{\dot H^{s_1-s_0}})\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}$$
$$+(\|\rho\|_{L^\infty}\|\nabla(\Delta u+\operatorname{div} G)\|_{L^2}+\|\nabla\rho\|_{L^3}\|\Delta u+\operatorname{div} G\|_{L^6})\|\nabla u\|_{\dot H^2}\Big]$$
$$\lesssim (1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big[(\|\rho\|_{H^2}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}+\|\rho\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^1})\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}$$
$$+\|\rho\|_{H^2}(\|\nabla u\|_{\dot H^2}+\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^1}+\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^2}+\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^1})\|\nabla u\|_{\dot H^2}\Big]. \quad (2.65)$$

Integrating (2.65) from 0 to t, we have

$$\int_0^t |J_5(t')|\,dt' \lesssim \sup_{0\le t'\le t}\|\rho\|_{H^2\cap \dot H^{s_1-s_0}}\Big(\int_0^t (1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^2}\,dt'$$
$$+\int_0^t (1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^1}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^2}\,dt'\Big)$$
$$\lesssim \mathcal{E}_a^{\frac{1}{2}}(t)\mathcal{E}_1(t). \quad (2.66)$$

类似地，项J_6 可以估计为

$$J_6 \lesssim (1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(\|Q(\nabla u,G)\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\|\nabla\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{s_1-s_0}}+\|\operatorname{div}(Q(\nabla u,G))\|_{\dot H^1}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^1}\Big)$$
$$\lesssim (1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big[\|\nabla G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap \dot H^{s_0-s_1}}\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}+(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^2 G\|_{L^2}+\|\nabla^3 u\|_{L^2}\|G\|_{L^\infty}$$
$$+\|\nabla^2 u\|_{L^4}\|\nabla G\|_{L^4})\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^1}\Big]$$
$$\lesssim (1+t')^{1+2s_1-s_0}\Big(\|\nabla G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap \dot H^1}\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}}$$
$$+\|\nabla u\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap \dot H^2}\|\nabla G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap \dot H^1}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^1}\Big). \quad (2.67)$$

将 (2.67) 从 0 到t积分，得到

$$\int_0^t |J_6(t')|\,dt' \lesssim \mathcal{E}_1^{\frac{3}{2}}(t). \quad (2.68)$$

最后，将 (2.54) 从 0 到t 积分，并结合$J_1\sim J_6$,的估计，得到

$$\mathcal{E}_{11}(t)=\sup_{0\le t'\le t}\Big[(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|u(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^2}+\|\mathbb{P}\operatorname{div} G(t')\|^2_{\dot H^{s_1-s_0}\cap \dot H^1})\Big]$$
$$\int_0^t (1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^2}\,dt'$$
$$\lesssim \mathcal{E}_1(0)+\mathcal{E}_0(t)+\mathcal{E}_1(t)+\mathcal{E}_0^{\frac{3}{2}}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac{3}{2}}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac{3}{2}}(t). \quad (2.69)$$

步骤 2. $\mathcal{E}_{12}(t)$ 的估计。

对系统 (2.4) 的第一方程施加 $\nabla^k\mathbb{P}(k=1+s_1-s_0,1)$，得到

$$\nabla^k u_t-\nabla^k\Delta u+\nabla^k\mathbb{P}(u\cdot\nabla u)+\nabla^k\mathbb{P}\Big[\frac{\rho}{\rho+1}(\Delta u+\operatorname{div} G)\Big]=\nabla^k\mathbb{P}\operatorname{div} G. \quad (2.70)$$

将 (2.70) 与 $\nabla^k\mathbb{P}\,\mathrm{div}G$ 作内积，并乘以时间权 $(1+t')^{1+2s_1-s_0}$,，得到

$$(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}=J_7+J_8+J_9+J_{10}, \tag{2.71}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_7&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle\Delta u,\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\rangle_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1};\\
J_8&=(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle\mathbb{P}(u\cdot\nabla u),\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\rangle_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1};\\
J_9&=(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle u_t,\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\rangle_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1};\\
J_{10}&=(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle\mathbb{P}[g(\rho)(\Delta u+\mathrm{div}\,G)],\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\rangle_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}.
\end{aligned}$$

对于 J_7,，容易看出

$$\begin{aligned}
\int_0^t|J_7(t')|\,dt'&\lesssim\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\Delta u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\,dt'\\
&\lesssim\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\,dt'\\
&\lesssim\mathcal{E}_{11}(t)+\mathcal{E}_{12}(t).
\end{aligned}\tag{2.72}$$

对于 J_8,，利用分部积分、H¨older 不等式、引理 A.1 和引理 A.5，可得

$$\begin{aligned}
|J_8(t')|&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|\nabla u\cdot\nabla u\|_{\dot{H}^{s_1-s_0}\cap L^2}+\|u\cdot\nabla\nabla u\|_{\dot{H}^{s_1-s_0}\cap L^2})\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|\nabla^2u\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^{s_0-s_1}}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{s_1-s_0}}+\|\nabla u\|_{L^4}\|\nabla u\|_{L^4}\\
&\quad+\|\nabla u\|_{\dot{H}^{-s_0+s_1}\cap\dot{H}^{s_0-s_1}}\|\nabla^2u\|_{\dot{H}^{s_1-s_0}}+\|u\|_{L^\infty}\|\nabla^2u\|_{L^2})\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|\nabla u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\|u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}}+\|u\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\\
&\quad+\|u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^2}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}})\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}.
\end{aligned}\tag{2.73}$$

将 (2.73) 从 0 到 t 积分，并利用 H¨older 不等式，可得

$$\int_0^t|J_8(t')|\,dt'\lesssim\mathcal{E}_{11}^{\frac{3}{2}}(t)+\mathcal{E}_{11}^{\frac{1}{2}}(t)\mathcal{E}_{12}(t)\lesssim\mathcal{E}_{11}^{\frac{3}{2}}(t)+\mathcal{E}_{12}^{\frac{3}{2}}(t). \tag{2.74}$$

对于 J_9,，利用分部积分并改写 $J_9=J_{91}+J_{92}+J_{93}$,，其中

$$\begin{aligned}
J_{91}&=\frac{d}{dt}\Big[(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle u,\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\rangle_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\Big];\\
J_{92}&=-(1+2s_1-s_0)(1+t')^{2s_1-s_0}\,\langle u,\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\rangle_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1};\\
J_{93}&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle u,\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G_t\rangle_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}.
\end{aligned}$$

将 J_{91},J_{92} 从 0 积分到 t，得到

$$\begin{aligned}
\int_0^t|J_{91}(t')|\,dt'&\lesssim\sup_{0\le t'\le t}(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|\nabla^2u\|_{\dot{H}^{s_1-s_0}}\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}}+\|\nabla u\|_{L^2}\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\|_{\dot{H}^1})\\
&\lesssim\mathcal{E}_{11}(t).
\end{aligned}\tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t|J_{92}(t')|\,dt'&\lesssim\int_0^t(1+t')^{-1}(1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}}\|u\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}(1+t')^{\frac{1+2s_1-s_0}{2}}\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,G\|_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\,dt'\\
&\lesssim\mathcal{E}_{11}^{\frac{1}{2}}(t)\mathcal{E}_{12}^{\frac{1}{2}}(t)\lesssim\mathcal{E}_{11}(t)+\mathcal{E}_{12}(t).
\end{aligned}\tag{2.76}$$

对于最后一项 J_{93},，在系统 (2.4) 的第二个方程上应用投影算子 $\mathbb{P}$，可得

$$\begin{aligned}
J_{93}&=-(1+t')^{1+2s_1-s_0}\,\langle u,\Delta u-\mathbb{P}\,\mathrm{div}(u\cdot\nabla G)-\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,Q(\nabla u,G)\rangle_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\\
&:=J_{931}+J_{932}+J_{933}.
\end{aligned}\tag{2.77}$$

我们可以直接如下处理项J_{931}：

$$\begin{aligned}
\int_0^t|J_{931}(t')|\,dt'&\lesssim\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|^2_{\dot{H}^{1+s_1-s_0}\cap\dot{H}^1}\,dt'\\
&\lesssim\mathcal{E}_{11}(t).
\end{aligned}\tag{2.78}$$

对于J_{932}, , 利用引理 2.1和引理 A.5，并考虑到黎斯算子$\mathcal{R}_i=(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla_i$从$L^2$到自身的有界性。采用与处理$J_8$,时相同的论证，我们有

$$\begin{aligned}
J_{932}&=(1+t')^{1+2s_1-s_0}\left\langle u,\mathbb{P}(u\cdot\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G)+\mathbb{P}(\nabla u\cdot\nabla G)-\mathbb{P}(\nabla u\cdot\nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}G)\right\rangle_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}(\|u\cdot\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}+\|\nabla u\cdot\nabla G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}\\
&\quad+\|\nabla u\cdot\nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2})\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}(\|\nabla u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}\\
&\quad+\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|\nabla G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}).
\end{aligned}\tag{2.79}$$

对（2.79）从 0 积分到t，得到

$$\begin{aligned}
\int_0^t|J_{932}(t')|\,dt'&\lesssim\sup_{0\le t'\le t}\|(u,G)\|_{\dot H^{-s_1}\cap\dot H^2}\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}(\|\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}\\
&\quad+\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}})\,dt'\\
&\lesssim\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1(t)\lesssim\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t).
\end{aligned}\tag{2.80}$$

利用分部积分、H¨older 不等式、引理 A.1 和引理 A.5，我们可以如下处理项J_{933}：

$$\begin{aligned}
|J_{933}(t')|&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}\|Q(\nabla u,G)\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}(\|Q(\nabla u,\nabla G)\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}+\|Q(\nabla\nabla u,G)\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2})\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}(\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|\nabla G\|_{\dot H^{s_1-s_0}}+\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla G\|_{L^2}\\
&\quad+\|\nabla G\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|\nabla^2u\|_{\dot H^{s_1-s_0}}+\|G\|_{L^\infty}\|\nabla^2u\|_{L^2})\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}(\|\nabla^2u\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|\nabla G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}\\
&\quad+\|\nabla G\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|\nabla^2u\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}).
\end{aligned}\tag{2.81}$$

对（2.81）从 0 积分到t，得到

$$\begin{aligned}
\int_0^t|J_{933}(t')|\,dt'&\lesssim\sup_{0\le t'\le t}\|G\|_{\dot H^{-s_1}\cap\dot H^2}\int_0^t(1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\nabla u\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^2}\,dt'\\
&\lesssim\mathcal{E}_0^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1(t)\lesssim\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t).
\end{aligned}\tag{2.82}$$

结合对$J_{91}\sim J_{93}$的估计，并将J_9从 0 积分到t，得到

$$\int_0^t|J_9(t')|\,dt'\lesssim\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1(t).\tag{2.83}$$

F或者J_{10}, 利用分部积分、H¨older 不等式、引理 A.1 和引理 A.5，我们有 e

$$\begin{aligned}
|J_{10}(t')|&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|\nabla(g(\rho))(\Delta u+\operatorname{div}G)\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}\\
&\quad+\|g(\rho)\nabla(\Delta u+\operatorname{div}G)\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2})\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|\nabla(g(\rho))\Delta u\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}+\|\nabla(g(\rho))\operatorname{div}G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}+\|g(\rho)\nabla\Delta u\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2}\\
&\quad+\|g(\rho)\nabla\operatorname{div}G\|_{\dot H^{s_1-s_0}\cap L^2})\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}\\
&\lesssim(1+t')^{1+2s_1-s_0}(\||\nabla|^\sigma\Delta u\|_{\dot H^{-r_1}\cap\dot H^{r_1}}\|\nabla(g(\rho))\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\\
&\quad+\|\nabla(g(\rho))\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^6}+\||\nabla|^\sigma\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{-r_1}\cap\dot H^{r_1}}\|\nabla(g(\rho))\|_{\dot H^{s_1-s_0}}\\
&\quad+\|\nabla(g(\rho))\|_{L^2}\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{L^\infty}+\|g(\rho)\|_{L^\infty}\|(\nabla\Delta u,\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G)\|_{L^2}\\
&\quad+\|\nabla(g(\rho))\|_{\dot H^{-s_0+s_1}\cap\dot H^{s_0-s_1}}\|(\nabla\Delta u,\nabla\mathbb{P}\operatorname{div}G)\|_{\dot H^{s_1-s_0}})\|\mathbb{P}\operatorname{div}G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap\dot H^1}.
\end{aligned}\tag{2.84}$$

将（2.84）从 0 积分到t，得到

$$\int_0^t|J_{10}(t')|\,dt'$$

$$\lesssim \sup_{0\le t'\le t}\|\rho\|_{H^2}\int_0^t (1+t')^{1+2s_1-s_0}(\|\nabla u\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^2}+\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^1})\|\mathbb{P}\operatorname{div} G\|_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^1}\,dt'$$

$$\lesssim \mathcal{E}_a^{\frac12}(t)\mathcal{E}_1(t)\lesssim \mathcal{E}_a^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t). \tag{2.85}$$

综合（2.72）、（2.74）、（2.83）和（2.85）的估计，并将（2.71）从 0 积分到t，可得

$$\mathcal{E}_{12}(t)=\int_0^t (1+t')^{1+2s_1-s_0}\|\mathbb{P}\operatorname{div} G(t')\|^2_{\dot H^{1+s_1-s_0}\cap \dot H^1}\,dt'$$

$$\lesssim \mathcal{E}_1(t)+\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac32}(t). \tag{2.86}$$

最后，结合（2.69）和（2.86）的估计，可得

$$\mathcal{E}_1(t)\lesssim \mathcal{E}_1(0)+\mathcal{E}_0(t)+\mathcal{E}_1(t)+\mathcal{E}_0^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_1^{\frac32}(t)+\mathcal{E}_a^{\frac32}(t). \tag{2.87}$$

□

3. 定理 1.1 的证明

本节首先给出柯西问题（1.1）–（1.2）解的局部适定性，这可通过 [3] 中的标准方法建立。

命题 *3.1.* 假设初始数据 $(u_0,G_0)\in \dot H^{-s_1}(\mathbb{R}^2)\cap \dot H^2(\mathbb{R}^2)$, $(\tilde\rho_0-1)\in \dot H^{s_1-s_0}(\mathbb{R}^2)\cap H^2(\mathbb{R}^2)$, $(\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\in H^2(\mathbb{R}^2)$。那么存在常数 $T_1>0$，使得柯西问题（*1.1*）–（*1.2*）存在唯一解 $(u,\tilde\rho,\mathbb{F})$，满足

$$\Big(u,(\tilde\rho-1),(\mathbb{F}-\mathbb{I})\Big)\in C\Big(0,T_1;(\dot H^{-s_1}\cap \dot H^2)\times(\dot H^{s_1-s_0}\cap H^2)\times H^2\Big).$$

借助第 2 节的全局先验估计和命题 3.1，我们着手证明定理 1.1。考虑总能量 $\mathcal{E}_{total}(t)=\mathcal{E}_0(t)+\mathcal{E}_1(t)+\mathcal{E}_a(t)$，利用引理 2.2、引理 2.3 和引理 2.4 的估计，以及杨氏不等式和引理 A.1，我们可以选取某个常数C_0 使得

$$\mathcal{E}_{total}(t)\le C_0\mathcal{E}_{total}(0)+C_0\mathcal{E}_{total}(t)+C_0\mathcal{E}^{\frac32}_{total}(t)+C_0\mathcal{E}^{\frac94}_{total}(t). \tag{3.1}$$

根据定理 1.1 中关于初始数据的假设，我们可以将常数 $\varepsilon>0$ 取足够小，使得

$$C_0\mathcal{E}_{total}(0)\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 命题 3.1 中局部解的存在性和标准能量方法可知，存在 a 时间T >0 使得

$$\mathcal{E}_{total}(t)\le\varepsilon,\quad \forall\ t\in[0,T]. \tag{3.2}$$

设T_{max} 是方程 (1.1) 的解的存在时间，由

$$T_{max}:=\sup\left\{t:\ \sup_{0\le s\le t}\mathcal{E}_{total}(t)\le\varepsilon\right\}.$$

结合延拓论证，并且当 ε 足够小时，由 (3.1) 可得 $T_{max}=\infty$。因此，定理 1.1 的证明完成。

Appendix A. Tools

在附录中，我们陈述一些在前文各节中经常使用的有用结果。下面给出一般的 Gagliardo-Nirenberg 不等式：

引理 A.1. 设 $1\le q,r\le\infty$ 和 $0\le m\le\alpha<l$，则有

$$\|\nabla^\alpha f\|_{L^p}\lesssim\|\nabla^m f\|_{L^q}^{1-\theta}\|\nabla^l f\|_{L^r}^{\theta}, \tag{A.1}$$

其中 $\frac{\alpha}{l}\le\theta\le1$并且 α 满足

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{p}=\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{q}\right)(1-\theta)+\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{r}\right)\theta$$

以下特殊情形除外：

(1) 若 $\alpha = 0$, $rl < 2$, $q = \infty$, 则还需要额外假设：f 在无穷远处趋于零，或对某个有限的 $q > 0$, $f \in L^q$；

(2) 若 $1 < r < \infty$, 且 $l - \alpha - \frac{2}{r}$ 是非负整数，则 *(A.1)* 中的插值不等式仅对满足 $\alpha \le \theta < 1$ 的 θ 成立；

(3) *(A.1)* 中的插值不等式对分数阶导数也成立。

证明。 参见 [48]中的定理（第 125–126 页）。 □

引理 A.2。 若任意光滑函数 $g(\cdot)$在0 附近有定义，且 $g(0) = 0$, 并满足

$$g(\rho) \sim \rho \quad and \quad \|g^{(k)}(\rho)\|_{L^2} \le C(k) \quad for\ any \quad 0 \le k \le 2,$$

则有

$$\|g(\rho)\|_{L^p} \lesssim \|\rho\|_{L^p}, \quad for\ some\ p\ with\ 1 \le p \le \infty,$$
$$\|\nabla^k g(\rho)\|_{L^p} \lesssim \|\nabla^k \rho\|_{L^p}, \quad k = 1, 2.$$

证明。 参见 [66]中的命题 2.2。 □

在我们的论证中，还需要用到以下分数阶莱布尼茨法则以及关于分数阶负导数的交换子估计：

引理 A.3。 设 $s > 0, n \ge 2, 1 < p < \infty$, 且 $1 \le p_1, q_2 \le \infty$。则有

$$\| |\nabla|^s (fg)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \| |\nabla|^s f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)} \| |\nabla|^s g\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)},$$

其中

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}.$$

证明。 该估计的证明可参见 [38]。 □

引理 A.4. 设 r_0 为满足 $-1 < r_0 < 0$ 的实数。对任意无散向量函数 $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 以及函数 $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 成立

$$\|[|\nabla|^{r_0}, u \cdot \nabla] v\|_{L^2} \lesssim \|\nabla^2 u\|_{\dot{H}^{-r_1} \cap \dot{H}^{r_1}} \|v\|_{\dot{H}^{r_0}},$$

其中 r_1 为任意正数。

证明. 见 [5]中的命题 2.3。 □

此外，我们还需要使用如下与分数阶负导数相关的双线性估计：

Lemma A.5. 设 r_0 为满足 $-1 < r_0 < 0$ 的实数。对任意函数 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 我们有

$$\| |\nabla|^{r_0} (fg)\|_{L^2} \le \| |\nabla|^{\sigma} f\|_{\dot{H}^{-r_1} \cap \dot{H}^{r_1}} \|g\|_{\dot{H}^{r_0}},$$

如果 σ 与 r_1 满足以下两个假设之一：

(1) $\sigma = 1$, $r_1 > 0$;

(2) $\max\{\frac{2}{3}, 2 - 4r_1, -r_0 + r_1\} < \sigma < 1$, $\frac{1}{4} < r_1 < -r_0$.

证明。 情形 (1) 已在 [5] 中证明。接下来，只需证明情形 (2)。利用傅里叶变换，可得

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(|\nabla|^{r_0}(fg))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{r_0} \hat{f}(\xi - \eta) \hat{g}(\eta)\, d\eta \\ &= \int_{|\eta| \le 2|\xi|} |\xi|^{r_0} \hat{f}(\xi - \eta) \hat{g}(\eta)\, d\eta + \int_{|\eta| > 2|\xi|} |\xi|^{r_0} \hat{f}(\xi - \eta) \hat{g}(\eta)\, d\eta \\ &:= Q_1 + Q_2. \end{aligned} \tag{A.2}$$

对于情形 $|\eta| \le 2|\xi|$ 且$r_0 < 0$, 我们有

$$Q_1 \lesssim \int_{|\eta| \le 2|\xi|} |\hat{f}(\xi - \eta)| \eta|^{r_0} |\hat{g}(\eta)|\, d\eta \tag{A.3}$$

and

$$\begin{aligned}\|Q_1\|_{L^2} &\lesssim \|\hat{f}\|_{L^1}\|g\|_{\dot{H}^{r_0}}\\ &\lesssim \Big(\int_{|\xi|\le 1}\frac{1}{|\xi|^{\sigma-r_1}}|\xi|^{\sigma-r_1}|\hat{f}(\xi)|\,d\xi+\int_{|\xi|>1}\frac{1}{|\xi|^{\frac{3}{4}\sigma}}\frac{1}{|\xi|^{\frac{1}{4}\sigma+r_1}}|\xi|^{\sigma+r_1}|\hat{f}(\xi)|\,d\xi\Big)\|g\|_{\dot{H}^{r_0}}\\ &\lesssim (\||\nabla|^{\sigma-r_1}\hat{f}\|_{L^2}+\||\nabla|^{\sigma+r_1}\hat{f}\|_{L^2})\|g\|_{\dot{H}^{r_0}},\end{aligned}\tag{A.4}$$

其中 $\max\{\frac{2}{3},2-4r_1\}<\sigma<1,\frac{1}{4}<r_1<-r_0$。
接下来，对于情形 $|\eta|>2|\xi|$，有 $|\xi-\eta|\ge\frac{|\xi|}{2}$。于是有

$$\begin{aligned}Q_2 &\lesssim |\xi|^{r_0}\int_{|\eta|>2|\xi|}|\xi-\eta|^{-r_0}|\hat{f}(\xi-\eta)||\eta|^{r_0}|\hat{g}(\eta)|\,d\eta\\ &\lesssim |\xi|^{r_0}H(f,g),\end{aligned}\tag{A.5}$$

其中 $H(f,g):=\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta|^{-r_0}|\hat{f}(\xi-\eta)||\eta|^{r_0}|\hat{g}(\eta)|\,d\eta$。

$$\begin{aligned}\|Q_2\|_{L^2}^2 &\lesssim \int_{|\xi|\le 1}|\xi|^{2r_0}|H|^2\,d\xi+\int_{|\xi|>1}|\xi|^{2r_0}|H|^2\,d\xi\\ &\lesssim \|H\|_{L^{p_0}}^2+\|H\|_{L^{p_1}}^2,\end{aligned}\tag{A.6}$$

其中 p_0,p_1 需满足 $2<\frac{2}{1+r_0}<p_0,2<p_1\le\frac{2}{1+r_0}$。

$$\begin{aligned}\|H\|_{L^{p_0}\cap L^{p_1}} &\lesssim \|\mathscr{F}(|\nabla|^{-r_0}f)(\xi)\|_{L^{\frac{2p_0}{p_0+2}}\cap L^{\frac{2p_1}{p_1+2}}}\|\mathscr{F}(|\nabla|^{r_0}g)(\xi)\|_{L^2}\\ &\lesssim \|\mathscr{F}(|\nabla|^{-r_0}f)(\xi)\|_{L^{\frac{2p_0}{p_0+2}}\cap L^{\frac{2p_1}{p_1+2}}}\||\nabla|^{r_0}g\|_{L^2},\end{aligned}\tag{A.7}$$

取 p_0,σ 并令 $\frac{2}{\sigma+r_0+r_1}\le p_0<\frac{2}{\sigma+r_0-r_1},-r_0+r_1\le\sigma<1$，可得

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}(|\nabla|^{-r_0}f)(\xi)\|_{L^{\frac{2p_0}{p_0+2}}} &=\||\xi|^{-\sigma-r_0}\mathscr{F}(|\nabla|^{\sigma}f)(\xi)\|_{L^{\frac{2p_0}{p_0+2}}}\\ &\lesssim \||\xi|^{-\sigma-r_0+r_1}\mathscr{F}(|\nabla|^{\sigma-r_1}f)(\xi)\|_{L^{\frac{2p_0}{p_0+2}}(|\xi|\le 1)}\\ &\quad+\||\xi|^{-\sigma-r_0-r_1}\mathscr{F}(|\nabla|^{\sigma+r_1}f)(\xi)\|_{L^{\frac{2p_0}{p_0+2}}(|\xi|>1)}\\ &\lesssim \||\xi|^{-\sigma-r_0+r_1}\|_{L^{p_0}(|\xi|\le 1)}\||\nabla|^{\sigma-r_1}f\|_{L^2}\\ &\quad+\||\xi|^{-\sigma-r_0-r_1}\|_{L^{p_0}(|\xi|>1)}\||\nabla|^{\sigma+r_1}f\|_{L^2}\\ &\lesssim \||\nabla|^{\sigma}f\|_{\dot{H}^{-r_1}\cap\dot{H}^{r_1}}.\end{aligned}\tag{A.8}$$

对于 $\|\mathscr{F}(|\nabla|^{-r_0}f)(\xi)\|_{L^{\frac{2p_1}{p_1+2}}}$，估计也类似。我们可以取 p_1,σ 使其满足 $\frac{2}{\sigma+r_0+r_1}<p_1\le\frac{2}{\sigma+r_0-r_1},-r_0+r_1\le\sigma<1$。于是可建立关于 Q_2 的估计。结合 (A.2) 和 (A.4)，该命题的证明即告完成。

□

最后，我们还给出以下关于斯托克斯问题的有用正则性结果：

引理 A.6. 假设 $f\in L^r(\mathbb{R}^n)$ 且 $2\le r<\infty$。设 $(u,p)\in H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ 为以下斯托克斯问题的唯一弱解

$$\begin{cases}-\mu\Delta u+\nabla p=f,\\ \operatorname{div}u=0,\\ u(x)\to 0, & x\to\infty.\end{cases}$$

则 $(\nabla^2u,\nabla p)\in L^r(\mathbb{R}^n)$，并且满足

$$\|\nabla^2u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}+\|\nabla p\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。参见 [15]中的引理 4.3（第 322 页）。 □

致谢

本研究得到国家重点研发计划（编号：2021YFA1002900）、广州市基础与应用基础研究基金（编号：2024A04J6336）、云南省基础研究项目（项目编号：202501AU070056）、国家自然科学基金委员会（编号：12161019）、贵州省基础研究计划（自然科学）（编号：QKHJC-ZK [2022]YB 318）、贵州省教育厅自然科学研究项目（编号：QJJ[2023] 011）以及贵州师范大学学术青年人才基金（编号：QSXM [2022] 03）的部分资助。

数据可用性：本文不适用数据共享。

利益冲突：本文不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] C. F. Ai 和 Y. Wang. 三维非均匀不可压缩黏弹性系统的整体解. Nonlinear Anal., 254:113747, 2025年.[2] H. Bahouri、J. Y. Chemin 和 R. Danchin. 《傅里叶分析与非线性偏微分方程》，数学科学基础丛书第 343 卷 *[数学科学基本原理]*. 施普林格，海德堡，2011.[3] J. Y. Chemin 和 N. Masmoudi. 关于黏弹性流体相关方程正则解的存在时间. SIAM J. Math. Anal., 33(1):84–112, 2001.[4] Q. Chen 和 G. C. Wu. 有界区域中的三维可压缩黏弹性流体. Commun. Math. Sci., 16(5):1303–1323, 2018.[5] Y. H. Chen 和 Y. Zhu. 仅具有速度耗散的二维不可压缩 Oldroyd-B 模型的整体适定性. J. Differential Equations, 376:606–632, 2023.[6] Y. M. Chen 和 P. Zhang. 二维和三维空间维数下不可压缩黏弹性流体系统小解的整体存在性. Comm. Partial Differential Equations, 31(10-12):1793–1810, 2006.[7] E. Di Iorio、P. Marcati 和 S. Spirito. 自由边界不可压缩黏弹性流体模型的飞溅奇异性. Adv. Math., 368:107124, 64, 2020年.[8] L. C. Evans. 偏微分方程，数学研究生教材，美国数学会第 19 卷. 普罗维登斯，罗得岛州，1998.[9] D. Y. Fang、B. Han 和 T. Zhang. 临界空间中密度依赖型不可压缩黏弹性流体的整体存在性. Acta Appl. Math., 130:51–80, 2014.[10] D. Y. Fang、R. Z. Zi. 一类大初值下 Oldroyd-B 模型的整体解. SIAM J. Math. Anal., 48(2):1054–1084, 2016.[11] D. Y. Fang、T. Zhang 和 R. Z. Zi. 不可压缩黏弹性流体的色散效应. 离散与连续动力系统, 38(10):5261–5295, 2018.[12] W. Feng、W. N. Wang 和 J. H. Wu. 混合部分耗散下二维 Oldroyd-B 模型的整体存在性与稳定性. Proc. Amer. Math. Soc., 150(12):5321–5334, 2022.[13] Z. F. Feng、C. J. Zhu 和 R. Z. Zi. 不可压缩黏弹性流的爆破解判据. J. Funct. Anal., 272(9):3742–3762, 2017.[14] J. Forster. 《复杂流体的数学建模》. 维尔茨堡大学¨，学位论文, 2013.[15] G. P. Galdi. Navier-Stokes 方程数学理论导论. 施普林格数学专著. 施普林格，纽约，第二版，2011. 稳态问题.[16] A. Groisman 和 V. Steinberg. 聚合物溶液流动中的弹性湍流. 《自然》, 405:53–55, 2000.[17] X. M. Gu、D. H. Wang 和 F. Xie. 半空间中可压缩黏弹性方程的消失黏性极限. J. Differential Equations, 398:319–343, 2024.[18] B. Han. 临界 L 空间框架下密度依赖型不可压缩黏弹性流体的整体强解^{p} . Nonlinear Anal., 132:337–358, 2016.[19] B. Han 和 R. Z. Zi. 可压缩黏弹性流体的色散效应与整体适定性. J. Differential Equations, 269(11):9254–9296, 2020.[20] L. B. He 和 L. Xu. 有界区域中黏弹性流体系统的整体适定性. SIAM J. Math. Anal., 42(6):2610–2625, 2010.

[21] Y. M. He 和 R. Z. Zi. 不可压缩黏弹性流体解的能量守恒. 数学科学学报 B 辑（英文版）, 41(4):1287–1301, 2021.[22] X. P. Hu 和 F. H. Lin. 具有不连续初始数据的二维不可压缩黏弹性流整体解. 纯粹与应用数学通讯, 69(2):372–404, 2016.[23] X. P. Hu、F. H. Lin 和 C. Liu. 黏弹性流体方程. 载于《黏性流体力学中的数学分析手册》，第 1045–1073 页. 施普林格，尚贝里, 2018.[24] X. P. Hu、S. Meng 和 T. Zhang. 三维空间中零剪切黏度和一般压力定律下可压缩黏弹性流的整体存在性. J. Differential Equations, 432:论文编号 113198, 42, 2025.[25] X. P. Hu、Y. B. Ou、D. H. Wang 和 L. Yang. 大速度下可压缩黏弹性流的不可压缩极限. Adv. Nonlinear Anal., 12(1):论文编号 20220324, 20, 2023.[26] X. P. Hu 和 D. H. Wang. 密度依赖型不可压缩黏弹性流体的整体强解. arXiv: 0905.0663v1, 2009.[27] X. P. Hu 和 D. H. Wang. 大数据下可压缩黏弹性流的局部强解. J. Differential Equations, 249(5):1179–1198, 2010.[28] X. P. Hu 和 D. H. Wang. 多维可压缩黏弹性流的整体存在性. J. Differential Equations, 250(2):1200–1231, 2011.[29] X. P. Hu 和 D. H. Wang. 可压缩黏弹性流的初边值问题. 离散与连续动力系统, 35(3):917–934, 2015.[30] X. P. Hu 和 G. C. Wu. 三维可压缩黏弹性流的整体存在性与最优衰减率. SIAM J. Math. Anal., 45(5):2815–2833, 2013.[31] X. P. Hu 和 H. Wu. 不可压缩黏弹性流的长时间行为与弱强唯一性. 离散与连续动力系统, 35(8):3437–3461, 2015.[32] X. P. Hu 和 W. B. Zhao. 二维中零剪切黏度可压缩耗散弹性动力学系统的整体存在性. Arch. Ration. Mech. Anal., 235(2):1177–1243, 2020.[33] J. C. Huang、Z. A. Yao 和 X. Y. You. 无表面张力的三维黏弹性流体自由边界问题的整体适定性. J. Differential Equations, 417:191–230, 2025.[34] F. Jiang 和 S. Jiang. 若干类大数据下黏弹性流体方程的强解. J. Differential Equations, 282:148–183, 2021.[35] F. Jiang、S. Jiang 和 G. C. Wu. 弹性在分层黏弹性流体瑞利-泰勒问题中的稳定作用. J. Funct. Anal., 272(9):3763–3824, 2017.[36] F. Jiang、G. C. Wu 和 X. Zhong. 重力驱动黏弹性流的指数稳定性. J. Differential Equations, 260(10):7498–7534, 2016.[37] D. D. Joseph. 黏弹性液体流体动力学，应用数学科学丛书第 84 卷. 施普林格出版社，纽约，1990.[38] T. Kato、G. Ponce. 交换子估计以及 Euler 和 Navier-Stokes 方程. 纯粹与应用数学通讯, 41(7):891–907, 1988.[39] B. S. Lai、J. Y. Lin 和 C. Y. Wang. 带阻尼黏弹性纳维-斯托克斯方程的前向自相似解. SIAM J. Math. Anal., 49(1):501–529, 2017.[40] R. G. Larson. 《复杂流体的结构与流变学》. 牛津大学出版社，纽约, 1999.[41] Z. Lei、C. Liu 和 Y. Zhou. 小应变下二维不可压缩黏弹性模型的整体存在性. Commun. Math. Sci., 5(3):595–616, 2007.[42] Z. Lei、C. Liu 和 Y. Zhou. 不可压缩黏弹性流体的整体解. Arch. Ration. Mech. Anal., 188(3):371–398, 2008.[43] Z. Lei 和 Y. Zhou. 通过不可压缩极限证明二维 Oldroyd 模型经典解的整体存在性. SIAM J. Math. Anal., 37(3):797–814, 2005.[44] Y. Li、R. Y. Wei 和 Z. A. Yao. 可压缩黏弹性流的最优衰减率. J. Math. Phys., 57(11):111506, 8, 2016.[45] F. H. Lin、C. Liu 和 P. Zhang. 关于黏弹性流体的流体动力学. 纯粹与应用数学通讯, 58(11):1437–1471, 2005.[46] F. H. Lin 和 P. Zhang. 不可压缩黏弹性流体系统的初边值问题. 纯粹与应用数学通讯, 61(4):539–558, 2008.

[47] H. X. Lin, Y. H. Wei and J. H. Wu. 周期区域中仅速度方程含耗散的二维 Oldroyd-B 型流体的整体适定性与时间衰减. Nonlinear Anal. Real World Appl., 66:103513, 20, 2022.[48] L. Nirenberg. 关于椭圆型偏微分方程. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13:115–162, 1959.[49] X. H. Pan, J. Xu, and Y. Zhu. 非牛顿可压缩黏弹性流动在临界空间中的整体存在性. J. Differential Equations, 331:162–191, 2022.[50] J. Z. Qian and Z. F. Zhang. 可压缩黏弹性流体在平衡态附近的整体适定性. Arch. Ration. Mech. Anal., 198(3):835–868, 2010.[51] J. Z. Qian. 可压缩黏弹性流体的初边值问题. J. Differential Equations, 250(2):848–865, 2011.[52] H. Qiu and S. M. Fang. 临界 Besov 空间中的理想密度依赖不可压缩黏弹性流动. Math. Methods Appl. Sci., 41(10):3913–3933, 2018.[53] M. Renardy. 黏弹性流动的数学分析, CBMS-NSF 应用数学区域会议系列第 73 卷. 工业与应用数学学会 (SIAM)，费城，宾夕法尼亚州，2000.[54] M. Renardy, W. J. Hrusa, and J. A. Nohel. 黏弹性中的数学问题，Pitman 纯粹与应用数学专著和综述第 35 卷. Longman Scientific & Technical，哈洛；John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1987.[55] V. Steinberg. 弹性湍流中的标度关系. Phys. Rev. Lett., 123(23):234501, 5, 2019.[56] Z. Tan, Y. Wang, and W. P. Wu. 黏弹性导电流体的数学建模与定性分析. Anal. Appl. (Singap.), 18(6):1077–1117, 2020.[57] R. Temam. Navier-Stokes 方程：理论与数值分析. North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-纽约-牛津，1977.[58] P. X. Wang, J. H. Wu, X. J. Xu, and Y. Y. Zhong. 仅含分数阶应力张量扩散的 Oldroyd-B 模型的尖锐衰减估计. J. Funct. Anal., 282(4):Paper No. 109332, 55, 2022.[59] Y. Wang, R. Shen, W. P. Wu, and C. J. Zhang. 关于具有静电效应的三维可压缩黏弹性流体的初边值问题. J. Differential Equations, 316:425–470, 2022.[60] Y. Wang and W. P. Wu. 三维可压缩弹性 Navier-Stokes-Poisson 方程的初边值问题. Adv. Nonlinear Anal., 10(1):1356–1383, 2021.[61] W. P. Wu and Y. Wang. 关于三维可压缩弹性 Navier-Stokes-Poisson 方程的半空间或外部问题. SIAM J. Math. Anal., 55(4):2996–3043, 2023.[62] T. Zhang. 一类大初值下与不可压缩黏弹性流体相关方程的整体强解. Nonlinear Anal., 100:59–77, 2014.[63] T. Zhang and D. Y. Fang. 临界 L^p 框架中与不可压缩黏弹性流体相关方程的强解整体存在性. SIAM J. Math. Anal., 44(4):2266–2288, 2012.[64] Y. Zhu. 无阻尼机制的三维不可压缩 Oldroyd-B 模型的全局小解. J. Funct. Anal., 274(7):2039–2060, 2018.[65] Y. Zhu. 三维广义可压缩 Oldroyd-B 模型经典解的整体存在性. Math. Methods Appl. Sci., 43(10):6517–6528, 2020.[66] Y. Zhu. 平衡态附近三维可压缩黏弹性系统的整体经典解. Calc. Var. Partial Differential Equations, 61(1):Paper No. 21, 22, 2022.

数学与统计学院，云南大学，昆明，云南 650091，中国。
电子邮箱地址，C.F. Ai：aicf5206@163.com

数学科学学院，华南师范大学，广州，广东 510631，中国。
电子邮箱地址，Y. Wang：wangyongxmu@163.com

中国贵州省贵阳市贵州师范大学数学科学学院，邮编550001。电子邮箱地址，Y.S. Wu：wuyunshun1979@163.com