arXiv:2603.00957v1 [math.AP] 1 Mar 2026

无结构假设的三维非齐次不可压缩黏弹性系统整体解

CHENGFEI AI、MENGXING BEI 和 YONG WANG*

摘要。本文证明了非齐次不可压缩黏弹性系统在 $\mathbb{R}^3$ 上不附加任何结构假设时强解的整体存在性。不同于 Ai 和 Wang（《Nonlinear Analysis》254（2025年），113747）提出的时间加权能量方法，通过用初始数据上的某些L^1 条件替代H^{-1} 条件，我们需要为方程组（1.1）开发一些新的变换技巧，并运用精巧的谱分析方法捕捉速度场u更强的时间衰减率，这对于建立密度和变形张量的一致有界性至关重要。

1. 引言

本文考虑三维（3D）非齐次不可压缩黏弹性系统的柯西问题：

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_t + u \cdot \nabla \tilde{\rho} = 0, \\ \tilde{\rho} u_t + \tilde{\rho} u \cdot \nabla u + \nabla p = \mu \Delta u + c^2 \operatorname{div}(\tilde{\rho} \mathbb{F} \mathbb{F}^\top), \\ \mathbb{F}_t + u \cdot \nabla \mathbb{F} = \nabla u \mathbb{F}, \\ \operatorname{div} u = 0, \qquad\qquad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{1.1}$$

其满足以下初始数据

$$(\tilde{\rho}, u, \mathbb{F})(x,t)\,|_{t=0} = (\tilde{\rho}_0(x), u_0(x), \mathbb{F}_0(x)) \to (1, 0, \mathbb{I}) \quad \text{as} \quad x \to \infty. \tag{1.2}$$

其中 $\tilde{\rho} > 0$ 为流体密度，$u \in \mathbb{R}^3$ 为速度场，$\mathbb{F} \in \mathbb{M}^{3\times 3}$（由行列式为正的 3×3 矩阵构成的集合）为流体的形变梯度，p 为压力（拉格朗日乘子），$\mathbb{I}$ 为单位矩阵。常数 $\mu > 0$ 和 $c > 0$ 分别表示剪切黏度和弹性波传播速度。上标 $\top$表示转置。

作为具有弹性特征的经典非牛顿流体的重要组成部分，黏弹性流体兼具流体和固体的特性。由于其物理意义重要且数学上具有挑战性，这类流体受到了广泛关注。当密度为常数（即$\tilde{\rho} \equiv 1$）时，Lin 等人[40] 通过能量变分方法首次建立了（1.1）的如下不可压缩版本（参见 [11, 16, 53]）：

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = \mu \Delta u + c^2 \operatorname{div}(\mathbb{F} \mathbb{F}^\top), \\ \mathbb{F}_t + u \cdot \nabla \mathbb{F} = \nabla u \mathbb{F}, \\ \operatorname{div} u = 0, \qquad\qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \ (n = 2, 3). \end{cases} \tag{1.3}$$

设 $\mathbb{E} = \mathbb{F} - \mathbb{I}$ 为(1.3)中变形张量 $\mathbb{F}$ 相对于其平衡态单位矩阵$\mathbb{I}$ 的扰动。Lin 等人 [40] 考虑了具有“div”结构$\operatorname{div} \mathbb{E}^\top = 0$的辅助向量场，并首次证明了二维情形下经典解的局部存在性与（小初始数据下的）整体存在性。随后，Lei 等人 [39] 研究了如下“curl”结构

$$\nabla_k \mathbb{E}^{ij} - \nabla_j \mathbb{E}^{ik} = \mathbb{E}^{lj} \nabla_l \mathbb{E}^{ik} - \mathbb{E}^{lk} \nabla_l \mathbb{E}^{ij}, \tag{1.4}$$

这意味着 $\nabla \times \mathbb{E}$ 是一个高阶项。随后，他们通过“散度”结构和“旋度”结构，证明了二维和三维空间中整体小解的存在性。受 Sideris 和 Thomases[48], 的启发，Chen 和 Zhang [6] 建立了另一种“无旋”结构 $\nabla \times (\mathbb{F}^{-1} - \mathbb{I}) = 0$，以研究

2020年数学学科分类。 35Q35; 35B40; 76A10.关键词和短语。 非齐次粘弹性方程组；谱方法；强解。

*通讯作者：Yong Wang，wangyongxmu@163.com。

同一问题。基于上述“散度-旋度”结构条件，Lin 和 Zhang 在 [41] 中克服了变形张量 $\mathbb{F}$的边界条件未定义这一难题，随后研究了有界区域内的初边值问题。后来，Jiang 等人 [35] 研究了弹性在分层不混溶黏弹性流体的瑞利-泰勒（RT）问题中的稳定作用。此外， [9, 32]也研究了自由边界问题。关于更多相关数学研究成果，读者可参阅索博列夫框架下的 [22, 28, 34, 36–38] 以及 Besov框架下的 [13, 20, 54] 。

对于与 (1.1) 对应的可压缩情形，分析变得复杂得多。我们先简要回顾以下三个对整体存在性结果的证明至关重要的条件：

$$\tilde{\rho}\det\mathbb{F}=1; \tag{1.5}$$

$$\operatorname{div}(\tilde{\rho}\mathbb{F}^{\top})=0; \tag{1.6}$$

$$\mathbb{F}^{lk}\nabla_l\mathbb{F}^{ij}-\mathbb{F}^{lj}\nabla_l\mathbb{F}^{ik}=0. \tag{1.7}$$

这里，(1.6) 和 (1.7) 也称为可压缩黏弹性流体的“散度-旋度”结构。利用条件 (1.5)–(1.7)，Qian 和 Zhang [46] 证明了柯西问题在临界 Besov 空间（一个使方程组具有尺度不变性的函数空间）中的局部大解和整体小解；另见 [19, 26]。与此同时，Hu 和 Wang [25] 首先证明了具有大初始数据的强解的局部存在性，随后 Hu-Wu [27] 和 Fu 等人 [14] 证明了在索博列夫框架中具有初始扰动的可压缩黏弹性流体柯西问题强解的整体存在性及其长期行为。研究可压缩黏弹性系统的初边值问题时，主要困难在于变形张量 $\mathbb{F}$没有边界条件。为克服这一困难，Qian [47]引入了一个物理上合理的函数$\psi=(\psi^1,\cdots,\psi^d)$，使得 $\mathbb{F}^i{}_j=\nabla_j\psi^i$，且该函数满足

$$\psi_t+v=-v\cdot\nabla\psi,$$

以及 $\psi|_{\partial\Omega}=0$，因为$v|_{\partial\Omega}=0$。结合切向导数估计与法向导数估计，作者研究了可压缩黏弹性方程组的初边值问题。随后，借助最大正则性理论，Hu 等人 [29]考虑了同一问题，而 Chen 等人 [7] 证明了强解在H^2-Sobolev 空间中的指数衰减率。在研究零剪切黏度情形时，Hu 和 Zhao [30, 31]通过建立经典解的整体存在性，证实严格为正的体积黏度能够抑制激波形成。如 [4], 所述，研究具有一般压力定律的可压缩黏弹性方程组十分重要，其中包括$p'(\bar{\rho})\le 0$ 这一情形。Liu 等人 [43] 研究了具有一般压力定律和密度依赖的黏度系数的可压缩黏弹性流动，并证明了强解在临界 Besov 空间中的整体存在性和唯一性。Hu 等人 [23] 研究了零剪切黏度且具有一类一般压力定律的三维可压缩黏弹性流。通过引入新的扰动变量（$\rho-1$、u、$\mathbb{F}-\frac{1}{\rho}$）和（$\rho-1$、$u$、$\mathbb{F}-\mathbb{I}$）对方程组进行重新表述，以分别处理可压缩部分和不可压缩部分，并采用精妙的加权能量方法，作者由此建立了柯西问题经典解的整体存在性。关于可压缩黏弹性模型的更多相关结果，请参见 [17, 24, 45, 50, 52, 56] 及其中的参考文献。

近年来，采用与齐次不可压缩情形和可压缩情形类似的处理方法，在恒等式 (1.5)–(1.7) 成立的条件下，文献 [12, 18, 21] 对非齐次不可压缩黏弹性系统 (1.1) 得到了一些重要结果。然而，即使不使用“div-curl”结构恒等式 (1.6)–(1.7)，仍有可能证明非齐次不可压缩黏弹性系统 (1.1) 的柯西问题整体适定性，这是一个新颖且困难的问题。值得注意的是，Zhu 等人 [8, 45, 55, 57]通过优雅的时间加权能量框架，将最棘手的“非线性项”视为“线性项”，分别在 Sobolev 空间和临界 Besov 空间中，证明了齐次不可压缩黏弹性系统和可压缩黏弹性系统小解的整体存在性。随后，我们在文献 [1, 2]中引入一种新的有效张量，将原系统变换为合适的耗散方程组，从而将此前的结果推广到三维和二维非齐次不可压缩系统 (1.1)。正如文献 [8], 的注 1.2 所指出的，如果初始数据仅属于非负指标 Sobolev 空间，那么整体经典解的存在性仍然

未知。幸运的是，Zhu 等人 [33] 在文献 [57]中采用谱分析技术，在初始数据满足某些u L^1 条件而非H^{-1} 条件时，得到了速度场u 更强的时间衰减率。随后，他们证明了三维可压缩黏弹性方程组的柯西问题存在整体强解，且无需任何额外的结构假设。受文献[33], 中新方法的启发，我们继续研究不带任何额外结构假设的不可压非齐次黏弹性系统 (1.1)。然而，我们的结果与文献 [33]中的结果并不完全平行。主要困难如下：由于系统 (1.1) 中的密度并非常数，(1.1) 中的速度方程是一个变系数抛物型方程，因此无法通过 Helmholtz 投影算子直接消去压力项 ∇p。为克服上述困难，我们需要为系统 (1.1) 开发一些新的变换技巧，并运用谱分析方法。具体而言，关键在于引入 (2.1) 中定义的有效张量G ，进而将系统 (1.1) 转化为合适的耗散系统 (2.4)。为处理压力项 ∇p，另一个关键思路是采用变换 (3.6)。利用谱分析技术捕捉速度场u更强的时间衰减率后，我们可以得到 $\tilde{\rho}-1$ 和 $\mathbb{F}-\mathbb{I}$的 Sobolev 范数的一致有界性。最后，我们将文献 [33] 中的新颖思路推广到非齐次不可压缩情形，并证明了 Sobolev 空间中柯西问题存在整体小解，且不对 $\mathbb{F}$ 作任何额外的结构假设。

记号。本文中，C 表示一般常数，其取值可因估计而异。若需明确强调其依赖关系，将使用诸如 C_0,C_1 这样的记号。$a \lesssim b$ ($a \gtrsim b$) 表示$a \leq Cb$ ($a \geq Cb$) 对某个常数$C > 0$成立，而 $a \sim b$ 表示$a \lesssim b$ 和$a \gtrsim b$均成立。令 $\nabla^k = \partial_x^k$表示阶数为$k \geq 0$ 的通常空间导数，其中k为整数。此外，对于$s < 0$，或当s 不是正整数时，∇^s 表示 Λ^s，即

$$\nabla^s f = \Lambda^s f := \mathscr{F}^{-1}(|\xi|^s \mathscr{F} f),$$

其中，$\mathscr{F}$ 是通常的傅里叶变换算子，$\mathscr{F}^{-1}$ 是其逆算子（例如参见 [3]）。我们用 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$（$s \in \mathbb{R}$）表示 $\mathbb{R}^n$ 上的齐次 Sobolev 空间，其范数$\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$由 $\|f\|_{\dot{H}^s} := \|\Lambda^s f\|_{L^2}$定义。$H^s(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 分别表示通常的 Sobolev 空间和 Lebesgue 空间，其范数分别为 $\|\cdot\|_{H^s}$ 和 $\|\cdot\|_{L^p}$。全文中，$\langle f, g\rangle_X$表示X–内积。

为简便起见，我们始终采用爱因斯坦求和约定；涉及标量值函数或向量值函数时，不加区分地使用函数空间。

现在我们可以陈述主要结果了。

定理 1.1. 假设初始数据 $(\tilde{\rho}_0, u_0, \mathbb{F}_0)$ 满足 $\operatorname{div} u_0 = 0$，其中常数 $\delta > 0$充分小，

$$\|u_0\|_{H^2} + \|\tilde{\rho}_0 - 1\|_{H^2} + \|G_0\|_{H^2} \leq \delta, \tag{1.8}$$

and

$$\|u_0\|_{L^1} + \|G_0\|_{L^1} = M_0 < +\infty. \tag{1.9}$$

则柯西问题 (1.1)–(1.2) 存在唯一全局解 $(\tilde{\rho}, u, \mathbb{F})(t)$，且满足

$$\begin{aligned} &\sup_{0\leq t\leq\infty} \left[\|(\tilde{\rho}-1, \mathbb{F}-\mathbb{I})(t)\|_{H^2}^2 + (1+t)^{\sigma}\|u(t)\|_{H^2}^2\right] + \int_0^{\infty} (1+t)^{\sigma}\|\nabla u(t)\|_{H^2}^2 dt \\ &\lesssim \|(u_0, \tilde{\rho}_0 - 1, \mathbb{F}_0 - \mathbb{I})\|_{H^2}^2 + M_0^2, \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 $G := \tilde{\rho}\mathbb{F}\mathbb{F}^T - \mathbb{I}, \sigma \in (1, \sigma_0)$ 且 $1 < \sigma_0 < \frac{3}{2}$。

下面给出一些评述。

注 1.1. 本文通过用某些 L^1 条件替代 H^{-1} 条件，放宽了先前对 *[1]*初始数据的小性假设条件。此外，定理 *1.1* 中的常数 M_0 不需要足够小。

注 1.2. 如 *[33],* 中所指出的，σ 的精确选取至关重要，它用于刻画 u 的时间衰减，并得到ρ 与 $\mathbb{F}-\mathbb{I}$ 的一致有界性。在我们的结果中，我们得到了 $\sigma \in (1, \sigma_0)$以及$1 < \sigma_0 < \frac{3}{2}$，且其取值范围是最优的。

本文其余部分结构如下。在第 2 节中，我们将方程组 (1.1) 转化为关于速度 u 与有效通量 $\mathcal{G}$ 的合适耗散系统，并给出若干在后续各节中经常使用的有用引理。在第 3 节中，借助前述结果，我们利用标准能量方法与谱方法建立若干关键的先验估计，进而完成定理 1.1 的证明。

2. 耗散系统的推导

本节中，我们首先对方程组 (1.1) 作适当变换。然后给出一些记号和有用的结果，它们将在后续各节中发挥重要作用。

2.1. **重新表述**。

由于 (1.1) 中正系数 $\mu > 0, c > 0$ 的具体取值对本文并非关键，因此我们令 $\mu = c = 1$，并在本文余下部分定义 $\rho := \tilde{\rho} - 1$。接下来，为了有效分析 (1.1)，我们给出有效张量G 的定义如下

$$G := \tilde{\rho}\mathbb{F}\mathbb{F}^{\top} - \mathbb{I}. \tag{2.1}$$

并且我们有

$$(\tilde{\rho}\mathbb{F}\mathbb{F}^{\top})_t + (u\cdot\nabla\tilde{\rho})\mathbb{F}\mathbb{F}^{\top} + \tilde{\rho}(u\cdot\nabla\mathbb{F})\mathbb{F}^{\top} + \tilde{\rho}\mathbb{F}(u\cdot\nabla\mathbb{F}^{\top}) = \tilde{\rho}(\nabla u\mathbb{F})\mathbb{F}^{\top} + \tilde{\rho}\mathbb{F}\mathbb{F}^{\top}(\nabla u)^{\top}. \tag{2.2}$$

由 (2.1) 和 (2.2)，可推导出有效张量G的演化方程

$$G_t + u\cdot\nabla G + Q(\nabla u, G) = 2D(u), \tag{2.3}$$

其中，$Q(\nabla u, G) := -\nabla u G - G(\nabla u)^{\top}$，且$D(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)\{\mathrm{v}30)$。

结合 (1.1) 和 (2.3)，可建立如下新的方程组

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u\cdot\nabla u + (1-\frac{1}{\rho+1})\Delta u + \frac{1}{\rho+1}\nabla p + (1-\frac{1}{\rho+1})\operatorname{div} G = \operatorname{div} G, \\ G_t + u\cdot\nabla G + Q(\nabla u, G) = 2D(u), \\ \operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2.4}$$

此外，我们引入有效通量 $\mathcal{G} := \Lambda^{-1}\operatorname{div} G$，它似乎与$u$更为相容。由 (2.4) 可推导出 $(u, \mathcal{G})$ 的如下演化方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u\cdot\nabla u + (1-\frac{1}{\rho+1})\Delta u + \frac{1}{\rho+1}\nabla p + (1-\frac{1}{\rho+1})\Lambda\mathcal{G} = \Lambda\mathcal{G}, \\ \mathcal{G}_t + \Lambda^{-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G) + \Lambda^{-1}\operatorname{div} Q(\nabla u, G) = -\Lambda u, \\ \operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2. **一些有用的引理**。

本小节将介绍一些在后续章节中经常用到的有用引理。首先，我们回顾一般的 Gagliardo-Nirenberg 不等式。

引理 2.1. 设 $1 \le q, r \le \infty$ *and* $0 \le m \le \alpha < l$，则有

$$\|\nabla^{\alpha} f\|_{L^p} \lesssim \|\nabla^m f\|_{L^q}^{1-\theta}\|\nabla^l f\|_{L^r}^{\theta}, \tag{2.6}$$

其中 $\frac{\alpha}{l} \le \theta \le 1$ *and* α 满足

$$\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{p} = \left(\frac{m}{3} - \frac{1}{q}\right)(1-\theta) + \left(\frac{l}{3} - \frac{1}{r}\right)\theta$$

但有以下例外情形：

(1) 若 $\alpha = 0, rl < 3, q = \infty$，则需要附加假设：要么 f 在无穷远处趋于零，要么对于某个有限的 $q > 0$，$f \in L^q$；

(2) 若 $1 < r < \infty$，且 $l - \alpha - \frac{3}{r}$ 是非负整数，则 *(2.6)* 中的插值不等式仅对满足 $\frac{\alpha}{l} \le \theta < 1$ 的 θ 成立；

(3) *(2.6)* 中的插值不等式对分数阶导数也成立。

证明。 见 [44]中的定理（第 125–126 页）。 □

引理 2.2。 若光滑函数 $g(\cdot)$在0 附近有定义，且 $g(0) = 0$，满足

$$g(\rho) \sim \rho \quad and \quad \|g^{(k)}(\rho)\|_{L^2} \le C(k) \quad for\ any \quad 0 \le k \le 2,$$

则有

$$\|g(\rho)\|_{L^p} \lesssim \|\rho\|_{L^p}, \quad for\ some\ p\ with\ 1 \le p \le \infty,$$
$$\|\nabla^k g(\rho)\|_{L^p} \lesssim \|\nabla^k \rho\|_{L^p}, \quad k = 1, 2.$$

证明。 参见 [57]中的命题 2.2。 □

引理 2.3。 假设 $\alpha \ge 0, \beta > 0$ 和 $c > 0$ 均为实数。令 $1 \le p \le q \le \infty$。则存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|\Lambda^\alpha e^{-c\Lambda^\beta t} f\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \le C t^{-\frac{\alpha}{\beta} - \frac{3}{\beta}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \tag{2.7}$$

对任意 $t > 0$，均有。

证明。 参见 [10]中的引理 2.3。 □

引理 2.4. 若 $0 < s_1 \le s_2,$，则存在常数 $C > 0$，使得

$$\int_0^t (1 + t - \tau)^{-s_1} (1 + \tau)^{-s_2} d\tau \le \begin{cases} C(1 + t)^{-s_1}, & if\ s_2 > 1, \\ C(1 + t)^{-s_1} \ln(1 + t), & if\ s_2 = 1, \\ C(1 + t)^{1 - s_1 - s_2}, & if\ s_2 < 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

证明。 见 [51]中的引理 2.4。 □

若 $s \in [0, \frac{3}{2})$，则由 Hardy-Littlewood-Sobolev 定理可推知如下 L^p 型不等式成立：

引理 2.5. 设 $0 \le s < \frac{3}{2}, 1 < p \le 2$，且 $\frac{1}{2} + s \frac{3}{3} = \frac{1}{p}$，则有

$$\|f\|_{\dot{H}^{-s}} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

证明。 见 [49]中的定理 1（第 119 页）。 □

最后，我们还给出 Stokes 问题如下有用的正则性结果：

引理2.6. 假设 $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ 且 $2 \le r < \infty$。设 $(u, p) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ 为下述 *Stokes* 问题的唯一弱解

$$\begin{cases} -\mu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(x) \to 0, \qquad x \to \infty. \end{cases}$$

则 $(\nabla^2 u, \nabla p) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ 且满足

$$\|\nabla^2 u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla p\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

证明. 见 [15]中的引理4.3（第322页）。 □

3. 定理 1.1 的证明

在本节中，我们主要证明定理 1.1。我们首先将解空间 E 定义为

$$E := \left\{ (\tilde{\rho} - 1, \mathbb{F} - \mathbb{I}) \in L^\infty(0, T; H^2 \times H^2), u \in C([0, T); H^2), u \in L^2((0, T); H^2) \right\}.$$

由于可通过 [5] 中的标准方法建立柯西问题 (1.1)–(1.2) 解的局部存在性和唯一性。为了证明定理 1.1，主要工作是建立下述命题中给出的先验估计。

命题 3.1. 假设$(\tilde{\rho}, u, \mathbb{F}) \in E$ 是柯西问题(1.1)–(1.2) 的一个解，其中某个 $T > 0$。在条件 *(1.8)*、*(1.9)* 下，$(\tilde{\rho}, u, \mathbb{F})$ 对于某个充分小的常数 $\delta > 0$，满足

$$\sup_{0\le t\le T} \|(\rho, u, \mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{H^2} \le \delta, \tag{3.1}$$

于是得到以下一致估计：

$$\|(\rho, u, \mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{H^2} \lesssim \|(\rho_0, u_0, \mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2} + \|(\rho_0, u_0, \mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^{\frac{\sigma-1}{2\sigma}} M_0^{\frac{\sigma+1}{2\sigma}}, \tag{3.2}$$

and

$$\begin{aligned}&\|(\rho, \mathbb{F}-\mathbb{I})(t)\|_{H^2}^2 + (1+t)^{\sigma}\|u(t)\|_{H^2}^2 + \int_0^t (1+\tau)^{\sigma}\|\nabla u(\tau)\|_{H^2}^2 d\tau \\ &\lesssim \|(u_0, \rho_0, \mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2 + M_0^2,\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $\sigma \in (1, \sigma_0)$ 且 $1 < \sigma_0 < \frac{3}{2}\sigma$

命题 3.1 将在本节余下部分通过若干引理加以证明。在继续之前，我们假设先验估计满足

$$\|(\rho, u, G)\|_{H^2} \le \delta \ll 1, \tag{3.4}$$

其中 δ 满足 $C_0\delta < \sigma_0 - \sigma$，$C_0$ 是一个与 δ、σ 和 σ_0 无关的正常数，其值可由 (3.8)、(3.39) 和 (3.40) 完全确定。此外，由 (3.4) 及 $\mathcal{G}$ 和G的定义可得

$$\|\mathcal{G}\|_{H^2} \lesssim \|G\|_{H^2} \lesssim \delta. \tag{3.5}$$

接下来，我们首先建立 $(u, \mathcal{G})$ 的能量估计。主要困难在于处理方程组 (2.5) 第一式中的压力项 $\frac{1}{\rho+1}\nabla p$。通过 [2]，中的方法，我们可以将压力 p 转换为 $\tilde{p}$，即

$$\nabla\tilde{p} := \frac{1}{\rho+1}\nabla p. \tag{3.6}$$

由 (3.6) 可知，方程组 (2.5) 可写为

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u\cdot\nabla u + (1-\frac{1}{\rho+1})\Delta u + \nabla\tilde{p} + (1-\frac{1}{\rho+1})\Lambda\mathcal{G} = \Lambda\mathcal{G}, \\ \mathcal{G}_t + \Lambda^{-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G) + \Lambda^{-1}\operatorname{div} Q(\nabla u, G) = -\Lambda u, \\ \operatorname{div} u = 0, \qquad\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{3.7}$$

根据以下引理，可以建立 $(u, \mathcal{G})$ 的能量估计。

引理 3.1. 在命题 *3.1* 的假设下，存在一个充分小的常数$\delta > 0$ 使得

$$\sup_{0\le t'\le t} \|(u,\mathcal{G})(t')\|_{H^2}^2 + \int_0^t \left(\|\Lambda u(\tau)\|_{H^2}^2 + \|\Lambda\mathcal{G}(\tau)\|_{H^1}^2\right) d\tau \lesssim \|(\rho_0, u_0, \mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2. \tag{3.8}$$

证明. 分别将算子 $\Lambda^k\mathbb{P}, \Lambda^k, (k = 0, 1, 2)$ 作用于 $(3.7)_1$,$(3.7)_2$, ，得到

$$\begin{cases} \Lambda^k u_t - \Lambda^k\Delta u + \Lambda^k\mathbb{P}(u\cdot\nabla u) + \Lambda^k\mathbb{P}[\frac{\rho}{\rho+1}(\Delta u + \operatorname{div} G)] = \Lambda^{k+1}\mathbb{P}\mathcal{G}, \\ \Lambda^k\mathcal{G}_t + \Lambda^{k-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G) + \Lambda^{k-1}\operatorname{div} Q(\nabla u, G) = -\Lambda^{k+1}u. \end{cases} \tag{3.9}$$

然后，分别对 $(3.9)_1$,$(3.9)_2$，与 $(\Lambda^k u, \Lambda^k\mathcal{G})$ 取内积，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\left(\Lambda^k u, \Lambda^k\mathcal{G}\right)\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^{k+1}u\|_{L^2}^2 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6, \tag{3.10}$$

其中

$$\begin{aligned} &I_1 = \left\langle \Lambda^{k+1}\mathbb{P}\mathcal{G}, \Lambda^k u\right\rangle_{L^2};\ I_2 = -\left\langle \Lambda^{k+1}u, \Lambda^k\mathcal{G}\right\rangle_{L^2}; \\ &I_3 = -\left\langle \Lambda^k\mathbb{P}(u\cdot\nabla u), \Lambda^k u\right\rangle_{L^2};\ I_4 = -\left\langle \Lambda^k\mathbb{P}\Big[\frac{\rho}{\rho+1}(\Delta u + \operatorname{div} G)\Big], \Lambda^k u\right\rangle_{L^2}; \\ &I_5 = -\left\langle \Lambda^{k-1}\operatorname{div} Q(\nabla u, G), \Lambda^k\mathcal{G}\right\rangle_{L^2};\ I_6 = -\left\langle \Lambda^{k-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G), \Lambda^k\mathcal{G}\right\rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

利用分部积分并考虑 $\mathbb{P}u = u$，可得

$$I_1 + I_2 = 0.$$

对于 I_3, ，由分部积分、散度为零条件、H¨older 不等式、引理和 Sobolev 嵌入定理可得

$$\begin{aligned} I_3 &\lesssim \left(\|\Lambda^{-1}(u\cdot\nabla u)\|_{L^2} + \|u\cdot\nabla u\|_{H^1}\right)\|\Lambda u\|_{H^2} \\ &\lesssim \left(\|u\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{H^1} + \|\nabla u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\right)\|\Lambda u\|_{H^2} \\ &\lesssim \delta\|\Lambda u\|_{H^2}^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Let

$$g(\rho) := \frac{\rho}{\rho+1}.$$

对于 I_4,I_5, ，利用分部积分、Sobolev 嵌入定理、H¨older 不等式和 Young 不等式，以及 Riesz 算子 $\mathcal{R}_i = \Lambda^{-1}\nabla_i$ 从 L^2 到自身的有界性，可得

$$\begin{aligned} I_4 &\lesssim \left(\|\Lambda^{-1}(g(\rho)\Delta u + g(\rho)\Lambda\mathcal{G})\|_{L^2} + \|g(\rho)\Delta u + g(\rho)\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}\right)\|\Lambda u\|_{H^2} \\ &\lesssim \left(\|g(\rho)\|_{W^{1,3}} + \|g(\rho)\|_{L^\infty}\right)\left(\|\Lambda^2 u\|_{H^1} + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}\right)\|\Lambda u\|_{H^2} \\ &\lesssim \delta\left(\|\Lambda u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}^2\right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

and

$$\begin{aligned} I_5 &\lesssim \|\Lambda^{-2}\operatorname{div} Q(\nabla u, G)\|_{L^2}\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2} + \|\operatorname{div} Q(\nabla u, G)\|_{H^1}\|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1} \\ &\lesssim \|G\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^2}\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2} + \left(\|G\|_{L^\infty}\|\Lambda^2 u\|_{H^1} + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^3}\|\Lambda^2 u\|_{H^1} + \|\nabla\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^\infty}\right)\|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1} \\ &\lesssim \|G\|_{H^1}\|\nabla u\|_{L^2}\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2} + \left(\|G\|_{H^2}\|\Lambda^2 u\|_{H^1} + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}\|\Lambda^2 u\|_{H^1}\right)\|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1} \\ &\lesssim \delta\left(\|\Lambda u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}^2\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

对于 I_6,类似于 (3.12) 和 (3.13)，利用分部积分和散度为零条件，我们有 e

$$\begin{aligned} I_6 &= -\left\langle\Lambda^{-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G), \mathcal{G}\right\rangle_{L^2} - \langle\operatorname{div}(u\cdot\nabla G), \Lambda\mathcal{G}\rangle_{L^2} - \left\langle\Lambda(\operatorname{div}(u\cdot\nabla G)), \Lambda^2\mathcal{G}\right\rangle_{L^2} \\ &\lesssim \|G\|_{L^3}\|\Lambda u\|_{L^2}\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2} + \|\nabla u\nabla G + u\cdot\nabla\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2}\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2} + \left(\|\Lambda(\nabla u\nabla G)\|_{L^2} + \|\Lambda u\cdot\nabla\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2}\right)\|\Lambda^2\mathcal{G}\|_{L^2} \\ &\quad - \left\langle u\cdot\nabla\Lambda^2\mathcal{G}, \Lambda^2\mathcal{G}\right\rangle_{L^2} \\ &\lesssim \|G\|_{H^1}\|\Lambda u\|_{L^2}\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2} + \left(\|\nabla u\|_{L^6}\|\nabla G\|_{L^3} + \|u\|_{L^\infty}\|\nabla\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2}\right)\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2} \\ &\quad + \left(\|\Lambda\nabla u\|_{L^6}\|\nabla G\|_{L^3} + \|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\Lambda G\|_{L^2} + \|\Lambda u\|_{L^\infty}\|\nabla\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2}\right)\|\Lambda^2\mathcal{G}\|_{L^2} \\ &\lesssim \delta\left(\|\Lambda u\|^2 H^2 + \|\Lambda\mathcal{G}\|^2 H^1\right)_{\circ} \end{aligned} \tag{3.14}$$

将 (3.11)-(3.14) 的所有估计合并，并选取足够小的 δ，可得

$$\frac{d}{dt}\|(u,\mathcal{G})\|_{H^2}^2 + \|\Lambda u\|_{H^2}^2 \lesssim \delta\|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}^2. \tag{3.15}$$

接下来，分别对 $(3.7)_1$,(3.7) 作用算子 $\Lambda^k\mathbb{P}, \Lambda^{k+1}$,$(k = 0,1)$，并将所得方程与 $(-\Lambda^{k+1}\mathcal{G}, -\Lambda^k u)$ 取内积。于是有

$$\frac{d}{dt}\left\langle\Lambda^k u, -\Lambda^{k+1}\mathcal{G}\right\rangle_{L^2} + \|\Lambda^{k+1}\mathcal{G}\|_{L^2}^2 = I_7 + I_8 + I_9 + I_{10} + I_{11} + I_{12}, \tag{3.16}$$

其中

$$\begin{aligned} &I_7 = \left\langle\Lambda^{k+2}u, \Lambda^k u\right\rangle_{L^2};\ I_8 = \left\langle\Lambda^{k+2}u, \Lambda^{k+1}\mathcal{G}\right\rangle_{L^2}; \\ &I_9 = \left\langle\Lambda^k\mathbb{P}(u\cdot\nabla u), \Lambda^{k+1}\mathcal{G}\right\rangle_{L^2};\ I_{10} = \left\langle\Lambda^k\mathbb{P}\left[g(\rho)(\Delta u + \operatorname{div} G)\right], \Lambda^{k+1}\mathcal{G}\right\rangle_{L^2}; \\ &I_{11} = \left\langle\Lambda^k\operatorname{div} Q(\nabla u, G), \Lambda^k u\right\rangle_{L^2};\ I_{12} = \left\langle\Lambda^k\operatorname{div}(u\cdot\nabla G), \Lambda^k u\right\rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

对于I_7,I_8,，利用分部积分、H¨older 不等式和杨氏不等式，可得

$$I_7 + I_8 \le C_0\|\Lambda u\|_{H^1}^2 + C_{\delta_0}\|\Lambda u\|_{H^2}^2 + \delta_0\|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}^2. \tag{3.17}$$

对于类似于 (3.11) 和 (3.12) 的 I_9,I_{10},，我们得到

$$\begin{aligned} I_9 + I_{10} &\lesssim \Big(\|\mathbb{P}(u\cdot\nabla u)\|_{H^1} + \|\mathbb{P}[g(\rho)(\Delta u + \operatorname{div} G)]\|_{H^1}\Big)\|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1} \\ &\lesssim \Big(\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{H^1} + \|\nabla u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\Big)\|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1} \\ &\quad + \Big(\|g(\rho)\|_{L^\infty} + \|\nabla g(\rho)\|_{L^3}\Big)\Big(\|\Lambda^2 u\|_{H^1} + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}\Big)\|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1} \\ &\lesssim \delta\Big(\|\Lambda u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}^2\Big). \end{aligned} \tag{3.18}$$

对于类似于 (3.14) 的 I_{11},I_{12},，我们得到

$$\begin{aligned} I_{11} + I_{12} &= \Big\langle \Lambda^{k-1}\operatorname{div} Q(\nabla u, G), \Lambda^{k+1}u\Big\rangle_{L^2} + \Big\langle \Lambda^{k-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G), \Lambda^{k+1}u\Big\rangle_{L^2} \\ &\lesssim \Big(\|\Lambda^{-1}\operatorname{div} Q(\nabla u, G)\|_{H^1} + \|\Lambda^{-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G)\|_{H^1}\Big)\|\Lambda u\|_{H^1} \\ &\lesssim \Big(\|G\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{H^1} + \|\nabla G\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}\Big)\|\Lambda u\|_{H^1} \\ &\quad + \Big(\|u\|_{L^\infty}\|\nabla G\|_{H^1} + \|\nabla G\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}\Big)\|\Lambda u\|_{H^1} \\ &\lesssim \delta\Big(\|\Lambda u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}^2\Big). \end{aligned} \tag{3.19}$$

将 (3.17)-(3.19) 的估计合并，并选取足够小的 δ,δ_0，可得

$$\frac{d}{dt}\Big\langle \Lambda^k u, -\Lambda^{k+1}\mathcal{G}\Big\rangle_{L^2} + \|\Lambda^{k+1}\mathcal{G}\|_{L^2}^2 \lesssim \|\Lambda u\|_{H^2}^2. \tag{3.20}$$

最后，用适当大的常数乘以 (3.15)，再将其与 (3.20) 相加，并对所得结果从 0 积分到 t，结合 $\left\langle \Lambda^k u,\ -\Lambda^{k+1}\mathcal{G}\right\rangle_{L_2} \ge -\frac{1}{2}(\|u\|^2{}_{H^1} + \|\mathcal{G}\|^2{}_{H^2})$，立即得到 (3.8)。这就完成了引理 3.1 的证明。

□

下面的引理讨论 ρ 和 $\mathbb{F}-\mathbb{I}$的估计。

引理 3.2。 在条件 *(1.8)*、*(1.9)* 下，可得以下估计

$$\begin{aligned} \|(\rho,\mathbb{F}-\mathbb{I})(t)\|_{H^2}^2 \lesssim \sup_{0\le\tau\le t}\|(\rho,\mathbb{F}-\mathbb{I})(\tau)\|_{H^2}^2 \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{H^2}d\tau + \left(\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{H^2}d\tau\right)^2 \\ + \|(\rho_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

对任意 $t>0$。

证明。 由方程组 (1.1) 的第一个方程，利用分部积分、散度为零条件以及 H¨older 不等式和 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho\|_{H^2}^2 &= -\langle u\cdot\nabla\rho,\rho\rangle_{H^2} \\ &\lesssim \|\nabla u\cdot\nabla\rho\|_{L^2}\|\nabla\rho\|_{L^2} + \|\nabla^2 u\cdot\nabla\rho + \nabla u\cdot\nabla\nabla\rho\|_{L^2}\|\nabla^2\rho\|_{L^2} \\ &\lesssim \|\nabla u\|_{H^2}\|\rho\|_{H^2}^2. \end{aligned} \tag{3.22}$$

将 (3.22) 从 0 积分到 t，可得

$$\|\rho(t)\|_{H^2}^2 \lesssim \sup_{0\le\tau\le t}\|\rho(\tau)\|_{H^2}^2 \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{H^2}d\tau + \|\rho_0\|_{H^2}^2. \tag{3.23}$$

利用方程组 (1.1) 的第三个方程，类似于 (3.22)-(3.23)，结合散度为零条件，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbb{F}-\mathbb{I}\|_{H^2}^2 &= -\langle u\cdot\nabla(\mathbb{F}-\mathbb{I}),\mathbb{F}-\mathbb{I}\rangle_{H^2} + \langle\nabla u\mathbb{F},\mathbb{F}-\mathbb{I}\rangle_{H^2} \\ &\lesssim \|\nabla u\|_{L^\infty}\Big(\|\nabla(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{L^2}^2\Big) \\ &\quad + \Big(\|\nabla u(\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{H^2} + \|\nabla u\|_{H^2}\Big)\|\mathbb{F}-\mathbb{I}\|_{H^2} \end{aligned}$$

$$\lesssim \|\nabla u\|_{H^2}\|\mathbb{F}-\mathbb{I}\|_{H^2}^2 + \|\nabla u\|_{H^2}\|\mathbb{F}-\mathbb{I}\|_{H^2}. \tag{3.24}$$

将 (3.24) 从 0 积分到 t，得到

$$\begin{aligned}\|(\mathbb{F}-\mathbb{I})(t)\|_{H^2}^2 &\lesssim \sup_{0\le\tau\le t}\Big[\|(\mathbb{F}-\mathbb{I})(\tau)\|_{H^2}^2 + \|(\mathbb{F}-\mathbb{I})(\tau)\|_{H^2}\Big]\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{H^2}d\tau + \|\mathbb{F}_0-\mathbb{I}\|_{H^2}^2\\ &\lesssim \sup_{0\le\tau\le t}\|(\mathbb{F}-\mathbb{I})(\tau)\|_{H^2}^2\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{H^2}d\tau + \left(\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{H^2}d\tau\right)^2 + \|\mathbb{F}_0-\mathbb{I}\|_{H^2}^2. \end{aligned}\tag{3.25}$$

□

Next，我们用 $\mathbb{P}$ 于$(3.7)_1, (3.7)_2$, 导出满足(3.7的$(u,\mathcal{G})$的积分表示)

$$\partial_t\begin{pmatrix} u\\ \mathbb{P}\mathcal{G}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Lambda^2 & \Lambda\\ -\Lambda & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ \mathbb{P}\mathcal{G}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbb{P}N_1\\ \mathbb{P}N_2\end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbb{P}N_1 &:= -\mathbb{P}(u\cdot\nabla u) - \mathbb{P}\Big[g(\rho)(\Delta u + \Lambda\mathcal{G})\Big];\\ \mathbb{P}N_2 &:= -\mathbb{P}\Lambda^{-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G) - \mathbb{P}\Lambda^{-1}\operatorname{div} Q(\nabla u, G).\end{aligned}$$

对(3.26)作傅里叶变换，我们得到

$$\partial_t\begin{pmatrix}\widehat{u}\\ \widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-|\xi|^2 & |\xi|\\ -|\xi| & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{u}\\ \widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widehat{\mathbb{P}N_1}\\ \widehat{\mathbb{P}N_2}\end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

矩阵 $\begin{pmatrix}-|\xi|^2 & |\xi|\\ -|\xi| & 0\end{pmatrix}$ 的特征值由下式给出

$$\lambda_1 = \frac{-|\xi|^2 + \sqrt{\Gamma}}{2},\ \lambda_2 = \frac{-|\xi|^2 - \sqrt{\Gamma}}{2},$$

其中 $\Gamma = |\xi|^4 - 4|\xi|^2$。
相应的特征向量为

$$\omega_1 = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{|\xi|}{\lambda_1}\end{pmatrix},\ \omega_2 = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{|\xi|}{\lambda_2}\end{pmatrix}.$$

因此，e^{At} 可以显式写为

$$e^{At} = (\omega_1,\omega_2)\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}(\omega_1,\omega_2)^{-1} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_2 t} + \lambda_1 G_1(t) & |\xi|G_1(t)\\ -|\xi|G_1(t) & e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 G_1(t)\end{pmatrix},$$

其中 $A := \begin{pmatrix}-|\xi|^2 & |\xi|\\ -|\xi| & 0\end{pmatrix}, G_1(t) := \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2-\lambda_1}$。

利用杜哈梅尔原理，得到

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi,t) &= \widehat{K}_1(\xi,t)\widehat{u_0}(\xi) + \widehat{K}_2(\xi,t)\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}(\xi)\\ &\quad + \int_0^t\Big(\widehat{K}_1(\xi,t-\tau)\widehat{\mathbb{P}N_1}(\xi,\tau) + \widehat{K}_2(\xi,t-\tau)\widehat{\mathbb{P}N_2}(\xi,\tau)\Big)d\tau,\\ \widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}}(\xi,t) &= \widehat{K}_3(\xi,t)\widehat{u_0}(\xi) + \widehat{K}_4(\xi,t)\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}(\xi)\\ &\quad + \int_0^t\Big(\widehat{K}_3(\xi,t-\tau)\widehat{\mathbb{P}N_1}(\xi,\tau) + \widehat{K}_4(\xi,t-\tau)\widehat{\mathbb{P}N_2}(\xi,\tau)\Big)d\tau,\end{aligned}\tag{3.28}$$

其中 $\widehat{K}_1(\xi,t) = e^{\lambda_2 t} + \lambda_1 G_1(t)$, $\widehat{K}_2(\xi,t) = |\xi|G_1(t)$, $\widehat{K}_3(\xi,t) = -|\xi|G_1(t)$, $\widehat{K}_4(\xi,t) = e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 G_1(t)$。

$\widehat{K}_1,\widehat{K}_2,\widehat{K}_3,\widehat{K}_4$ 核 K_1, K_2, K_3, K_4 在u 和 $\mathcal{G}$的时间加权能量估计中发挥着关键作用，下面的命题通过将频率空间划分为若干子区域给出了上界。

命题 *3.2*。 *</style}*区域 $\mathbb{R}^3$ 被划分为两个子区域，即 $\mathbb{R}^3 = S_1 \bigcup S\,2$ *</style}*，其中

$$S_1 := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : \Gamma \le \frac{|\xi|^4}{4} \; or \; |\xi|^2 \le \frac{16}{3} \right\};$$
$$S_2 := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : \Gamma \ge \frac{|\xi|^4}{4} \; or \; |\xi|^2 \ge \frac{16}{3} \right\}.$$

(I) 存在两个常数 $C > 0$ 和 c_0，使得对于任意 $\xi \in S_1$,

$$Re\lambda_1 \le -\frac{|\xi|^2}{4}, \; -\frac{3|\xi|^2}{4} \le Re\lambda_2 \le -\frac{|\xi|^2}{2};$$
$$|G_1(t)| \le te^{-\frac{|\xi|^2}{4}t}, \; |\widehat{K}_i(\xi,t)| \le Ce^{-c_0|\xi|^2 t}, i = 1,2,3,4.$$

(II) 存在两个常数 $C > 0$ 和 c_1，使得对于任意 $\xi \in S_2$,

$$\lambda_1 \le -2, \; -|\xi|^2 \le \lambda_2 \le -\frac{3|\xi|^2}{4};$$
$$|\widehat{K}_i(\xi,t)| \le C|\xi|^{-1}e^{-c_1 t}, i = 2,3;$$
$$|\widehat{K}_i(\xi,t)| \le Ce^{-c_1 t}, i = 1,4.$$

证明。关于 e 可参见 [42] 中的命题 4.1，其中对类似情形进行了详细计算。 □

引理 3.3。 在命题 *3.1* 的假设下，存在一个充分小的常数*ffiδ* > 0 以及某些 $\sigma \in (1, \; \sigma_0)$($1 < \sigma_0 < \frac{3}{2}$)，使得

$$(1+t)^{\sigma}\|(u,\mathcal{G})(t)\|_{H^2}^2 + \int_0^t (1+\tau)^{\sigma}\left(\|\Lambda u(\tau)\|_{H^2}^2 + \|\Lambda\mathcal{G}(\tau)\|_{H^1}^2\right)d\tau$$
$$\lesssim (M_0^2 + \|(\rho_0, u_0, \mathbb{F}_0 - \mathbb{I})\|_{H^2}^2). \tag{3.29}$$

证明。 应用积分表示 (3.28) 和普朗歇尔定理，我们得到

$$\|(u,\mathbb{P}\mathcal{G})(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|(\widehat{u},\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}})(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$
$$\le J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6, \tag{3.30}$$

其中

$$J_1 = \|(\widehat{K}_1(t)\widehat{u_0}, \widehat{K}_3(t)\widehat{u_0})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)};$$
$$J_2 = \|(\widehat{K}_2(t)\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}, \widehat{K}_4(t)\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)};$$
$$J_3 = \int_0^t \|\widehat{K}_1(t-\tau)\widehat{\mathbb{P}N_1}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau;$$
$$J_4 = \int_0^t \|\widehat{K}_2(t-\tau)\widehat{\mathbb{P}N_2}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau;$$
$$J_5 = \int_0^t \|\widehat{K}_3(t-\tau)\widehat{\mathbb{P}N_1}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau;$$
$$J_6 = \int_0^t \|\widehat{K}_4(t-\tau)\widehat{\mathbb{P}N_2}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau.$$

接下来，我们逐项估计 (3.30) 右侧的各项。利用引理 2.3 和命题 3.2，我们得到

$$J_1 \le \|\widehat{K}_1(t)\widehat{u_0}\|_{L^2(S_1)} + \|\widehat{K}_1(t)\widehat{u_0}\|_{L^2(S_2)} + \|\widehat{K}_3(t)\widehat{u_0}\|_{L^2(S_1)} + \|\widehat{K}_3(t)\widehat{u_0}\|_{L^2(S_2)}$$
$$\le C\|e^{-c_0|\xi|^2 t}\widehat{u_0}\|_{L^2(S_1)} + C\|e^{-c_1 t}\widehat{u_0}\|_{L^2(S_2)} + C\||\xi|^{-1}e^{-c_1 t}\widehat{u_0}\|_{L^2(S_2)}$$
$$\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\|u_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\|u_0\|_{L^2}, \tag{3.31}$$

其中我们用到了以下事实：对于任意$e^{-c_1 t}(1+t)^m \le C(c_1,m)$，$m \ge 0$,$t > 0$ 且对于任意$\xi \in S_2$，$|\xi| \ge C$。类似地，我们得到

$$J_2 \le \|\widehat{K}_2(t)\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}\|_{L^2(S_1)} + \|\widehat{K}_2(t)\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}\|_{L^2(S_2)} + \|\widehat{K}_4(t)\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}\|_{L^2(S_1)} + \|\widehat{K}_4(t)\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}\|_{L^2(S_2)}$$

$$\leq C\|e^{-c_0|\xi|^2 t}\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}\|_{L^2(S_1)} + C\|e^{-c_1 t}\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}\|_{L^2(S_2)} + C\||\xi|^{-1}e^{-c_1 t}\widehat{\mathbb{P}\mathcal{G}_0}\|_{L^2(S_2)}$$
$$\leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathcal{G}_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathcal{G}_0\|_{L^2}. \tag{3.32}$$

对于J_3,，利用命题 3.2以及投影算子 $\mathbb{P}$在L^2,中有界，可得

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq C\int_0^t \|e^{-c_0|\xi|^2(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_1)}d\tau + C\int_0^t \|e^{-c_1(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_2)}d\tau \\
&= C\int_0^{t-1} \|e^{-c_0|\xi|^2(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_1)}d\tau + C\int_{t-1}^t \|e^{-c_0|\xi|^2(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_1)}d\tau \\
&\quad + C\int_0^t \|e^{-c_1(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_2)}d\tau \\
&\leq C\int_0^{t-1} \|e^{-c_0|\xi|^2(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau + C\int_0^t e^{-c_1(t-\tau)}\|N_1(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

其中，由于一些事实，对于任意 $\tau\in[t-1,\ t]$ 以及对于任意 $\xi\in S_1$,的C，很容易看出

$$\begin{aligned}
\int_{t-1}^t \|e^{-c_0|\xi|^2(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_1)}d\tau &\leq e^{c_1}\int_{t-1}^t e^{-c_1(t-\tau)}\|\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_1)}d\tau \\
&\leq C\int_{t-1}^t e^{-c_1(t-\tau)}\|\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau.
\end{aligned}$$

基于上述结果，应用 H¨older 不等式和引理 2.1–2.4，我们有

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq C\int_0^{t-1}(1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\|u\cdot\nabla u + g(\rho)(\Delta u+\Lambda\mathcal{G})\|_{L^1}d\tau \\
&\quad + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\|u\cdot\nabla u + g(\rho)(\Delta u+\Lambda\mathcal{G})\|_{L^2}d\tau \\
&\leq C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(\|u\|_{L^2}\|\Lambda u\|_{L^2} + \|\rho\|_{L^2}\|\Lambda^2 u\|_{L^2} + \|\rho\|_{L^2}\|\Lambda\mathcal{G})\|_{L^2})d\tau \\
&\quad + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(\|u\|_{L^\infty}\|\Lambda u\|_{L^2} + \|\rho\|_{L^\infty}\|\Lambda^2 u\|_{L^2} + \|\rho\|_{L^\infty}\|\Lambda\mathcal{G})\|_{L^2})d\tau \\
&\leq C\delta\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(\|\Lambda u\|_{H^1} + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2})d\tau.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

对于J_5,，类似于（3.33）和（3.34），可得

$$\begin{aligned}
J_5 &\leq C\int_0^t \|e^{-c_0|\xi|^2(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_1)}d\tau + C\int_0^t \||\xi|^{-1}e^{-c_1(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_2)}d\tau \\
&= C\int_0^{t-1} \|e^{-c_0|\xi|^2(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_1)}d\tau + C\int_{t-1}^t \|e^{-c_0|\xi|^2(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_1)}d\tau \\
&\quad + C\int_0^t \||\xi|^{-1}e^{-c_1(t-\tau)}\widehat{N_1}(\tau)\|_{L^2(S_2)}d\tau \\
&\leq C\delta\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(\|\Lambda u\|_{H^1} + \|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2})d\tau.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

类似于对J_3 和J_5, 关于J_4 和J_6,的估计，我们有

$$\begin{aligned}
J_4 + J_6 &\leq C\int_0^t \|e^{-c_0|\xi|^2(t-\tau)}\widehat{N_2}(\tau)\|_{L^2(S_1)}d\tau + C\int_0^t \||\xi|^{-1}e^{-c_1(t-\tau)}\widehat{N_2}(\tau)\|_{L^2(S_2)}d\tau \\
&\quad + C\int_0^t \|e^{-c_1(t-\tau)}\widehat{N_2}(\tau)\|_{L^2(S_2)}d\tau \\
&\leq C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\|\Lambda^{-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G) - \Lambda^{-1}\operatorname{div} Q(\nabla u, G)\|_{L^1}d\tau
\end{aligned}$$

$$+C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}\|\Lambda^{-1}\operatorname{div}(u\cdot\nabla G)-\Lambda^{-1}\operatorname{div}Q(\nabla u,G)\|_{L^2}d\tau$$
$$\le C\delta\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(\|\Lambda u\|_{H^1}+\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2})d\tau. \tag{3.36}$$

综合（3.31）、（3.32）和（3.34）—（3.36）的估计，并利用引理 2.4，我们得到

$$\begin{aligned}\|(u,\mathcal{G})(t)\|_{L^2}&\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}}(\|(u0,\mathcal{G}_0)\|_{L^1}+\|(u0,\mathcal{G}_0)\|_{L^2})\\&\quad+C\delta\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(\|\Lambda u\|_{H^1}+\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2})d\tau\\&\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}}(M_0+\|(u_0,\mathcal{G}_0)\|_{L^2})\\&\quad+C\delta\left(\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{3}{2}}(1+\tau)^{-\frac{3}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t(1+\tau)^{\frac{3}{2}}(\|\Lambda u\|_{H^1}^2+\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2}^2)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}}(M_0+\|(u_0,\mathcal{G}_0)\|_{L^2})\\&\quad+C\delta(1+t)^{-\frac{3}{4}}\left(\int_0^t(1+\tau)^{\frac{3}{2}}(\|\Lambda u\|_{H^1}^2+\|\Lambda\mathcal{G}\|_{L^2}^2)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

接下来，分别将 (3.15) 与 (3.20) 的两边乘以时间权重 $(1+\tau)^{\frac{3}{2}},$，并在 (0,t) 上对所得结果积分，再考虑到 (3.8)，我们得到

$$\begin{aligned}&(1+t)^{\frac{3}{2}}\|(u,\mathcal{G})(t)\|_{H^2}^2+\int_0^t(1+\tau)^{\frac{3}{2}}(\|\Lambda u\|_{H^2}^2+\|\Lambda\mathcal{G}\|_{H^1}^2)d\tau\\&\le C\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2+\int_0^t(1+\tau)^{\frac{1}{2}}\|(u,\mathcal{G})(\tau)\|_{H^2}^2d\tau\\&\le C\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2+\int_0^t(1+\tau)^{\frac{1}{2}}\|(u,\mathcal{G})(\tau)\|_{L^2}^2d\tau\\&\quad+\delta_0\int_0^t(1+\tau)^{\frac{3}{2}}\|(\Lambda u,\Lambda\mathcal{G})(\tau)\|_{H^1}^2d\tau+C_{\delta_0}\int_0^t\|(\Lambda u,\Lambda\mathcal{G})(\tau)\|_{H^1}^2d\tau.\end{aligned} \tag{3.38}$$

结合 (3.8)、(3.37) 和 (3.38)，并选取足够小的 δ_0，我们有

$$\begin{aligned}\|(u,\mathcal{G})(t)\|_{L^2}&\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}}(M_0+\|(u_0,\mathcal{G}_0)\|_{L^2})\\&\quad+C\delta(1+t)^{-\frac{3}{4}}\left(\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2+\int_0^t(1+\tau)^{\frac{1}{2}}\|(u,\mathcal{G})\|_{L^2}^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.39}$$

然后我们将辅助能量 $\mathcal{E}_a(t)$ 定义为

$$\mathcal{E}_a(t):=\sup_{0\le t'\le t}(1+t')^{\frac{3}{2}}\|(u,\mathcal{G})(t')\|_{H^2}^2. \tag{3.40}$$

由 (3.8)、(3.39) 和 (3.40)，我们得到

$$\mathcal{E}_a(t)\le C_1(M_0^2+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2)+C_0\delta\int_0^t(1+\tau)^{-1}\mathcal{E}_a(\tau)d\tau, \tag{3.41}$$

其中C_0 由 (3.8)、(3.39) 和 (3.40) 确定，且与 δ 和 σ 无关。
对 (3.41) 应用 Gronwall 引理，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_a(t)&\le C_1(M_0^2+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2)\exp\left(C_0\delta\int_0^t(1+\tau)^{-1}d\tau\right)\\&\le C(M_0^2+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2)(1+t)^{C_0\delta}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

接下来，如果 σ_0 满足 $1<\sigma<\sigma_0<\frac{3}{2}$，我们可以得到

$$(1+t)^{\sigma_0}\|(u,\mathcal{G})(t)\|_{L^2}^2\le\mathcal{E}_a(t)\le C(M_0^2+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2)(1+t)^{C_0\delta}. \tag{3.43}$$

由（3.43）可得

$$\int_0^t (1+\tau)^{\sigma-1}\|(u,\mathcal{G})(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \le C_1(M_0^2+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2)\int_0^t (1+\tau)^{C_0\delta+\sigma-1-\sigma_0}d\tau$$
$$\le C(M_0^2+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2), \tag{3.44}$$

其中 $C_0\delta<\sigma_0-\sigma$。
与 (3.38) 类似，将 (3.15) 和 (3.20) 两边分别乘以时间权重 $(1+\tau)^\sigma$，并分别在 $(0,t)$ 上对所得结果积分，再结合 (3.8)，最终可得

$$(1+t)^\sigma\|(u,\mathcal{G})(t)\|_{H^2}^2+\int_0^t (1+\tau)^\sigma\left(\|\Lambda u(\tau)\|_{H^2}^2+\|\Lambda\mathcal{G}(\tau)\|_{H^1}^2\right)d\tau$$
$$\lesssim \|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2+\int_0^t (1+\tau)^{\sigma-1}\|(u,\mathcal{G})(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau. \tag{3.45}$$

F由 (3.44) 和 (3.45)，我们立即得到 (3.29)。这就完成了引理 3.3 的证明。 □

注3.1. 根据引理 *3.3*，可以对项 $\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{H^2}d\tau$ 进行估计。具体细节将在下一个引理的证明中给出，该引理旨在闭合 (3.4) 中的先验假设。

引理3.4. 在命题 *3.1* 的假设下，存在一个充分小的常数$\delta>0$ 使得

$$\|(\rho,u,\mathbb{F}-\mathbb{I})\|_{H^2}\lesssim\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^{\frac{\sigma-1}{2\sigma}}M_0^{\frac{\sigma+1}{2\sigma}}. \tag{3.46}$$

证明。 结合 (3.8) 和 (3.29)，利用 Hölder 不等式，可得

$$\int_0^t\|\Lambda u(\tau)\|_{H^2}d\tau\lesssim\left(\int_0^t(1+\tau)^{-\frac{\sigma+1}{2}}d\tau\right)^{\frac12}\left(\int_0^t(1+\tau)^\sigma\|\Lambda u(\tau)\|_{H^2}^2d\tau\right)^{\frac{\sigma+1}{4\sigma}}\left(\int_0^t\|\Lambda u(\tau)\|_{H^2}^2d\tau\right)^{\frac{\sigma-1}{4\sigma}}$$
$$\lesssim\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^{\frac{\sigma-1}{2\sigma}}M_0^{\frac{\sigma+1}{2\sigma}}. \tag{3.47}$$

由引理 3.1 和引理 3.2、(1.8) 及 (3.47)，可得

$$\|(\rho,\mathbb{F}-\mathbb{I})(t)\|_{H^2}^2\lesssim\sup_{0\le\tau\le t}\|(\rho,\mathbb{F}-\mathbb{I})(\tau)\|_{H^2}^2\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{H^2}d\tau+\left(\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{H^2}d\tau\right)^2$$
$$+\|(\rho_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2$$
$$\lesssim\left(\delta+M_0^{\frac{\sigma+1}{2\sigma}}\delta^{\frac{\sigma-1}{2\sigma}}\right)\sup_{0\le\tau\le t}\|(\rho,\mathbb{F}-\mathbb{I})(\tau)\|_{H^2}^2+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^2$$
$$+\|(\rho_0,u_0,\mathbb{F}_0-\mathbb{I})\|_{H^2}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}M_0^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}. \tag{3.48}$$

最后，取 δ充分小，即可得到 (3.46)。 □

结合引理 3.3 和引理 3.4 的结果，可立即得到 (3.3)。至此，命题 3.1 的证明完成。

致谢

本研究部分ľǎšu国家重点研发计划（编号：2021YFA1002900）、广州市基础与应用基础研究基金（编号：2024A04J6336）及云南省基础研究计划（项目编号：202501AU070056）的资助。

数据可用性： 本文不适用数据共享。

利益冲突： 本文不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] C. F. Ai 和 Y. Wang。三维不可压缩非均匀黏弹性系统的整体解。《Nonlinear Analysis》，254：113747，2025年。[2] C. F. Ai、Y. Wang 和 Y. Wu。二维非均匀不可压缩黏弹性系统的整体解。预印本。[3] H. Bahouri、J. Y. Chemin 和 R. Danchin。《傅里叶分析与非线性偏微分方程》，《数学科学基础丛书》第343卷。*[《数学科学基础原理》]*。施普林格，海德堡，2011年。[4] D. Bresch、P. -E. Jabin。可压缩纳维–斯托克斯方程弱解的整体存在性：热力学不稳定压力与各向异性黏性应力张量。《数学年刊》（第2辑），188（2）：577–684，2018年。[5] J. Y. Chemin 和 N. Masmoudi。关于与黏弹性流体相关方程正则解的寿命。SIAM数学分析杂志，33（1）：84–112，2001年。[6] Y. M. Chen 和 P. Zhang。二维和三维空间中不可压缩黏弹性流体系统小解的整体存在性。《偏微分方程通讯》，31（10–12）：1793–1810，2006年。[7] Q. Chen 和 G. C. Wu。有界区域中的三维可压缩黏弹性流体。《数学科学通讯》，16（5）：1303–1323，2018年。[8] Y. H. Chen 和 Y. Zhu。仅具有速度耗散的二维不可压缩 Oldroyd-B 模型的整体适定性。《微分方程杂志》，376：606–632，2023年。[9] E. Di Iorio、P. Marcati 和 S. Spirito。自由边界不可压缩黏弹性流体模型的飞溅奇异性。《数学进展》，368：107124，64，2020年。[10] B. Q. Dong、J. N. Li 和 J. H. Wu。具有部分超电阻的二维磁流体动力学方程的整体正则性。《国际数学研究通知》，14：4261–4280，2019年。[11] B. Eisenberg、Y. Hyon 和 C. Liu。水和通道中离子的能量变分分析：复杂离子流体原始模型的场论。《化学物理杂志》，133：104104，2010年。[12] D. Y. Fang、韩波和 T. Zhang。密度依赖不可压缩黏弹性流体在临界空间中的整体存在性。《应用数学学报》，130：51–80，2014年。[13] D. Y. Fang、T. Zhang 和訾润泽。不可压缩黏弹性流体的色散效应。《离散与连续动力系统》，38（10）：5261–5295，2018年。[14] 傅世彬、黄文涛和王伟伟。可压缩黏弹性流动的最优时间衰减率。《分析与应用》（新加坡），21（5）：1365–1389，2023年。[15] G. P. Galdi。《纳维–斯托克斯方程数学理论导论》。施普林格数学专著。施普林格，纽约，第二版，2011年。稳态问题。[16] M. Giga、A. Kirshtein 和 C. Liu。变分建模与复杂流体。载于《黏性流体力学数学分析手册》，第73–113页。施普林格，查姆，2018年。[17] 顾晓明、D. H. Wang 和谢锋。半空间中可压缩黏弹性方程的消失黏性极限。《微分方程杂志》，398：319–343，2024年。[18] 韩波。密度依赖不可压缩黏弹性流体的整体强解，临界 L^p 框架。《Nonlinear Analysis》，132：337–358，2016年。[19] 韩波和訾润泽。可压缩黏弹性流体的色散效应与整体适定性。《微分方程杂志》，269（11）：9254–9296，2020年。[20] Y. M. He 和訾润泽。不可压缩黏弹性流体解的能量守恒。《数学科学学报 B辑》（英文版），41（4）：1287–1301，2021年。[21] X. P. Hu 和 D. H. Wang。密度依赖不可压缩黏弹性流体的整体强解。arXiv：0905.0663v1，2009年。[22] X. P. Hu 和 F. H. Lin。具有不连续初始数据的二维不可压缩黏弹性流动的整体解。《纯粹与应用数学通讯》，69（2）：372–404，2016年。[23] X. P. Hu、S. Meng 和 T. Zhang。三维中具有零剪切黏度和一般压力定律的可压缩黏弹性流动的整体存在性。《微分方程杂志》，432：论文编号113198，42，2025年。[24] X. P. Hu、欧阳波、D. H. Wang 和杨磊。具有大速度的可压缩黏弹性流动的不可压缩极限。《非线性分析进展》，12（1）：论文编号20220324，20，2023年。

[25] X. P. Hu 和 D. H. Wang. 大数据下可压缩黏弹性流的局部强解. 《微分方程杂志》, 249(5):1179–1198, 2010年.[26] X. P. Hu 和 D. H. Wang. 多维可压缩黏弹性流动的整体存在性. 《微分方程杂志》 , 250(2):1200–1231, 2011 年 .[27] X. P. Hu 和 G. C. Wu. 三维可压缩黏弹性流动的整体存在性与最优衰减率. SIAM数学分析杂志, 45(5):2815–2833, 2013年.[28] X. P. Hu 和 H. Wu. 不可压缩黏弹性流动的长期行为与弱强唯一性. 《离散与连续动力系统》, 35(8):3437–3461, 2015年.[29] X. P. Hu 和 D. H. Wang. 可压缩黏弹性流动的初边值问题. 《离散与连续动力系统》, 35(3):917–934, 2015年.[30] X. P. Hu 和 W. B. Zhao. 三维零剪切黏度可压缩黏弹性系统的整体存在性. 《微分方程杂志》, 268(4):1658–1685, 2020年.[31] X. P. Hu 和 W. B. Zhao. 二维零剪切黏度可压缩耗散弹性动力学系统的整体存在性 . 理性力学与分析文献 , 235(2):1177–1243, 2020年.[32] J. C. Huang, Z. A. Yao 和 X. Y. You. 无表面张力三维黏弹性流体自由边界问题的整体适定性. 《微分方程杂志》, 417:191–230, 2025年.[33] Y. F. Huang, Q. Q. Liu 和 C. J. Zhu. 无结构假设的三维可压缩黏弹性方程整体强解. 《微分方程杂志》, 450:113767, 2026年.[34] F. Jiang 和 S. Jiang. 某些大数据类下黏弹性流体方程的强解. 《微分方程杂志》, 282:148–183, 2021年.[35] F. Jiang, S. Jiang 和 G. C. Wu. 弹性对分层黏弹性流体瑞利–泰勒问题的稳定作用. 《泛函分析杂志》, 272(9):3763–3824, 2017年.[36] B. S. Lai, J. Y. Lin 和 C. Y. Wang. 带阻尼黏弹性纳维–斯托克斯方程的前向自相似解. SIAM数学分析杂志, 49(1):501–529, 2017年.[37] Z. Lei 和 Y. Zhou. 通过不可压缩极限得到二维 Oldroyd模型经典解的整体存在性. SIAM数学分析杂志, 37(3):797–814, 2005年.[38] Z. Lei, C. Liu 和 Y. Zhou. 小应变二维不可压缩黏弹性模型的整体解. 《数学科学通讯》, 5(3):595–616, 2007年.[39] Z. Lei, C. Liu 和 Y. Zhou. 不可压缩黏弹性流体的整体解. 理性力学与分析文献, 188(3):371–398, 2008年.[40] F. H. Lin, C. Liu 和 P. Zhang. 关于黏弹性流体的流体动力学. 《纯粹与应用数学通讯》, 58(11):1437–1471, 2005年.[41] F. H. Lin 和 P. Zhang. 不可压缩黏弹性流体系统的初边值问题. 《纯粹与应用数学通讯》, 61(4):539–558, 2008年.[42] H. X. Lin, J. H. Wu 和 N. Boardman. 混合偏耗散三维不可压缩 Oldroyd-B 模型的稳定性. 中国科学：数学, 68(7):1567–1606, 2025年.[43] Y. Liu, S. Meng, J. Y. Wu 和 T. Zhang. 一般压力定律下多维可压缩黏弹性流动的整体强解. 数学物理杂志, 64(8):论文编号 081506, 19, 2023年.[44] L. Nirenberg. 关于椭圆型偏微分方程. 比萨高等师范学校年刊, 13:115–162, 1959年.[45] X. H. Pan, J. Xu 和 Y. Zhu. 非牛顿可压缩黏弹性流在临界空间中的整体存在性. 《微分方程杂志》, 331:162–191, 2022年.[46] J. Z. Qian 和 Z. F. Zhang. 平衡态附近可压缩黏弹性流体的整体适定性. 理性力学与分析文献, 198(3):835–868, 2010年.[47] J. Z. Qian. 可压缩黏弹性流体的初边值问题. 《微分方程杂志》, 250(2):848–865, 2011年.[48] T. C. Sideris 和 B. Thomases. 通过不可压缩极限得到三维不可压缩各向同性弹性动力学的整体存在性. 《纯粹与应用数学通讯》, 58(6):750–788, 2005年.[49] E. M. Stein. 奇异积分与函数的可微性. 普林斯顿数学丛书，第30号. 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿，新泽西州, 1970年.[50] Z. Tan, Y. Wang 和 W. P. Wu. 黏弹性导电流体的数学建模与定性分析. 《分析与应用》(新加坡), 18(6):1077–1117, 2020年。

[51] R. Wan. 无阻尼三维不可压缩 Oldroyd-B 模型强解的最优衰减估计. 《太平洋数学杂志》, 301(2):667–701, 2019年.[52] W. P. Wu 和 Y. Wang. 三维可压缩弹性 Navier-Stokes-Poisson 方程的半空间或外部问题. *SIAM*数学分析杂志, 55(4):2996–3043, 2023年.[53] S. X. Xu, P. Sheng 和 C. Liu. 离子输运的能量变分方法. 《数学科学通讯》, 12(4):779–789, 2014年.[54] T. Zhang 和 D. Y. Fang. 临界L^p 框架下与不可压缩黏弹性流体相关方程强解的整体存在性. *SIAM*数学分析杂志, 44(4):2266–2288, 2012年.[55] Y. Zhu. 无阻尼机制三维不可压缩 Oldroyd-B 模型的整体小解. 《泛函分析杂志》, 274(7):2039–2060, 2018年.[56] Y. Zhu. 三维广义可压缩 Oldroyd-B 模型经典解的整体存在性. 《数学方法与应用科学》, 43(10):6517–6528, 2020 年 .[57] Y. Zhu. 平衡态附近三维可压缩黏弹性系统的整体经典解 . 《变分法与偏微分ff方程, 61(1):论文编号 21, 22, 2022年。

云南大学数学与统计学院，中国云南昆明 650091。电子邮箱，C.F. Ai：aicf5206@163.com

云南大学数学与统计学院，中国云南昆明 650091。电子邮箱，M. Bei：hem135428@163.com

华南师范大学数学科学学院，中国广东广州 510631 .
电子邮箱，王勇：wangyongxmu@163.com