arXiv:2603.00969v1 [math.CV] 1 Mar 2026

关于具有积分约束的边界非保持映射

VICTORIA DESYATKA, OLEKSANDR DOVHOPIATYI, EVGENY SEVOST'YANOV

2026年3月3日

摘要

本文研究满足上加权波列茨基不等式的映射。我们研究域的边界在映射下可能不被保持的情形，并且上述不等式中的主函数满足积分型约束。在定义域及相应聚簇集的某些附加条件下，我们证明上述映射族在该域的闭包上是等度连续的。

2010年数学主题分类：主分类 30C65；次分类 31A15、31B25

1 引言

本文致力于研究有界畸变和有限畸变映射，参见例如[Cr_2], [MRV_1], [$MRSY_1$]–[$MRSY_2$], [PSS], [RV], [SalSt], [Vu] 以及 [Va]。我们所关注的映射在其定义中包含对路径族模畸变的上估计，参见例如 [Cr_1]–[Cr_3], [$MRSY_2$] 以及 [Sev_3]。可以看出，对此类映射局部性态的研究主要假定下列性质之一：这些映射要么是同胚，要么是开的、离散的且闭的。论文 [Cr_1], [NP], [Va], [RS_1]–[RS_3] 可归入第一类，而文献[Cr_3], [Sr], [Vu] 属于第二类。应当指出，映射的开性、离散性与闭性蕴含其保持边界，反之，开的、离散的且为边界保持映射是闭的；参见例如 [Vu，定理]。非闭（非边界保持）映射仍研究不足。这主要

由于其研究方法相当复杂，因为所谓路径提升在这些映射下的性态与相应映射的性态关联不佳。我们还应当指出，非闭映射相当多。例如，复平面上的解析函数 $f(z) = z^4$, 在 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}$ 中是闭映射： $|z| < 1\}$ 但在圆盘 $B(1,1) = \{z \in \mathbb{C}$： $|z-1| < 1\}$ 中则不再如此。根据著名的卡索拉蒂-魏尔斯特拉斯定理或皮卡定理，解析函数的孤立奇点仅当该映射不是闭映射时才是其本性奇点（闭映射尤其保持域的边界，同时，具有本性奇点的解析函数的聚集集是整个扩充复平面）。

不久前，我们开始研究非闭映射，并提出了以下方法：将边界非保持映射的研究转化为在较小域中的研究，在这些域中，映射已经是闭映射。反过来，这可以通过对聚集集施加某些额外限制来实现；参见 [DS$_1$]。在本文中，我们继续沿这一方向开展研究。与 [DS$_1$]，一样，研究的主要对象是映射的边界行为，以及它们的族在区域闭包中的整体行为。关于这一主题的一项经典结果如下（见 [NP]）。

定理 A。（N¨akki–Palka）。设 $\mathfrak{F}$ 是从域 $D \neq \mathbb{R}^n$ 到域 D' 的 K-拟共形映射族，且 D 或 $\overline{D'}$ 在边界上拟共形带边。则 $\mathfrak{F}$ 一致等度连续，当且仅当每个 $f \in \mathfrak{F}$ 都可延拓为从 D 到 D' 的连续映射，并且 下确界$_{\mathfrak{F}}$ h（f（A）> 0，其中某个连续统 A 位于 D.

这里 $h(f(A))$ 表示集合 $f(A) \subset \mathbb{R}^n$，的弦直径，参见例如 [$\overline{\text{Va}}$，定义 12.1]。

我们已获得这一结论的一些类似结果，包括适用于同胚、开离散映射和闭映射的情形，参见例如 [Sev$_4$] 和 [SevSkv$_1$]。在最一般的情形下，即映射既非同胚也非闭映射时，我们得到如下结论，见下文。首先给出下文将用到的定义和记号。

称博雷尔函数 ρ： $\mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的路径族 Γ， γ，是可容许的，如果满足关系

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| \geqslant 1$$

该关系对所有（局部可求长的）路径 $\gamma \in \Gamma$. 均成立。在这种情况下，我们记作： $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. 。设 $p \geqslant 1$，则 Γ 的 p模数由等式定义

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\,dm(x)\,.$$

我们设 $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$。令 $x_0 \in \mathbb{R}^n$， $0 < r_1 < r_2 < \infty$,

$$S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| = r\}\,, \quad B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| < r\} \tag{1.1}$$

and

$$A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\} . \tag{1.2}$$

给定集合 $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ 和域 $D \subset \mathbb{R}^n$，我们用 $\Gamma(E, F, D)$ 表示所有满足以下条件的路径 γ: $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ 的族: $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ 且 $\gamma(t) \in D$，其中 $t \in (a, b)$。令 $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$，其中以 x_0 为中心、半径为 r_i 的球面 $S(x_0, r_i)$ 定义见 (1.1)。令 $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为满足条件 $Q(x) \equiv 0$ 的勒贝格可测函数，其中 $x \in \mathbb{R}^n \setminus D$. 。令 $p \geqslant 1$. 映射 $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ 称为点 $x_0 \in D \setminus \{\infty\}$ 处关于 p-模数的环形 Q-映射，如果满足以下条件

$$M_p(f(\Gamma(S_1, S_2, D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{1.3}$$

对某个 $r_0(x_0) > 0$，所有 $0 < r_1 < r_2 < r_0$ 以及所有满足以下条件的勒贝格可测函数 $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1 . \tag{1.4}$$

借助反演，可以在 $x_0 = \infty$ 处定义关系 (1.3)：根据定义，当 $f = f \circ \psi$ 在 $x_0 = 0$ 处满足 (1.3) 时，我们称 f 满足 (1.3)，而 $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$. —

若域 $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ 关于 p-模数 $p \geqslant 1$ 是一致域，则对每个 $r > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得只要 F 和 F^* 是 D 中满足 $h(F) \geqslant r$ 且 $h(F^*) \geqslant r$. 的连续统，就有 $M_p(\Gamma(F, F^*, D)) \geqslant \delta$。设 I 是某个指标集合。若对于 $r > 0$，上述模数条件对每个 D_i 都成立，且取相同的数值 δ.，则称域 $D_i, i \in I$ 关于 p-模数是等一致域。需要指出的是，通常而言，所提出的一致域概念与 Martio-Sarvas 意义下的一致域定义并无关联 [MSa]。

按照 [Ri], a 电容器 在 $\mathbb{R}^n$ 中是一个有序对 $E = (A, C)$，其中 A 在 $\mathbb{R}^n$ 中是开集，且$C \neq \varnothing$ 是 A. 的紧子集。若 $1 \leqslant p < \infty$，则 E 的 p-容量定义为

$$\operatorname{cap}_p E = \inf_u \int\limits_A |\nabla u|^p\, dm ,$$

其中下确界取遍所有非负函数 u ，这些函数属于 $\mathrm{ACL}^p(A)$，在 A 中具有紧支集，且满足 $u|_C \geqslant 1$. 。设 $\mathbb{R}^n$. 中的 F 为紧集。若 F 的-容量为零，则称其为容量零集；若对某个（因而对所有） $A \supset F$. 中的有界开集都有 $\mathrm{cap}_p(A, F) = 0$，便称其为 p-容量零集。若任意集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的每个紧子集都具有同样性质，则称 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 p-容量零集。此时记作 $\mathrm{cap}_p E = 0$ ($\mathrm{cap}\, E = 0$ 若 $p = n$)，否则记作 $\mathrm{cap}_p E > 0$.

设 $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ 为勒贝格可测函数。我们令

$$Q'(x) = \begin{cases} Q(x), & Q(x) \geqslant 1 , \\ 1, & Q(x) < 1 . \end{cases}$$

De用 q'_{x_0} 表示 $Q'(x)$在球面 $|x-x_0|=r$上的平均值，即 ，

$$q'_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q'(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}\,. \tag{1.5}$$

给定 $p \geqslant 1$, $\delta > 0$, 闭集 E, E_*, F在 $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, 一个域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 以及一个勒贝格可测函数 $Q:\ D \to [0,\infty]$ 记 $\mathfrak{R}^{E_*}_{Q\,\delta\,p\,E\,F\,,\,,\,,}(D)$ 为一族开离散映射 $f:\ D \to \mathbb{R}^n \setminus F$ 在满足条件 (1.3)–(1.4) 的任意点 $x_0 \in D$ 处:

1) $C(f,\ \partial D) \subset E_*$,

2) 对于 $D'_f \setminus E_*$, D'_f 的每个连通分支 $K:=f(D)$，存在一个连续统 $K_f \subset K$，使得 $h(K_f) \geqslant \delta$且 $h(f^{-1}(K_f)\ \partial D) \geqslant \delta > 0$,

3) $f^{-1}(E_*) \subset E$.

定理 B。 设 $p \geqslant 1$，设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个域， $n \geqslant 2$. 假设:

1) 集合 E 在 D 中无处稠密，且 D 在 E 上有限连通，即对于任意 $z_0 \in E$ 以及 z_0 的任意邻域 U，都存在 z_0 的一个邻域 $V \subset U$，使得 $(D \cap V) \setminus E$ 由有限个连通分支组成;

2) 对于任意 $x_0 \in \partial D$，存在 $m = m(x_0) \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m < \infty$，使得以下条件成立: 对于 x_0 的任意邻域 U，都存在 x_0 的一个邻域 $V \subset U$，并且:

2a) $V \cap D$ 是连通的,

2b) $(V \cap D) \setminus E$ 至多由 m 个连通分支组成。

设对于 $p = n$，集合 F具有正容量，而对于 $n-1 < p < n$，它是任意闭集。

假设对任意 $x_0 \in \partial D$，下列条件中至少有一个成立: $3_1)$ 函数 Q 在 x_0; 处具有有限平均振荡 $3_2)$ $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ 当 $r \to 0;$ $3_3)$条件

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}'^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty$$

对某个 $\delta(x_0) > 0$成立，其中$q'_{x_0}(t)$ 在*(1.5)*中定义。

设 $D'_f \setminus E_*$ 的所有连通分支所成的族在 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{Q\,\delta\,p\,E\,F\,,,,}(D)$ 上关于 p-模是等度一致的。则每一个 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{Q\,\delta\,p\,E\,F\,,,,}(D)$ 都具有到 ∂D 的连续延拓，且由所有延拓映射 $f:\ D \to \mathbb{R}^n$组成的族 $\overline{\mathfrak{R}}^{E_*}_{Q\,\delta\,p\,E\,F\,,,,}(D)$在 D.上等度连续

我们的目标是在函数条件略有不同的情况下证明定理 B，特别是研究函数可能变化的情形。类似的条件也适用于

我们此前研究过其他类型定理的类似问题，尤其是关于狄利克雷问题解类紧性的定理；例如参见 [RS$_3$], [RSY]和[DS$_2$]。

给定 $p \geqslant 1$, $\delta > 0$, 闭集 E, E_*, F在$\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, 域 $D \subset \mathbb{R}^n$, 数$M > 0$ 及递增凸函数 $\Phi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 我们用 $\mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta}(\overline{E\,F}, \ldots, \overline{\ldots}, p(D)$ 表示由开离散映射 $f\colon D \to \mathbb{R}^n \setminus F$ 组成的族，其中存在勒贝格可测函数 $Q = Q_f\colon D \to [0, \infty]$ 在点 $x_0 \in D$ 满足条件 (1.3)–(1.4), 对某个 $r_0 = r_0(x_0) > 0$ 以及任意满足以下条件的 $0 < r_1 < r_2 < \overline{r_0}$

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(Q_f(x)) \cdot \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M \tag{1.6}$$

并且满足

1) $C(f, \partial D) \subset E_*$,

2) 对于 $D'_f \setminus E_*$, D'_f 的每个连通分支 $K := f(D)$, 存在一个连续统 $K_f \subset K$, 使得 $h(K_f) \geqslant \delta$ 且 $h(f^{-1}(K_f)\ \partial D) \geqslant \delta > 0$,

3) $f^{-1}(E_*) \subset E$.

以下陈述成立，参见**定理 A** 和**B**。

定理 1.1. 设 $p \geqslant 1$, 令 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个域, $n \geqslant 2$. 假设:

1) 集合 E 在 D 中无处稠密，且 D 在 E 上有限连通，即对于任意 $z_0 \in E$ 以及 z_0 的任意邻域 U，存在 z_0 的一个邻域 $V \subset U$，使得$(D \cap V) \setminus E$由有限个连通分支组成;

2) 对任意 $x_0 \in \partial D$，存在 $m = m(x_0) \in \mathbb{N}, 1 \leqslant m < \infty$，使得以下条件成立：对于 x_0 的任意邻域 U，存在 x_0 的一个邻域 $V \subset U$，并且:

2a) $V \cap D$ 是连通的,

2b) $(V \cap D) \setminus E$ 至多由 m 个连通分支组成。

设对于 $p = n$，集合 F具有正容量；对于 $n - 1 < p < n$，它是任意闭集。

假设关系

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\,[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p-1}}} = \infty \tag{1.7}$$

对某个 $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$成立。设 $D'_f \setminus E_*$ 的所有连通分支构成的族关于 p-模数，在 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta}(\overline{E\,F}, \ldots, p(D))$ 上等度一致。则每个 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta}(\overline{E\,F}, \ldots, p(D)$ 都可连续延拓到 $\overline{\partial D}$，并且由所有延拓映射$f\colon \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}^n}$组成的族$\overline{\mathfrak{R}}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta}(\overline{E\,F}, \ldots, p(D)$ 在 D. 中等度连续

2 预备知识

以下引理已在 [DS$_1$,引理 2.1] 中证明。

引理 2.1. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个域，$n \geqslant 2$，且设 $x_0 \in \partial D.$ 。假设 E 在 D 中是闭集且无处稠密的，并且 D 在 E 上有限连通，即，对于任意 $z_0 \in E$ 和 $\widetilde{\ }$，对于 z_0 的任意邻域 U，存在 z_0 的一个邻域 $V \subset U$，使得 $(D \cap V) \setminus E$ 由有限个连通分支组成。

此外，假设满足以下条件：对于 x_0 的任意邻域 U，存在 x_0 的一个邻域 $V \subset U$，使得：

a) $V \cap D$ 是连通的，

b) $(V \cap D) \setminus E$ 至多由 m 个连通分支组成，$1 \leqslant m < \infty.$

设 x_k、$y_k \in D \setminus E$、$k = 1$、2、.....是一个收敛于 x_0 的序列，其中 $k \to \infty.$。那么存在子序列 x_{k_l} 和 y_{k_l}、$l = 1$、2、.....，它们分别属于点 x_0 的某个邻域序列 V_l、$l = 1$、2、.....，使得 $V_l \subset B(x_0$、$2^{-l})$ $l = 1$、2、.....；此外，任意一对 x_{k_l} 和 y_{k_l} 都可以通过路径 γ_l 在 $V_l \cap D$ 中连接，其中 γ_l 至多包含 $m-1$ 个 $E.$ 中的点

设 $D \subset \mathbb{R}^n$、$f\colon\ D \to \mathbb{R}^n$ 是一个离散开映射，$\beta\colon\ [a, b) \to \mathbb{R}^n$ 是一条路径，且有 $x \in f^{-1}(\beta(a))$。若路径 $\alpha\colon\ [a, c) \to D$ 满足：(1) $\alpha(a) = x$；(2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c)}$；(3) 对于 $c < c' \leqslant b$，不存在路径 $\alpha'\colon\ [a, c') \to D$ 使得 $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ 且 $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,c')}.$，则称其为从 x 开始的 β 的极大 f-提升。这里以及下文中，如果路径 $\beta\colon\ [a,b) \to \mathbb{R}^n$ 满足 $h(\beta(t)\ \overline{C}) = \sup\ h(\beta(t)\ C) \to 0$ $\overline{\text{at}}_{x \in C} t \to b.$，我们就说该路径收敛于集合 $C \subset \mathbb{R}^n$，当 $t \to b$ 时。以下命题成立（见 [MRV$_2$, 引理 3.12]）。

命题 *2.1.* 设 $f: D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ 是一个开离散映射，设 $x_0 \in D$，并设 $\beta: [a, b) \to \mathbb{R}^n$ 是一条路径，使得 $\beta(a) = f(x_0)$，且满足以下条件之一：$\lim\limits_{t \to b} \beta(t)$ 存在，或者当 $t \to b.$ 时，$\beta(t) \to \partial f(D)$。那么，$\beta$ 有一个以 $x_0.$ 为起点的极大 f-提升 $\alpha: [a, c) \to D$。若 $\alpha(t) \to x_1 \in D$ 当 $t \to c$ 时，则 $c = b$ 且 $f(x_1) = \lim\limits_{t \to b} \beta(t)$。否则，当 $t \to c.$ 时，$\alpha(t) \to \partial D$。

以下结论由 [Sev$_5$, 在引理 2.1] 中证明。

引理 2.2. 设 $1 \leqslant p \leqslant n$，并设 $\Phi\colon\ [0, \infty] \to [0, \infty]$ 是一个严格递增凸函数，满足关系式 *(1.7)*，其中某个 $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$。设 $\mathfrak{Q}$ 是一个函数族 $Q\colon\ \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$，满足

$$\int\limits_D \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n} \leqslant M_0 < \infty \tag{2.1}$$

对于某个 $0 < M_0 < \infty.$ 现在，对于任意 $0 < r_0 < 1$ 以及每个 $\sigma > 0$，存在 $0 < r_* = r_*(\sigma, r_0, \Phi) < r_0$，使得

$$\int\limits_{\varepsilon}^{r_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \geqslant \sigma\,, \qquad \varepsilon \in (0, r_*)\,, \tag{2.2}$$

对于任意 $Q \in \mathfrak{Q}$.

注 2.1。我们令

$$Q'(x) = \begin{cases} Q(x), & Q(x) \geqslant 1 \\ 1, & Q(x) < 1 \end{cases}.$$

注意到 $Q'(x)$ 满足 (2.1)（差一个常数），例如参见 [Sev$_5$] 中定理1.3的证明。

3 定理1.1的证明

我们主要采用应用于 [DS$_1$] 中的方法。根据 [Sev$_5$, 定理1.1、1.2], D 中 $\mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta}{}^{E\,F}{}_{,,,,p}(D)$ 的等度连续性由此得到。

现在，我们证明如下命题：对于任意 $x_0 \in \partial D$, $x_0 \neq \infty$, 以及每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$，使得

$$h(f(x), f(y)) < \varepsilon \tag{3.1}$$

对任意 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta}{}^{E\,F}{}_{,\,,\,,\,,\,p}(D)$ 以及任意 x, $y \in B(x_0, \delta) \cap D$.

反设不然。则存在 $x_0 \in \partial D$, $\varepsilon_0 > 0$，一个序列 x_k, $x'_k \in D$, x_k, $x'_k \to x_0$作为 $k \to \infty$，并且 $f_k \in \mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta}{}^{E\,F}{}_{,\,,\,,\,,\,p}(D)$，使得

$$h(f_k(x_k), f_k(x'_k)) \geqslant \varepsilon_0/2\,. \tag{3.2}$$

根据假设 2)，存在一个邻域序列 $V_k \subset B(x_0, 2^{-k})$ k =1，2，. . .，使得 $V_k \cap D$是连通的，且 $(V_k \cap D) \backslash E$由 m个连通分支组成，$1 \leqslant m < \infty$.

注意，点 x_k和 x'_k, $k = 1$，2，. . .，可以选取为满足 x_k, $x'_k \notin E$.。事实上，由于在条件 1) 下，集合 E 在 D，中无处稠密，因此存在一个序列$x_{ki} \in D \setminus E$, $i = 1$，2，. . .，使得 $x_{ki} \to x_k$ 当 $i \to \infty$.。令 $\varepsilon > 0$.。由于映射 f_k 在点 x_k 和 x'_k，处连续，对于数 $k \in \mathbb{N}$，存在数 i_k, $j_k \in \mathbb{N}$使得 $h(f_k(x_{ki_k})\ f_k(x_k)) < \frac{1}{2^k}$且 $h(f_k(x'_{kj_k})\ f_k(x'_k)) < \frac{1}{2^k}$.现在，由 (3.2) 和三角不等式，

$$\begin{aligned} h(f_k(x_{ki_k}), f_k(x'_{kj_k})) &\geqslant h(f_k(x'_k), f_k(x_{ki_k})) - h(f_k(x'_k), f_k(x'_{kj_k})) \\ &\geqslant h(f_k(x_k), f_k(x'_k)) - h(f_k(x_k), f_k(x_{ki_k})) - h(f_k(x'_k), f_k(x'_{kj_k})) \\ &\geqslant \varepsilon_0/2 - \frac{2}{2^k} \geqslant \varepsilon_0/4 \end{aligned} \tag{3.3}$$

当 k. 足够大时，由于 (3.3)，我们可以假设 $x_k, x'_k \notin E$,，如所需。

现在，由引理 2.2 可知，存在子序列 x_{k_l} 和 x'_{k_l}, $l = 1$，2，.....，它们属于点 x_0 的某个邻域序列 V_l, $l = 1$，2，.....，，使得当 $l \to \infty$ 时，直径 $V_l \to 0$，此外，任意一对 x_{k_l} 和 x'_{k_l} 都可以通过路径 γ_l 在 $V_l \cap D$，中连接，其中 γ_l 包含

至多有 $m-1$个点位于 E.中。不失一般性，可以假设相同的序列x_k 和 y_k 满足上述性质。令 γ_k： $[0,1] \to D$， $\gamma_k(0) = x_k$ 和 $\gamma_k(1) = y_k$，$k = 1$，2，.....。

注意，路径 $f_k(\gamma_k)$ 中的点不超过 $m-1$ 个。在相反的情况下，至少有 m 个这样的点 $b_1 = f_k(\gamma_k(t_1))$ $b_2 = f_k(\gamma_k(t_2)) \ldots, b_m = f_k(\gamma_k(t_m)),0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m \leqslant 1.$ 但现在，点 $a_1 = \gamma_k(t_1)$ $a_2 = \gamma_k(t_2) \ldots, a_m = \gamma_k(t_m)$ 位于 $f_k^{-1}(E_*) \subset E$ 且同时属于 γ_k. 这与 γ_k. 的定义矛盾

Let

$$b_1 = f_k(\gamma_k(t_1)), b_2 = f_k(\gamma_k(t_2)) \quad , \ldots, \quad b_l = f_k(\gamma_k(t_l)) \,,$$

$$t_0 := 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_l \leqslant 1 = t_{l+1}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant m-1 \,,$$

be $f_k(\gamma_k)$ 中的点 $\cap E_*$. 由关系式 (3.2) 以及三角不等式可知 ,

$$\varepsilon_0/2 \leqslant h(f_k(x_k), f_k(y_k)) \leqslant \sum_{r=0}^{l} h(f_k(\gamma_k(t_r)), f_k(\gamma_k(t_{r+1}))) \,. \tag{3.4}$$

由 (3.4) 可知，存在 $1 \leqslant r = r(k) \leqslant m-1$ 使得

$$h(f(\gamma_k(t_{r(k)})), f_k(\gamma_k(t_{r(k)+1}))) \geqslant \varepsilon_0/(2(l+1)) \geqslant \varepsilon_0/(2m) \,. \tag{3.5}$$

注意，集合 $G_k := |\gamma_k|_{(t_{r(k)}, t_{r(k)+1})}|$ 属于 $D' \setminus E$.

~ ~注意， G_k 包含某个连续统 G_k ，满足 $h(G_k) \geqslant \varepsilon_0/4m$，对任意 $k \in \mathbb{N}$.均成立。事实上，根据 G_k 的构造，存在点列 $a_{s,k} := f_k(\gamma_k(p_s)) \to w_k := f(\gamma_k(t_{r(k)}))$, 当 $s \to \infty$ 时；且 $b_{s,k} = f_k(\gamma_k(q_s)) \to f(\gamma_k(t_{r(k)+1}))$，当 $s \to \infty$ 时，其中 $t_{r(k)} < p_s < q_s < t_{r(k)+1}$ 且 $a_{s,k}$,$b_{s,k} \in G_k$. 。根据三角不等式及 (3.5)

$$h(a_{s,k}, b_{s,k}) \geqslant h(b_{s,k}, w_k) - h(w_k, a_{s,k}) \geqslant$$

$$h(f_k(\gamma_k(t_{r(k)+1})), w_k) - h(f_k(\gamma_k(t_{r(k)+1})), b_{s,k}) - h(w_k, a_{s,k}) \geqslant$$

$$\varepsilon_0/(2m) - h(f_k(\gamma_k(t_{r(k)+1}), b_{s,k})) - h(w_k, a_{s,k}) \,.$$

由于 $a_{s,k} := f_k(\gamma_k(p_s)) \to w_k := f_k(\gamma_k(t_{r(k)}))$，当 $s \to \infty$ 时；且 $b_{s,k} = f_k(\gamma_k(q_s)) \to f_k(\gamma_k($ $t_{r(k)+1}))$，当 $s \to \infty$ 时，由最后一个不等式可知，存在 $s = s(k) \in \mathbb{N}$ ，使得

$$h(a_{s(k),k}, b_{s(k),k}) \geqslant \varepsilon_0/(4m) \,.$$

现在，我们设

$$\widetilde{G}_k := f_k(\gamma_k)|_{[p_{s(k)}, q_{s(k)}]} \,.$$

~ ~换言之， G_k 是连接点 $a_{s(k),k}$ 和 $b_{s(k),k}$. 之间路径 $f_k(\gamma_k)$ 的一部分。由于 G_k 是 $D'_{f_k} \setminus E_*$, 中的一个连续统，因此存在 $D'_{f_k} \setminus E_*$, 的一个连通分支 K_k，其中包含 K_k.。我们来应用集合 G_k 和 K_{f_k} 在 K_k 中的等度一致性定义（此处 K_{f_k} 是一个连续统，来自

类 $\mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta,\ E\,F\,,,,,p}(D)$ 的定义，特别是 $h(K_{f_k}) \geqslant \delta$）。根据此定义，对于数 $\delta_* := \min\{\delta, \varepsilon/4m\} > 0$，存在 $P > 0$，使得

$$M_p(\Gamma(\widetilde{G}_k, K_{f_k}, K_k)) \geqslant P > 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{3.6}$$

我们来证明，关系式 (3.6) 与 f 在 (1.3) 中的定义矛盾。事实上，记 Γ_k 为所有满足以下条件的半开路径族：$\beta_k\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$，使得 $\beta_k(a) \in G_k$，$\beta_k(t) \in K_k$ 对所有 $t \in [a, b)$ 均成立；此外，$\lim\limits_{t\to b-0} \beta_k(t) := B_k \in K_{f_k}$. 显然，由 (3.6)

$$M_p(\Gamma_k) = M_p(\Gamma(\widetilde{G}_k, K_{f_k}, K_k)) \geqslant P > 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{3.7}$$

考虑由族 Γ_k 中所有从 $|\gamma_k|$ 出发的极大 f_k-提升 $\alpha_k\colon [a, c) \to D$ 构成的族 Γ'_k；根据命题 2.1，这样的族存在。

注意，当 $\alpha_k \to \partial D$ 如 $k \to \infty$ 时，这种情况是不可能的。反设：令 $\alpha_k(t) \to \partial D$ 如 $t \to c.$。任取一个序列 $\varphi_m \in [0, c)$，使得 $\varphi_m \to c - 0$ 如 $m \to \infty.$。由于空间 $\mathbb{R}^n$ 是紧空间，作为该紧空间的闭子集，边界 ∂D 也是紧的。于是存在 $w_m \in \partial D$，使得

$$h(\alpha_k(\varphi_m), \partial D) = h(\alpha_k(\varphi_m), w_m) \to 0\,, \qquad m \to \infty\,. \tag{3.8}$$

由于 ∂D的紧性，我们可以假设当 $m \to \infty.$ 时 $w_m \to w_0 \in \partial D$。因此，由关系式(3.8)以及三角不等式

$$h(\alpha_k(\varphi_m), w_0) \leqslant h(\alpha_k(\varphi_m), w_m) + h(w_m, w_0) \to 0\,, \qquad m \to \infty\,. \tag{3.9}$$

另一方面，

$$f_k(\alpha_k(\varphi_m)) = \beta_k(\varphi_m) \to \beta(c)\,, \quad m \to \infty\,, \tag{3.10}$$

因为根据构造，路径 $\beta_k(t)$ $t \in [a, b]$, 连同其有限多个点一起位于 $K_k \subset D'_{f_k} \setminus E_*$ 中。同时，由(3.9)和(3.10)，我们有 $\beta_k(c) \in C(f_k, \partial D) \subset E_*$，这是根据类 $\mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta,\ E\,F\,,,,,p}(D)$. 的定义。包含关系 $\beta_k \subset D' \setminus E_*$ 与 $\beta_k(c) \in E_*$相互矛盾。

因此，由命题2.1 $\alpha_k \to x_1 \in D$，当 $t \to c - 0,$时，以及 c_b 和 $f_k(\alpha_k(b)) = f_k(x_1)$.换言之，$f_k$-提升 α_k 是完全的，即 $\alpha_k\colon [a, b] \to D.$ 此外，由此可得 $\alpha_k(b) \in f_k^{-1}(K_{f_k})$.

再次，根据类 $\mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta,\ E\,F\,,,,,p}(D)$, 的定义，

$$h(f_k^{-1}(K_{f_k}), \partial D) \geqslant \delta > 0\,. \tag{3.11}$$

由于 $x_0 \neq \infty$，由 (3.11) 可知

$$f_k^{-1}(K_{f_k}) \subset D \setminus B(x_0, r_0) \tag{3.12}$$

对任意 $k\in\mathbb{N}$ 以及某个 $r_0>0.$，令 k 满足 $2^{-k}<\varepsilon_0.$。我们可以认为 $\varepsilon_0<r_0$。根据 (3.12)，我们可以证明

$$\Gamma_k'>\Gamma(S(x_0,2^{-k}),S(x_0,\varepsilon_0),D) \tag{3.13}$$

（见 [Ku，定理 1.I.5，§46]）。现在，令

$$I_k=I(x_0,2^{-k},\varepsilon_0)=\int\limits_{2^{-k}}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}\widetilde{q}_{k,x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}, \tag{3.14}$$

其中

$$\widetilde{q}_{k,x_0}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,r)}\widetilde{Q}_{f_{m_k}}(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

and

$$\widetilde{Q}_{f_{m_k}}(x)=\begin{cases}Q_{f_{m_k}}(x), & Q(x)\geqslant 1\\ 1, & Q(x)<1\end{cases}.$$

由引理 2.2 和注 2.1

$$I_k=\int\limits_{2^{-k}}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}\widetilde{q}_{k,x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\to\infty \tag{3.15}$$

如 $k\to\infty.$ 由于 $\widetilde{q}_{k,\ x_0}(r)\ \geqslant 1$ 对几乎处处的 r 成立，并由（3.15）可得，$0<I_k<\infty$ 当 $k\in\mathbb{N}.$ 充分大时。令

$$\psi_k(t)=\begin{cases}1/[t^{\frac{n-1}{p-1}}\widetilde{q}_{k,x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)], & t\in(2^{-k},\varepsilon_0)\ ,\\ 0, & t\notin(2^{-k},\varepsilon_0)\ .\end{cases}$$

令 $\eta_k(t)=\psi_k(t)/I_k$ 对于 $t\in(2^{-k},\ \varepsilon_0)$，且 $\eta_k(t)=0$ 在其他情况下。现在，η_k 满足（1.4），其中 $r_1=2^{-k}$，且 $r_2=\varepsilon_0.$ 现在，由（1.3）、（3.13）、（3.15）及富比尼定理可得，

$$M_p(f_k(\Gamma_k'))\leqslant\frac{1}{I_k^p}\int\limits_{A(x_0,2^{-k},\varepsilon_0)}\widetilde{Q}_{f_{m_k}}(x)\cdot\psi_k^p(|x-x_0|)\,dm(x)=\frac{\omega_{n-1}}{I_k^{p-1}}\to 0 \tag{3.16}$$

因此，由 (3.16) 和 (3.13)–(3.14) 可得

$$M_p(\Gamma_k)=M_p(f_k(\Gamma_k'))\leqslant\Delta(k)\to 0 \tag{3.17}$$

然而，关系式 (3.17) 与不等式 (3.7) 相互矛盾，从而证明了 (3.1)。

注意到，任意 $f\in\mathfrak{R}^{E_*,\ \ E\,F\ ,,,,p}_{M\,\Phi,\delta}(D)$ 在 $x_0,x_0\neq\infty,$处存在连续延拓的可能性也可由 (3.1) 得出。事实上，否则便有 $h(f(x_k)\ f(y_k))\ \geqslant\varepsilon_0$，对于某些序列 $x_k,y_k\to x_0$，当 $k\to\infty,$ 时成立，但这与 (3.1) 矛盾。

现在，我们证明 $\mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta}$ $_{E\,F\,\overline{\ },,,p}(D)$ 关于 D. 在 x_0 处等度连续。反设不然，则存在 $x_0 \in \partial D$, $\varepsilon_0 > 0$, 一个序列 $x_k \to x_0$, $x_k \in D$, 以及 $f_k \in \mathfrak{R}^{E_*}_{M\,\Phi\,\delta}$ $_{E\,F\,\overline{\ },,,p}(D)$，使得

$$h(f_k(x_k), f_k(x_0)) \geqslant \varepsilon_0 \,. \tag{3.18}$$

由于 f_k 可以连续延拓到 ∂D，我们可以认为 $x_k \in D$. 此外，由（3.18）可知，我们可以找到一个序列 $x'_k \in D$， $k = 1, 2, \ldots\ldots$，使得 $x'_k \to x_0$并且

$$h(f_k(x_k), f_k(x'_k)) \geqslant \varepsilon_0/2 \,. \tag{3.19}$$

关系（3.19）与（3.1）矛盾。上述矛盾完成了 $x_0 \neq \infty$.的证明

最后，如果 $x_0 = \infty$，我们令 $f_k := \psi \circ f_k$， $k = 1, 2, \ldots\ldots$，其中 $\psi\,(y) = \frac{y}{|y|^2}$. 根据定理 1.1 的假设，映射 f_k 在原点处满足关系（1.3）–（1.4），其中有一个新的函数 $\widetilde{Q}\,(x) := Q_{f_k}\left(\frac{x}{|x|}\right)$. 变量的保角变换 $x = \frac{y}{|y|^2}$ 对应于雅可比行列式 $J\,(x, y) = \frac{1}{|y|^{2n}}$. 因此，注意到，

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(Q_{f_k}\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right) \cdot \frac{dm(y)}{(1+|x|^2)^n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(Q_{f_k}(z)) \cdot \frac{dm(z)}{(1+|z|^2)^n} < \infty \,. \tag{3.20}$$

关系式 (3.20) 表明，可以将上述方法应用于 $Q_{f_k}\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$，以代替 $Q_{f_k}(x)$。进一步重复从关系式 (3.2) 起及其后针对映射族 f_k （代替 f_k）所给出的全部论证，我们便得到与 (3.2) 的矛盾，从而完成定理 1.1 的证明。 □

4 索伯列夫类与奥尔利奇-索伯列夫类

设 ω 为 $\mathbb{R}^k$ 中的开集：$= \overline{\mathbb{R}}^k \cup \{\infty\}$， $k = 1, \ldots\ldots, n-1$。一个（连续）映射 $S : \omega \to \mathbb{R}^n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维曲面 S。有时我们也把像 $S(\omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ 称为曲面 S。原像的个数

$$N(S, y) \;=\; \text{card}\; S^{-1}(y) = \text{card}\,\{x \in \omega :\; S(x) = y\} \tag{4.1}$$

称为曲面 S 在点 $y \in \mathbb{R}^n$ 处的重数函数。换言之，$N(S, y)$ 表示曲面 S 对点 y 的覆盖重数。已知重数函数是下半连续的，即

$$N(S, y) \geqslant \liminf_{m\to\infty} : N(S, y_m)$$

对于每一个序列 $y_m \in \mathbb{R}^n$， $m = 1, 2, \ldots\ldots$，使得当 $m \to \infty$时有 $y_m \to y \in \mathbb{R}^n$，参见例如[RR], 第160页。因此，函数 $N(S, y)$是博雷尔可测的，从而关于每一个豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^k$ 均可测（参见例如 [Sa],第52页）。

若 $\rho\colon\ \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是博雷尔函数，则其在一个 k维曲面上的积分 S （位于$\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, ）由等式定义

$$\int\limits_S \rho\ d\mathcal{A}\ :=\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\ N(S,y)\ d\mathcal{H}^k y\ . \tag{4.2}$$

给定一族 $\mathcal{S}$ 此类 k维曲面 S （位于 $\mathbb{R}^n$中），博雷尔函数 $\rho\colon\ \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$称为对 $\mathcal{S}$可容许的，简记为 $\rho \in \operatorname{adm}\mathcal{S}$，如果

$$\int\limits_S \rho^k\ d\mathcal{A}\ \geqslant\ 1 \tag{4.3}$$

对每一个 $S \in \mathcal{S}$。给定 $p \in [k,\infty)$, $\mathcal{S}$ 的 p-模是如下的量

$$M_p(\mathcal{S})\ =\ \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\mathcal{S}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\ dm(x)\,. \tag{4.4}$$

下一类映射是Gehring环定义意义下拟共形映射的推广（见 [Ge]; 参见 [MRSY$_2$, 第 9]章）。设 D 与 D' 为 $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$中的域。假设 $x_0 \in D \setminus \{\infty\}$，且 $Q\colon\ D \to (0,\ \infty)$是勒贝格可测函数。映射 $f\colon\ D \to D'$ 称为下 Q-映射，在点 x_0 处相对于p-模，如果

$$M_p(f(\Sigma_\varepsilon)) \geqslant \inf_{\rho\in\operatorname{ext}_p \operatorname{adm}\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,r_0)} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{4.5}$$

对于每个球环 $A(x_0,\ \varepsilon,\ r_0) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varepsilon < |x-x_0| < r_0\}$, $r_0 \in (0,\ d_0)$, $d_0 = \sup |x-x_0|$, 其中 Σ_ε是所有球面 $S(x_0,\ r)$ 与域$_{x\in D}$ D, $r \in (\varepsilon,\ r_0)$ 的交集构成的族。如果 $p = n$，我们称 f 在 x_0处是下 Q-映射。若对于所有 $x_0 \in A$，式 (4.5) 都成立，则称 f 在 $A \subset \mathbb{R}^n$ 中相对于 p-模是下 Q-映射。

根据 [Ri，第 II 节，10], 一个电容器是一个有序对 $E = (A,\ C)$，其中 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且C 是包含于 A. 中的非空紧集。给定 $p \geqslant 1$ 和一个电容器 $E = (A,\ C)$，我们定义

$$\operatorname{cap}_p E\ =\ \operatorname{cap}_p\,(A,\,C)\ =\ \inf_{u\in W_0(E)}\ \int\limits_A |\nabla u|^p dm(x)$$

其中, $W_0(E) = W_0(A,\,C)$ 是所有非负函数 u 的族: $A \to \mathbb{R}^1$ 满足 (1) $u \in C_0(A)$, (2) $u(x) \geq 1$ 对于 $x \in C$, 以及 (3) u是 ACL. 在上述公式中, $|\nabla u| = \left(\sum\limits_{i=1}^n (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$, 且 $\operatorname{cap}_p E$ 称为电容器 E 的 p-容量，参见 [Ri，第 II 节.10]。

Th以下引理已在 [Sev$_3$,引理 4.4], 中证明，参见 [SevSkv$_2$,引理 4。 2].

引理4.1. 设 $x_0 \in D$, 设 $n \geqslant 2$, 设 $p > n-1$，且设 $Q\colon\ D \to [0,\infty]$ 是次数为 α 的局部可积函数: $= \frac{n-1}{p-n+1}$. 若 $f\colon\ \cancel{D \longrightarrow}\ \mathbb{R}^n$ 是关于 p-模数在 x_0 处的开离散下Q映射，则 f 满足

$$\operatorname{cap}_\beta(f(E)) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{*\beta-1}}$$

在点 x_0 处，满足 $\beta:=\frac{p}{p-n+1}$ 且 $Q^*=Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}$.

这里， E 是电容器 $(B(x_0,r_2), B(x_0,r_1))$ $q^*_{x_0}(r)$表示 $Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}$在 $|x-x_0|=r$ 上的球面平均值，而 $I^*=I^*(r_1,r_2)=\int_{r_1}^{r_2} t^{\frac{n-1}{\beta-1}} q^{*\frac{1}{\beta-1}}_{x_0}(t)$ 表示 $0<r_1<r_2<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$.

下文将用到以下辅助结论（例如，参见 [MRSY$_2$,引理7.4，第 7] 章，关于 $p=n$ 和 [Sal，引理2.2] ，关于 $p\neq n$.

命题4.1. 设 $x_0\in\mathbb{R}^n$, $Q(x)$是勒贝格可测函数， $Q\colon \mathbb{R}^n\to[0,\infty]$, $Q\notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$。令 $A:=A(x_0,r_1,r_2)=\{x\in\mathbb{R}^n: r_1<|x-x_0|<r_2\}$且 $\eta_0(r)=\frac{r^{\frac{n-1}{p-1}}}{I^{\frac{1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}_{x_0}(r)}$，其中 $I:=I(x_0,r_1,r_2)=\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}_{x_0}(r)}$且 $q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int_{|x-x_0|=r}Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$是函数 Q 在球面 $S(x_0,r)$上的积分平均值。那么

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}=\int_A Q(x)\cdot\eta_0^p(|x-x_0|)\,dm(x)\leqslant\int_A Q(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x)$$

对于任意勒贝格可测函数 $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ 满足 $\int\eta(r)\,dr=1$. 此外-r_1r_2，对于满足 $\int\eta(r)\,dr\geqslant 1$ 的类似函数，(4.1) 也成立（例如参见 [Sev$_3$, 注 3.1]）。

结合引理4.1与命题4.1，我们得到以下结论。

引理 4.2。设 $x_0\in D$，设 $n\geqslant 2$，设 $p>n-1$ 且设 $Q: D\to[0,\infty]$ 是次数为 $\alpha:=\frac{n-1}{p-n+1}$. 的局部可积函数。若 $f: D\to\mathbb{R}^n$ 是关于 p-模数的开离散下Q-映射，且在 x_0 处满足条件 $p>n-1$， 则 f 满足

$$\operatorname{cap}_\beta(f(E))\leqslant\int_{A(x_0,r_1,r_2)}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\cdot\eta^\beta(|x-x_0|)\,dm(x)$$

对于任意勒贝格可测函数 $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ 使得 $\int\eta(r)\,dr\geqslant 1$, 其中$r_1\beta:=\frac{p}{p-n+1}$ 且 $Q^*=Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}$. 这里 E是电容器 $(B(x_0,r_2)\ B(x_0,r_1))$ $0<r_1<r_2<$距离 $(x_0,\partial D)$。

以下定义引自 [Ri，第 2 节，第 III 章]。设 F 是 $\mathbb{R}^n$中的一个紧集。若 $\operatorname{cap}^p(A,F)=0$ 对某个有界开集 $A\supset F$. 成立，则称 F具有 p零容量 。若对于任意紧子集 E.，上述条件均成立，则称任意集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 具有 p零容量。在这种情况下，记作 $\operatorname{cap}_p E=0$ ($\operatorname{cap}E=0$ 若 $p=n$)，否则记作 $\operatorname{cap}_p E>0$.。以下结论由 [Sev$_2$, 引理 4] 在 $p=n$ 的情形下证明。

引理 4.3. 设 $n-1<p\leqslant n$，设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n\geq 2$，设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是 $p=n$的正容量紧集，，并且是 $p\neq n$ 的任意集合，设 $\Phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是递增凸函数，设 $M>0$ 且设 $\mathfrak{F}^{p,M}_{\Phi,E,}(x_0)$ 是一族开离散

映射 $f\colon D \to \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$，存在函数 $Q = Q_f\colon D \to [0,\infty]$，它是勒贝格可测函数，使得

$$\operatorname{cap}_p(f(\mathcal{E})) \leqslant \int\limits_{A(x_0,r_1,r_2)} Q(x)\cdot \eta^p(|x-x_0|)\, dm(x)$$

r_2对于任意勒贝格可测函数 $\eta : (r_1, r_2) \to [0,\infty]$ 使得 $\int \eta(r)\, dr \geqslant 1$, $\mathcal{E} = r_1(B(x_0, r_2) B(x_0, r_1))$, 而

$$\int\limits_D \Phi(Q_f(x))\cdot \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M\,.$$

若对于某个 $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$,

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p-1}}} = \infty\,,$$

则映射族 $\mathfrak{F}^{p,\Phi}_{E}(x_0)$ 在点 x_0. 处等度连续

引理 *4.3* 的证明 与 [Sev$_5$], 中定理 1.1 与 1.2 的证明完全相同，因此省略。

我们对任意 $x \in D$ 和固定的 $p, q \geqslant 1$ 定义

$$K_{I,q}(x,f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^q}, & J(x,f)\neq 0, \\ 1, & f'(x)=0, \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{4.6}$$

给定一个映射 $f\colon D \to \mathbb{R}^n$，集合 $E \subset D$ 和 $y \in \mathbb{R}^n$，我们将重数函数 $N(y, f, E)$定义为点 y在集合 E中的原像个数，即:

$$N(y,f,E) = \operatorname{card}\{x\in E : f(x) = y\}\,, \tag{4.7}$$

$$N(f,E) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} N(y,f,E)\,. \tag{4.8}$$

以下结论最初是针对同胚证明的，参见 $x_0 \in D$ 中的 KR，定理 2.1], ; 另见 [PSS, 引理 2.3]。

引理 4.4。 设 D 是 $\mathbb{R}^n$中的一个域， $n \geqslant 3$, $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ 是一个满足条件的非减函数

$$\int\limits_1^{\infty} \left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty\,.$$

若 $n \geqslant 3$ 且 $p > n-1$，则每个具有 $W^{1,\varphi}_{\text{loc}}$类有限畸变的开离散映射 $f\colon D \to \mathbb{R}^n$，只要满足 $N(f, D) < \infty$，在每一点 $x_0 \in D$ 处都是关于 p-模的下 Q-映射，适用于

$$Q(x) = N(f,D)\cdot K_{I,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x,f),$$

$\alpha:=\frac{p}{p-n+1}$, 其中, f在 x处的 $K_{I,\alpha}(x,f)$阶内畸变 α由关系式 *(4.6)* 定义, 而重数 $N(f,D)$由 *(4.8)* 中的第二个关系式定义。

以下结论成立, 参见 [Sev$_1$,定理 5]。

引理 4.5。 设 $x_0\in\partial D$, 设 $f:\ D\to\mathbb{R}^n$ 是域 $D\subset\mathbb{R}^n$, $Q\in L^{p-n+1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $n-1<p$, 中关于 p-模数的有界、开、离散且$_{n-1}$闭的下 Q-映射, 且 $\alpha:=\overline{\frac{p}{p-n+1}}$.那么, 对每个 $\varepsilon_0<d_0:=\sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$ 以及每个紧集$C_2\subset D\setminus B(x_0,\ \varepsilon_0)$, 存在 ε_1, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$, 使得, 对每个 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_1)$ 以及每个紧集 $C_1\subset B(x_0,\ \varepsilon)$, $\cap D$ 不等式

$$M_\alpha(f(\Gamma(C_1,C_2,D)))\leqslant\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_1)}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\eta^\alpha(|x-x_0|)\,dm(x)\tag{4.9}$$

成立, 其中 $A(x_0,\ \varepsilon,\ \varepsilon_1)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_1\}$ 和 $\eta:(\varepsilon,\ \varepsilon_1)\to[0,\infty]$ 是任意的勒贝格可测函数, 使得

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_1}\eta(r)\,dr=1\,.\tag{4.10}$$

给定 $N\in\mathbb{N}$, $M>0$, $\delta>0$, $\alpha\geqslant1$, $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant3$中的闭集 E_*, F, 域 $D\subset\mathbb{R}^n$, D中的闭集 E (相对于 D), 递增函数 $\varphi:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ 以及递增凸函数 $\Phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, 我们用 $\mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi,\Phi,\delta,\alpha}(D)$ 表示一 (些) 有界开离散映射 $f:\ D\to\mathbb{R}^n\setminus F$ 的族, 这些映射存在勒贝格可测函数 $Q=Q_f:\ D\to[0,\infty]$, 使得 $K_{I,\alpha}(x,f)\leqslant Q(x)$ 几乎处处成立, 且满足 (1.6), $N(f,D)\leqslant N$, 此外,

1) $C(f,\ \partial D)\subset E_*$,

2) 对于 $D'_f\setminus E_*$, D'_f 的每个连通分支 $K:=f(D)$, 存在一个连续统 $K_f\subset K$, 使得 $h(K_f)\geqslant\delta$ 且 $h(f^{-1}(K_f)\ \partial D)\geqslant\delta>0$,

3) $f^{-1}(E_*)=E$.

下面的结论成立。

定理 4.1。 设 $\alpha\in(n-1,\ n]$, 令 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界域, $n\geqslant2$. 假设:

1) 集合 E 在 D 中无处稠密, 且 D 在 $E\cup\partial D$ 上有限连通, 即, 对于任意 $z_0\in E\cup\partial D$ 以及 z_0 的任意邻域 U, 存在 z_0 的一个邻域 $V\subset U$, 使得 $(D\cap V)\setminus E$ 由有限个连通分支组成;

2) 对于任意 $x_0\in\partial D$, 存在 $m=m(x_0)\in\mathbb{N}$, $1\leqslant m<\infty$ 使得以下命题成立: 对于 x_0 的任意邻域 U, 存在 x_0 的一个邻域 $V\subset U$, 并且:

2a） $V \cap D$ 是连通的,

2b) $(V \cap D) \setminus E$ 至多由 m 个连通分支组成;

3) 对某个 $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$,

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p-1}}} = \infty; \tag{4.11}$$

4) 函数 φ满足Calderón 条件

$$\int\limits_{1}^{\infty} \left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty\,. \tag{4.12}$$

设对 $\alpha = n$ ，集合 F 具有正容量，而对 $n-1 < \alpha < n$ ，它是任意闭集。设 $D'_f \setminus E_*$ 的所有连通分支所成的族在 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha\;\;E\,F\,N\,M\;,,,,,,}(D)$上关于 α-模是等度一致的。则每个 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha\;\;E\,F\,N\,M\;,,,,,,}(D)$都可连续延拓到 ∂D ，并且由所有延拓映射$f : D \to \mathbb{R}^n$, 组成的族 $\mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha\;\;E\,F\,N\,M\;,,,,,,}(D)$,在 D. 中等度连续。等度连续性须在弦度量 h.的意义下理解。

证明。 设 $x_0 \in D$. 根据引理 4.4, 每个 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha\;\;E\,F\,N\,M\;,,,,,,}(D)$ 都是关于 p-模数的下 Q-映射$^{p-n+1}$, 且在每一点 $x_0 \in D$处, 对 $Q(x) = N^{\frac{n-1}{p-n+1}} \cdot K_{I,\alpha}^{n-1}(x,\ f)$, 其中 $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. 现在，根据引理 4.2 f 满足关系

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}_\alpha(f(\mathcal{E})) &\leqslant \int\limits_{A(x_0,r_1,r_2)} N^{\frac{n-1}{p-n+1}} \cdot K_{I,\alpha}(x,f)\eta^\alpha(|x-x_0|)\,dm(x) \\ &\leqslant N^{\frac{n-1}{p-n+1}} \cdot \int\limits_{A(x_0,r_1,r_2)} Q(x)\eta^\alpha(|x-x_0|)\,dm(x) \end{aligned}$$

^{r_2}对于任意勒贝格可测函数 $\eta : (r_1,\ r_2) \to [0,\infty]$ ，使得 $\int \eta(r)\ dr \geqslant 1$. 现在，函数族 $\mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha\;\;E\,F\,N\,M\;,,,,,,}(D)$ 在内点 $x_0 \in D$ 处的^{r_1}等度连续性由引理 4.3 得出。

现在，我们证明以下命题：对于任意 $x_0 \in \partial D,\ \ x_0 \neq \infty$，且对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta = \delta(\varepsilon,\ x_0) > 0$ 使得

$$h(f(x), f(y)) < \varepsilon \tag{4.13}$$

对于任意 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha\;\;E\,F\,N\,M\;,,,,,,}(D)$ 以及任意 $x, y \in B(x_0, \delta) \cap D$.

假设相反。则存在 $x_0 \in \partial D, \varepsilon_0 > 0,$一个序列 $x_k, x'_k \in D$, $x_k, x'_k \to x_0$当 $k \to \infty$, 以及 $f_k \in \mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha\;\;E\,F\,N\,M\;,,,,,,}(D)$使得

$$h(f_k(x_k), f_k(x'_k)) \geqslant \varepsilon_0/2\,. \tag{4.14}$$

根据假设2），存在邻域序列 $V_k \subset B(x_0, 2^{-k})$ k =1,2,...,使得 $V_k \cap D$是连通的，且($V_k \cap D) \setminus E$由 m个连通分支组成， $1 \leqslant m < \infty$.

仿照引理 2.2 的证明，我们可以考虑 $x_k, x_k' \notin E$. 现在，由引理 2.1，存在子序列 x_{k_l} 和 x_{k_l}', $l = 1, 2, \ldots,$ ，它们属于点 x_0 的某个邻域序列 V_l, $l = 1, 2, \ldots,$ ，且满足 diam $V_l \to 0$ 当 $l \to \infty$，此外，任意一对 x_{k_l}和 x_{k_l}'都可以通过路径 γ_l在 $V_l \cap D,$中连接，其中 γ_l在 E. 中至多包含$m-1$ 个点。不失一般性，我们可以假设相同的序列 x_k和 y_k满足上述性质。令 $\gamma_k \colon [0,1] \to D$, $\gamma_k(0) = x_k$且 $\gamma_k(1) = x_k', k = 1, 2, \ldots$.

注意，路径 $f_k(\gamma_k)$ 中的点数不超过 $m-1$ 个，其中 E_*. 令

$$b_1 = f_k(\gamma_k(t_1)), b_2 = f_k(\gamma_k(t_2)) \quad , \ldots , \quad b_l = f_k(\gamma_k(t_l)) \, ,$$

$$t_0 := 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_l \leqslant 1 = t_{l+1}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant m-1 \, ,$$

设 $f_k(\gamma_k)$ 中的点为 $\cap E_*$. 。根据关系式 (3.2) 以及三角不等式,

$$\varepsilon_0/2 \leqslant h(f_k(x_k), f_k(x_k')) \leqslant \sum_{r=0}^{l} h(f_k(\gamma_k(t_r)), f_k(\gamma_k(t_{r+1}))) \, . \tag{4.15}$$

由 (4.15) 可知，存在 $1 \leqslant r = r(k) \leqslant m-1$ 使得

$$h(f(\gamma_k(t_{r(k)})), f_k(\gamma_k(t_{r(k)+1}))) \geqslant \varepsilon_0/(2(l+1)) \geqslant \varepsilon_0/(2m) \, . \tag{4.16}$$

注意，由于 (4.16)，集合 $G_k := |f(\gamma_k)|_{(t_{r(k)}, t_{r(k)+1})}|$ 属于 $D' \setminus E_*$，并且 $\widetilde{G_k}$ 包含某个连续统 G_k ，满足对任意 $k \in \mathbb{N}$., 都有 $h(G_k) \geqslant \varepsilon_0/(4m)$

由于 G_k 是 $D_{f_k}' \setminus E_*,$ 中的一个连续统，故存在 $D_{f_k}' \setminus E_*,$ 的一个连通分支 K_k，包含 K_k. $\widetilde{}$。我们对集合 G_k 和 K_{f_k} 在 K_k 中应用等度一致性的定义（此处 K_{f_k} 是类 $\mathfrak{R}^{E_*, \quad E\,F\,N\,M\,,,,,,,}(D)$ 定义中的一个连续统，特别地， $h(K_{f_k}) \geqslant \delta$）。根据此定义，对于数 $\delta_*^{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha} := \min\{\delta, \varepsilon/4m\} > 0$ ，存在 $P > 0$ 使得

$$M_p(\Gamma(\widetilde{G}_k, K_{f_k}, K_k)) \geqslant P > 0 \, , \qquad k = 1, 2, \ldots \, . \tag{4.17}$$

下面证明，关系 (4.17) 与 $\mathfrak{R}^{E_*, \quad E\,F\,N\,M\,,,,,,,}(D)$ 的定义以及条件 (1.6)、(4.11) 相矛盾。事实上，记 Γ_k 为所有半开$\widetilde{}$路径$^{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha} \beta_k \colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ 的族，其中这些路径满足 $\beta_k(a) \in G_k$, $\beta_k(t) \in K_k$ 对所有$\overline{\ }t \in [a, b)$ 均成立，此外，$\lim\limits_{t \to b-0} \beta_k(t) := B_k \in K_{f_k}$. 显然，由 (4.17)

$$M_p(\Gamma_k) = M_p(\Gamma(\widetilde{G}_k, K_{f_k}, K_k)) \geqslant P > 0 \, , \qquad k = 1, 2, \ldots \, . \tag{4.18}$$

与引理 2.2 的证明类似，我们可以证明 $D \setminus E$ 由有限个连通分支 $D_1, \ldots, D_s,$ $1 \leqslant s < \infty,$ 组成，而 f_k 在每个 $D_i,$ $i = 1, 2, \ldots,$ 中都是闭集；也就是说，只要 D_i. 是闭集， $f_k(E)$ 就是 $f_k(D_i)$ 中的闭集。我们还可以证明，对于 D_i， $f_k(D_i) = K$ 。

某个 $i \in \mathbb{N}$. 不失一般性，我们可以认为 $\nabla_k := \gamma_k|_{[p_{s(k)}, q_{s(k)}]}$ 属于 $D \setminus E$ 的某个连通分支 D_1，且 $f_k(D_1) = K$，其中 $t_{r(k)} < p_{s(k)} < q_{s(k)} < t_{r(k)+1}$，$a_{s,\,k} := f_k(\gamma_k(p_s)) \to w_k := f_k(\gamma_k(t_{r(k)}))$，当 $s \to \infty$ 时，以及 $b_{s,\,k} = f_k(\gamma_k(q_s)) \to f_k(\gamma_k(t_{r(k)+1}))$，当$s \to \infty$.时。考虑从 $|\nabla_k|$ 出发的族 Γ_k 的所有极大 f_k-提升 α_k：$[a, c) \to D$ 所构成的族 Γ_k'；由命题 2.1 可知，这样的族存在。

注意，当 $\alpha_k \to \partial D_1$ as $k \to \infty$ 时，这种情况是不可能的。反设相反：令 $\alpha_k(t) \to \partial D_1$ as $t \to c.$。我们任取一个序列 $\varphi_m \in [0, c)$，使得$\varphi_m \to c - 0$ as $m \to \infty.$。由于空间 $\mathbb{R}^n$ 是紧空间，边界 ∂D_1 作为该紧空间的闭子集也是紧的。因此，存在 $w_m \in \partial D_1$，使得

$$h(\alpha_k(\varphi_m), \partial D_1) = h(\alpha_k(\varphi_m), w_m) \to 0\,, \qquad m \to \infty\,. \tag{4.19}$$

由于 ∂D_1 的紧性，我们可以假设 $w_m \to w_0 \in \partial D_1$ as $m \to \infty$.。因此，根据关系式 (4.19) 和三角不等式

$$\begin{aligned} &h(\alpha_k(\varphi_m), w_0) \\ &\leqslant h(\alpha_k(\varphi_m), w_m) + h(w_m, w_0) \to 0\,, \qquad m \to \infty\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

有两种情况： $w_0 \in \partial D$，或者 $w_0 \in D.$。第一种情况下，

$$f_k(\alpha_k(\varphi_m)) = \beta_k(\varphi_m) \to \beta(c)\,, \quad m \to \infty\,, \tag{4.21}$$

因为根据构造，路径 $\beta_k(t)$ $t \in [a, b]$，连同其有限点都位于 $K_k \subset D_{f_k}' \setminus E_*$ 中。与此同时，由 (4.20) 和 (4.21) 可知， $\beta_k(c) \in C(f_k,\ \partial D) \subset E_*$；根据类 $\mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha}$ 的定义，并且由于 $C(f_k,\ \partial D) \subset E_*.$，包含关系 $\beta_k \subset D' \setminus E_*$ 和 $\beta_k(c) \in E_*$ 相互矛盾。

在第二种情形下，当 $w_0 \in D$，时，我们有 $w_0 \in E$. 然而， $f_k(\alpha_k(\varphi_m)) = \beta_k(\varphi_m) \to \beta_k(c)$，因此， $\beta_k(c) \in f_k(E)$。但现在 $\beta_k(c) \in E_*$，因为 $f_k^{-1}(E_*) = E.$ 后者与 $\beta_k.$ 的定义矛盾。因此，情形 $\alpha_k \to \partial D_1$ as $k \to \infty$ 不可能成立，这正是所需结论。

因此，根据命题 2.1 $\alpha_k \to x_1 \in D_1$，当 $t \to c - 0,$ 且 c_b 时， $f_k(\alpha_k(b)) = f_k(x_1)$。换言之， f_k-提升 α_k 已完成，即 α_k： $[a, b] \to D.$ 此外，由此可得 $\alpha_k(b) \in f_k^{-1}(K_{f_k})$。

同样，根据类 $\mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha}$，的定义，

$$h(f_k^{-1}(K_{f_k}), \partial D) \geqslant \delta > 0\,. \tag{4.22}$$

由于 $x_0 \neq \infty$，由 (4.22) 可得

$$f_k^{-1}(K_{f_k}) \subset D \setminus B(x_0, r_0) \tag{4.23}$$

对于任意 $k\in\mathbb{N}$，以及某个 $r_0>0.$。设 k 满足 $2^{-k}<\varepsilon_0.$。我们可以认为 $r_0<\varepsilon_0$，其中 ε_0 是引理条件中的一个数。现在结合引理 4.4、引理 4.5 和 (4.23)，对 $\alpha:=\frac{p}{p-n+1}$ 可得

$$\begin{aligned} &M_\alpha(f(\Gamma_k'))=M_\alpha(\Gamma(\widetilde{G}_k,C_0',K))\\ &\leqslant N^{\frac{n-1}{p-n+1}}\int\limits_{A(x_0,2^{-k},r_0)}Q_{f_k}(x)\eta^{\alpha}(|x-x_0|)\,dm(x) \end{aligned}\tag{4.24}$$

对于充分大的 $k\in\mathbb{N}$，以及任意满足关系式 (1.4) 的非负勒贝格可测函数 η，其中 $\varepsilon=2^{-k}$ 和 $\varepsilon_0=r_0.$ 现在，我们令

$$I_k=I(x_0,2^{-k},r_0)=\int\limits_{2^{-k}}^{r_0}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}\widetilde{q}_{k,x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)},\tag{4.25}$$

其中

$$\widetilde{q}_{k,x_0}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,r)}\widetilde{Q}_{f_{m_k}}(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

and

$$\widetilde{Q}_{f_{m_k}}(x)=\begin{cases}Q_{f_{m_k}}(x), & Q(x)\geqslant 1\\ 1, & Q(x)<1\end{cases}.$$

由引理 2.2 和注 2.1

$$I_k=\int\limits_{2^{-k}}^{r_0}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}\widetilde{q}_{k,x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\to\infty\tag{4.26}$$

当 $k\to\infty.$ 时。由于 $\widetilde{q}_{k,\ x_0}(r)\ \geqslant 1$ 对几乎处处的 r 成立，并且由 (4.26)，当 $k\in\mathbb{N}.$ 充分大时，$0<I_k<\infty$。令

$$\psi_k(t)=\begin{cases}1/[t^{\frac{n-1}{p-1}}\widetilde{q}_{k,x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)], & t\in(2^{-k},r_0)\ ,\\ 0, & t\notin(2^{-k},r_0)\ .\end{cases}$$

令 $\eta_k(t)=\psi_k(t)/I_k$，其中 $t\in(2^{-k},\ r_0)$，并且在其他情况下 $\eta_k(t)=0$。现在，η_k 对于$r_1=2^{-k}$ 和 $r_2=r_0.$ 满足 (1.4)。现在，由 (1.3)、(4.24)、(4.26) 以及富比尼定理，

$$M_p(f_k(\Gamma_k')\leqslant\frac{N^{\frac{n-1}{p-n+1}}}{I_k^p}\int\limits_{A(x_0,2^{-k},r_0)}\widetilde{Q}_{f_{m_k}}(x)\cdot\psi_k^p(|x-x_0|)\,dm(x)=\frac{\omega_{n-1}}{I_k^{p-1}}\to 0\tag{4.27}$$

如 $k\to\infty.$ 因此，由 (4.27) 和 (4.24)–(4.25) 可得

$$M_p(\Gamma_k)=M_p(f_k(\Gamma_k'))\leqslant\Delta(k)\to 0\tag{4.28}$$

因此，关系式 (4.28) 与不等式 (4.18) 相互矛盾，这就证明了 (4.13)。

注意，由 (4.13) 也可得出，任意 $f \in \mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha}(D)$ 在 $x_0, x_0 \neq \infty,$ 处都可能存在连续延拓。事实上，否则就有 $h(f(x_k)\ f(y_k)) \geqslant \varepsilon_0$ 对于某些序列 $x_k, y_k \to x_0$，当 $k \to \infty,$ 时成立，但这与 (4.13) 矛盾。

现在，我们证明 $\mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha}(D)$ 在 x_0 处相对于 $D.$ 等度连续。假设结论不成立。那么存在 $x_0 \in \partial D,$ $\varepsilon_0 > 0,$ 一个序列 $x_k \to x_0,$ $x_k \in D,$ 以及 $f_k \in \mathfrak{R}^{E_*}_{\varphi\,\Phi\,\delta\,\alpha}(D)$，使得

$$h(f_k(x_k), f_k(x_0)) \geqslant \varepsilon_0\,. \tag{4.29}$$

由于 f_k 可以连续延拓到 $\partial D,$ ，我们可以认为 $x_k \in D.$ 。此外，由 (4.29) 可知，我们可以找到一个序列 $x'_k \in D,$ $k = 1,$ 2，. . . ， ，使得 $x'_k \to x_0$ 并且

$$h(f_k(x_k), f_k(x'_k)) \geqslant \varepsilon_0/2\,. \tag{4.30}$$

关系式 (4.30) 与 (4.13) 矛盾。上述矛盾完成了对 $x_0 \neq \infty.$ 的证明

最后，如果 $x_0 = \infty,$ 我们令 $f_k := \psi \circ f_k,$ $k = 1,$ 2，. . .，其中 $\psi(y) = \frac{y}{|y|^2}.$ 根据定理 4.1 的假设，映射 f_k 在原点处满足关系 (1.3)–(1.4)，其中函数 $\widetilde{Q}(x) := Q_{f_k}\left(\frac{x}{|x|}\right).$ 变量的保角变换 $x = \frac{y}{|y|^2}$ 对应于雅可比行列式 $J(x,\ y) = \frac{1}{|y|^{2n}}.$ 因此，注意到关系 (3.20) 成立。于是，我们可以将上述技巧应用于 $Q_{f_k}\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$，而不是 $Q_{f_k}(x)$。进一步重复从关系 (4.13) 开始给出的所有论证，并针对映射族 f_k 而非 f_k进行论证，我们便得到与 (4.13) 矛盾的结论，从而完成定理 4.1 的证明。□

资助。 本研究得到乌克兰国家研究基金会资助（项目“Orlycz-Sobolev类中的 Carath´eodoryand Koebe-Blochtheoremsfor 定理的类比”，项目编号：2025.02/0010）。

参考文献

[Cr_1] Cristea, M.：具有局部 ACL^n 逆映射的局部同胚。—《复变函数与椭圆方程》53:1，2008，77–99。

[Cr_2] Cristea, M.：具有局部 ACL^n 逆映射的开离散映射。—《复变函数与椭圆方程》55: 1–3，2010，61–90。

[Cr_3] Cristea, M.：满足广义逆模不等式的映射的边界行为。—《复变函数与椭圆方程》60，2015，437–469。

[DS_1] Desyatka, V., E. Sevost’yanov：具有 Poletsky 不等式的边界非保持映射。-《加拿大数学通报》68:3, 2025, 834–855。

[DS_2] Dovhopiatyi, O., E. Sevost'yanov：Beltrami 解的紧类与 Dirichlet 问题。- 《复变函数与椭圆方程》68:7, 2023, 1182–1203。[Ge] Gehring, F.W.：空间中的环与拟共形映射。- 美国数学会汇刊 103, 1962, 353–393。[KR] Kovtonyuk, D.A. and V.I. Ryazanov：Orlicz-Sobolev 类中的新模估计。- 布加勒斯特大学年刊（数学系列）5(LXIII), 2014, 131–135。[Ku] Kuratowski, K.：拓扑学，第2卷。– 学术出版社，纽约–伦敦，1968。[MRV_1] Martio, O., S. Rickman, and J. V ¨ais ¨al ¨a：拟正则映射的畸变与奇点。- 芬兰科学院学报 Ser. A1. 465, 1970, 1–13。[MRV_2] Martio, O., S. Rickman, and J. V ¨ais¨al ¨a：拟正则映射的拓扑学与度量性质。- 芬兰科学院学报 Ser. A1. 488, 1971 年 , 1–31。[$MRSY_1$] Martio, O., V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov：关于 Q-同胚。- 芬兰科学院学报 Ser. A1 30:1, 2005, 49–69。[$MRSY_2$] Martio, O., V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov：现代映射理论中的模。- Springer Science +Business Media, LLC, 纽约，2009。[MSa] Martio, O., J. Sarvas：平面与空间中的单射定理。- 芬兰科学院学报 Ser. A1 Math. 4, 1978/1979, 384–401。[NP] N¨akki R., and B. Palka：拟共形映射的一致等度连续性。- Proc. Amer. Math. Soc. 37:2, 427–433 (1973)。[PSS] Petkov, I., R. Salimov, M. Stefanchuk：非线性 Beltrami 方程：施瓦茨引理型下界估计。- 67:3, 2024, 533—543。[RR] Rado, T. and P.V. Reichelderfer：分析学中的连续变换。施普林格出版社，柏林等地，1955。[Ri] Rickman, S.：拟正则映射。施普林格出版社，柏林，1993。[RS_1] Ryazanov, V., E. Sevost'yanov：环型 Q-同胚理论。- Israel J. Math. 168, 2008, 101–118。[RS_2] Ryazanov, V., E. Sevost'yanov：空间同胚的收敛与紧性。- Romanian Journal of Pure and Applies Mathematics 18, 2013, 85–104。[RS_3] Ryazanov, V., E. Sevost'yanov：平均拟共形映射的等度连续性。- 芬兰科学院学报 36, 2011, 231–244。[RSY] Ryazanov, V., U. Srebro, and E. Yakubov E.：Beltrami 方程理论中的积分条件。- 《复变函数与椭圆方程》57:12, 2012, 1247–1270。

[RV] Ryazanov, V., S. Volkov：黎曼曲面上 $W^1_{,loc}{}^1$ 类映射的边界行为。—《复分析与算子理论》11，2017，1503–1520。

[Sa] Saks, S.：《积分理论》。Dover 出版公司，纽约，1964。

[SalSt] Salimov, R.R., M.V. Stefanchuk：非线性柯西–黎曼–贝尔特拉米系统解的泛函渐近性质。—《数学科学杂志》（美国）277:2，2023，311–328。

[Sev$_1$] Sevost'yanov, E.A：某些类映射的边界行为。—《数学科学杂志》243:6，2019，934–948。

[Sev$_2$] Sevost'yanov, E.A：关于具有无界特征的开离散映射的边界行为。- 乌克兰数学杂志 64: 6, 2012, 979–984。

[Sev$_3$] Sevost'yanov, E.A：具有正向和逆向 Poletsky 不等式的映射。数学进展（DEVM，第 78 卷）。- 施普林格·自然瑞士股份公司，查姆，2023。

[Sev$_4$] Sevost'yanov, E.A：域闭包中具有分支的映射的等度连续性。- 乌克兰数学杂志 69:2, 2017, 318–324。

[Sev$_5$] Sevost'yanov, E.：具有积分约束的映射的整体行为。- 分析与数学物理 12:3, 2022, 文章编号 76。

[SevSkv$_1$] Sevost'yanov, E., S. Skvortsov：可变区域情况下映射族的等度连续性。- 乌克兰数学杂志 71:7, 2019, 1071–1086。

[SevSkv$_2$] Sevost'yanov, E., S. Skvortsov：《Orlicz-Sobolev 类的局部行为》。-《数学科学杂志》224:4，2017年，563–581。

[Sal] Salimov, R.R.：《球的像的测度估计》。-《西伯利亚数学杂志》53:4，2012年，739–747。

[Sr] Srebro, U.：《共形容量与拟正则映射》。-《芬兰科学院数学系列 A I》529，1973年，1–8。

[Va] V¨ais ¨al ¨a J.：《n维拟共形映射讲义》。-《数学讲义》229，施普林格出版社，柏林等地，1971年。

[Vu] Vuorinen, M.：《n维空间中拟正则映射的例外集与边界行为》。-《芬兰科学院数学系列 A I》数学论文集11，1976年，1–44。

VICTORIA DESYATKA

日托米尔伊万·弗兰科国立大学，Velyka Berdychivs'ka
Str. 40号，日托米尔 10 008，乌克兰
victoriazehrer@gmail.com

Oleksandr Dovhopiatyi
日托米尔伊万·弗兰科国立大学，Velyka Berdychivs'ka Str. 40号，日托米尔 10 008，乌克兰
Alexdov1111111@gmail.com

Evgeny Sevost'yanov
1. 日托米尔伊万·弗兰科国立大学，40Velyka Berdychivs'ka Str.，10 008 日托米尔，乌克兰2. 乌克兰国家科学院应用数学与力学研究所，19Henerala Batyuka Str.，84 116 斯洛维扬斯克，乌克兰
esevostyanov2009@gmail.com