一种罚 非自伴拓扑优化的罚函数法

WEI GONG 和 YUANDA YE

摘要。我们提出了一种新颖的罚函数法框架，通过引入凸非局部周长近似方案，以柔顺机构问题为例，解决非自伴拓扑优化问题。我们严格分析了由罚函数法导出的优化问题的解的存在性。此外，我们证明离散问题 Γ- 收敛于连续问题，从而确保不同尺度间的一致性。为求解离散问题，我们开发了一种投影梯度法，可保证目标函数严格单调下降。我们还将该框架扩展至热耗散问题，并提出一种广义材料插值函数（GMIF），以便针对性地控制所得最优设计的拓扑连通性。针对柔顺机构问题和热耗散问题开展的数值实验验证了所提方法的有效性。该框架为应对计算数学中的复杂优化挑战提供了一种稳健的方法，并有望应用于工程设计。

arXiv:2603.00962v1 [math.OC] 1 Mar 2026

1. 引言

拓扑优化已成为一种强大的设计工具，可用于确定给定区域内材料的最优分布，其应用涵盖结构力学、流体动力学、热传递和多物理场系统 [27, 5, 24, 30]。与仅针对固定拓扑构型进行优化的形状优化不同，拓扑优化允许新孔洞的萌生和现有边界的合并，因此具有显著更大的设计灵活性 [1, 24]。自 Bendsøe 和 Kikuchi 关于均匀化方法的开创性工作以来 [5] ，人们开发了许多方法，包括带惩罚的各向同性固体材料（SIMP）方法 [5], 、水平集方法 [21, 26, 25,2], 、相场方法 [18, 16], 、渐进结构优化（ESO） [28], ，以及较新的阈值动力学方法 [10, 9]。

在拓扑优化的各类问题中，非自伴问题带来了独特的数学与计算挑战。与最小柔顺度设计等自伴问题不同——在这类问题中，状态方程与伴随方程相同——非自伴问题需要分别求解状态方程和伴随方程，且目标泛函通常以非对称方式依赖于两者的解。典型例子包括柔顺机构设计，其目标是在输入力作用下最大化特定位置的输出位移；以及具有依赖于设计的热生成率的传热优化。这些问题具有非凸性、可能存在多个局部极小值，以及解对数值参数和初始猜测敏感等特点。传统上，非自伴拓扑优化问题的数值求解依赖于基于梯度的优化方法，例如移动渐近线法（MMA）或最优性准则（OC）方法 [1]。尽管这些方法在许多情况下有效，但往往存在收敛缓慢、对算法参数敏感，以及需要谨慎采用延拓策略以避免过早收敛到次优设计等问题[12]。此外，对于这些方法收敛性质的严格数学分析仍然有限（[22]），尤其是在离散形式与连续形式之间的关系方面。

近年来，阈值动力学方法作为拓扑优化的一种替代范式受到了广泛关注。这些方法最初由 Merriman、Bence和Osher（MBO）针对曲率驱动的界面运动提出 [23], ，并已成功扩展到图像分割 [13, 14], 、润湿动力学 [29], 以及流体 [17] 和结构 [9]的拓扑优化。阈值动力学方法的主要优势包括实现简单、计算效率高，以及通过卷积和阈值化自然地处理拓扑变化

2020 数学主题分类。 主要分类 54X10、58Y30、18D35；次要分类 55Z10。关键词和短语。 拓扑优化、柔顺机构、热传递、Γ-收敛、罚方法。作者得到中国科学院战略性先导科技专项 XDB0640000 和 XDB0640200、国家重点研发计划（2022YFA1004402）以及国家自然科学基金（项目编号 12494543 和 12471393）的资助。

操作，以及最重要的是，目标泛函的单调下降与周长近似相关的参数无关。然而，将阈值动力学方法直接应用于非自伴问题并非易事，因为当约束集随设计变量变化时，标准的能量衰减性质可能失效 [10]。为克服这些局限，Chen 等人[10]最近针对具有依赖于设计的热生成的传热问题，提出了一种基于预测校正的迭代卷积阈值方法（迭代卷积阈值方法）。该方法通过校正步骤，根据实际能量评估调整预测的材料更新，从而显式地保证目标泛函的单调下降。尽管有效，该方法在校正阶段需要求解额外的偏微分方程，从而增加了计算成本。此外，预测校正策略的理论基础，尤其是关于收敛到连续问题方面，仍有待充分建立。

本文提出一种针对非自伴拓扑优化问题的基于惩罚的重新表述，重点关注柔顺机构问题。我们的主要贡献如下。

（1）将原问题转化为关于应力变量的等价双层形式，随后构造单层惩罚形式，通过可微惩罚项施加状态约束。我们证明，当惩罚参数足够大时，两者等价。（2）采用 Γ-收敛进行严格的收敛分析，表明离散惩罚问题 Γ-收敛到连续问题，且离散问题的局部极小点收敛到连续问题的孤立局部极小化子。（3）所提出的广义材料插值函数（GMIF）能够针对性地控制所得最优设计的拓扑连通性。这一点对于传热问题尤为重要，因为施加厚度约束通常是出于可制造性考虑。

我们进一步建立了一个抽象理论框架，用于控制形状连通性的一类函数，并将该方法推广到热耗散问题。

本文其余部分组织如下。第 2 节介绍柔顺机构问题、其基于惩罚的重新表述以及所提出的数值算法。第 3 节给出理论结果，包括等价性证明和 Γ-收敛分析。第 4 节将所提出的罚函数法推广到传热问题，详述数值算法，并引入惩罚问题族。第 5 节给出数值结果。最后，第 6 节总结全文并讨论未来方向。

2. 柔顺机构问题的罚函数法

我们首先针对柔顺机构问题提出一种有效的收敛算法。总体思路可描述如下：

（1）将柔顺机构问题重新表述为惩罚双重最小化问题；（2）分析惩罚双重最小化问题与原始优化问题之间的等价性；（3）针对惩罚优化问题提出一种高效算法。

在推导第一部分时，我们省略周长约束，因为它不会影响推导。

2.1. 重述为惩罚双重最小化问题。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为有界利普希茨区域，且 $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ 满足 $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$。对于给定的边界力 q_{in}，$q_{\text{out}} \in L^2(\Gamma_N)$，考虑以下拓扑优化问题

$$\min_{(\chi,u)\in\mathcal{U}\times H^1_D(\Omega)^d} J(\chi,u) = \int_{\Gamma_N} q_{\text{out}} \cdot u \, ds \tag{2.1}$$

满足

$$\int_\Omega E(\chi)\varepsilon(u) : \varepsilon(\hat{u}) \, dx = \int_{\Gamma_N} q_{\text{in}} \cdot \hat{u} \, ds \quad \forall \hat{u} \in H^1_D(\Omega)^d := \{v \in H^1(\Omega)^d : \ v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}, \tag{2.2}$$

其中 $E(\chi) := (\chi E_{\max} + (1-\chi)E_{\min})E_0$，其中某个常张量为 E_0，正数为 $E_{\max}$ 和 $E_{\min}$。对于某个 $\beta \in (0, 1)$，可容许密度的集合定义为

$$\mathcal{U} := \Big\{ \chi \in BV(\Omega) : \ \chi \in \{0,1\}, \ \int_\Omega \chi \, dx \le \beta|\Omega| \Big\}.$$

这里，u 是结构在外力 q_{in} 作用下的位移，χ 是材料分布。我们希望找到最优的材料分布，以最小化柔顺度，在另一个

外力 q_{out}作用下。为简单起见，我们假设 $q_{\text{in}}, q_{\text{out}}$ 位于同一边界 Γ_N上，但可以定义在区域边界的不同部分。

问题 (2.1)-(2.2) 是一个经典的偏微分方程约束优化问题。为了计算其导数，我们采用众所周知的伴随方法。引入伴随问题：求 $v \in H_D^1(\Omega)^d$，使得

$$\int_\Omega E(\chi)\varepsilon(v) : \varepsilon(\hat{v})\ dx = \int_{\Gamma_N} q_{\text{out}} \cdot \hat{v}\ ds \quad \forall \hat{v} \in H_D^1(\Omega)^d. \tag{2.3}$$

对于任意 $u,\ v \in H_D^1(\Omega)^d$，我们定义以下双线性型和线性型：

$$a(\chi; u, v) := \int_\Omega E(\chi)\varepsilon(u) : \varepsilon(v)\ dx, \tag{2.4}$$

$$\ell_{\text{out}}(v) := \int_{\Gamma_N} q_{\text{out}} \cdot v\ ds, \quad \ell_{\text{in}}(v) := \int_{\Gamma_N} q_{\text{in}} \cdot v\ ds. \tag{2.5}$$

在 (2.2) 中令 $\hat{u} = v$，并在 (2.3) 中令 $\hat{v} = u$，可得

$$\ell_{\text{in}}(v) = a(\chi; u, v) = \ell_{\text{out}}(u). \tag{2.6}$$

因此，优化问题 (2.1)-(2.2) 可转化为以下形式：

$$\min_{(\chi,u)\in\mathcal{U}\times H_D^1(\Omega)^d} J(\chi, u) = \ell_{\text{out}}(u) \quad \text{subject to} \quad a(\chi; u, \hat{u}) = \ell_{\text{in}}(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in H_D^1(\Omega)^d. \tag{2.7}$$

注意，上述优化问题的约束方程即为欧拉-拉格朗日方程 of 以下优化问题：

$$u = \arg\min_{w\in H_D^1(\Omega)^d} \quad \frac{1}{2}a(\chi; w, w) - \ell_{\text{in}}(w).$$

若定义

$$g_{\text{in}}(\chi, w) := \frac{1}{2}a(\chi; w, w) - \ell_{\text{in}}(w), \quad g_{\text{out}}(\chi, w) := \frac{1}{2}a(\chi; w, w) - \ell_{\text{out}}(w),$$

那么显然，$-\min_{w\in H_D^1(\Omega)^d} g_{\text{in}}(\chi, w) = \frac{1}{2}a(\chi;\ u, u)$ 和 $-\min_{w\in H_D^1(\Omega)^d} g_{\text{out}}(\chi, w) = \frac{1}{2}a(\chi;\ v, v)$，其中$u$和 v 分别满足状态方程 (2.2) 和伴随方程 (2.3)。

令 v b 为伴随状态方程 (2.3) 的解。为重新表述优化问题，我们引入以下新的应力变量

$$\sigma = E(\chi)\varepsilon(u), \quad \rho = E(\chi)\varepsilon(v).$$

根据 (2.6)，我们可以将拓扑优化问题转化为以下形式 [9]:

$$\begin{aligned} &\min_{(\chi,\sigma,\varrho)\in\mathcal{U}\times S} \ \tilde{J}(\chi, \sigma, \varrho) = \int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma : \varrho\ dx \\ &\text{subject to} \quad (\sigma, \varrho) = \arg\min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S} \Big(\int_\Omega E^{-1}(\chi)(\hat{\sigma} : \hat{\sigma} + \hat{\varrho} : \hat{\varrho})\ dx \Big), \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $E^{-1}(\chi) := \Big(\Big(\frac{1}{E_{\max}} - \frac{1}{E_{\min}} \Big)\chi + \frac{1}{E_{\min}} \Big) E_0^{-1}$, S 定义为

$$S := \{(\sigma, \varrho) \in (L^2(\Omega)^{d\times d})^2 : (\sigma, \varrho)_{i,j} = (\sigma, \varrho)_{j,i},\ \nabla \cdot (\sigma, \varrho) = (0, 0),\ (\sigma, \varrho) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_N} = (q_{\text{in}}, q_{\text{out}})\}.$$

在第2.2节中，我们将证明重新表述的问题 (2.8) 与原问题 (2.7) 等价。

我们采用优化理论中广为人知的双层优化问题罚函数法，参见 [11], ，以构建一个新的优化问题

$$\min_{(\chi,\sigma,\varrho)\in\mathcal{U}\times S} L(\chi, \sigma, \varrho) := \int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma : \varrho\ dx + \lambda\Big(\tilde{g}(\chi, \sigma, \varrho) - \min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S} \tilde{g}(\chi, \hat{\sigma}, \hat{\varrho}) \Big), \tag{2.9}$$

其中 $\lambda > 0$ 为罚参数，$\tilde{g}$ 定义为

$$\tilde{g}(\chi, \sigma, \varrho) := \int_\Omega E^{-1}(\chi)(\sigma : \sigma + \varrho : \varrho)\ dx.$$

我们指出，在优化问题（2.9）中，χ、σ 和 ρ 是彼此独立的优化变量，这与优化问题（2.8）不同。在第2.2节中，我们将证明，在这一特定情形下，只要 λ 足够大，罚函数形式的优化问题（2.9）就等价于优化问题（2.8）。

当然，我们也可以从涉及位移变量的原问题出发，推导出另一种罚函数形式

(2.10)
$$\min_{(\chi,u,v)\in\mathcal{U}\times[H_D^1(\Omega)^d]^2} L(\chi)=\ell_{\text{out}}(u)+\lambda\Big(g_{\text{in}}(\chi,u)+g_{\text{out}}(\chi,v)-\min_{(\hat{u},\hat{v})\in[H_D^1(\Omega)^d]^2}(g_{\text{in}}(\chi,\hat{u})+g_{\text{out}}(\chi,\hat{v}))\Big).$$

然而，当 λ 足够大时，这种罚函数形式 (2.10) 并不具有与原问题 (2.7) 等价的性质。因此，我们在此不作深入讨论。不过，这种形式也有其优点，可以处理存在设计相关体力的情况。在数值实验中，我们采用上述位移公式实现了罚函数法。如果罚参数 λ 足够大，我们可以观察到与基于应力变量的罚函数形式得到的最优形状相似的结果。

2.2. **原问题与罚函数形式之间的等价性**。首先，我们证明以下引理，它揭示了我们提出的最小化问题与线弹性方程之间的等价性。

引理 2.1。最小化问题的一阶最优性条件

(2.11)
$$\min_{\sigma\in S_1}\int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma:\sigma\ dx$$

可表征如下

(2.12)
$$\begin{cases}\sigma=E(\chi)\varepsilon(\lambda) & in\ \Omega,\\ \nabla\cdot\sigma=0 & in\ \Omega,\\ \lambda=0 & on\ \Gamma_D,\\ \lambda=-\mu,\quad \sigma\cdot\vec{n}=q_{\text{in}} & on\ \Gamma_N,\end{cases}$$

其中

$$S_1:=\{\sigma\in L^2(\Omega)^{d\times d}:\sigma_{i,j}=\sigma_{j,i},\ \nabla\cdot\sigma=0,\ \sigma\cdot\vec{n}|_{\Gamma_N}=q_{\text{in}}\}.$$

证明。 首先，我们引入函数空间

$$S_0:=\{\sigma\in L^2(\Omega)^{d\times d}:\sigma_{i,j}=\sigma_{j,i}\}$$

并构造如下拉格朗日泛函 $L:\ S_0\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\sigma,\lambda,\mu)=\frac{1}{2}\int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma:\sigma\ dx+\int_\Omega(\nabla\cdot\sigma)\cdot\lambda\ dx+\int_{\Gamma_N}(\sigma\cdot\vec{n}-q_{\text{in}})\cdot\mu\ ds.$$

然后，我们可以推导出如下的一阶最优性条件:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}(\hat{\lambda})&=\int_\Omega\nabla\cdot\sigma\cdot\hat{\lambda}\ dx=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu}(\hat{\mu})&=\int_{\Gamma_N}(\sigma\cdot\vec{n}-q_{\text{in}})\cdot\hat{\mu}\ ds=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma}(\hat{\sigma})&=\int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma:\hat{\sigma}\ dx+\int_\Omega(\nabla\cdot\hat{\sigma})\cdot\lambda\ dx+\int_{\Gamma_N}\hat{\sigma}\cdot\vec{n}\cdot\mu\ ds=0,\end{aligned}$$

其中 $\hat{}\lambda\in H^1(\Omega)$、$\hat{}\mu\in H^1(\Omega)$ 和 $\hat{}\sigma\in S_0$。对于最后一个方程，我们有

$$\begin{aligned}0&=\int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma:\hat{\sigma}\ dx+\int_\Omega(\nabla\cdot\hat{\sigma})\cdot\lambda\ dx+\int_{\Gamma_N}\hat{\sigma}\cdot\vec{n}\cdot\mu\ ds\\ &=\int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma:\hat{\sigma}\ dx+\int_{\Gamma_N\cup\Gamma_D}\hat{\sigma}\cdot\vec{n}\cdot\lambda\ dx-\int_\Omega\hat{\sigma}:\nabla\lambda\ dx+\int_{\Gamma_N}\hat{\sigma}\cdot\vec{n}\cdot\mu\ ds\\ &=\int_\Omega(E^{-1}(\chi)\sigma-\varepsilon(\lambda)):\hat{\sigma}\ dx+\int_{\Gamma_D}\hat{\sigma}\cdot\vec{n}\cdot\lambda\ dx+\int_{\Gamma_N}\hat{\sigma}\cdot\vec{n}\cdot(\lambda+\mu).\end{aligned}$$

任取 $\hat{}\sigma\in S_0$，我们可以推导出 $E^{-1}(\chi)\sigma=\varepsilon(\lambda)$。令 $\hat{}\sigma\in S_0$ 和 $\hat{}\sigma\cdot\vec{n}|_{\Gamma_N}=0$，可得 $\lambda=0$ 在 Γ_D. 上。最后，令 $\hat{}\sigma\in H(\text{div};\Omega)$，可得 $\lambda=-\mu$ 在 Γ_N. 上。因此，结论得证，其中 λ 和 μ 是拉格朗日乘子。□

这里需要指出，问题 (2.11) 是一个严格凸优化问题，因此其解是唯一的（如果解存在），且一阶最优性条件是必要且充分的。另一方面，一阶最优性条件对应于线弹性方程。因此，我们证明了问题 (2.11) 的解的存在唯一性。这也证明了

优化问题 $\min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S}\tilde{g}(\chi,\hat{\sigma},\hat{\varrho})$ 的解的存在唯一性。因此，我们可以证明以下定理。

定理 2.2。 问题 (2.7) 等价于问题 (2.8)，因为二者是同一问题的不同表述形式。具体而言，(2.7)以位移场作为状态变量，而(2.8) 以应力场作为状态变量。

证明。 设 u^* 和 v^* 分别为状态方程 (2.2) 和伴随状态方程 (2.3) 的解。我们在引理 2.1 中已经证明，问题 (2.8) 的约束实质上等价于求解两个线弹性方程，其中 $\sigma^*=E(\chi)\varepsilon(u^*)$ 和 $\varrho^*=E(\chi)\varepsilon(v^*)$ 分别是与状态方程 (2.2) 和伴随方程 (2.3) 相对应的应力场。因此，我们有

$$\tilde{J}(\chi,\sigma^*,\varrho^*)=\int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma^*:\varrho^*\,dx=\int_\Omega E(\chi)\varepsilon(u^*):\varepsilon(v^*)\,dx=a(\chi;u^*,v^*)=\ell_{\mathrm{out}}(u^*)=J(\chi,u^*),$$

这证明了问题 (2.7) 与问题 (2.8) 等价。 □

在 下文中，我们证明问题 (2.8) 与罚函数形式 (2.9) 等价 .

定理 2.3. 给定 $\lambda>1/2$，有

$$\min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S}L(\chi,\hat{\sigma},\hat{\varrho})=\tilde{J}(\chi,\sigma^*,\varrho^*), \tag{2.13}$$

其中 $(\sigma^*,\varrho^*)\in\arg\min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S}\tilde{g}(\chi,\hat{\sigma},\hat{\varrho})$。

证明。 首先，设 u^* 和 v^* 分别为（2.2）和（2.3）的解。我们注意到

$$\sigma^*=E(\chi)\varepsilon(u^*),\quad \varrho^*=E(\chi)\varepsilon(v^*). \tag{2.14}$$

接下来，我们证明当 $\lambda>1/2$、$L(\chi,\sigma^*,\varrho^*)=\min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S}L(\chi,\hat{\sigma},\hat{\varrho})$ 时。注意

$$\begin{aligned}
L(\chi,\hat{\sigma},\hat{\varrho})-L(\chi,\sigma^*,\varrho^*)&=\int_\Omega E^{-1}(\chi)\hat{\sigma}:\hat{\varrho}\,dx+\lambda\Big(\int_\Omega E^{-1}(\chi)(\hat{\sigma}:\hat{\sigma}+\hat{\varrho}:\hat{\varrho})\,dx\Big)\\
&\quad-\lambda\Big(\int_\Omega E^{-1}(\chi)(\sigma^*:\sigma^*+\varrho^*:\varrho^*)\,dx\Big)-\int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma^*:\varrho^*\,dx\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega E^{-1}(\chi)(\hat{\sigma}+\hat{\varrho}):(\hat{\sigma}+\hat{\varrho})\,dx+\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\tilde{g}(\chi,\hat{\sigma},\hat{\varrho})\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_\Omega E^{-1}(\chi)(\sigma^*+\varrho^*):(\sigma^*+\varrho^*)\,dx-\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\tilde{g}(\chi,\sigma^*,\varrho^*).
\end{aligned}$$

由于 $(\sigma^*,\varrho^*)\in\arg\min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S}\tilde{g}(\chi,\hat{\sigma},\hat{\varrho})$，我们只需证明

$$(\sigma^*+\varrho^*)\in\arg\min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S}\int_\Omega E^{-1}(\chi)(\hat{\sigma}+\hat{\varrho}):(\hat{\sigma}+\hat{\varrho})\,dx.$$

事实上，由以下事实可得 (σ^*,ϱ^*)，$(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega E^{-1}(\chi)(\hat{\sigma}+\hat{\varrho}):(\hat{\sigma}+\hat{\varrho})\,dx-\int_\Omega E^{-1}(\chi)(\sigma^*+\varrho^*):(\sigma^*+\varrho^*)\,dx\\
&=\int_\Omega E^{-1}(\chi)|\hat{\sigma}+\hat{\varrho}-\sigma^*-\varrho^*|^2\,dx+2\int_\Omega E^{-1}(\chi)(\sigma^*+\varrho^*):(\hat{\sigma}+\hat{\varrho}-\sigma^*-\varrho^*)\,dx\\
&=\int_\Omega E^{-1}(\chi)|\hat{\sigma}+\hat{\varrho}-\sigma^*-\varrho^*|^2\,dx+2\int_\Omega(\varepsilon(u^*)+\varepsilon(v^*)):(\hat{\sigma}+\hat{\varrho}-\sigma^*-\varrho^*)\,dx\\
&=\int_\Omega E^{-1}(\chi)|\hat{\sigma}+\hat{\varrho}-\sigma^*-\varrho^*|^2\,dx-2\int_\Omega(u^*+v^*)\cdot\nabla\cdot(\hat{\sigma}+\hat{\varrho}-\sigma^*-\varrho^*)\,dx\\
&\quad+2\int_{\Gamma_D\cup\Gamma_N}(u^*+v^*)\cdot(\hat{\sigma}+\hat{\varrho}-\sigma^*-\varrho^*)\cdot\vec{n}\,ds\\
&=\int_\Omega E^{-1}(\chi)|\hat{\sigma}+\hat{\varrho}-\sigma^*-\varrho^*|^2\,dx\geq 0.
\end{aligned}$$

上述不等式表明，我们已找到一个极小化者，因此该问题有解。因此，无需进一步讨论解的存在性。证明至此结束。□

因此，我们可以立即证明，柔顺机构问题 (2.7) 等价于以下双重最小化问题：

$$\min_{\chi\in\mathcal{U}}\min_{(\sigma,\varrho)\in S} L(\chi,\sigma,\varrho). \tag{2.15}$$

此外，　　内层最小化问题的解可以通过求解状态方程获得　　n

$$a(\chi;u,\hat{u}) = \ell_{\text{in}}(\hat{u}) \quad \forall \hat{u}\in H_D^1(\Omega)^d, \tag{2.16}$$

伴随状态方程

$$a(\chi;v,\hat{v}) = \ell_{\text{out}}(\hat{v}) \quad \forall \hat{v}\in H_D^1(\Omega)^d, \tag{2.17}$$

并令 $\sigma = E(\chi)\varepsilon(u)$， $\rho = E(\chi)\varepsilon(v)$。

2.3. 优化算法的推导。由于 $\mathcal{U}$ 不是凸集，因此分析目标泛函关于 χ的性质颇具挑战。为此，我们首先将 χ 松弛为其¯凸包 $\mathcal{U}$，并考虑以下双重最小化问题

$$\min_{\chi\in\bar{\mathcal{U}}}\min_{(\sigma,\rho)\in S} L(\chi,\sigma,\varrho) := \int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma:\varrho\ dx + \lambda\left(\tilde{g}(\chi,\sigma,\varrho) - \min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S}\tilde{g}(\chi,\hat{\sigma},\hat{\varrho})\right), \tag{2.18}$$

其中

$$\bar{\mathcal{U}} := \Big\{\chi\in BV(\Omega):\ \chi\in[0,1], \int_\Omega \chi\ dx \le \beta|\Omega|\Big\}.$$

应当指　　¯出，由于将 χ 从 $\mathcal{U}$ 松弛到 $\mathcal{U}$，一些先前成立的方程不　　o
再成立　，例如：

$$a(\chi;u,v) = \int_\Omega E(\chi)\varepsilon(u):\varepsilon(v)\ dx \neq \int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma:\varrho\ dx \quad \text{for some } \chi\in\bar{\mathcal{U}}, \tag{2.19}$$

因为当 $\chi\in[0,1]$时， $E^{-1}(\chi) \neq E(\chi)^{-1}$。因此，对于属于闭凸集 $\bar{\mathcal{U}}$的 χ，我们引入以下记号：

$$E(\chi) = \frac{1}{A(\chi)}E_0, \quad E^{-1}(\chi) = A(\chi)E_0^{-1}, \tag{2.20}$$

and

$$A(\chi) = \Big(\frac{1}{E_{\max}} - \frac{1}{E_{\min}}\Big)\chi + \frac{1}{E_{\min}}.$$

显然，当 $\chi\in\mathcal{U}$ 是指示函数时，以下等式成立

$$\frac{1}{A(\chi)} = (E_{\max}-E_{\min})\chi + E_{\min}.$$

因此，这些定义是对第2.1节中定义的 $E^{-1}(\chi)$ 和 $E(\chi)$ 的合理扩展。

Through输出 t h仍然存在 der of th在本文中，我们重新define $a(^{\chi;\ u,\ v})$: $L^\infty(\Omega)\times H_D^1(\Omega)^d\times H_D^1(\Omega)^{d\ \to\ \mathbb{R}}$ 如下所示

$$a(\chi;u,v) := \int_\Omega \frac{1}{A(\chi)}E_0\varepsilon(u):\varepsilon(v)\ dx. \tag{2.21}$$

当然，这样的扩展也会带来一个问题，即以应力场和位移场表述的优化问题本质上是两个不同的问题，在 $\mathcal{U}$ 上具有不同的性质。这正是将问题转换为应力场形式能够提升数值性能的原因。然而，在理论分析部分，我们需要清楚地阐明转换各个步骤之间的关系。

首先，我们推导 L 关于 χ 的弗雷歇导数。

引理 2.4。定义

$$G(\chi) = \min_{(\hat{\sigma},\hat{\varrho})\in S}\tilde{g}(\chi,\hat{\sigma},\hat{\varrho}) := \int_\Omega A(\chi)E_0^{-1}(\hat{\sigma}:\hat{\sigma}+\hat{\varrho}:\hat{\varrho})\ dx,$$

那么根据引理 *2.1*，我们有

$$G(\chi) = \int_\Omega A(\chi)E_0^{-1}\big(\sigma(\chi):\sigma(\chi)+\varrho(\chi):\varrho(\chi)\big)\ dx.$$

这里，我们将与 χ 对应的应力场记为 $\sigma(\chi) := \underset{A}{1}(\chi)E_0\varepsilon(u)$ 以及 $\varrho(\chi) := \underset{A}{1}(\chi)E_0\varepsilon(v)$，以强调它们对 χ的依赖，其中 $u \in H_D^1(\Omega)^d$ 和 $v \in H_D^1(\Omega)^d$ 满足

$$\int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(\hat{u})\ dx = \int_{\Gamma_N} q_{\text{in}} \cdot \hat{u}\ ds \quad \forall \hat{u} \in H_D^1(\Omega)^d \tag{2.22}$$

and

$$\int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(v) : \varepsilon(\hat{v})\ dx = \int_{\Gamma_N} q_{\text{out}} \cdot \hat{v}\ ds \quad \forall \hat{v} \in H_D^1(\Omega)^d. \tag{2.23}$$

此外，有

$$\frac{\partial G}{\partial \chi}(\chi)(\hat{\chi}) = \int_\Omega A'(\chi)(\hat{\chi})E_0^{-1}(\sigma(\chi) : \sigma(\chi) + \varrho(\chi) : \varrho(\chi))\ dx.$$

证明。 根据 $\sigma(\chi)$ 和 $\rho(\chi)$ 的定义， $G(\chi)$ 可转化为

$$G(\chi) = \int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0(\varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \varepsilon(v) : \varepsilon(v))\ dx. \tag{2.24}$$

由于 $G(\chi)$ 的两个分量形式相同，我们仅考虑以下泛函

$$j(\chi) = \int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\ dx$$

约束条件为

$$\int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(\hat{u})\ dx = \int_{\Gamma_N} q_{\text{in}} \cdot \hat{u}\ ds \quad \forall \hat{u} \in H_D^1(\Omega)^d.$$

因此，其拉格朗日泛函如下

$$\ell(\chi, u, \hat{u}) = \int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\ dx + \int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(\hat{u})\ dx - \int_{\Gamma_N} q_{\text{in}} \cdot \hat{u}\ ds.$$

显然可得 $\hat{u} = -2u$。因此，

$$\frac{\partial j}{\partial \chi}(\chi)(\hat{\chi}) = \int_\Omega \frac{A'(\chi)\hat{\chi}}{A(\chi)^2} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\ dx.$$

此外，由于 $\sigma(\chi) = \underset{A}{1}(\chi)E_0\varepsilon(u)$，可得

$$\frac{\partial j}{\partial \chi}(\chi)(\hat{\chi}) = \int_\Omega A'(\chi)(\hat{\chi})E_0^{-1}\sigma(\chi) : \sigma(\chi)\ dx.$$

因此，

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \chi}(\chi)(\hat{\chi}) &= \int_\Omega \frac{A'(\chi)(\hat{\chi})}{A(\chi)^2} E_0(\varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \varepsilon(v) : \varepsilon(v))\ dx \\ &= \int_\Omega A'(\chi)(\hat{\chi})E_0^{-1}(\sigma(\chi) : \sigma(\chi) + \varrho(\chi) : \varrho(\chi))\ dx. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

由引理 2.4，可直接得到 L 的弗雷歇导数如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \chi}(\chi, \sigma, \varrho)(\hat{\chi}) = \int_\Omega A'(\chi)(\hat{\chi})E_0^{-1}\sigma : \varrho\ dx + \lambda\Big(\int_\Omega A'(\chi)(\hat{\chi})E_0^{-1}(\sigma : \sigma + \varrho : \varrho)\ dx \\ - \int_\Omega A'(\chi)(\hat{\chi})E_0^{-1}(\sigma(\chi) : \sigma(\chi) + \varrho(\chi) : \varrho(\chi))\ dx\Big). \end{aligned} \tag{2.25}$$

特别地，若 $(\sigma, \varrho) = (\sigma(\chi), \varrho(\chi))$，则

$$\frac{\partial L}{\partial \chi}(\chi, \sigma(\chi), \varrho(\chi))(\hat{\chi}) = \int_\Omega A'(\chi)(\hat{\chi})E_0^{-1}\sigma(\chi) : \varrho(\chi)\ dx. \tag{2.26}$$

接下来，我们证明 $\min_{(\sigma,\varrho)\in S} \tilde{g}(\chi, \sigma, \varrho)$ 关于 χ 是凹的。我们只需证明以下引理。

引理 2.5。 该泛函

$$g_1(\chi) = \min_{\sigma \in S_1} \int_\Omega E^{-1}(\chi)\sigma : \sigma\ dx$$

关于 χ 是凹的。

P证明。 这可由引理 2.4 的证明得出 that

$$g_1(\chi) = \int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\ dx,$$

其中， u 满足状态方程 (2.22)。这里，我们不采用拉格朗日方法，而是使用隐函数定理。记 $u' = \frac{\partial u}{\partial \chi}($ $\hat{}\chi)$ 和 $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2}(\hat{}\chi^2)$，根据链式法则，我们可以计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g_1}{\partial \chi^2}(\hat{\chi}^2) =& 2\int_\Omega \frac{[A'(\chi)(\hat{\chi})]^2}{A(\chi)^3} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\ dx - 4\int_\Omega \frac{A'(\chi)(\hat{\chi})}{A(\chi)^2} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u')\ dx \\ &+ 2\int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u') : \varepsilon(u')\ dx + 2\int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u'')\ dx.\end{aligned}$$

对 (2.22) 中的 χ 求导，得到

$$-\int_\Omega \frac{A'(\chi)(\hat{\chi})}{A(\chi)^2} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(\hat{u})\ dx + \int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u') : \varepsilon(\hat{u})\ dx = 0,$$

$$2\int_\Omega \frac{[A'(\chi)(\hat{\chi})]^2}{A(\chi)^3} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(\hat{u})\ dx - 2\int_\Omega \frac{A'(\chi)(\hat{\chi})}{A(\chi)^2} E_0\varepsilon(u') : \varepsilon(\hat{u})\ dx + \int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u'') : \varepsilon(\hat{u})\ dx = 0$$

对于任意 $\hat{}u \in H_D^1(\Omega)^d$ 均成立。因此，在第一个方程中令 $\hat{}u = u'$ ，可得

$$\int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u') : \varepsilon(u')\ dx = \int_\Omega \frac{A'(\chi)(\hat{\chi})}{A(\chi)^2} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u')\ dx, \tag{2.27}$$

而在第二个方程中令 $\hat{}u = u$ ，可得

$$\int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u'') : \varepsilon(\hat{u})\ dx = -2\int_\Omega \frac{[A'(\chi)(\hat{\chi})]^2}{A(\chi)^3} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\ dx + 2\int_\Omega \frac{A'(\chi)(\hat{\chi})}{A(\chi)^2} E_0\varepsilon(u') : \varepsilon(u)\ dx.$$

在 (2.27) 中应用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u') : \varepsilon(u')\ dx \le \int_\Omega \frac{[A'(\chi)(\hat{\chi})]^2}{A(\chi)^3} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\ dx. \tag{2.28}$$

因此

$$\frac{\partial^2 g_1(\chi, u, v)}{\partial \chi^2}(\hat{\chi})(\hat{\chi}) = -2\int_\Omega \frac{[A'(\chi)(\hat{\chi})]^2}{A(\chi)^3} E_0\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\ dx + 2\int_\Omega \frac{1}{A(\chi)} E_0\varepsilon(u') : \varepsilon(u')\ dx \le 0.$$

证明至此完成。 □

$\tilde{}$由于 J 和 $\tilde{g}$ 关于 χ是线性泛函，由引理 2.5 可知， $L(\chi, \sigma, \rho) =\sim J(\chi, \sigma, \rho) + \lambda(\tilde{g}(\chi, \sigma, \rho) - \min_{(\hat{\sigma}, \hat{\varrho}) \in S} \tilde{g}$ $(\chi, \hat{}\sigma, \hat{}\rho))$关于 χ是凸的。

为了确 保解的存在性，我们需要向 L添加周长惩罚项。我们考虑 e 正则化 问题

$$L^\gamma(\chi, \sigma, \varrho) = L(\chi, \sigma, \varrho) + \gamma\|\chi\|_{TV}, \tag{2.29}$$

其中， $\|\cdot\|_{TV}$表示有界变差函数空间中的全变差范数。值得注意的是，全变差范数在计算上具有挑战性，因此在实现中通常采用近似的周长正则化。为了保持目标泛函的凸性，我们引入周长近似，从而得到以下近似目标泛函:

$$L^{\gamma,\epsilon}(\chi, \sigma, \varrho) = L(\chi^\epsilon, \sigma, \varrho) + \frac{\gamma}{\epsilon} P_{G_\epsilon}(\chi), \tag{2.30}$$

其中， $\chi^\epsilon := G_\epsilon * \chi$ ，族 $\{G_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\}_\epsilon$ 是一个狄拉克序列。

具体而言，我们假设 G 是一个满足 $\int_{\mathbb{R}^d} G(x)\,dx = 1$的光滑核。我们定义 $G_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d} G\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$，这是出于理论分析的需要而引入的，并且

$$P_{G_\epsilon}(\chi) := \frac{1}{2}\int_\Omega \int_\Omega G_\epsilon(x - y)|\chi(x) - \chi(y)|\ dxdy. \tag{2.31}$$

可以证明，当 $C > 0$ 为常数时，非局部凸近似 $\frac{C}{\epsilon} P_{G_\epsilon}(\chi)$ Γ-收敛于 $\|\chi\|_{TV}$，更多细节请参阅 [20]。

我们可以给出该泛函的一个次导数，如下所示：2.32

( )

$$\partial P_{G_\epsilon}(\chi) = \Big\{ g \in L^\infty(\Omega) \mid \langle g, \tilde{\chi} \rangle = \int_\Omega \Big(\int_\Omega G_\epsilon(x-y)\xi(x,y)dy \Big) \tilde{\chi}(x)\, dx,\ \xi(x,y) \in \operatorname{sign}(\chi(x) - \chi(y)) \Big\}.$$

因此，我们得到一个能够高效执行的优化问题 P

(2.33)

$$\min_{(\chi,\sigma,\rho)\in\mathcal{U}\times S} L^{\gamma,\epsilon}(\chi,\sigma,\varrho) = \int_\Omega A(\chi^\epsilon)E_0^{-1}\sigma : \varrho\, dx + \lambda\Big(\int_\Omega A(\chi^\epsilon)E_0^{-1}(|\sigma|^2 + |\varrho|^2 - |\sigma^*|^2 - |\varrho^*|^2)\, dx \Big) + \frac{\gamma}{\epsilon} P_{G_\epsilon}(\chi).$$

我们再次强调，该双重最小化问题的内层极小化者可以通过求解相应的线弹性方程得到，而外层最小化是一个非凸¯优化问题。然而，我们已证明目标泛函 $L^{\gamma,\,\epsilon}$ 在 $\mathcal{U}$上是凸的。因此，我们采用投影梯度算法。

设 χ_k 为当前迭代点，$(\sigma_k,\ \varrho_k)$ 为相应内层最小化问题的解。我们首先在 $L^\infty(\Omega)$ 中执行一次梯度下降更新：

$$\bar{\chi}_{k+1} = \arg\min_{\chi\in L^\infty(\Omega)} \Big\{ L^{\gamma,\epsilon}(\chi_k,\sigma_k,\varrho_k) + \Big\langle \frac{\partial L^{\gamma,\epsilon}}{\partial \chi}(\chi_k,\sigma_k,\varrho_k), \chi - \chi_k \Big\rangle + \frac{1}{2r}\|\chi - \chi_k\|_{0,\Omega}^2 \Big\}. \tag{2.34}$$

然后，我们将得到的极小化者 $\bar{\chi}_{k+1}$ 投影到 $\mathcal{U}$

$$\chi_{k+1} = \mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\bar{\chi}_{k+1}). \tag{2.35}$$

下面，我们推导梯度下降更新 (2.34) 和投影 (2.35) 的显式计算形式。首先，对于梯度下降更新，关键在于次梯度的选择。这里，我们选择

$$\langle g_k, \tilde{\chi} \rangle = \int_\Omega \Big(\int_\Omega G_\epsilon(x-y)(\chi_k(x) - \chi_k(y))\, dy \Big) \tilde{\chi}(x)\, dx,$$

使得 $g_k \in \partial P_{G_\epsilon}(\chi)$。回顾式 (2.26)，计算过程如下：

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \frac{\partial L^{\gamma,\epsilon}}{\partial \chi}(\chi_k,\sigma_k,\varrho_k), \chi - \chi_k \Big\rangle \\
&= \Big\langle \frac{\partial L(\chi_k^\epsilon,\sigma_k,\varrho_k)}{\partial \chi}, \chi - \chi_k \Big\rangle + \frac{\gamma}{\epsilon}\langle g_k, \chi - \chi_k \rangle \\
&= \int_\Omega A'(G_\epsilon * (\chi - \chi_k))E_0^{-1}\sigma_k : \varrho_k\, dx + \frac{\gamma}{\epsilon}\int_\Omega \Big(\int_\Omega G_\epsilon(x-y)(\chi_k(x) - \chi_k(y))dy \Big)(\chi(x) - \chi_k(x))\, dx \\
&= \int_\Omega (\chi - \chi_k)\Big(\frac{1}{E_{\max}} - \frac{1}{E_{\min}} \Big) G_\epsilon * (E_0^{-1}\sigma_k : \varrho_k)\, dx + \frac{\gamma}{\epsilon}\int_\Omega (\chi - \chi_k)(\chi_k - G_\epsilon * \chi_k)\, dx.
\end{aligned}$$

最后一个等式是通过将函数延拓为零，然后利用卷积的性质得到的。因此，我们有

$$\bar{\chi}_{k+1} = \chi_k - r\Big(\Big(\frac{1}{E_{\max}} - \frac{1}{E_{\min}} \Big) G_\epsilon * (E_0^{-1}\sigma_k : \varrho_k) + \frac{\gamma}{\epsilon}(\chi_k - G_\epsilon * \chi_k) \Big). \tag{2.36}$$

接下来，我们讨论投影的计算问题。投影的关键在于定义投影所采用的范数；不同的范数会产生不同的投影结果，直接影响我们对收敛性的研究。这里，我们采用 L^1 范数。

容易看出，对于任意 L^p 范数，投影结果都是如下定义的元素：令$c_{k+1} = \inf\{c \in \mathbb{R} : \mu(\{x :\ \bar{\chi}_{k+1}(x) > c\}) \le \beta|\Omega|\}$，则

$$\chi_{k+1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{\chi}_{k+1}(x) > c_{k+1}, \\ 0 & \text{if } \bar{\chi}_{k+1}(x) \le c_{k+1}, \end{cases} \tag{2.37}$$

其中 μ 是 $\mathbb{R}^d$的测度。

利用更新公式 (2.36) 和 (2.37)，我们可以轻松得到一个估计 χ_{k+1}。然而，步长 r 应谨慎选择。因此，我们需要调整 r 的大小，以获得合适的 χ_{k+1}。这里，我们不采用经典的 Wolfe条件，因为离散层面上的外层优化问题是一个 0-1规划问题。只需确保目标函数下降即可。因此，我们使用二分搜索来找到合适的 r，从而完成一次迭代。

显然，r 的搜索区间的选择会显著影响迭代次数，进而影响算法的效率。通过仔细考察更新步骤和投影步骤，

在投影梯度算法中，我们观察到：若更新不改变 χ_k 取值为1和0的点的相对顺序，则 $\bar{\chi}_{k+1} = \chi_k$。因此，我们可以选择

$$r_{\min} = \frac{1}{2} \sup_{x \in \Omega} \Big(\Big(\frac{1}{E_{\max}} - \frac{1}{E_{\min}} \Big) G_\epsilon * (E_0^{-1} \sigma_k : \varrho_k) + \frac{\gamma}{\epsilon} (\chi_k - G_\epsilon * \chi_k) \Big)^{-1},$$

虽然 $r_{\max}$ 的选择相对任意，只要满足 $r_{\max} > r_{\min}$ 即可。从 $r_{\max}$ 得到的 $\bar{\chi}_{k+1}$ 属于以下三种情况之一:

(1) 如果 $\bar{\chi}_{k+1}$ 使目标函数减小，则可以终止搜索，并设置 $\chi_{k+1} \leftarrow \bar{\chi}_{k+1}$; (2) 如果 $\bar{\chi}_{k+1} = \chi_k$，我们更新 $r_{\min} \leftarrow r_{\max}$ 并选择更大的 $r_{\max}$; (3) 如果 $\bar{\chi}_{k+1}$ 使目标函数增大，则表明 $r_{\max}$ 过大，我们可以在此区间内进行线搜索。

2.4. **算法的数值实现**。 下面，我们以伪代码的形式介绍该算法的数值实现。

算法 1 步长线搜索算法

1: 初始化 $r_{\min}$、$r_{\max}$、Δ，并令 $r = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$。 2: while 1 do 3: 使用 (2.36) 计算 $\bar{\chi}$。 4: 使用 (2.37) 计算 $\bar{\chi}_{k+1}$。 5: 计算 L^γ、$^\epsilon(\bar{\chi}_{k+1}, \sigma_k, \varrho_k)$ 6: 7: if $L^{\gamma,\epsilon}(\bar{\chi}_{k+1}, \sigma_k, \varrho_k) > L^{\gamma,\epsilon}(\chi_k, \sigma_k, \varrho_k)$ then 8: $r_{\max} \leftarrow r$。 9: 10: if $\|\bar{\chi}_{k+1} - \chi_k\|_1 \le \Delta$ then 11: $\chi_{k+1} \leftarrow \chi_k$，跳出循环； 12: 13: end if 14: 15: else if $L^{\gamma,\epsilon}(\bar{\chi}_{k+1}, \sigma_k, \varrho_k) < L^{\gamma,\epsilon}(\chi_k, \sigma_k, \varrho_k)$ then 16: $\chi_{k+1} \leftarrow \bar{\chi}_{k+1}$，跳出循环; 17: 18: else if $L^{\gamma,\epsilon}(\bar{\chi}_{k+1}, \sigma_k, \varrho_k) = L^{\gamma,\epsilon}(\chi_k, \sigma_k, \varrho_k)$ 且 $\|\bar{\chi}_{k+1} - \chi_k\|_1 > \Delta$ t hen 19: $r_{\max} \leftarrow r$。 20: 21: end if 22: 23: if $\bar{\chi}_{k+1} == \chi^k$ then 24: $r_{\min} \leftarrow r$。 25: 26: end if 27: $r = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$。 28: end while 29: 返回新的密度 χ_{k+1} 和函数值 $L^{\gamma,\epsilon}(\chi_{k+1}, \sigma_k, \varrho_k)$。

需要注意的是，我们在此引入参数 Δ，用于终止线搜索并返回 χ_k：当沿下降方向将 χ_k 改变 Δ（按 L^1的意义）会导致目标函数值增加时，即终止线搜索。这实际上会终止整个优化算法。在离散层面，我们可以选择 $\Delta = C\mu(h)$，其中 h 表示有限元的网格尺寸。

3. 收敛性的理论分析

本节将从抽象视角研究所提出算法的收敛性。首先，统一符号：带下标 n 的变量表示离散问题中的变量，它们随网格大小 h_n 变化；不带下标 n 的变量则表示连续问题中的变量。为清晰呈现分析过程并方便符号表达，我们重述这三个优化问题。引入符号 $X_n = \mathcal{U}_n \times S_n$ 和 $X = \mathcal{U} \times S$，其中 $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$

算法 2 柔顺机构问题的梯度下降算法

1: 初始化 $k=0$, χ_k （初始值通常设为均匀分布，且 $\chi_k=\beta$），以及参数 λ, γ, ϵ, Δ。

2: 当 χ_k 未收敛时，执行 3: 求解 $a(\chi_k^\epsilon; u, \hat{u}) = \ell_{\text{in}}(\hat{u})$ $\forall \hat{u} \in H_D^1(\Omega)^d$ 和 $a(\chi_k^\epsilon; v, \hat{v}) = \ell_{\text{out}}(\hat{u})$ $\forall \hat{v} \in H_D^1(\Omega)^d$。4: 计算 $\left(\frac{1}{E_{\max}} - \frac{1}{E_{\min}}\right) G_\epsilon * (E_0^{-1}\sigma_k : \varrho_k) + \frac{\gamma}{\epsilon}($ $\chi_k - G_\epsilon * \chi_k)$。5: 使用算法 1 更新 χ_k。6: $k \leftarrow k+1$。7: 结束循环 8: 返回最优密度 χ^* 和函数值 $L^{\gamma,\epsilon}(\chi^*, \sigma^*, \varrho^*)$。

由分片常数有限元函数组成，且 S_n 表示相容有限元空间。

3.1. 问题描述。 原始问题 Q定义如下:

$$\min_{(\chi,\sigma,\varrho)\in X} L^{\gamma,0}(\chi,\sigma,\varrho) = L^0(\chi,\sigma,\varrho) + \frac{\gamma}{C_G}\|\chi\|_{TV}, \tag{3.1}$$

其中 $C_G := \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{\|\chi\|_{TV}}{P_{G_\epsilon}(\chi)/\epsilon}$，且

$$L^0(\chi,\sigma,\varrho) := \int_\Omega A(\chi)E_0^{-1}\sigma : \varrho \, dx + \lambda\Big(\int_\Omega A(\chi)E_0^{-1}(|\sigma|^2 + |\varrho|^2 - |\sigma^*|^2 - |\varrho^*|^2)\, dx\Big).$$

这里 $(\sigma^*, \varrho^*) := (A^1(\chi)E_0\varepsilon(u^*)$ $A^1(\chi)E_0\varepsilon(u^*))$，其中

$$(u^*, v^*) = \arg\min_{(u,v)\in[H_D^1(\Omega)^d]^2} \Big(\frac{1}{2}(a(\chi;u,u) + a(\chi;v,v) - \ell_{\text{in}}(u) - \ell_{\text{out}}(v)\Big).$$

函数 (σ, ϱ) 与 χ 无关，而 (σ^*, ϱ^*) 依赖于 χ（在我们的应用中，它们是偏微分方程的解）。

连续问题 P 表示为

$$\min_{(\chi,\sigma,\varrho)\in X} L^{\gamma,\epsilon_k}(\chi,\sigma,\varrho) = L^{\epsilon_k}(\chi^{\epsilon_k},\sigma,\varrho) + \frac{\gamma}{\epsilon_k}P_{G_{\epsilon_k}}(\chi), \tag{3.2}$$

其中 $\chi^{\epsilon_k} := G_{\epsilon_k} * \chi$, $\epsilon_k \to 0$ 为 $k \to +\infty$ 且

$$L^{\epsilon_k}(\chi^{\epsilon_k},\sigma,\varrho) := \int_\Omega A(\chi^{\epsilon_k})E_0^{-1}\sigma : \varrho \, dx + \lambda\Big(\int_\Omega A(\chi^{\epsilon_k})E_0^{-1}(|\sigma|^2 + |\varrho|^2 - |\sigma_k^*|^2 - |\varrho_k^*|^2)\, dx\Big).$$

这里 $(\sigma_k^*,\ \varrho_k^*) := (A^1(\chi^{\epsilon_k})E_0\varepsilon(u_k^*)$ $A^1(\chi^{\epsilon_k})E_0\varepsilon(v_k^*))$ 其中

$$(u_k^*, v_k^*) = \arg\min_{(u,v)\in[H_D^1(\Omega)^d]^2} \Big(\frac{1}{2}(a(\chi^{\epsilon_k};u,u) + a(\chi^{\epsilon_k};v,v) - \ell_{\text{in}}(u) - \ell_{\text{out}}(v)\Big).$$

离散问题 P_n 定义如下:

$$\min_{(\chi_n,\sigma_n,\varrho_n)\in X_n} L_n^{\gamma,\epsilon_k}(\chi_n,\sigma_n,\varrho_n) = L_n^{\epsilon_k}(\chi_n^{\epsilon_k},\sigma_n,\varrho_n) + \frac{\gamma}{\epsilon_k}P_{G_{\epsilon_k}}(\chi_n), \tag{3.3}$$

其中

$$L_n^{\epsilon_k}(\chi_n^{\epsilon_k},\sigma_n,\varrho_n) := \int_\Omega A(\chi_n^{\epsilon_k})E_0^{-1}\sigma_n : \varrho_n \, dx + \lambda\Big(\int_\Omega A(\chi_n^{\epsilon_k})E_0^{-1}(|\sigma_n|^2 + |\varrho_n|^2 - |\sigma_n^*|^2 - |\varrho_n^*|^2)\, dx\Big).$$

这里 $(\sigma_n^*,\ \varrho_n^*) := (A^1(\chi^{\epsilon_k})E_0\varepsilon(u_n^*)$ $A^1(\chi^{\epsilon_k})E_0\varepsilon(v_n^*))$ 其中

$$(u_n^*, v_n^*) = \arg\min_{(u,v)\in V_n\times V_n} \Big(\frac{1}{2}(a(\chi^{\epsilon_k};u,u) + a(\chi^{\epsilon_k};v,v) - \ell_{\text{in}}(u) - \ell_{\text{out}}(v)\Big),$$

$V_n \subset (H_D^1(\Omega))^d$ 表示位移的 H^1-协调有限元空间。函数σ_n^* 和ϱ_n^* 依赖于$\chi_n^{\epsilon_k}$，因而依赖于 χ_n （在我们的应用中，它们是偏微分方程的有限元法解）。

3.2. **数学工具**。 在本小节中，我们汇集文献中的一些已知结果，这些结果将用于后续的收敛分析。

定义 3.1 ([6, 定义 2.3，第 2 章，第 9] 页)。 Γ-收敛的刻画如下：

(1) **下极限不等式（下半连续性）**：对于任意 $u \in X$ 以及满足 $u_n \to u$ 属于 X的任意序列 $\{u_n\} \subset X$，

$$\liminf_{n\to+\infty} L_n(u_n) \geq L(u).$$

(2) 下 **上极限不等式（恢复序列）**：对于任意 $u \in X$，存在一个序列 $\{u_n\} \subset X$ su使得 $u_n \to u$ 属于 X 且

$$\limsup_{n\to+\infty} L_n(u_n) \leq L(u).$$

定义 3.2。 设 $\{f_n\}, f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$。若对任意 $x_n \xrightarrow{\mathcal{X}} x$，均有.....，则称 f_n连续收敛到 f，记为 $f_n \xrightarrow{c} f$。

$$\|f_n(x_n) - f(x)\|_{\mathcal{Y}} \to 0 \quad as \quad n \to \infty.$$

定义 3.3。 设 $\{f_n : \mathcal{X}_n \to \mathcal{Y}\}$，其中 $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$，且 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$。若对任意 $x_n \in \mathcal{X}_n \xrightarrow{\mathcal{X}} x$，均有 .....，则称 f_n 次连续收敛到 f，记为 $f_n \overset{sub-c}{\longrightarrow} f$。

$$\|f_n(x_n) - f(x)\|_{\mathcal{Y}} \to 0 \quad as \quad n \to \infty.$$

引理 3.4 ([4, 引理 1.4，第 1 章，第 5])。 对于任意 $f \in L^q(\Omega)$ 和 $g \in L^r(\Omega)$，有如下杨氏卷积不等式

$$\|f * g\|_{0,p,\Omega} \leq \|f\|_{0,q,\Omega}\|g\|_{0,r,\Omega},$$

其中 p、q、$r \in [1, +\infty]$ 满足 $\frac{1}{p} + 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$。

引理 *3.5*（[8, 第 *4* 章定理 *4.22*，第 109] 页）。设 $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$ 是$\mathbb{R}^d$中的一个磨光函数，其中 $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$、$\rho \geq 0$、$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$，且 ρ 是径向的（例如，高斯核 $\rho(x) = (2\pi)^{-d/2}exp(-|x|^2/2)$）。对于任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$、$1 \leq p < \infty$，卷积 $\rho_\epsilon * f$ 在$L^p(\mathbb{R}^d)$中收敛到 f：

$$\|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad as \quad \epsilon \to 0.$$

通过将 f 零延拓至 $\mathbb{R}^d$，该结果可推广到具有 *Lipschitz* 边界的有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^d$。

Le引理 3.6 ([15, 定理 5.2，第 5 章，第 199] 页)。 设 $f_k \in BV(\Omega)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 且

$$f_k \to f \quad in \ L^1_{loc}(\Omega).$$

于是我们得到变差测度的如下下半连续性

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{TV} \geq \|f\|_{TV}.$$

引理 3.7 （[20, 第 238]页）。 逼近 $\frac{C_G}{\epsilon} P_{G_\epsilon}(\cdot)$ Γ-收敛且逐点收敛于$\|\cdot\|_{TV}$。对于每个 $\chi \in BV(\Omega)$，我们有（参见 *[20]*）

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{C}{\epsilon} P_{G_\epsilon}(\chi) = \|\chi\|_{TV},$$

其中 $C_G = \frac{2}{\int_{G_1} |x_d|\,dx}$.

定义 3.8。 设 (X, τ) 为一个拓扑空间，且 $\{f_n\}$ 为函数序列，满足$f_n : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$。若对每个 $t \in \mathbb{R}$，都存在一个紧集 $K_t \subset X$，使得对所有 n，次水平集 $\{x \in X : f_n(x) \leq t\} \subset K_t$，则称序列 $\{f_n\}$ 为等强制。

引理 3.9 ([6, 定理 5.1，第 5 章，第 67])。 设(X, d) 是一个度量空间，且 $f_n, f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个函数序列，其中每个 f_n 都是强制且下半连续的，并且该序列 f_n Γ-收敛于 f 且等强制。设 $x^* \in X$ 是 f的一个孤立局部极小化子，即存在 $U \subset X$ 的一个邻域 x^*，使得：

(1) $f(x^*) < f(x)$ 对所有 $x \in U$均成立。
(2) x^* 是 U中的唯一局部极小点。

若 $\{x_n\} \subset U$ 是 f_n 的一列局部极小点，且在度量 d 下满足 $x_n \to x$，则 $x = x^*$.

3.3. 三个优化问题之间的关系。本小节将阐明三个优化问题 Q、 P 和 P_n 之间的联系。证明思路如下: 首先，我们证明问题 P_n Γ Γ-收敛到问题 Q，并讨论这三个优化问题之间的关系。然后，我们利用引理 3.9 证明， P_n 的局部极小点收敛到 Q 的孤立局部极小化子。最后，我们证明，用于求解 P_n 的优化算法所生成的解序列收敛到 P_n 的局部极小点。

引理 3.10. 若区域 Ω 具有 *Lipschitz* 边界 Γ，则原始问题 Q至少有一个解。

证明. 设 $\{\chi_k\} \subset \mathcal{U}$ 为问题 Q的一个极小化序列。因此， $\{\chi_k\} \subset BV(\Omega)$。由于 $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$，存在一个收敛子列（仍记为 $\{\chi_h\}$），它收敛到 $L^1(\Omega)$ 中的某个 χ^*。

同时，将 χ 替换为 χ_k 后，状态方程 (2.22) 和伴随方程 (2.23) 的解 $(u(\chi_k)\ v(\chi_k))$ 在 $[H^1_D(\Omega)^d]^2$ 中有界，因此 $(u(\chi_h)\ v(\chi_h))$ 弱收敛到 $\in [H^1_D(\Omega)]^2$ 中的某个 $(u^*,\ v^*)$。根据 [3], , 我们有

$$(u^*, v^*) = \arg \min_{(u,v)\in[H^1_D(\Omega)]^2} \Big(\frac{1}{2}a(\chi^*; u, u) - \ell_{\text{in}}(u) + \frac{1}{2}a(\chi^*; v, v) - \ell_{\text{out}}(v)\Big).$$

定义 $(\sigma^*, \varrho^*) := (\underset{A}{1}(\chi^*)E_0\varepsilon(u^*)\ \underset{A}{1}(\chi^*)E_0\varepsilon(v^*))$。接下来，我们证明 $\{(\chi^*, \sigma^*, \varrho^*)\}$是问题 Q 的一个解。注意

$$\begin{aligned}
&L^{\gamma,0}(\chi^*, \sigma^*, \varrho^*) - L^{\gamma,0}(\chi_k, \sigma(\chi_k), \varrho(\chi_k))\\
&= \int_\Omega A(\chi^*)E_0^{-1}\sigma^* : \varrho^*\ dx + \frac{\gamma}{C_G}\|\chi^*\|_{TV} - \int_\Omega A(\chi_h)E_0^{-1}\sigma(\chi_k) : \varrho(\chi_k)\ dx - \frac{\gamma}{C_G}\|\chi_k\|_{TV}\\
&= \int_\Gamma q_{\text{out}} \cdot u^* dx + \frac{\gamma}{C_G}\|\chi^*\|_{TV} - \int_\Gamma q_{\text{out}} \cdot u(\chi_h) dx - \frac{\gamma}{C_G}\|\chi_k\|_{TV}\\
&= \int_\Gamma q_{\text{out}} \cdot (u^* - u(\chi_k))\ ds + \frac{\gamma}{C_G}(\|\chi^*\|_{TV} - \|\chi_k\|_{TV}).
\end{aligned}$$

回顾经典迹不等式（参见 [7]）

$$\|u\|_{0,\Gamma} \le C\|u\|^{1/2}_{0,\Omega}\|u\|^{1/2}_{1,\Omega} \qquad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{3.4}$$

由于 $u(\chi_k) \rightharpoonup u^*$ 于 $H^1(\Omega)^d$ 中，因此 $u(\chi_k) \to u^*$ 于 $L^2(\Omega)^d$ 中。于是，我们有

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma q_{\text{out}} \cdot (u^* - u(\chi_k))\ ds &\le \|q_{\text{out}}\|_{0,\Gamma}\|u^* - u(\chi_k)\|_{0,\Gamma}\\
&\le C_1\|q_{\text{out}}\|_{0,\Gamma}\|u^* - u(\chi_k)\|^{\frac{1}{2}}_{0,\Omega}\|u^* - u(\chi_k)\|^{\frac{1}{2}}_{1,\Omega}\\
&\le C_2\|q_{\text{out}}\|_{0,\Gamma}(\|u^*\|_{1,\Omega} + \|u(\chi_k)\|_{1,\Omega})^{\frac{1}{2}}\|u^* - u(\chi_k)\|^{\frac{1}{2}}_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

此外，基于全变差范数的下半连续性，我们得到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h\downarrow 0}\left(L^{\gamma,0}(\chi^*, \sigma^*, \varrho^*) - L^{\gamma,0}(\chi_k, \sigma(\chi_k), \varrho(\chi_k))\right)\\
&\le \limsup_{h\downarrow 0} C_2\|q_{\text{out}}\|_{0,\Gamma}(\|u^*\|_{1,\Omega} + \|u(\chi_k)\|_{1,\Omega})^{\frac{1}{2}}\|u^* - u(\chi_k)\|^{\frac{1}{2}}_{0,\Omega} + \frac{\gamma}{C_G}\limsup_{h\downarrow 0}(\|\chi^*\|_{TV} - \|\chi_k\|_{TV})\\
&\le \frac{\gamma}{C_G}(\|\chi^*\|_{TV} - \liminf_{h\downarrow 0}\|\chi_k\|_{TV}) \le 0.
\end{aligned}$$

因此，我们得到如下不等式,

$$L^{\gamma,0}(\chi^*, \sigma^*, \varrho^*) \le \liminf_{h\downarrow 0} L^{\gamma,0}(\chi_h, \sigma(\chi_h), \varrho(\chi_h)). \tag{3.5}$$

这表明 $(\chi^*, \sigma^*, \varrho^*)$ 是优化问题 Q 的一个解。 □

接下来，我们首先研究问题 P 到问题 Q的收敛。

定理 3.11. 对于每个 $s > 2$，泛函 $L^{\gamma,\ \epsilon_k}$ Γ关于参数 ϵ_k在 $X^s := \mathcal{U} \times (S \cap [L^s(\Omega)^{d\times d}]^2)$中 Γ-收敛到 $L^{\gamma,\ 0}$，且 $L^{\gamma,\ \epsilon_k}$ 在 X中逐点收敛到 $L^{\gamma,\ 0}$。

证明。 由定义可知

$$L^{\gamma,\epsilon_k}(\chi, \sigma, \varrho) = L^{\epsilon_k}(\chi^{\epsilon_k}, \sigma, \varrho) + \frac{\gamma}{\epsilon_k}P_{G_{\epsilon_k}}(\chi),$$

$$L^{\gamma,0}(\chi,\sigma,\varrho)=L^0(\chi,\sigma,\varrho)+\frac{\gamma}{C_G}\|\chi\|_{TV},$$

因此，我们分别讨论这两部分的收敛性。根据引理 3.7，我们已证明$\overset{\gamma}{\epsilon_k}P_{G_{\epsilon_k}}(\cdot)$ Γ-收敛，并逐点收敛到$\overset{\gamma}{C_G}\|\cdot\|_{TV}$。对于 $L^{\epsilon_k}(\cdot)$和 $L^0(\cdot)$，我们将证明其连续收敛，记作 $L^{\epsilon_k}\xrightarrow{c}L^0$。

Let $\chi_m\xrightarrow{L^1}\chi$ and $(\sigma_m,\varrho_m)\xrightarrow{L^s}(\sigma,\varrho)$ for some $s>2$, it follows from the definition and (2.24) that

$$\begin{aligned}L^{\epsilon_k}(\chi_m^{\epsilon_k},\sigma_m,\varrho_m)-L^0(\chi,\sigma,\varrho)&=\int_\Omega(A(\chi_m^{\epsilon_k})-A(\chi))E_0^{-1}\sigma_m:\varrho_m\,dx+\int_\Omega A(\chi)E_0^{-1}(\sigma_m-\sigma):\varrho_m\,dx\\&+\int_\Omega A(\chi)E_0^{-1}\sigma:(\varrho_m-\varrho)dx+\lambda\int_\Omega(A(\chi_m^{\epsilon_k})-A(\chi))E_0^{-1}(|\sigma_m|^2+|\varrho_m|^2)dx\\&+\lambda\int_\Omega A(\chi)E_0^{-1}(|\sigma_m|^2-|\sigma|^2+|\varrho_m|^2-|\varrho|^2)\,dx+\lambda a(\chi;u(\chi),u(\chi))\\&+\lambda a(\chi;v(\chi),v(\chi))-\lambda a(\chi_m^{\epsilon_k};u(\chi_m^{\epsilon_k}),u(\chi_m^{\epsilon_k}))-\lambda a(\chi_m^{\epsilon_k};v(\chi_m^{\epsilon_k}),v(\chi_m^{\epsilon_k})).\end{aligned}$$

我们首先处理涉及 $\chi_m^{\epsilon_k}-\chi$ 的项。注意，对于 $\mathcal{U}$ 中的元素， L^1-收敛等价于对任意 $p\in[1,+\infty)$ 的 L^p-收敛。我们取

$$\int_\Omega(A(\chi_m^{\epsilon_k})-A(\chi))E_0^{-1}\sigma_m:\varrho_m\,dx$$

as a举一个例子来说明证明的主要思路。回顾 $A(\chi)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(A(\chi_m^{\epsilon_k})-A(\chi))E_0^{-1}\sigma_m:\varrho_m\,dx\\&=\int_\Omega(A(\chi_m^{\epsilon_k})-A(\chi^{\epsilon_k}))E_0^{-1}\sigma_m:\varrho_m\,dx+\int_\Omega(A(\chi^{\epsilon_k})-A(\chi))E_0^{-1}\sigma_m:\varrho_m\,dx\\&=\Big(\frac{1}{E_{\max}}-\frac{1}{E_{\min}}\Big)\Big(\int_\Omega G_{\epsilon_k}*(\chi_m-\chi)E_0^{-1}\sigma_m:\varrho_m\,dx+\int_\Omega(G_{\epsilon_k}*\chi-\chi)E_0^{-1}\sigma_m:\varrho_m\,dx\Big)\\&\le\frac{C}{E_{\min}}\Big(\|G_{\epsilon_k}*(\chi_m-\chi)\|_{0,\frac{s}{s-2},\Omega}+\|G_{\epsilon_k}*\chi-\chi\|_{0,\frac{s}{s-2},\Omega}\Big)\|\sigma_m\|_{0,s,\Omega}\|\varrho_m\|_{0,s,\Omega}\\&\le\frac{C}{E_{\min}}\Big(\|\chi_m-\chi\|_{0,\frac{s}{s-2},\Omega}+\|G_{\epsilon_k}*\chi-\chi\|_{0,\frac{s}{s-2},\Omega}\Big)\|\sigma_m\|_{0,s,\Omega}\|\varrho_m\|_{0,s,\Omega}\to0\quad as\quad k,m\to+\infty,\end{aligned}$$

其中，第一个不等式中用到了广义 Hölder 不等式，第二个不等式中用到了卷积的 Young 不等式（参见引理 3.4）。第一项在极限中的收敛源于 $\chi_k\xrightarrow{L^p}\chi$，而第二项收敛是因为光滑 Dirac 序列收敛（参见引理 3.5）。

处　　理 $\sigma_m-\sigma$ 和 $\varrho_m-\varrho$ 很直接。关键在于估计 $u(\chi_m^{\epsilon_k})-u(\chi$),
其中invo lves线弹性方程的解关于弹性张量的稳定性 .

$$\begin{aligned}a(\chi;u(\chi),u(\chi))-a(\chi_m^{\epsilon_k};u(\chi_m^{\epsilon_k}),u(\chi_m^{\epsilon_k}))&=\ell_{\text{in}}(u(\chi))-\ell_{\text{in}}(u(\chi_m^{\epsilon_k}))\\&=\|\ell_{\text{in}}\|_{0,\Gamma_N}\|u(\chi)-u(\chi_m^{\epsilon_k})\|_{0,\Gamma}\\&\le C\|\ell_{\text{in}}\|_{0,\Gamma_N}\|u(\chi)-u(\chi_m^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$a(\chi;u(\chi),\hat{u})=\ell_{\text{in}}(\hat{u})\quad\forall\hat{u}\in H_D^1(\Omega)^d,\quad a(\chi_m^{\epsilon_k};u(\chi_m^{\epsilon_k}),\tilde{u})=\ell_{\text{in}}(\tilde{u})\quad\forall\tilde{u}\in H_D^1(\Omega)^d.$$

令$\hat{u}=\tilde{u}=u(\chi)-u(\chi_k^{\epsilon_k})$，我们有

$$\begin{aligned}a(\chi;u(\chi)-u(\chi_m^{\epsilon_k}),u(\chi)-u(\chi_m^{\epsilon_k}))&=a(\chi_m^{\epsilon_k};u(\chi_m^{\epsilon_k}),u(\chi)-u(\chi_m^{\epsilon_k}))-a(\chi;u(\chi_m^{\epsilon_k}),u(\chi)-u(\chi_m^{\epsilon_k}))\\&=\Big(\frac{1}{E_{\max}}-\frac{1}{E_{\min}}\Big)\int_\Omega(G_{\epsilon_k}*\chi_m-\chi)E_0\varepsilon(u(\chi_m^{\epsilon_k})):\varepsilon(u(\chi)-u(\chi_m^{\epsilon_k}))dx\\&\le\frac{C}{E_{\min}}\|G_{\epsilon_k}*\chi_m-\chi\|_{0,\frac{2s}{s-2},\Omega}\|u(\chi_m^{\epsilon_k})\|_{1,s,\Omega}\|u(\chi)-u(\chi_m^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

因此，

$$\|u(\chi)-u(\chi_m^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}\le C\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\|G_{\epsilon_k}*\chi_m-\chi\|_{0,\frac{2s}{s-2},\Omega}\|u(\chi_m^{\epsilon_k})\|_{1,s,\Omega}.$$

其余项也可以依次处理，最终由 $\|\chi_m-\chi\|_{0,\,p,\,\Omega}$, $\|G_{\epsilon_k}*\chi-\chi\|_{0,\,p,\,\Omega}$, $\|\sigma_m-\sigma\|_{0,\,s,\,\Omega}$ 以及 $\|\varrho_m-\varrho\|_{0,\,s,\,\Omega}$ 控制。由此证明了 $L^{\epsilon_k}\xrightarrow{c}L^0$。□

然后我们研究问题 P_n 向问题 P 的收敛。

定理 3.12。对于所有 $\epsilon_k > 0$，我们有 $L^{\gamma,\ \epsilon_k} \overset{sub-c}{\longrightarrow} L^{\gamma,\ \epsilon_k}$ 且 $L_n^{\epsilon_k} \overset{sub-c}{\longrightarrow} L^{\epsilon_k}$，当 $n \to +\infty$ 时。特别地，如果线弹性方程的解具有更高的正则性 $(u, v) \in [H^s(\Omega)^d \cap H_D^1(\Omega)^d]^2$（其中某个 $s > 1$），那么对于任意满足 $\epsilon_n \to 0$ 的序列 $\{\epsilon_n\}_{n\geq 0}$，我们有 $L_n^{\epsilon_n} \overset{sub-c}{\longrightarrow} L^0$。

证明。令 $\chi_n \xrightarrow{L^1} \chi$ 和 $(\sigma_n,\ \varrho_n) \xrightarrow{L^2} (\sigma,\ \varrho)$。我们首先考察周长正则化的连续收敛。由于 $\int_\Omega \chi_n dx \leq |\Omega| < \infty$，我们有 [20, 式 (1.2)，第 236] 页

$$P_{G_{\epsilon_k}}(\chi_n) = \int_\Omega \chi_n \, dx - \int_\Omega (G_{\epsilon_k} * \chi_n)(x)\chi_n(x) \, dx, \tag{3.6}$$

then

$$\begin{aligned}
&|P_{G_{\epsilon_k}}(\chi_n) - P_{G_{\epsilon_k}}(\chi)| \\
&\leq \|\chi_n - \chi\|_{0,1,\Omega} + \int_\Omega |(G_{\epsilon_k} * \chi_n)\chi_n - (G_{\epsilon_k} * \chi)\chi| \, dx \\
&\leq \|\chi_n - \chi\|_{0,1,\Omega} + \int_\Omega |(G_{\epsilon_k} * \chi_n)\chi_n - (G_{\epsilon_k} * \chi_n)\chi| \, dx + \int_\Omega |(G_{\epsilon_k} * \chi_n)\chi - (G_{\epsilon_k} * \chi)\chi| \, dx \\
&\leq \|\chi_n - \chi\|_{0,1,\Omega} + \int_\Omega (G_{\epsilon_k} * \chi_n)|\chi_n - \chi| \, dx + \int_\Omega |G_{\epsilon_k} * (\chi_n - \chi)|\chi \, dx \\
&\leq 3\|\chi_n - \chi\|_{0,1,\Omega},
\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了杨氏卷积不等式，其中 $p = q = r = 1$（参见引理 3.4）。

以下证明与定理 3.11 的证明非常相似，甚至更简单，因为我们不需要 $(\sigma,\ \varrho) \in [L^s(\Omega)^{d\times d}]^2$。再次利用 (2.24) 和定义，可得以下表达式

$$\begin{aligned}
&L_n^{\epsilon_k}(\chi_n^{\epsilon_k}, \sigma_n, \varrho_n) - L^{\epsilon_k}(\chi^{\epsilon_k}, \sigma, \varrho) \\
&= \int_\Omega (A(\chi_n^{\epsilon_k}) - A(\chi^{\epsilon_k}))E_0^{-1}\sigma_n : \varrho_n \, dx + \int_\Omega A(\chi^{\epsilon_k})E_0^{-1}(\sigma_n - \sigma) : \varrho_n \, dx \\
&\quad + \int_\Omega A(\chi^{\epsilon_k})E_0^{-1}\sigma : (\varrho_n - \varrho) \, dx + \lambda \int_\Omega (A(\chi_n^{\epsilon_k}) - A(\chi^{\epsilon_k}))E_0^{-1}(|\sigma_n|^2 + |\varrho_n|^2) \, dx \\
&\quad + \lambda \int_\Omega A(\chi^{\epsilon_k})E_0^{-1}(|\sigma_n|^2 - |\sigma|^2 + |\varrho_n|^2 - |\varrho|^2) \, dx + \lambda a(\chi^{\epsilon_k}; u(\chi^{\epsilon_k}), u(\chi^{\epsilon_k})) \\
&\quad + \lambda a(\chi^{\epsilon_k}; v(\chi^{\epsilon_k}), v(\chi^{\epsilon_k})) - \lambda a(\chi_n^{\epsilon_k}; u_n(\chi_n^{\epsilon_k}), u_n(\chi_n^{\epsilon_k})) - \lambda a(\chi_n^{\epsilon_k}; v_n(\chi_n^{\epsilon_k}), v_n(\chi_n^{\epsilon_k})),
\end{aligned}$$

它可以轻易地分解为包含 $\chi_n - \chi$、$\sigma_n - \sigma$、$\varrho_n - \varrho$、$u_n - u(\chi)$ 和 $v_n - v(\chi)$ 的各项。对包含 $\sigma_n - \sigma$ 和 $\varrho_n - \varrho$ 的项进行估计是直接的。

我们首先如下估计包含 $\chi_n - \chi$ 的各项

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (A(\chi_n^{\epsilon_k}) - A(\chi^{\epsilon_k}))E_0^{-1}\sigma_n : \varrho_n \, dx &= \Big(\frac{1}{E_{\max}} - \frac{1}{E_{\min}}\Big) \int_\Omega G_{\epsilon_k} * (\chi_n - \chi)E_0^{-1}\sigma_n : \varrho_n \, dx \\
&\leq \frac{C}{E_{\min}} \|G_{\epsilon_k} * (\chi_n - \chi)\|_{0,\infty,\Omega} \|\sigma_n\|_{0,\Omega} \|\varrho_n\|_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{C}{E_{\min}} \|G_{\epsilon_k}\|_{0,\Omega} \|\chi_n - \chi\|_{0,\Omega} \|\sigma_n\|_{0,\Omega} \|\varrho_n\|_{0,\Omega} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to +\infty,
\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了杨氏卷积不等式。由于此时 ϵ_k 固定，$\|G_{\epsilon_k}\|_{0,\ \Omega}$ 的有界性得以保证。

接下来我们对下面包含 $u_n(\chi_n^{\epsilon_k}) - u(\chi^{\epsilon_k})$ 的各项进行估计

$$\begin{aligned}
&a(\chi^{\epsilon_k}; u(\chi^{\epsilon_k}), u(\chi^{\epsilon_k})) - a(\chi_n^{\epsilon_k}; u_n(\chi_n^{\epsilon_k}), u_n(\chi_n^{\epsilon_k})) \\
&= \ell_{\text{in}}(u(\chi^{\epsilon_k})) - \ell_{\text{in}}(u_n(\chi_n^{\epsilon_k})) \\
&= \ell_{\text{in}}(u(\chi^{\epsilon_k}) - u_n(\chi^{\epsilon_k})) + \ell_{\text{in}}(u_n(\chi^{\epsilon_k}) - u_n(\chi_n^{\epsilon_k})) \\
&\leq \|\ell_{\text{in}}\|_{0,\Gamma_N} \|u(\chi^{\epsilon_k}) - u_n(\chi^{\epsilon_k})\|_{0,\Gamma_N} + \|\ell_{\text{in}}\|_{0,\Gamma_N} \|u_n(\chi^{\epsilon_k}) - u_n(\chi_n^{\epsilon_k})\|_{0,\Gamma_N} \\
&\leq C\|\ell_{\text{in}}\|_{0,\Gamma_N} \big[\|u(\chi^{\epsilon_k}) - u_n(\chi^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega} + \|u_n(\chi^{\epsilon_k}) - u_n(\chi_n^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}\big].
\end{aligned}$$

第一项的收敛性可通过经典有限元误差估计得到

$$\|u(\chi^{\epsilon_k}) - u_n(\chi^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega} \leq Ch_n^{s-1}\|u(\chi^{\epsilon_k})\|_{s,\Omega} \leq Ch_n^{s-1}\|\ell_{\text{in}}\|_{0,\Gamma_N}.$$

另一方面，我们有

$$a(\chi^{\epsilon_k};u_n(\chi^{\epsilon_k}),\hat{u}_n)=\ell_{\text{in}}(\hat{u}_n)\quad\forall\hat{u}_n\in V_n,\qquad a(\chi_n^{\epsilon_k};u_n(\chi_n^{\epsilon_k}),\tilde{u}_n)=\ell_{\text{in}}(\tilde{u}_n)\quad\forall\tilde{u}_n\in V_n,$$

其中 $V_n\subset H_D^1(\Omega)^d$ 是有限元空间。

令 $\hat{u}_n=\tilde{u}_n=u_n(\chi^{\epsilon_k})-u_n(\chi_n^{\epsilon_k})$，可得

$$\begin{aligned}
&a(\chi^{\epsilon_k};u_n(\chi^{\epsilon_k})-u_n(\chi_n^{\epsilon_k}),u_n(\chi^{\epsilon_k})-u_n(\chi_n^{\epsilon_k}))\\
&=a(\chi_n^{\epsilon_k};u_n(\chi_n^{\epsilon_k}),u_n(\chi^{\epsilon_k})-u_n(\chi_n^{\epsilon_k}))-a(\chi^{\epsilon_k};u_n(\chi_n^{\epsilon_k}),u_n(\chi^{\epsilon_k})-u_n(\chi_n^{\epsilon_k}))\\
&=\Big(\frac{1}{E_{\max}}-\frac{1}{E_{\min}}\Big)\int_\Omega G_{\epsilon_k}*(\chi_n-\chi)E_0\varepsilon(u_n(\chi_n^{\epsilon_k})):\varepsilon(u_n(\chi^{\epsilon_k})-u_n(\chi_n^{\epsilon_k}))\,dx\\
&\le\frac{C}{E_{\min}}\|G_{\epsilon_k}*(\chi_n-\chi)\|_{0,\infty,\Omega}\|u_n(\chi_n^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}\|u_n(\chi^{\epsilon_k})-u_n(\chi_n^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}\\
&\le\frac{C}{E_{\min}}\|G_{\epsilon_k}\|_{0,\Omega}\|\chi_n-\chi\|_{0,\Omega}\|u_n(\chi_n^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}\|u_n(\chi^{\epsilon_k})-u_n(\chi_n^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\|u_n(\chi^{\epsilon_k})-u_n(\chi_n^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}\le C\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\|G_{\epsilon_k}\|_{0,\Omega}\|\chi_n-\chi\|_{0,\Omega}\|u_n(\chi_n^{\epsilon_k})\|_{1,\Omega}.$$

其余各项也可以依次处理。

容易看出，在上述所有估计中，只有有限元误差估计依赖于 ϵ_k 的取值。当 $u\in H^s(\Omega)^d\cap H_D^1(\Omega)^d$ 时，有限元误差估计的收敛阶为 $s-1$，仅取决于网格尺寸 h_n。此时，最终这些估计将由 $\|\chi_n-\chi\|_{0,\ \Omega}$，$\|\sigma_n-\sigma\|_{0,\ \Omega}$ 和 $\|\varrho_n-\varrho\|_{0,\ \Omega}$ 控制，我们得到如下

$$L_n^{\gamma,\epsilon_k}\xrightarrow{sub-c}L^{\gamma,\epsilon_k},\qquad L_n^{\epsilon_k}\xrightarrow{sub-c}L^{\epsilon_k}\quad\text{for any }\epsilon_k\ge0\text{ as }n\to+\infty.$$

若 $u\in H^s(\Omega)^d\cap H_D^1(\Omega)^d$，则

$$L_n^{\epsilon_n}\xrightarrow{sub-c}L^0\quad\text{as }n\to+\infty.$$

这就完成了证明。 □

我们注意到，定理 3.12 中的条件 $u\in H^s(\Omega)^d\cap H_D^1(\Omega)^d$ 并非必不可少。事实上，通过稠密性论证，我们可以证明当 $h_n\to0$ 时，$u_n(\chi^{\epsilon_k})$ 强收敛到 $u(\chi^{\epsilon_k})$。

现在我们可以证明问题 P_n 收敛到问题 Q。

定理 3.13. 对于每个 $s>2$ 和 $N>0$，假设序列 $\{X_n\}$ 是嵌套的，满足 $X_1\subset X_2\subset\cdots\subset X_N$。那么，对于任意满足 $\epsilon_n\to0$ 的序列 $\{\epsilon_n\}_{n\ge1}$，泛函 $L^{\gamma,_n\ \epsilon_n}\ \Gamma$ 在参数 n 下于 X^s 中 Γ-收敛到 $L^{\gamma,0}$，而 $L^{\gamma,_n\ \epsilon_n}$ 在 $\bigcup_{n\le N}X_n$ 中逐点收敛到 $L^{\gamma,0}$。

证明。我们首先注意到，$L^{\gamma,_n\ \epsilon_k}$与 $L^{\gamma,0}$ 的区域不同。然而，由于我们采用协调有限元方法，因此有 $X_n\subset X$。于是，我们可以自然地将 L_n 的定义扩展到X，进而毫无歧义地讨论 Γ-收敛和逐点收敛。

我们考虑一个更大的函数族，其中下标和上标分别记为 ϵ_k 和n。对于任意 ϵ_k 和 n，我们将定义扩展如下：

$$\bar{L}_n^{\gamma,\epsilon_k}(\chi,\sigma,\varrho)=\begin{cases}L_n^{\gamma,\epsilon_k}(\chi,\sigma,\varrho) & \text{if }(\chi,\sigma,\varrho)\in X_n,\\ +\infty & \text{if }(\chi,\sigma,\varrho)\notin X_n.\end{cases}\tag{3.7}$$

接下来，我们证明 Γ-收敛。给定 $(\chi,\sigma,\varrho)\in X^s$，可得以下结论

(1) 对于空间 $(L^1(\Omega)\ L^s(\Omega)\ L^s(\Omega))$ 中的所有 $(\chi_n,\sigma_n,\varrho_n)\to(\chi,\sigma,\varrho)$，有

$$\begin{aligned}
&\bar{L}_n^{\gamma,\epsilon_n}(\chi_n,\sigma_n,\varrho_n)-L^{\gamma,0}(\chi,\sigma,\varrho)\\
&=[\bar{L}_n^{\epsilon_n}(\chi_n,\sigma_n,\varrho_n)-L^0(\chi,\sigma,\varrho)]+\left[\frac{\gamma}{\epsilon_n}P_{G_{\epsilon_n}}(\chi_n)-\frac{\gamma}{C_G}\|\chi\|_{TV}\right].
\end{aligned}$$

由于 $n\to+\infty$，根据定理 3.12（ $L_n^{\epsilon_n}$的次连续收敛），第一项已知大于 0 或收敛于 0，而根据引理 3.7（非局部周长近似的 Γ-收敛所对应的下半连续性），第二项大于 0。因此，我们最终得到

$$\liminf_{n\to+\infty}\bar{L}_n^{\gamma,\epsilon_n}(\chi_n,\sigma_n,\varrho_n)\ge L^{\gamma,0}(\chi,\sigma,\varrho).$$

（2）根据定理 3.11 中已建立的 L^{γ}从 $\Gamma_{,\epsilon_k}$ 到 $L^{\gamma,0}$ 的收敛，我们知道存在一个序列 $\{(\chi_k, \sigma_k, \varrho_k)\}_{k\geq 1} \subset X^s$，使得

$$\limsup_{k\to\infty} L^{\gamma,\epsilon_k}(\chi_k, \sigma_k, \varrho_k) \leq L^{\gamma,0}(\chi, \sigma, \varrho).$$

根据次连续收敛的定义，对于每个 k 以及任意 $\{(\chi_{k,n}, \sigma_{k,n}, \varrho_{k,n})\} \subset X_n \subset X$，有

$$\lim_{n\to\infty} L_n^{\gamma,\epsilon_k}(\chi_{k,n}, \sigma_{k,n}, \varrho_{k,n}) = L^{\gamma,\epsilon_k}(\chi_k, \sigma_k, \varrho_k).$$

因此，我们取恢复序列 $\{(\chi_{k,k}, \sigma_{k,k}, \varrho_{k,k})\}$，得到

$$\limsup_{k\to\infty} \bar{L}_k^{\gamma,\epsilon_k}(\chi_{k,k}, \sigma_{k,k}, \varrho_{k,k}) = \limsup_{k\to\infty} L_k^{\gamma,\epsilon_k}(\chi_{k,k}, \sigma_{k,k}, \varrho_{k,k}) \leq L^{\gamma,0}(\chi, \sigma, \varrho).$$

回顾定义 3.1，结合 (1) 和 (2)，我们证明 $\bar{L}^{\gamma,\epsilon_n} \xrightarrow{\Gamma} L^{\gamma,0}$ 属于 X^s。

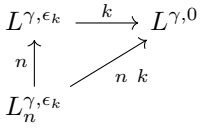
下面考虑逐点收敛。对于任意 $(\chi_N, \sigma_N, \varrho_N) \in \bigcup_{n'\leq N} X_{n'}$，只要 $n > N$，就有 $(\chi_N, \sigma_N, \varrho_N) \in X_n$。此时，$L^{\gamma,\epsilon_n}_n(\chi_N, \sigma_N, \varrho_N) = L^{\gamma,\epsilon_n}_n(\chi_N, \sigma_N, \varrho_N)$。因此，只需利用引理 3.7 和定理 3.12 中建立的逐点收敛，即可得出

$$\lim_{n\to\infty} \bar{L}_n^{\gamma,\epsilon_n}(\chi_N, \sigma_N, \varrho_N) = \lim_{n\to\infty} \left(L_n^{\epsilon_n}(\chi_N^{\epsilon_n}, \sigma_N, \varrho_N) + \frac{\gamma}{C_G} P_{G_{\epsilon_n}}(\chi_N) \right) = L^{\gamma,0}(\chi_N, \sigma_N, \varrho_N).$$

至此证明完毕。 □

我们指出，在定理 3.13 中，我们实际上证明了 $\bar{L}^{\gamma,\epsilon_n}$到 $L^{\gamma,0}$的收敛。我们之所以说 L^{γ,ϵ_n}到 $L^{\gamma,0}$ 的收敛，是因为对于我们的研究对象——优化问题之间的收敛—— L^{γ,ϵ_n}与 L^{γ,ϵ_n}的极小化子是完全等价的。此后，我们不再区分 L^{γ,ϵ_n}与 L^{γ,ϵ_n}，并直接将 L^{γ,ϵ_n}视为定义在 X 上。

我们可以用如下交换图来说明三个问题 Q、P与 P_n之间的关系：



3.4. 收敛刻画。由上述交换图，我们可以观察到问题 P_n 收敛到问题 Q的两条路径，其中 ϵ_k 与 h_n 在极限过程中是相互独立的。然而，在考虑局部极小点的收敛时，我们不能再忽略这一问题，因为问题 P 的解的存在性尚未得到保证。因此，在求解问题Q时，我们不能先细化网格再调整周长近似参数 ϵ_k，因为这无法保证极小化子的收敛。我们首先证明如下关于局部极小点的收敛定理。

定理 3.14。设 $\{\chi_n\}$ 是问题 $\{P_n\}$ 的一列局部极小点，并为每个 n 适当地选取 ϵ_n。对于 $\{\chi_n\}$ 的每个聚点 χ^+，如果 $\chi^+ \in U$ 与某个问题 Q 的孤立局部极小化子 χ^* 在 L^1-度量下的最小邻域 U 相交，则 $\chi^+ = \chi^*$。

证明。只需验证引理 3.9 的条件。我们已经证明，L^{γ,ϵ_n}_n Γ 收敛于 $L^{\gamma,0}$，而 L^{γ,ϵ_n}_n 的强制性（在 L^1-度量下）及其下半连续性是显然的。现在的关键步骤是验证等度强制性。

我们首先证明 $L_n^{\epsilon_n}$ 具有统一下界 M。在第 2 节中，我们已证明 $L_n^{\epsilon_n}(\chi_n^{\epsilon_n}, \sigma_n^*, \varrho_n^*) = \min_{(\hat{\sigma}_n \hat{\varrho}_n) \in S_n} L_n^{\epsilon_n}(\chi_n^{\epsilon_n}, \hat{\sigma}_n, \hat{\varrho}_n)$。因此，

$$\begin{aligned} L_n^{\epsilon_n}(\chi_n^{\epsilon_n}, \hat{\sigma}_n, \hat{\varrho}_n) &\geq L_n^{\epsilon_n}(\chi_n^{\epsilon_n}, \sigma_n^*, \varrho_n^*) \\ &= a(\chi_n^{\epsilon_n}; u_n^*, v_n^*) \\ &= \ell_{\text{out}}(u_n^*) \\ &\geq -C_1 \|\ell_{\text{out}}\|_{0,\Gamma_N} \|u_n^*\|_{1,\Omega} \\ &\geq -C_2 \|\ell_{\text{out}}\|_{0,\Gamma_N} \|\ell_{\text{in}}\|_{0,\Gamma_N}. \end{aligned}$$

因此，对于所有 n、ϵ_n 以及 $(\chi_n, \sigma_n, \varrho_n)$，$= -C_2 \|\ell_{\text{out}}\|_{0,\Gamma_N} \|\ell_{\text{in}}\|_{0,\Gamma_N} \leq L_n^{\epsilon_n}(\chi_n^{\epsilon_n}, \sigma_n, \varrho_n) \in X$.

设 $t \in \mathbb{R}$，我们选取集合

$$K_t = \left\{ \chi \in \mathcal{U} : \frac{\gamma}{C_G} \|\chi\|_{TV} \leq \max(t - M + 1, 1) \right\}.$$

由于 $BV(\Omega)$ 紧嵌入于 $L^1(\Omega)$，且 K_t 在 $BV(\Omega)$ 中有界，因此它是 $L^1(\Omega)$ 中的紧集。对任意 n，我们注意到 $\mathcal{U}_n$ 是有限集，并且引理 3.9 有

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{\gamma}{\epsilon}P_{G_\epsilon}(\chi_{n,i})=\frac{\gamma}{C_G}\|\chi_{n,i}\|_{TV}\quad\forall\chi_{n,i}\in\mathcal{U}_n.$$

因此，对于 每个 $\delta>0$，固定 $\chi_{n,\,i}\in\mathcal{U}_n$，存在一个足够小的 $\epsilon'_{n,\,i}>0$，对于每个 $\epsilon_{n,\,i}\in(0,\ \epsilon'_{n,\,i})$ ha ve

$$\Big|\frac{\gamma}{\epsilon_{n,i}}P_{G_{\epsilon_{n,i}}}(\chi_{n,i})-\frac{\gamma}{C_G}\|\chi_{n,i}\|_{TV}\Big|<\delta.$$

我们设 $\delta=1,\ \ \epsilon_n=\min_i\epsilon_{n,\,i}$，若 $(\chi_n,\ \sigma_n,\ \rho_n)\in X_n$ 使得

$$L_n^{\gamma,\epsilon_n}(\chi_n,\sigma_n,\rho_n)\le t,$$

then

$$\frac{\gamma}{C_G}\|\chi_n\|_{TV}\le\frac{\gamma}{\epsilon_n}P_{G_{\epsilon_n}}(\chi_n)+1\le t-L_n^{\epsilon_n}(\chi_n^{\epsilon_n},\sigma_n,\rho_n)+1\le t-M+1.$$

因此，$\{\chi_n:\ L^{\gamma,\ \epsilon_n}(\chi_n,\ \sigma_n,\ \rho_n)<t\}\subset K_t$ 对于任意 $n\ge1$，即，序列 $\{L_n^{\gamma,\epsilon_n}\}$ 满足等强制性-性。因此，我们得到了该定理的结论。 □

4. 传热问题的罚函数法

在本节中，我们将所提出的罚函数法推广到传热问题。

4.1. 传热问题。 区域 Ω 的设置与第 2 节相同。考虑以下拓扑优化问题

$$\min_{(\chi,T)\in\mathcal{U}\times H_g^1(\Omega)}J(\chi,T)=\int_\Omega q(\chi)T dx \tag{4.1}$$

满足

$$\int_\Omega\kappa(\chi)\nabla T\cdot\nabla S dx=\int_\Omega q(\chi)S dx\quad\forall S\in H_D^1(\Omega):=\{v\in H^1(\Omega):\ v=0\text{ on }\Gamma_D\}, \tag{4.2}$$

其中 $H_g^1(\Omega):=\{v\in H^1(\Omega):\ v=g$ 在 $\Gamma_D\}$ 中，且 $g\in H^{\frac12}(\Gamma_D)$，$\chi$ 是形状的指示函数。可行形状的可行集定义为

$$\mathcal{U}=\Big\{\chi\in BV(\Omega):\ \chi\in\{0,1\},\ \int_\Omega\chi dx\le\beta|\Omega|\Big\}.$$

在此模型中，热源依赖于设计，即

$$q(\chi)=q_1\chi+q_2(1-\chi)\quad(q_1<q_2)$$

其中，q_1,q_2为某些正常数，而热传导系数也取决于设计

$$\kappa(\chi)=\kappa_1\chi+\kappa_2(1-\chi)\quad(\kappa_1>\kappa_2)$$

其中，κ_1,κ_2为某些正常数。不失一般性，我们仅考虑具有齐次狄利克雷边界条件的稳态热方程。该模型的示意图见图11。按照罚函数法的思路，我们将问题改写为以下形式

$$\min_{\chi\in\mathcal{U}}\min_{T\in H_g^1(\Omega)}L(\chi,T)=\int_\Omega\kappa(\chi)\nabla T\cdot\nabla T\ dx+\lambda\Big(\frac12a(\chi;T)-\ell(T)+\frac12a(\chi;T^*)\Big)+\frac{\gamma}{\epsilon}P_{G_\epsilon}(\chi), \tag{4.3}$$

其中

$$a(\chi;T)=\int_\Omega\kappa(\chi)\nabla T\cdot\nabla T\ dx,\quad\ell(T)=\int_\Omega q(\chi)T\ dx, \tag{4.4}$$

$$T^*\in\arg\min_{T\in H_g^1(\Omega)}\Big(\frac12a(\chi;T)-\ell(T)\Big). \tag{4.5}$$

显然，求解内层最小化问题等价于求解以下偏微分方程：求满足以下条件的 $T\in H_g^1(\Omega)$

$$\int_\Omega\kappa(\chi)\nabla T\cdot\nabla S\ dx=\frac{\lambda}{\lambda+2}\int_\Omega q(\chi)S\ dx\qquad\forall S\in H_D^1(\Omega). \tag{4.6}$$

目标泛函 L 关于 χ 的弗雷歇导数可轻易推导如下。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \chi}(\chi,T)(\hat{\chi}) = &\int_\Omega \kappa'(\chi)(\hat{\chi})|\nabla T|^2\ dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \kappa'(\chi)(\hat{\chi})(|\nabla T|^2 - |\nabla T^*|^2)\ dx \\ &- \lambda\int_\Omega q'(\chi)(\hat{\chi})T\ dx + \frac{\gamma}{\epsilon}\frac{\partial P_{G_\epsilon}}{\partial \chi}(\hat{\chi}).\end{aligned} \tag{4.7}$$

因此，可以直接得到传热问题的数值算法 .

算法 3 传热问题的梯度下降算法

1: 初始化 $k=0$，χ_k （初始值通常设为具有 $\chi_k=\beta$的均匀分布），以及参数 λ，γ，ϵ，Δ。2: **当** χ_k 未收敛**时**3: 求解 (4.2) 和 (4.6)。4: 计算 (4.7)。5: 使用算法 1 更新 χ_k。6: $k \leftarrow k+1$。7: **结束循环**8: **返回** 最优密度 χ^* 和函数值 $L(\chi^*,\ T^*)$。

4.2. 广义材料插值函数。与为柔顺机构问题引入的变量替换类似，我们可以对传热问题采用类似的变换。具体而言，我们定义

$$\Lambda = \Big[\Big(\frac{1}{\kappa_1}-\frac{1}{\kappa_2}\Big)\chi + \frac{1}{\kappa_2}\Big]^{-1}\nabla T, \tag{4.8}$$

它在此发挥的作用类似于力学情形中的应力场，是一种类通量变量 σ。

将关注点从纯代数或结构视角转向对状态方程的直接影响后，我们发现，这种替换有效地使原本关于 χ 的半凸泛函变为凸泛函。这种凸化与柔顺机构问题中观察到的关系类似：

$$A(\chi) = (E_{\max}-E_{\min})\chi + E_{\min} \quad\Longleftrightarrow\quad A(\chi) = \Big[\Big(\frac{1}{E_{\max}}-\frac{1}{E_{\min}}\Big)\chi + \frac{1}{E_{\min}}\Big]^{-1} \quad \chi\in\mathcal{U}, \tag{4.9}$$

$$\kappa(\chi) = (\kappa_1-\kappa_2)\chi + \kappa_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \kappa(\chi) = \Big[\Big(\frac{1}{\kappa_1}-\frac{1}{\kappa_2}\Big)\chi + \frac{1}{\kappa_2}\Big]^{-1} \quad \chi\in\mathcal{U}. \tag{4.10}$$

因此，这种替换在温度梯度场 ∇T 与通量场 Λ 之间建立了连续的桥梁，从而形成更凸且数值更稳定的优化景观。

在惩罚框架内，我们进一步发现，可以引入一族函数，以区别于传统滤波或密度惩罚技术的方式控制优化区域的连通性。我们定义如下**广义材料插值函数**（GMIF）：

$$Y(k_1,k_2,p,\chi) = [(k_1^p-k_2^p)\chi + k_2^p]^{1/p} \quad \chi\in\bar{\mathcal{U}}, \tag{4.11}$$

其中，k_1 和 k_2 表示状态方程中出现的物理量（例如导热系数或刚度），$p\in\mathbb{R}$ 是可调参数，而 $\chi\in\mathcal{U}$。$p\in[-1,1]$ 尤为值得关注，因为当 $p=1$ 时，它还原了（4.10）的左侧定义；当 $p=-1$时，则还原了右侧定义。

如图1所示，当 $p=1$时，Y 恢复为标准的算术（加权）平均，对应于原始状态方程。当 $p\to-1$ 时，Y趋近于调和平均，这与状态方程的对偶（倒数）表述相一致。数值实验表明，p 接近1时，材料分布往往会出现更突变的变化，区域连通性也较弱；而接近 -1 的取值则有助于实现更平滑的过渡和更强的连通性。因此，这一系列插值函数提供了一种灵活且具有明确物理意义的机制，可用于控制优化设计中的拓扑特征。

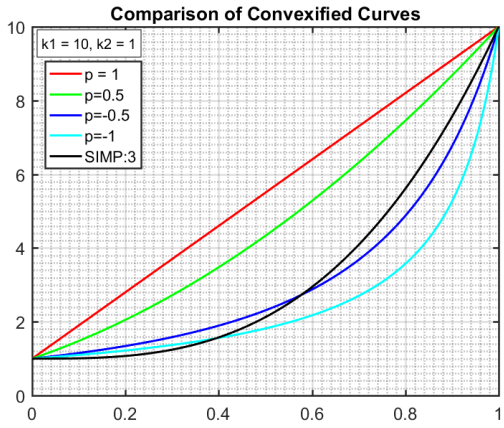


图1. 指数 p取不同值时，广义材料插值函数 $Y(k_1,\ k_2,\ p,\ \chi)$的行为。

5. 数值结果

本节通过一系列全面的数值实验，展示所提出的基于罚函数的方法的有效性、稳健性和实际性能。实验分为两大部分：柔顺机构设计，以及含设计相关热源的传热优化。在柔顺机构部分，我们重点考察两个代表性基准问题的解的质量。在传热部分，我们不仅评估该方法的整体性能，还研究广义材料插值函数（GMIF）的指数 p 对优化拓扑结构的影响，尤其关注其对区域连通性和材料分布平滑性的影响。

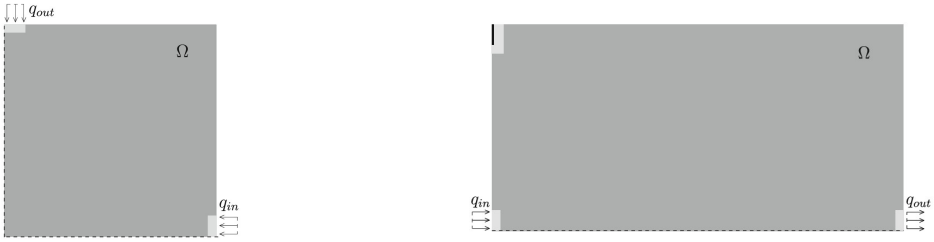


图2.（改编自 [19]）虚线表示齐次切向诺伊曼边界，粗实线表示齐次狄利克雷边界，q_{in} 和 q_{out}表示非齐次诺伊曼边界，其余部分为齐次诺伊曼边界。

5.1. 柔顺机构问题。 我们考虑柔顺机构设计中的两个具有适当边界条件的代表性模型问题（参见图2）。共同参数如下：实体材料的杨氏模量 $E_{\max} = 5000 \times 8/3$、人工（空隙）材料的杨氏模量 $E_{\min} = 10^{-5} E_{\max}$、周长惩罚参数 $\gamma = 0.1$和卷积参数$\epsilon = h$ （其中 h 为网格尺寸）。两种情况下，初始设计均匀设为 $\chi = \beta$。对于模型问题 1，输入载荷为 $q_{\text{in}} = -2$，输出载荷为 $q_{\text{out}} = -1$，网格尺寸为 400×400。对于模型问题 2，采用 $q_{\text{in}} = 1$、 $q_{\text{out}} = 1$和网格尺寸为 600×300 的网格。

图 3–6 中的结果表明，在整个优化过程中，目标泛函呈现出优异的单调下降趋势，并在相对较少的迭代次数内实现收敛。柔顺机构的整体形状在最初几步中迅速显现，而后续迭代主要用于完善细节。

在图 3–8 中，实线绿色曲线表示将线搜索步数也计入后目标泛函的变化，而红色加号标记则表示仅经过梯度下降步数后的变化。两条曲线几乎完美重合，这从实验上证实，尽管罚函数法引入线搜索以确保目标函数严格下降，但在实际的柔顺机构问题中，线搜索步骤很少发生。

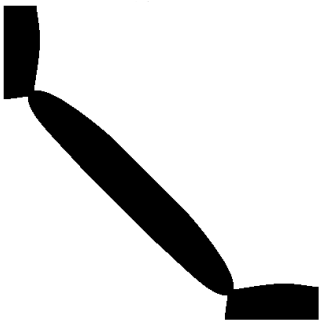


图3. 最终最优形状。

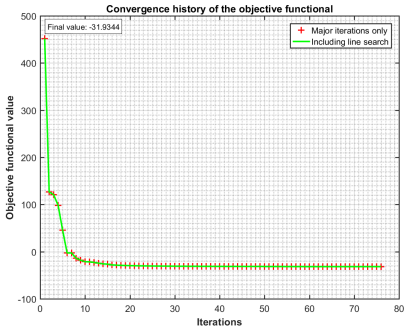


图4. 目标泛函的收敛历史。

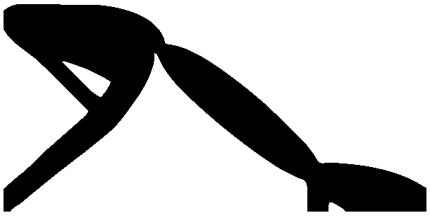


图5. 最终最优形状。

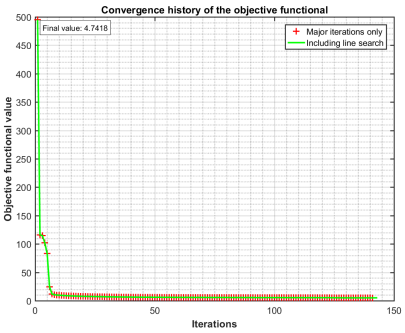


图6. 目标泛函的收敛历史。

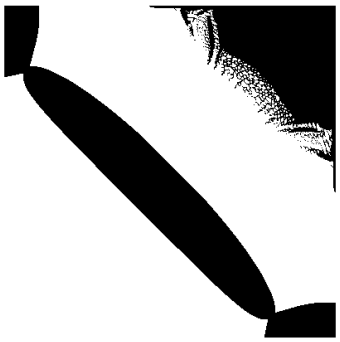


图7. 最终最优形状。

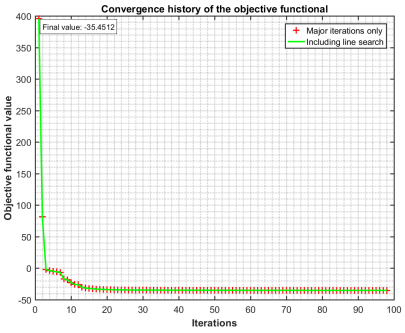


图 8. 目标泛函的收敛历史。

此外，图 7 展示了模型问题 1 中将体积不等式约束替换为等式约束后得到的结果。该方法仍能生成高质量的形状，进一步表明它在约束、网格分辨率和载荷条件发生变化时具有稳健性和数值稳定性。

另一方面，使用基于位移的公式 (2.10) 时，足够大的罚参数 λ （在我们的实验中， $\lambda = 25$ 已足够）会产生与基于应力的方法所得结果相当的数值结果。对于涉及设计相关体力的问题，这种公式尤其有优势。

对于模型问题 2，我们同样采用广义材料插值函数（GMIF），并使用指数序列 $p = -0.2$、-0.4、-0.6、-0.8、-1。目标泛函的最终最优构型和收敛历程分别如图 9 和图 10 所示。当$p > 0$时，若以均匀密度 $\chi = \beta$作为初始条件，基于应力和基于位移的罚函数公式都容易收敛到不理想的局部极小值。然而，采用非均匀初始构型即可轻松获得有意义的最优形状。



图9. 使用广义材料插值函数（GMIF）求解柔顺机构问题，在不同指数值 p 下得到的最终最优形状。从左至右： $p=-0.2$, $p=-0.4$, $p=-0.6$, $p=-0.8$, $p=-1$。

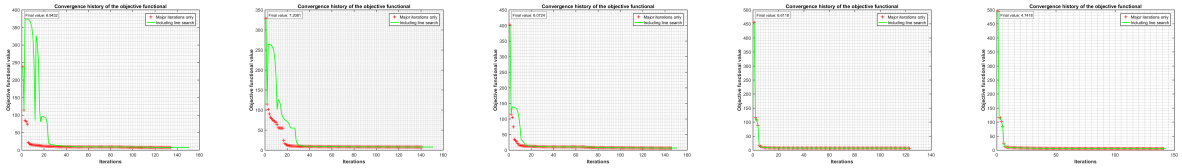


图10. 使用广义材料插值函数（GMIF）求解柔顺机构问题，在不同指数值 p 下目标泛函的收敛历程。从左至右： $p=-0.2$, $p=-0.4$, $p=-0.6$,$p=-0.8$, $p=-1$。

5.2. **传热问题**。在本小节中，我们考虑传热优化的模型问题，参见图11。在示意图中，细实线表示齐次诺伊曼边界条件，而粗实线表示非齐次狄利克雷边界条件。在

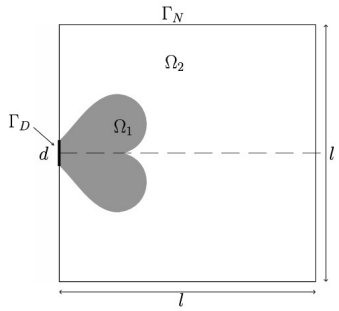


图11. 传热模型示意图（参见 [10]）。



图12. 初始形状。

对于传热问题的数值实验，我们固定以下参数：热导率 $\kappa_1=10$ 和 $\kappa_2=1$、热生成率 $q_1=1$ 和 $q_2=100$、具有 600×600 个单元的均匀网格、惩罚系数 $\lambda=0.1$、周长惩罚系数 $\gamma=0.1$ 和卷积参数 $\epsilon=h$ （其中 h 为网格尺寸）。在区域宽度为 $1/5$ 的一段边界上施加齐次狄利克雷边界条件，该线段位于左侧边界的中央。初始设计是一个宽度为区域宽度 $1/5$ 的水平细条，位于区域中央（参见图12）。

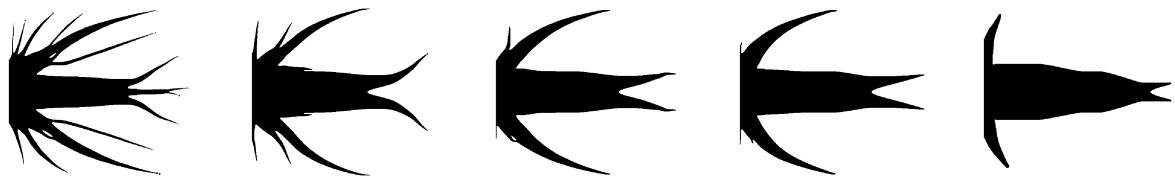


图13. 使用广义材料插值函数（GMIF）求解传热问题，在不同指数值 p下得到的最终最优形状。从左至右： $p=1$, $p=0.5$, $p=0.1$, $p=-0.1$, $p=-1$。

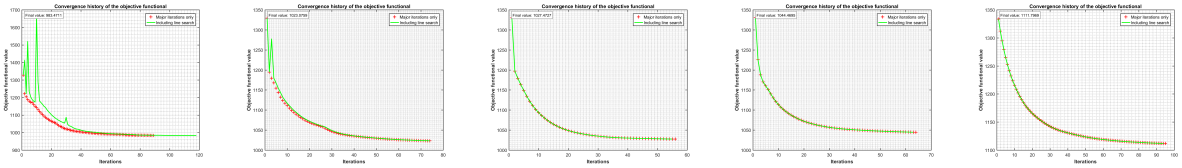


图14. 使用广义材料插值函数（GMIF）并采用不同指数值 p 得到的热传递问题目标泛函收敛历程。从左到右： $p = 1$、 $p = 0.5$、 $p = 0.1$、 $p = -0.1$、 $p = -1$。

图13和图14中的数值结果表明，对于所有测试的指数 p，目标泛函在整个优化过程中均呈现出令人满意的单调下降。然而，当 $p = 1$ 时，需要进行相对较多的线搜索过程，且最终的优化形状在尖端附近显示出一些不连通特征。通过网格细化可以部分减轻这些伪影，但改进仍然有限。

将 p 充分减小，几乎可以立即得到高度连通的形状，同时线搜索步数显著减少。随着 p 进一步减小，线搜索评估的频率持续降低；当 $p = -1$时，算法完全不需要线搜索步骤。然而，在 $p = -1$ 得到的形状并非最优，表明优化过程最终停留在一个不理想的局部极小值。这些观察结果表明，广义材料插值函数中的指数 p 提供了一种有效且直观的机制，可用于平衡拓扑连通性、数值稳定性和解的质量。

6. 结论

本文提出了一种新颖的基于惩罚的重新表述方法，用于求解非自伴情形下的拓扑优化问题，并特别关注柔顺机构设计。我们从经典的基于位移的公式出发，引入变量替换，将问题转化为一个以类应力变量表示的等价双层优化问题。通过采用精心设计的可微惩罚项来施加状态约束，我们得到了一个单层惩罚泛函；当惩罚参数足够大时，该泛函与原问题等价。这种重新表述不仅保留了问题的基本物理特性，还带来了更稳定且凸化的优化景观。

研究表明，所提出的方法在不同物理问题中具有良好的通用性和有效性。对于柔顺机构问题，我们严格确立了惩罚表述与原问题之间的等价性，并证明当网格尺寸 $h \to 0$ 和正则化参数 $\epsilon \to 0$时，离散惩罚问题 Γ收敛到连续问题。此外，在适当的孤立性假设下，离散问题的局部极小点收敛到连续问题的孤立局部极小点。我们开发了一种单调下降算法，将梯度下降更新与 L^1-投影相结合，从而保证每次迭代都严格降低目标函数，并在离散情形下有限终止。数值实验表明，与经典方法相比，该方法能够生成高质量、网格无关的设计，精确控制最大应力，并改善收敛行为。

同一惩罚框架被直接应用于传热问题，展现了其在处理设计相关材料属性和源项时的通用性与稳健性。值得注意的是，该方法无需进行重大结构修改，仍能保持有效。

一个关键的理论发现是出现了一族函数，称为**广义材料插值函数(GMIF)**，定义如下：

$$Y(k_1, k_2, p, \chi) = ((k_1^p - k_2^p)\chi + k_2^p)^{\frac{1}{p}} . \tag{6.1}$$

只需调整指数 p，该族即可在算术平均数（$p = 1$）和调和平均（$p \to -1$）之间连续插值，从而为控制最优设计的连通性和拓扑特征提供灵活且具有物理意义的机制。数值结果表明， p 接近 1 时会促使设计发生突变，连通性较弱；而 p 接近 -1 时则有利于形成更平滑的过渡和更强的连通性。这种控制机制不同于传统的滤波或惩罚技术，为调整解的拓扑复杂度提供了一种有前景的工具。

本工作的贡献为进一步的理论和数值研究奠定了坚实基础。未来的研究方向包括：(i) 为所提出的惩罚方法建立更为抽象的数学框架，深入分析其在一般非自伴情形下的泛函性质和收敛行为；(ii) 通过变分不等式或形状微积分等方法，严格探究 GMIF 族所提供的连通性控制背后的数学机制；以及 (iii) 将该方法扩展至更复杂的多物理场问题，例如流固耦合或热电力系统，在这些问题中，不同物理场之间的相互作用带来了额外挑战。

总体而言，本文提出的罚函数法及其相关的 GMIF插值，为非自伴问题中的可靠拓扑优化提供了一条理论依据充分且计算效率高的途径，并在工程设计和材料科学领域具有广泛的潜在应用。

参考文献

[1] Grégoire Allaire。《均匀化方法中的形状优化》。第1版。纽约州纽约市：施普林格，2002年。[2] Grégoire Allaire、François Jouve 和 Anca-Maria Toader。“利用灵敏度分析和水平集方法进行结构优化”。载于：《计算物理学杂志》194.1（2004），第363–393页。[3] Luigi Ambrosio 和 Giuseppe Buttazzo。“带周长惩罚的最优设计问题”。载于：《变分法与偏微分方程》1.1（1993），第55–69页。[4] Hajer Bahouri、Jean-Yves Chemin 和 Raphaël Danchin。《傅里叶分析与非线性偏微分方程》。第1版。海德堡：施普林格，2011年。[5] M.P. Bendsøe。“作为材料分布问题的最优形状设计”。载于：《结构优化》1（1989），第193–202页。[6] Andrea Braides。《局部极小化、变分演化与 Γ-收敛》。第1版。纽约州纽约市：施普林格，2014年。[7] Susanne C. Brenner 和 L. Ridg way Scott。《有限元方法的数学理论》。第3版。纽约州纽约市：施普林格，2008年。[8] Haim Brezis。《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》。第1版。纽约：施普林格纽约，2010年。[9] Luyu Cen 等人。“最小柔顺度问题的迭代阈值方法”。载于：《计算物理通讯》33（2023），第1189–1216页。[10] Huangxin Chen 等人。“用于传热问题拓扑优化的基于预测校正的迭代卷积阈值方法”。载于：《计算物理学杂志》511（2024），第113119页。[11] Lesi Chen、Yaohua Ma 和 Jingzhao Zhang。“采用完全一阶预言机的近最优非凸-强凸双层优化”。载于：《机器学习研究杂志》26（2025），第1–56页。[12] J.D. Deaton 和 R.V. Grandhi。“结构与多学科连续体拓扑优化综述：2000年以后”。载于：《结构与多学科优化》49（2014），第1–38页。[13] S. Esedoglu 和 J. Shen。“基于Mumford-Shah-Euler图像模型的数字图像修复”。载于：《欧洲应用数学杂志》13（2002），第353–370页。[14] Selim Esedoglu 和 Yen-Hsi Richard Tsai。“分片常数Mumford–Shah泛函的阈值动力学”。载于：《计算物理学杂志》211.1（2006），第367–384页。[15] Lawrence C. Evans 和 Ronald F. Gariepy。《测度论与函数的精细性质》。第1版。纽约：Chapman and Hall/CRC，2015年。[16] Bangti Jin 等人。“结构拓扑优化的自适应相场方法”。载于：《计算物理学杂志》506（2024），第112932页。[17] H. Leng 等人。“Navier–Stokes流拓扑优化的迭代阈值方法”。载于：《工业与应用数学最新进展》1（2022），第205–226页。[18] Hao Li 等人。“考虑平均柔顺度约束的共轭传热三维拓扑优化：迈向图形用户界面与原型制作”。载于：《工程软件进展》207（2025），第103939页。[19] C.G. Lopes 和 A.A. Novotny。“基于拓扑导数概念、带应力约束的柔顺机构拓扑设计”。载于：《结构与多学科优化》54（2016），第737–746页。[20] José M. Mazón、Julio D. Rossi 和 Julián Toledo。“可测集的非局部周长、曲率与极小曲面”。载于：《数学分析杂志》138.1（2019），第235–279页。

[21] Stanley Osher 和 James A Sethian。“以依赖曲率的速度传播的界面：基于Hamilton–Jacobi公式的算法”。载于：计算物理学杂志79.1（1988），第12–49页。[22] I.P.A. Papadopoulos 和 E. Süli。“Stokes流拓扑优化问题的数值分析”。载于：计算与应用数学杂志412（2022），第114295页。[23] S. Ruuth、B. Merriman 和 J. et al. Xin。“细丝的平均曲率扩散生成运动”。载于：非线性科学杂志11（2001），第473–493页。[24] O. Sigmund 和 K. Maute。“拓扑优化方法”。载于：结构与多学科优化48（2013），第1031–1055页。[25] Ronald Fedkiw Stanley Osher。《水平集方法与动态隐式曲面》。第1版。纽约州纽约市：施普林格，2003年。[26] M. Stolpe 和 K. Svanberg。“最小柔顺度拓扑优化的替代插值方案”。载于：结构与多学科优化22（2001），第116–124页。[27] Michael Yu Wang、Xiaoming Wang 和 Dongming Guo。“用于结构拓扑优化的水平集方法”。载于：计算力学与工程方法192.1（2003），第227–246页。[28] Y.M. Xie 和 G.P. Steven。“一种简单的结构优化进化程序”。载于：计算机与结构49（1993），第885–896页。[29] Xianmin Xu、Dong Wang 和 Xiao-Ping Wang。“粗糙表面润湿的高效阈值动力学方法”。载于：计算物理学杂志330（2017），第510–528页。[30] Benliang Zhu 等人。“利用连续体拓扑优化进行柔顺机构设计：综述”。载于：机构与机器理论143（2020），第103622页。

SKLMS，计算数学与科学工程计算研究所，数学与系统科学研究院，中国科学院，北京，中国。电子邮箱：wgong@lsec.cc.ac.cn

中国科学院大学与计算数学与科学工程计算研究所，数学与系统科学研究院，中国科学院，北京，中国。电子邮箱：yeyuanda@lsec.ac.cc.cn