arXiv:2603.00970v1 [math.AC] 1 Mar 2026

相对忠实正合函子及其在同调模中的应用

XIAOLEI ZHANG、LEI QIAO 和 HWANKOO KIM†

Abstract. 忠实投射、忠实平坦和忠实内射模的概念——即使三个经典同调函子同时忠实且正合的模——在代数的各个领域都发挥着基础性作用。本文将这些概念推广到 w-运算理论的框架中。通过引入 w-忠实正合函子的概念，我们定义并研究 w-忠实投射、 w-忠实平坦和 w-忠实内射模。我们确立了它们的基本性质，并展示了它们在推广经典结果方面的有效性。

1. introduction

本文中，所有的环均为含恒等元的交换环，所有模均为幺模。

忠实正合函子的概念由 Ishikawa 在其具有开创性的 1964年论文 [8], 中提出并加以系统研究，是同调代数的基石。Ishikawa 的工作通过依据相关 Hom 函子和张量函子的性质来刻画投射模、平坦模和内射模，为理解各类模提供了统一框架。若一个函子既正合又能反映正合列，则称其为忠实正合函子；这等价于该函子同时正合且忠实（即能够检测非零对象和非零态射）。

忠实投射模是指满足函子 $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ 为忠实函子的环 R 上的投射模 P 。它们在 Morita理论中发挥着核心作用（见 [1]）。类似地，忠实平坦模是指满足函子 $F \otimes_R -$ 为忠实函子的环 R 上的平坦模 F 。忠实平坦下降已成为 Gorenstein同调代数、代数 K 理论和代数几何中不可或缺的工具（见 [3, 9, 13]）。

对偶地，忠实内射模是指使反变函子 $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ 成为忠实函子的内射模 E 。这类模在对偶理论中发挥着基础性作用。例如，在诺特环上，Matlis对偶通过取值于忠实内射余生成元的 Hom函子，在某些模范畴之间建立反变等价（见 [5]）。有关更广泛的推广及进一步应用，请参阅 [2]。

w-运算由 Wang 和 McCasland [18], 提出，是乘法理想理论及其在模理论和同调代数中的应用方面的一项重要进展。正如 Zafrullah 在 [31], 中所观察到的：“ w-运算的妙处在于它比t-运算更加平滑”，而且“这种平滑性只能意味着一件事：与其他星运算相比，我们可以引入更多的同调代数。”

Date：2026年3月3日。关键词： w-忠实正合函子； w-忠实投射模； w-忠实平坦模； w-忠实内射模。2020年数学主题分类：18A22，13C10，13C11。

†通讯作者。

w-运算理论中的广义投射模、平坦模和内射模概念已由 Kim 和 Wang 广泛引入并加以研究。2014年，他们 [12] 将 w-平坦模 R定义为满足以下条件的 F 模： w-正合列在张量函子$-\otimes_R F$作用下保持正合。随后，在 [19], 他们将 w-内射模 R定义为满足以下条件的 E 模：w-正合列经函子 $\mathrm{Hom}_R(-, L(E))$作用后仍保持正合。2015年，他们 [20] 引入了 w-投射模的概念，即满足以下条件的 R模：对于所有无挠的 w模 N，$\mathrm{Ext}^1_R(L(P), N)$都是 GV-挠。

大量文献表明，这些 w-运算理论中的同调概念，在研究重要的环类（如 Krull整环、PvMD、w-诺特环和 w-相干环）时发挥着核心作用（见 [4, 19, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 33, 34]）。

与忠实正合函子的研究并行，挠理论和商范畴理论为模范畴的研究提供了强有力的工具。w-运算在模上诱导出一种闭包运算，它与 GV-理想的概念以及一种有限型遗传挠理论密切相关，该挠理论记作 $\tau_w = (\mathcal{T}(R), \mathcal{F}(R))$。这里， $\mathcal{T}(R)$ 表示 GV-挠模类，而 $\mathcal{F}(R)$ 表示 GV-无挠模类。

该挠理论产生一个自反满子范畴 (R, w)-模，由所有 w-模组成。这个范畴不仅是 Grothendieck 范畴，也是商范畴

$$\mathsf{Q}_w(R) = \mathrm{Mod}(R)/\mathcal{T}(R),$$

这等价于 (R, w)-模。反射函子

$$L : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R, w)\text{-mod}, \quad L(M) = (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w,$$

是正合的，并湮灭 GV-挠模。

本文的主要动机是将 Ishikawa 关于忠实正合函子的理论，从全体 R-模范畴推广到更精细的 w-模范畴。本文的核心创新是引入 w-忠实正合函子的概念（定义 3.4）。函子

$$G : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathcal{A}$$

若映入阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，则称其为 w-忠实正合的，若它是正合的、湮灭 GV-挠模类 $\mathcal{T}(R)$，且诱导函子

$$\overline{G} : \mathsf{Q}_w(R) \longrightarrow \mathcal{A}$$

在 Serre 商上是忠实正合的。这个定义体现了“模去 GV-挠”的正合性与忠实性理念，从而明确了此类函子与底层w-结构的相互作用。

本文的核心贡献是系统地发展 w-忠实正合函子理论，并将其应用于 w框架内三类基本模的定义与刻画：

- **w-忠实投射模（第4节）**。一个 R-模 P 定义为 w -忠实投射，当函子

  $$H_w(-) = \mathrm{hom}_w(P, -) = \mathrm{Hom}_R(L(P), L(-))$$

  是 w-忠实正合的。我们建立了一组完整的等价条件，最终得到 Ishikawa 的 w类比版本 [8, 定理 1.1]（定理 4.10）。关键判据包括：对于每个极大 w-理想 $\mathfrak{m}$，$\mathrm{Hom}_w(P, R/\mathfrak{m})$ 均非零；以及对所有 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$ 都满足局部条件$P_{\mathfrak{m}} \neq 0$。特别地，一个有限生成的 w-投射模 P 是

w-忠实投射的，当且仅当它满足这些支撑条件。命题 4.13 给出了一个结构刻画： P 是 w-忠实投射的，当且仅当 R 是有限个 $L(P)$ 副本的有限直和中的一个w直和项。这给出了经典投射生成元刻画的一个精确 w类比版本。

- **w-忠实平坦模（第 5 节）**。利用 w-张量积 $M\otimes_R^w N = L(M\otimes_R N)$，一个 R-模 M 被定义为 w-忠实平坦的，如果函子

$$U_w(-) = (-)\otimes_R^w M$$

是 w-忠实正合的。定理 5.6 给出了若干与经典理论平行的等价刻画。最值得注意的是，我们得到如下局部判据：一个 w-平坦模 M 是 w-忠实平坦的，当且仅当对每个极大 w-理想 $\mathfrak{m}$，$M_{\mathfrak{m}}$ 在局部环 $R_{\mathfrak{m}}$ 上是忠实平坦的。因此，整体的 w-性质归结为一个熟悉的局部条件。

- **w-忠实内射模（第 6 节）**。一个 R-模 E 称为 w-忠实 inje内射的，如果反变函子

$$V_w(-) = \hom_w(-, E)$$

是 w-忠实正合的。定理 6.6 给出了若干等价刻画，包括涉及单模与剩余域的判据。一个特别强的结果（推论 6.13）表明，一个 w-内射模 E 是 w-忠实内射的，当且仅当其w-包络 $L(E)$包含每个 τ_w-单模的一个同构副本。这进一步等价于如下条件： $L(E)$具有一个与典范模同构的直和项

$$Q = E_R\big(\bigoplus_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}\big).$$

这将抽象的函子性定义与具体的结构嵌入联系起来。此外，命题 6.19 建立了 Ishikawa 对偶的完美 w类比：对于每个w-忠实内射模 E，一个 R模 M 是 w-忠实平坦的，当且仅当 $\mathrm{Hom}_w(M,\ E)$ 是 w-忠实内射的，反之亦然。

2. New Perspectives on w-Operation Theory

设 R 是一个交换环。 R 的有限生成理想 J 称为*Glaz–Vasconcelos* 理想 （简称 GV-理想），记作 $J\in \mathrm{GV}(R)$，若典范同态

$$\varphi_J:\ R\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(J,R),\qquad r\longmapsto (j\mapsto rj),$$

是一个同构。

R模 M的 GV-挠子模 定义为

$$\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M) := \{\, x\in M \mid \exists\, J\in \mathrm{GV}(R) \text{ such that } Jx=0\,\}.$$

Set

$$F(M) := M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M).$$

T那么存在一个 R-模的短正合列 模

$$0\longrightarrow \mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)\longrightarrow M\longrightarrow F(M)\longrightarrow 0.$$

定义 2.1. 设 R 为一个交换环。

(1)（[21, 定义 6.2.1]）若 M 是 GV-无挠的，我们在一个内射包中定义其 w-包络 （或 w-闭包）为

$$M_w := \big\{\, x\in \mathrm{E}(M) \;\big|\; \exists\, J\in \mathrm{GV}(R) \text{ such that } Jx\subseteq M \,\big\},$$

其中，E(M) 表示 M 作为 R-模的内射包。这与文献中 GV-无挠模的 w-包络的标准定义一致。

(2) 对任意 R-模 M，我们定义其 扩张 w-包络为

$$L(M) := \{\, x \in \mathrm{E}(F(M)) \mid \exists\, J \in \mathrm{GV}(R) \text{ such that } Jx \subseteq F(M) \,\} \subseteq \mathrm{E}(F(M)).$$

等价地，

$$L(M) = (F(M))_w.$$

特别地，如果 M 是 GV-无挠的，那么 $L(M) = M_w$。

GV-无挠的 R-模 M 称为 w-模，如果 $M_w = M$。如果理想 $I \lhd R$ 作为一个 R-模是 w-模，则称其为w-理想。如果环 R 的每个理想都是w-理想，则称环 R 为 *DW*-环；等价地，GV(R) $= \{R\}$。所有极大 w-理想构成的集合记为 w-Max(R)，它是 Spec(R) 的子集。

容易验证， R 的有限生成理想 J 是 GV-理想，当且仅当

$$J \nsubseteq \mathfrak{m} \qquad \text{for every } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R).$$

命题 2.2. 设 M 是一个GV-挠无模。对于 $x \in \mathrm{E}(M)$，以下条件等价:

(1) $x \in M_w$，也就是说，存在 $J \in \mathrm{GV}(R)$ 使得 $Jx \subseteq M$.(2) 对于每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$，都有 $x/1 \in M_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathrm{E}(M)_{\mathfrak{m}}$.(3) 存在 $s_1, \ldots, s_n \in R$ 使得 $J := (s_1, \ldots, s_n) \in \mathrm{GV}(R)$，并且对于所有$i = 1, \ldots, n$都有 $s_i x \in M$。

特别地，通过对角嵌入

$$\mathrm{E}(M) \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)} \mathrm{E}(M)_{\mathfrak{m}},$$

有

$$M_w = \mathrm{E}(M) \cap \prod_{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)} M_{\mathfrak{m}} \subseteq \prod_{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)} \mathrm{E}(M)_{\mathfrak{m}}.$$

证明。(1)⇒(2)。假设 $x \in M_w$，因此存在 $J \in$ GV(R)使得 $Jx \subseteq M$。令 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)。由于 $J \nsubseteq \mathfrak{m}$，我们可以选取 $s \in J \setminus \mathfrak{m}$。于是 $s/1$ 是 $R_{\mathfrak{m}}$中的一个单位元，并且在 E(M)$_{\mathfrak{m}}$ 中有

$$(s/1)(x/1) = (sx)/1 \in M_{\mathfrak{m}}.$$

由于 $s/1$ 可逆，因此可推出 $x/1 \in M_{\mathfrak{m}}$。

(2)⇒(3)。固定 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)。根据假设， $x/1 \in M_{\mathfrak{m}}$，因此存在 $s_{\mathfrak{m}} \in R \setminus \mathfrak{m}$ 使得$s_{\mathfrak{m}} x \in M$。对于每个 $\mathfrak{m}$，考虑基本开子集

$$D(s_{\mathfrak{m}}) \cap w\text{-Max}(R) = \{\mathfrak{n} \in w\text{-Max}(R) \mid s_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{n}\}.$$

这些开集覆盖 w-Max(R)。由于 w-运算是有限型的，空间 w-Max(R) 关于该基是拟紧的。因此存在 $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \in w$-Max($R$)，使得

$$w\text{-Max}(R) \subseteq D(s_{\mathfrak{m}_1}) \cup \cdots \cup D(s_{\mathfrak{m}_n}).$$

置 $s_i := s_{\mathfrak{m}_i}$ 和 $J := (s_1, \ldots, s_n)$。那么对于每个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)，都有 $J \nsubseteq \mathfrak{m}$，因此 $J \in$ GV(R)。根据构造，对于所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $s_i x \in M$。

(3)⇒(1)。根据 M_w 的定义，这立刻可得，因为 $Jx \subseteq M$。

最后，集合论恒等式由 (1) 与 (2) 的等价，以及 E(M) 到其局部化的乘积中的对角嵌入得出。□

命题 2.3。设 M 是一个 GV-无挠 R-模，并令 M_w 表示它在内射包 $\mathrm{E}(M)$中的 w-包。

(1) ([21, 命题 *6.2.4(2)])* $M \subseteq M_w \subseteq E(M)$且 M_w/M 是*GV*-挠。*(2) (*[21, 定理 *6.2.2(4)])* 幂等性：$(M_w)_w = M_w$。*(3) (*[21, 定理 *6.2.2(4)])* 极小性：若 $M \subseteq N \subseteq E(M)$且 N/M 是*GV*-挠，则 $M_w \subseteq N$。等价地，M_w是*E(M)*中包含 M的最小子模，且其对 M 的商是*GV*-挠。*(4)* 函子性：任意 R-线性映射 $f: M \to N$，若其定义在*GV*-无挠模之间，则可唯一延拓为一个 R-线性映射 $f_w: M_w \to N_w$，满足 $f_w|_M = f$。

证明。(1) 根据定义，$M \subseteq M_w \subseteq \mathrm{E}(M)$。令 $x \in M_w$。则存在 $J \in \mathrm{GV}(R)$，使得$Jx \subseteq M$。因此 $J(x + M) = 0$属于 M_w/M，所以 M_w/M是 GV-挠。

(2) 令 $x \in (M_w)_w$。由命题 2.2(2),

$$x/1 \in (M_w)_{\mathfrak{m}} \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R).$$

由 (1)，商 M_w/M 是 GV-挠。因此

$$(M_w)_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}} \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R).$$

因此，对每个 $\mathfrak{m}$，都有 $x/1 \in M_{\mathfrak{m}}$。将 M 代替 M_w应用命题 2.2(2)，可得$x \in M_w$。于是 $(M_w)_w \subseteq M_w$，而反向包含显然成立。因此 $(M_w)_w = M_w$。

(3) 令 $M \subseteq N \subseteq \mathrm{E}(M)$，并假设 N/M 是 GV-挠。由于局部化会消去 GV-挠，我们有

$$N_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}} \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R).$$

令 $x \in M_w$。由命题 2.2(2),

$$x/1 \in M_{\mathfrak{m}} \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R).$$

因此，对所有此类 $\mathfrak{m}$，$x/1 \in N_{\mathfrak{m}}$。再次应用命题 2.2(2)，现在以 N 替代 M，得到 $x \in N_w$。但 N/M 是 GV-挠的，因此 N 已经是 E(M) 中的 w-闭子模，即 $N_w = N$。因此 $x \in N$，从而 $M_w \subseteq N$。

(4) 设 f: $M \to N$ 是 GV-无挠模之间的一个 R-线性映射。设 f^E: E(M) $\to$E(N) 是到内射包的扩张。若 $x \in M_w$，取 $J \in \mathrm{GV}(R)$ 使得 $Jx \subseteq M$。那么

$$Jf^E(x) = f(Jx) \subseteq f(M) \subseteq N,$$

因此 $f^E(x) \in N_w$。于是 f^E 限制为一个同态

$$f_w : M_w \to N_w$$

其中 $f_w|_M = f$。

关于唯一性，假设 g: $M_w \to N_w$是另一个满足 $g|_M = f$ 的扩张。则 $(g - f_w)|_M = 0$。由于 M是 E(M) 的本质子模，且 $M \subseteq M_w \subseteq$E($M$)，由此可知 M在 M_w 中是本质的。因此 $g - f_w = 0$，从而 $g = f_w$。□

注记 2.4. 对于一般 R-模 X，与 GV-挠理论相关联的范畴反射子是

$$F(X) = X/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(X),$$

它是 GV-无挠的，且具有函子性。因此， $F(-)$通过取商来消除 GV-挠，并由其相对于 GV-无挠模满子范畴的泛性质刻画。

如果 X 已经是 GV-无挠的，那么 w-包络

$$X_w \subseteq \mathrm{E}(X)$$

通常比 X更大；事实上，由命题 2.3(1)，商 X_w/X 是 GV-挠的。从这个意义上说，这些构造

$$F(-) \qquad \text{and} \qquad (-)_w$$

互为补充：反射函子 $F(-)$消除GV-挠，而 w-包络 $(-)_w$ 则添加内射包内的最小扩张，使其模去原模所得的商为 GV-挠。

此外，命题 2.3 表明，在 GV-无挠模这一类上，赋值$M \mapsto M_w$ 是一个闭包算子：它具有扩张性（$M \subseteq M_w$）、幂等性（$(M_w)_w = M_w$）、函子性，并且在商为 GV-挠的条件下是最小的。

特别地，对于每个 GV-无挠模 M，

$$F(M) = M, \qquad M \subseteq M_w \subseteq \mathrm{E}(M), \qquad M_w/M \text{ is GV-torsion.}$$

引理 2.5. 设 R 是一个交换环，并令 w 表示 R 上的 w-运算。对于任意R-模 M，考虑对角同态

$$\delta_M : M \longrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)} M_{\mathfrak{m}}, \qquad x \longmapsto ((x/1)_{\mathfrak{m}}).$$

Then

$$\ker(\delta_M) = \mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M).$$

证明。 应用 [6, 第 IX 章引理 6.3] ，其中 $\mathcal{P} = w\text{-Max}(R)$。 □

推论 2.6. 对于每个 R-模 M，对角同态

$$\delta_M : M \longrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)} M_{\mathfrak{m}}$$

可规范地分解为

$$M \twoheadrightarrow M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M) \xrightarrow{\overline{\delta}_M} \prod_{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)} M_{\mathfrak{m}},$$

其中 $\overline{\delta_M}$ 是内射的。特别地，存在一个自然同构

$$\mathrm{Im}(\delta_M) \cong M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M).$$

证明。 由引理 2.5 可知，$\ker(\delta_M) = \mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)$。因此， δ_M诱导出一个内射同态

$$\overline{\delta}_M : M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M) \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)} M_{\mathfrak{m}}.$$

由 co 构造中，δ_M 的像与 $\mathrm{Im}(\overline{\delta_M})$ 重合，从而得到所声称的识别 n. □

3. The category $(R,\ w)$-模 and w-faithfully exact functors

设 R 是一个交换环，并令 w 表示 R上的 w-运算。令

$$\mathcal{T}(R) := \{\, M \in \mathrm{Mod}(R) \mid M_{\mathfrak{m}} = 0 \text{ for all } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R) \,\},$$

为 GV-挠 R-模的类，而

$$\mathcal{F}(R) := \{\, M \in \mathrm{Mod}(R) \mid \mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M) = 0 \,\},$$

为 GV-无挠 R-模的类。则 $\tau_w = (\mathcal{T}(R)\ \mathcal{F}(R))$ 是 $\mathrm{Mod}(R)$ 上的一个有限型 遗传挠理论（见 [16]）。

定义 3.1. 我们将 (R,w)-mod 定义为 $\mathrm{Mod}(R)$ 的满子范畴，它由所有w-模组成。

我们记录 (R,w)-mod 的以下基本性质：

(1) $(R,\ w)$-模是反射的；也就是说，包含函子

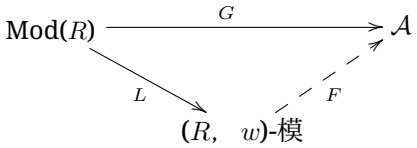
$$i : (R,w)\text{-mod} \hookrightarrow \mathrm{Mod}(R)$$

存在一个左伴随

$$L : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R,w)\text{-mod}.$$

(2) $(R,\ w)$-模是一个 Grothendieck 范畴。(3) 反射函子 L 是正合的，并且湮灭 $\mathcal{T}(R)$。

(4) 函子 L 是 $\mathrm{Mod}(R)$ 上湮灭 $\mathcal{T}(R)$ 的所有正合函子中的泛函子。更确切地说，给定一个图表



其中 G 是正合的，并且湮灭 $\mathcal{T}(R)$，因此存在唯一的（相差一个自然同构）正合函子 F: (R,w)- 模 $\to \mathcal{A}$，使得 $F \circ L$ 与 G 自然同构。事实上，可以取 $F = G|_{(R,w)\text{-mod}}$。

注记 3.2. (R,w)-模上的正合结构是通过反射函子从 $\mathrm{Mod}(R)$ 继承而来的。一个序列

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

w-模的序列在 (R,w)-模中正合，当且仅当它经过商函子 T作用后成为正合；等价地，当且仅当在每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$ 处局部化后成为正合。

我们简要回顾 Serre 商的构造（例如，参见 [17, 第 42] 页）。反射函子 $L : \mathrm{Mod}(R) \to (R,w)$-模在 (R,w)-模与 Serre 商范畴

$$\mathrm{Mod}(R)/\mathcal{T}(R).$$

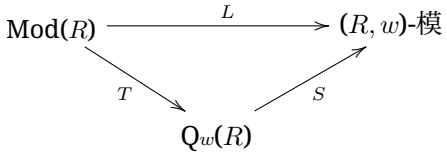
我们将此商记为

$$\mathsf{Q}_w(R) := \mathrm{Mod}(R)/\mathcal{T}(R),$$

并将其称为 $\mathrm{Mod}(R)$ 的 w-商范畴 。它的对象与 $\mathrm{Mod}(R)$ 的对象一致，并且

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Q}_w(R)}(M,N) = \mathrm{Hom}_{(R,w)\text{-mod}}(L(M),L(N)) = \mathrm{Hom}_R(L(M),L(N)).$$

我们有一个交换图



其中， S 是一个等价， T 是典范商函子，且 $S \circ T = L$。具体而言， T 在对象上作用为恒等式，在态射上则.....

$$T : \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{Q}_w(R)}(M,N) = \mathrm{Hom}_R(L(M),L(N)).$$

此外:

(1) T 是正合的，并且消去 $\mathcal{T}(R)$。(2) $\mathsf{Q}_w(R)$ 是一个阿贝尔范畴。(3) 函子 $T : \mathsf{Mod}(R) \to \mathsf{Q}_w(R)$ 是 $\mathsf{Mod}(R)$ 上所有消去 $\mathcal{T}(R)$ 的正合函子中具有泛性质的函子。也就是说，如果 $G : \mathsf{Mod}(R) \to \mathcal{A}$ 是正合的，并且消去 $\mathcal{T}(R)$，那么存在唯一的正合函子

$$\overline{G} : \mathsf{Q}_w(R) \to \mathcal{A}$$

使得 $G \circ \overline{T} = G$。

对于 M， $N \in \mathsf{Mod}(R)$，定义

$$\hom_w(M,N) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Q}_w(R)}\big(T(M),T(N)\big).$$

注记 3.3（关于 $T(M)$ 与 $L(M)$）。对于每个 $M \in \mathsf{Mod}(R)$，存在一个典范同构 m

$$T(c_M) : T(M) \xrightarrow{\sim} T\big(L(M)\big),$$

由典范态射诱导

$$c_M : \ M \twoheadrightarrow M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M) \hookrightarrow (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w.$$

事实上，$\ker(c_M) = \mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M) \in \mathcal{T}(R)$，且 $\mathrm{Coker}(c_M) \in \mathcal{T}(R)$，因此 $T(c_M)$ 是 $\mathsf{Q}_w(R)$ 中的一个同构。

回顾 [8]，阿贝尔范畴之间的协变或反变加性函子 G称为忠实正合（分别称为正合），如果对于每个可复合对 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$，序列

$$G(A) \longrightarrow G(B) \longrightarrow G(C)$$

当且仅当（分别为当）正合

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

是正合的。

在阿贝尔范畴中，一个加性函子忠实正合，当且仅当它正合且忠实（即在 Hom 集上是单射，或者等价地，它检测非零对象）。

定义 3.4。沿用上述记号。设 $\mathcal{A}$是一个阿贝尔范畴。一个协变或反变加性函子

$$G : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathcal{A}$$

如果满足以下条件，则称为 w忠实正合：

(i) G 是正合的，并且湮灭 $\mathcal{T}(R)$;

(ii) 诱导函子

$$\overline{G} : \mathsf{Q}_w(R) \longrightarrow \mathcal{A}$$

是忠实正合的。

注记 3.5. 这两个概念之间没有概念上的差别：一个 w-忠实正合函子正是在 w-商范畴 $\mathsf{Q}_w(R)$ 中表述的 Ishikawa 忠实正合函子。

命题 3.6. 设 $G : \mathrm{Mod}(R) \to \mathcal{A}$ 是一个零化 $\mathcal{T}(R)$ 的正合函子。下列条件等价:

(1) G 是 w-忠实正合的。

(2) 限制函子

$$G|_{(R,w)\text{-mod}} : (R,w)\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}$$

是忠实正合的。

(3) 复合函子

$$G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S : \mathsf{Q}_w(R) \longrightarrow \mathcal{A},$$

其中 $S : \mathsf{Q}_w(R) \to (R,w)$-模 是等价，并且是忠实正合的。

证明。 (1)⇔(3)。由于忠实正合性在函子自然同构下保持，因此只需证明诱导函子

$$\overline{G} : \mathsf{Q}_w(R) \to \mathcal{A}$$

自然同构于复合函子

$$G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S : \mathsf{Q}_w(R) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

设 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Q}_w(R)}(M,N) = \mathrm{Hom}_R(L(M), L(N))$。那么在 $\mathrm{Mod}(R)$ 中有

$$\begin{array}{ccc} M & & N \\ {\scriptstyle c_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_N} \\ L(M) & \xrightarrow[f]{} & L(N) \end{array} \qquad ①$$

将 T 应用于 1○，得到

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \xrightarrow{f} & T(N) \\ {\scriptstyle T(c_M)}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle T(c_N)} \\ T\circ L(M) & \xrightarrow[T(f)]{} & T\circ L(N) \end{array} \qquad ②$$

在 $\mathsf{Q}_w(R)$ 中，其中 $T(c_M)$ 和 $T(c_N)$ 是同构。

将 G 和 $\overline{G}|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S$ 应用于 2○，得到

$$\begin{array}{ccc} \overline{G}\circ T(M) & \xrightarrow{\overline{G}(f)} & \overline{G}\circ T(N) \\ {\scriptstyle \overline{G}\circ T(c_M)}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle \overline{G}\circ T(c_N)} \\ \overline{G}\circ T\circ L(M) & \xrightarrow[\overline{G}\circ T(f)]{} & \overline{G}\circ T\circ L(N) \end{array} \qquad ③$$

and

$$\begin{array}{ccc} G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T(M) & \xrightarrow{G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S(f)} & G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T(N) \\ {\scriptstyle G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T(c_M)} \downarrow \cong & & \cong \downarrow {\scriptstyle G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T(c_N)} \\ G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T \circ L(M) & \xrightarrow[G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T(f)]{} & G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T \circ L(N) \end{array} \quad ④$$

$\mathcal{A}$ 中。

注意到 G 与 $G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ L$ 自然同构，且 $G = G \circ T$，并且 $L \overline{=} S \circ T$。因此 $G \circ T$ 与 $G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T$ 自然同构。由此可得

$$\begin{array}{ccc} \overline{G} \circ T \circ L(M) & \xrightarrow{\overline{G} \circ T(f)} & \overline{G} \circ T \circ L(N) \\ \downarrow \cong & & \cong \downarrow \\ G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T \circ L(M) & \xrightarrow[G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T(f)]{} & G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T \circ L(N) \end{array} \quad ⑤$$

结合 3○、 4○ 和 5○，可得

$$\begin{array}{ccc} \overline{G} \circ T(M) & \xrightarrow{\overline{G}(f)} & \overline{G} \circ T(N) \\ \downarrow \cong & & \cong \downarrow \\ G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T(M) & \xrightarrow[G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S(f)]{} & G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S \circ T(N) \end{array}$$

由于 $T(M) = M$ 且 $T(N) = N$，这就变为

$$\begin{array}{ccc} \overline{G}(M) & \xrightarrow{\overline{G}(f)} & \overline{G}(N) \\ \downarrow \cong & & \cong \downarrow \\ G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S(M) & \xrightarrow[G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S(f)]{} & G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S(N) \end{array}$$

因此 $\overline{G}$ 与 $G|_{(R,w)\text{-mod}} \circ S$ 自然同构，正如所需。

(2)⇔(3)。这显然成立，因为 S 是范畴等价。 □

W工作判据（阿贝尔情形）。对于阿贝尔范畴之间的加性函子 s,

$$\text{faithfully exact} \iff \text{exact and faithful.}$$

因此，在 w 情形下，函子 G 是 w-忠实正合的，当且仅当其在 $(R,\ w)$-模上的限制函子是正合的，并且在该处能检测非零对象和非零态射。

定理 3.7。（w-版本的 *Ishikawa* 的 [8, 定理 1。1]）设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴，且 G:Mod(R) $\to \mathcal{A}$ 是一个湮灭 $\mathcal{T}$（R）的正合协变函子。则以下条件等价:

(1) G 是 w-忠实正合的。

(2) $G(A) \neq 0$ 对每个非零的 w-模 A都成立。*(3)* $G(\varphi) \neq 0$ 对(R, w)-模中的每个非零态射 φ 都成立。*(4)* $G(B) \neq 0$ 对每个非零的*GV*-无挠 R-模 B都成立。*(5)* $G(R/I) \neq 0$ 对 R的每个真 w-理想 I 都成立。*(6)* $G(R/\mathfrak{m}) \neq 0$ 对每个 $\mathfrak{m} \in w$-*Max*(R)都成立。

对于反变正合函子，只需将箭头方向显然地反转，即可得到相同的等价关系。

证明。 (1)⇔(2)⇔(3)。由命题 3.6， G 是 w-忠实正合的，当且仅当其限制函子

$$G|_{(R,w)\text{-mod}} : (R, w)\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}$$

是忠实正合的。因此，(1)–(3) 的等价性由 [17, 子引理 1.15]得出。

(2)⇒(4)。假设 (2) 成立，并令 B 为一个非零的 GV-无挠 R-模。则正合列

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow B_w \longrightarrow B_w/B \longrightarrow 0$$

是正合的，其中 $B_w \neq 0$ 和 $B_w/B \in \mathcal{T}$（R）。由于 G 是正合的，且湮灭 $\mathcal{T}$（R），我们得到一个正合列

$$0 \longrightarrow G(B) \longrightarrow G(B_w) \longrightarrow 0$$

于 $\mathcal{A}$ 中。因此 $G(B) \cong G(B_w)$。由 (2)， $G(B_w) \neq 0$，故 $G(B) \neq 0$。

(4)⇒(5)。若 I 是一个真 w-理想，则 R/I 是 GV-无挠且非零的。因此，由 (4) 得 $G(R/I) \neq 0$。

(5)⇒(6)。每个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R) 都是一个真 w-理想。因此，(6) 可由 (5) 立即推出。

(6)⇒(2)。假设 (6) 成立，设 A 是一个带有 $G(A) = 0$ 的 w-模。我们证明 $A = 0$。

对任意 $a \in A$，考虑循环子模 Ra。由于 G 是正合的， $G(Ra) = 0$。注意，$Ra \cong R/\mathrm{Ann}_R(a)$。由于 A 是一个 w-模，$\mathrm{Ann}_R(a)$ 是一个 w-理想。

若 $\mathrm{Ann}_R(a) \neq R$，则存在 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)，使得 $\mathrm{Ann}_R(a) \subseteq \mathfrak{m}$。因此我们有一个满射

$$R/\mathrm{Ann}_R(a) \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}.$$

应用 G，得到一个正合列

$$0 = G(R/\mathrm{Ann}_R(a)) \longrightarrow G(R/\mathfrak{m}) \longrightarrow 0,$$

因此 $G(R/\mathfrak{m}) = 0$，这与 (6) 矛盾。因此 $\mathrm{Ann}_R(a) = R$，所以 $a = 0$。于是 $A = 0$。 □

4. w-FAITHFULLY PROJECTIVE MODULES

固定交换环 R 上的 w-运算，并在 Grothendieck 范畴 $(R,\ w)$-模中工作，其中的对象是 w-模。设

$$L(-) := ((-)/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(-))_w$$

表示到 $(R,\ w)$-模上的反射函子。

对于固定的 R-模 P，在 Mod(R) 上定义一个协变函子

$$H_w(X) := \mathrm{hom}_w(P, X) = \mathrm{Hom}_R\big(L(P),\, L(X)\big), \qquad X \in \mathrm{Mod}(R).$$

因此，我们得到一个左正合函子

$$H_w(-) : \mathrm{Mod}(R) \xrightarrow{L(-)} (R, w)\text{-mod} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(L(P),-)} (R, w)\text{-mod},$$

它消去 $\mathcal{T}(R)$。

Let

$$\xi:\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

是一个 R-模的短正合列。回想一下，根据 [25]，称 ξ 为 w-分裂，如果存在$J = (d_1, \ldots\ldots, d_n) \in \mathrm{GV}(R)$ 以及同态 $h_1, \ldots\ldots, h_n \in \mathrm{Hom}_R(C, B)$，使得

$$d_k \cdot 1_C = gh_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

在此情形下，J 称为与 w-分裂正合列 ξ相关联的 GV-理想。

若存在一个投射模 F 和一个满同态$g : F \to M$，使得正合列

$$0 \longrightarrow \ker(g) \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

是 w-分裂的。

设 M 和 N 是 R-模，且 $f:\ M \to N$ 是一个 R-同态。若 $\ker(f)$ 和余核(f) 都是 GV-挠模，则称 f 是一个w-同构。

等价地，若诱导映射

$$L(f) : L(M) \longrightarrow L(N)$$

是 $(R,\ w)$-模中的一个同构（等价地，在 $\mathrm{Mod}(R)$ 中）。

We 现在给出函子 H_w(– 正合的充要条件).

引理 4.1. 设 M 是一个 R-模。那么 M 是 w-投射的，当且仅当 $L(M)$ 是 w-分裂的。

证明。由于典范映射 $c_M:\ M \to L(M)$ 是一个 w-同构，根据 [20, 命题 2.3(1)], M 是 w-投射的，当且仅当 $L(M)$ 是 w-投射的。此外，$L(M)$ 是一个 w-模，而 [21,定理 6.7.11] 表明，一个 w-模是 w-投射的，当且仅当它是 w-分裂的。因此，M 是w-投射的，当且仅当 $L(M)$ 是 w-分裂的。□

命题 4.2. 若函子

$$H_w(-) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R, w)\text{-mod}$$

是正合的，则 $L(P)$ 是 w-分裂的。等价地，P 是 w-投射的。

证明。由引理 4.1，只需证明 $L(P)$ 是 w-分裂的。设 $g:\ F \to L(P)$ 是一个满同态，且 F 为投射。将 $H_w(-)$ 的正合性应用于

$$0 \longrightarrow \ker(g) \longrightarrow F \longrightarrow L(P) \longrightarrow 0$$

可得正合列

$$\mathrm{Hom}_R\left(L(P), F\right) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R\left(L(P), L(P)\right) \longrightarrow 0$$

在 (R, w)-模范畴中。因此，$\mathrm{Coker}(g_*)$ 是 GV-挠的。由 [25, 命题 2.4], 可知，这意味着 $L(P)$ 是w-分裂的。□

注记 4.3。设 R 是一个交换环，且 P 是一个有限型的 w-投射 R-模，也就是说，存在一个 w-正合列

$$F \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

其中 F 是有限生成自由的。于是 [20, 定理2.19] 表明 P 具有有限表示型，即存在一个 w-正合列

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

其中 F_0 与 F_1 是有限生成自由模。因此，由 [14, 定理4.6], 可知，在这些假设下，该函子

$$H_w(-) = \hom_w(P, -) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R, w)\text{-mod}$$

是正合的，并湮灭 $\mathcal{T}(R)$。

命题4.4。 设 R 是一个交换环，且 $P \in (R, w)$-模。则以下条件等价:

(1) P 是(R, w)-模中的一个投射对象。(2) 对于$\mathrm{Mod}(R)$ 中的每个态射 $f\colon B \to C$，若 $\mathrm{Coker}(f) \in \mathcal{T}(R)$，则诱导映射

$$\mathrm{Hom}_R(P, L(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, L(C))$$

在(R, w)-模中是满射。等价地，每个态射 $P \to L(C)$ 都可沿着 $L(f)$提升。

(3) 函子

$$H_w(-) = \mathrm{Hom}_R(P, L(-))$$

是正合的。

证明。 (1)⇒(2). 设 $f\colon B \to C$ 是 Mod(R) 中的一个态射，且 Coker(f) $\in \mathcal{T}(R)$。应用 L得到一个正合列

$$L(B) \longrightarrow L(C) \longrightarrow L(\mathrm{Coker}(f)) = 0$$

在 (R, w)-mod 中。由于 P在 (R, w)-mod 中是投射的，诱导映射

$$\mathrm{Hom}_R(P, L(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, L(C))$$

是满射的。

(2)⇒(3)。设

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

是 Mod(R) 中的一个正合列。应用 L 得到 (R, w)-mod 中的一个正合列。根据提升性质，诱导列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, L(A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, L(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, L(C)) \longrightarrow 0$$

是正合的。因此 H_w(–)是正合的。

(3)⇒(1)。令

$$B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

是 (R, w)-模中的一个正合列。由于 H_w(–) 在 Mod(R) 上是正合的，它在 (R, w)-模上的限制也正合。因此

$$\mathrm{Hom}_R(P, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, C) \longrightarrow 0$$

在 (R, w)-模中是正合的，因此 P是 (R, w)-模中的投射对象。 □

推论 4.5。 每个有限型的 w-投射 w-模（例如，有限生成的投射 R-模）都是 (R, w)-模中的投射对象。

定义 4.6。 设 R 是一个交换环。若函子满足以下条件，则称 R-模 P 为 w-忠实投射

$$H_w(-) = \hom_w(P, -) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R, w)\text{-mod}$$

是 w-忠实正合的。等价地，对象 $L(P)$ 在 Grothendieck 范畴 (R, w)-模中是忠实投射的。

注记4.7。 由于

$$\hom_w(P,-) = \mathrm{Hom}_R(L(P), L(-)),$$

w-忠实投射模的概念仅取决于 w-包络 $L(P)$。特别地，将 P 替换为在 $L(-)$下具有相同像的任意模，不会影响这一性质。例如，若 $f\colon P \to P'$ 是 R-模之间的 w-同构，则 $L(P) \cong L(P')$，因此 P是 w-忠实投射的，当且仅当 P' 是 w-忠实投射的。

命题 4.8. 令 $\mathfrak{m}$ 遍历 w-$\mathrm{Max}(R)$，并设 P 是一个有限表示型的 R-模。那么， P 是 w-忠实投射的，当且仅当

(i) $L(P)$ 在(R,w)-模中是投射的，并且

(ii) 对于每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R)$， $P_{\mathfrak{m}} \neq 0$ 。

后一个条件等价于

$$\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}\left(P_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}\right) \neq 0 \quad \textit{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R).$$

特别地，只要 P 作为 R-模是 w-投射的，并且

$$\mathrm{Supp}_R(P) \supseteq w\text{-}\mathrm{Max}(R).$$

证明。令

$$H_w(-) = \hom_w(P,-) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R,w)\text{-mod}.$$

步骤 *1*： H_w 的正合性与 $L(P)$的投射性。

对于 $X \in (R,w)$-模，有 $L(X) = X$，因此

$$H_w(X) = \hom_w(P,X) = \mathrm{Hom}_R\big(L(P), X\big).$$

因此， H_w 在 (R,w)-模上正合，当且仅当函子 $\mathrm{Hom}_R(L(P)\ -)$ 在 (R,w)-模上正合；而这当且仅当 $L(P)$ 在 (R,w)- 模中是投射的。

步骤 *2*： H_w 的忠实性及在剩余对象上的检验。

假设 H_w 正合。根据定理 3.7， H_w 是 w-忠实正合的，当且仅当

$$H_w(R/\mathfrak{m}) \neq 0 \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R).$$

利用 w-Hom 的描述,

$$H_w(R/\mathfrak{m}) = \hom_w(P, R/\mathfrak{m}) = \mathrm{Hom}_R\big(L(P), (R/\mathfrak{m})_w\big).$$

由于 $(R/\mathfrak{m})_w$ 仅在 $\mathfrak{m}$ 处有支撑，上述群非零当且仅当其在 $\mathfrak{m}$ 处的局部化非零:

$$\mathrm{Hom}_R\big(L(P), (R/\mathfrak{m})_w\big)_{\mathfrak{m}} \neq 0.$$

Bec由于 P 和 $L(P)$ 是 w-同构的， $L(P)$ 也属于有限表示型。此外,

$$L(P)_{\mathfrak{m}} \cong P_{\mathfrak{m}}, \qquad \big((R/\mathfrak{m})_w\big)_{\mathfrak{m}} \cong R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}.$$

因此，由 [21,定理 6.3.28(2)],

$$\mathrm{Hom}_R\big(L(P), (R/\mathfrak{m})_w\big)_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}\left(P_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}\right).$$

因此,

$$H_w(R/\mathfrak{m}) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}\left(P_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}\right) \neq 0.$$

由于 $R_{\mathfrak{m}}$ 是局部的，后一条件成立当且仅当 $P_{\mathfrak{m}} \neq 0$。这就证明了等价性。

步骤 *3*：“特别是”这一陈述。

如果 P 是 w作为 R-模的 -投射模，则由注 4.3 可知，函子 $H_w(-)$ 是正合的。此外 ，

$$\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}_R(P) \quad \Longleftrightarrow \quad P_{\mathfrak{m}} \neq 0.$$

因此，条件 Supp$_R(P) \supseteq w$-Max(R) 蕴含 P是 w-忠实投射。 □

推论 4.9. 每个非零有限生成自由 R-模是 w-忠实投射。

证明. 设 P 是一个非零有限生成自由 R-模。则 P 是投射的且为有限型，因此是 w-投射的。由推论 4.5, P 是 (R, w)-mod 中的投射对象。

此外，由于对某个 $n \geq 1$ 有 $P \cong R^n$ ，我们有

$$\mathrm{Supp}_R(P) = \mathrm{Spec}(R).$$

特别是,

$$\mathrm{Supp}_R(P) \supseteq w\text{-Max}(R).$$

因此，由命题 4.8， P 是 w-忠实投射的。 □

定理 4.10。 (w-版本的 Ishikawa [8, 定理 2。2]) 设 R 是一个交换环，且 P是有限型的 w-投射 R-模。则以下条件等价:

(1) P 是 w-忠实投射的。(2) $\mathrm{hom}_w(P, A) \neq 0$ 对每个非零 w-模 A都成立。

(3) 对于每个非零态射 $\varphi : C \to D$ ，在(R, w)-模中，其诱导映射

$$\mathrm{Hom}_R(L(P), C) \xrightarrow{\varphi \circ -} \mathrm{Hom}_R(L(P), D)$$

非零；等价地，存在 $\psi \in \mathrm{Hom}_R(L(P)\ C)$ 使得 $\varphi\psi \neq 0$。

(4) $\mathrm{hom}_w(P, B) \neq 0$ 对每个非零GV-无挠 R-模 B都成立。(5) $\mathrm{hom}_w(P, R/I) \neq 0$ 对 R的每个真 w-理想 I 都成立。(6) $\mathrm{hom}_w(P, R/\mathfrak{m}) \neq 0$ 对每个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)都成立。(7)（局部判据） $P_{\mathfrak{m}} \neq 0$ 对每个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)都成立；等价地,

$$w\text{-Max}(R) \subseteq \mathrm{Supp}_R(P).$$

证明。 由注 4.3，反变函子

$$H_w(-) = \mathrm{hom}_w(P, -)$$

是正合的，并且湮灭 $\mathcal{T}(R)$。因此，Ishikawa 定理 1.1（定理 3.7）的 w-版本适用于 $H_w(-)$，并给出以下等价关系

$$(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3) \Longleftrightarrow (4) \Longleftrightarrow (5) \Longleftrightarrow (6).$$

（6）与（7）的等价性由命题 4.8 得出。 □

例 4.11 （一个非零的有限表示 w-投射模，但不是 w-忠实投射的）。 设 R 是一个非 DW-环的交换环。则存在一个真 GV-理想$J \subsetneq R$。令 $Q := R/J$。则 Q 是一个非零的有限表示 GV-挠 R-模。特别地，Q 是 w-投射的。

然而，由于 Q 是GV-挠，我们有

$$Q_{\mathfrak{m}} = 0 \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R).$$

Thus

$$w\text{-Max}(R) \cap \mathrm{Supp}_R(Q) = \varnothing,$$

so

$$w\text{-Max}(R) \nsubseteq \operatorname{Supp}_R(Q).$$

根据定理 4.10， Q不是 w-忠实投射。

注记 4.12。 由于 R 本身是一个 w-模，因此有 $L(R) = R$。特别地，

$$\hom_w(P, R) = \operatorname{Hom}_R\big(L(P), R\big),$$

并且我们可以将 P 的 w-迹定义为

$$\operatorname{tr}_w(P) := \sum_{f \in \hom_w(P,R)} f\big(L(P)\big) \subseteq R.$$

命题 4.13。 (w-Ishikawa 的 [8, 命题 2 的类比。4]) 在注 *4.3* 中的 R、 P 和 $H_w(-)$ 条件下，以下条件等价:

(1) P 是 w-忠实投射的。(2) 存在 $n \geq 1$ ，使得 $L(P)^{\oplus n}$ 有一个与 R同构的 w-直和项。等价地，在(R, w)-模中存在态射

$$e:\ L(P)^{\oplus n} \longrightarrow R, \qquad s:\ R \longrightarrow L(P)^{\oplus n}$$

使得 $e \circ s = 1_R$。

(3) 存在一个无限指标集 I ，使得

$$\bigoplus_{i \in I} L(P) \cong R^{(J)} \quad in\ (R, w)\text{-mod}$$

对于某个指标集 J。

此外，若 R 是 w-半局部的（即 $|\,w\text{-Max}(R)\,| < \infty$），那么在 (2) 中可取 $n = 1$。

证明。 (1)⇒(2)。假设 P 是 w-忠实投射的。由定理 4.10,

$$\hom_w(P, R/\mathfrak{m}) \neq 0 \qquad \text{for every } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R).$$

我们首先证明，对于每个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)，都存在一个同态 $f:\ L(P) \to R$ ，使得 $f(L(P)) \nsubseteq \mathfrak{m}$。

反设对于某个 $\mathfrak{m}$，对所有 $f \in \text{Hom}_R(L(P)\ R)$ =hom$_w(P, R)$，都有 $f(L(P)) \subseteq \mathfrak{m}$。由于 $L(P)$ 是 (R, w)-模范畴中的投射对象（命题 4.8），对每个

$$g \in \hom_w(P, R/\mathfrak{m}) = \hom_w\left(L(P), (R/\mathfrak{m})_w\right)$$

存在 $f_0:\ L(P) \to R$ 使得图表

$$\begin{array}{ccccc} & & & & L(P) \\ & & \overset{f_0}{\swarrow} & & \downarrow g \\ R & \xrightarrow[L(\pi)]{} & (R/\mathfrak{m})_w & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

交换，其中 $L(\pi)$ 由典范投影 $\pi:\ R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$ 诱导。因此 $g = L(\pi) \circ f_0$。但由假设 $f_0(L(P)) \subseteq \mathfrak{m}$，故 $g = 0$, 这与 hom$_w(P, R/\mathfrak{m}) \neq 0$ 矛盾。

因此，对每个 $\mathfrak{m}$，存在 $f_{\mathfrak{m}} \in$hom$_w(P, R)$，使得 $f_{\mathfrak{m}}(L(P)) \nsubseteq \mathfrak{m}$。

考虑 w-迹理想

$$\operatorname{tr}_w(P) := \sum_{f \in \hom_w(P,R)} f\big(L(P)\big) \subseteq R.$$

The 上述论证表明，$\mathrm{tr}_w(P)$ 不包含于任何 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$ 中。因此 e

$$(\mathrm{tr}_w(P))_w = R.$$

由于挠理论 τ_w 是有限型的，存在 $f_1, \ldots, f_n \in \hom_w(P, R)$使得

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k(L(P))\Big)_w = R.$$

定义

$$e : L(P)^{\oplus n} \to R, \qquad e(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k).$$

Then

$$\mathrm{Coker}(e) = R \Big/ \sum_{k=1}^{n} f_k(L(P))$$

是GV-挠，因此 e 是(R, w)-mod中的满同态。由于 R 在(R, w)-mod中是投射的（推论4.5）， e 分裂。因此存在 s： $R \to L(P)^{\oplus n}$ 使得 $e \circ s = 1_R$。从而 R 是 $L(P)^{\oplus n}$的一个 w-直和项。

(2)⇒(3)。假设

$$L(P)^{\oplus n} \cong R \oplus Q.$$

由于(R, w)-mod是Grothendieck 范畴，它允许任意直和。取可数直和得到

$$\big(L(P)^{\oplus n}\big)^{(\mathbb{N})} \cong R^{(\mathbb{N})} \oplus Q^{(\mathbb{N})}.$$

But

$$\big(L(P)^{\oplus n}\big)^{(\mathbb{N})} \cong L(P)^{(\mathbb{N})}.$$

根据 Eilenberg 把戏,

$$L(P)^{(\mathbb{N})} \cong R^{(\mathbb{N})}.$$

$(3)\Rightarrow(1)$. If

$$L(P)^{(I)} \cong R^{(J)} \quad \text{in } (R, w)\text{-mod},$$

于是对每个 $X \in (R,\ w)$-模,

$$\mathrm{Hom}_R(L(P), X)^I \cong \mathrm{Hom}_R(L(P)^{(I)}, X) \cong \mathrm{Hom}_R(R^{(J)}, X) \cong X^J.$$

因此，$\hom_w(P,\ X) = 0$ 蕴含 $X = 0$。根据定理 4.10(2)， P 是 w-忠实投射的。

半局部细化。

若 R 是 w-半局部的，且有 w-极大理想 $\mathfrak{m}_1$，.....， $\mathfrak{m}_t$，则选取 $f_i \in \hom_w(P,\ R)$，使得对每个 i， $f_i(L(P)) \not\subseteq \mathfrak{m}_i$ 。令

$$f = \sum_{i=1}^{t} f_i : L(P) \to R.$$

那么， f 的像的 w-闭包等于 R，因此 f 是 $(R,\ w)$-模范畴中的满同态。由于 R 是投射的， f 分裂。因此， R 是 $L(P)$ 的一个 w-直和项，可以取 $n = 1$。□

命题 4.14。 设 R 为一个交换环。

(1) 若每个非零的有限型 w-投射 R-模都是 w-忠实投射的，则 R 是*DW*-环。

(2) 反之，若 R 不可分解，则每个非零的GV-无挠有限型 w-投射 R-模都是 w-忠实投射的。

证明。(1) 如果 R 不是 DW-环，那么根据例 4.11，存在一个非零有限表示的w-投射 R-模，它不是 w-忠实投射的。这与假设矛盾。因此，R 必须是 DW-环。

(2) 我们首先证明，每个非零有限生成 GV-无挠 w-投射 R-模都是w-忠实投射的。

设 P 是这样的一个模。对于 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$，命题 4.8 的证明表明

$$\mathrm{Hom}_R\left(P_w, (R/\mathfrak{m})_w\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P_{\mathfrak{m}} = 0.$$

引入以下记号:

$$V_w(I) = \{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{m}\},$$

$$S_w(P) = \{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R) \mid P_{\mathfrak{m}} = 0\},$$

$$T_w(P) = \{\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R) \mid P_{\mathfrak{m}} \neq 0\} = w\text{-Max}(R) \setminus S_w(P).$$

假设 P 不是 w-忠实投射的。根据定理 4.10，$S_w(P) \neq \varnothing$。如果 $T_w(P) = \varnothing$，那么对于所有 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)，都有 $P_{\mathfrak{m}} = 0$，因此 P 是 GV-挠。由于 P 也是 GV-无挠的，这迫使$P = 0$，矛盾。因此，$T_w(P) \neq \varnothing$。

对每个 $\mathfrak{m} \in T_w(P)$, th$^{\text{ere ex}}$ ists $f_{\mathfrak{m}} : P_w \to R$ such that $f_{\mathfrak{m}}(P_w) \not\subseteq \mathfrak{m}$ (see th$^{\text{e proo}}$ f 命题 4.13 的证明）。设 $g_{\mathfrak{m}} = f_{\mathfrak{m}}|_P$。则 $g_{\mathfrak{m}}(P) \not\subseteq \mathfrak{m}$。

事实上，取 $x \in P_w$，使得 $f_{\mathfrak{m}}(x) \notin \mathfrak{m}$。存在一个 GV-理想 J 与 $Jx \subseteq P$。 S因为 $J \not\subseteq \mathfrak{m}$, 选取 $a \in J \setminus \mathfrak{m}$。令 $y = ax \in P$。则 $g_{\mathfrak{m}}(y) = f_{\mathfrak{m}}(y) \notin \mathfrak{m}$。

设 I 为所有这样的 $g_{\mathfrak{m}}(y)$ 所生成的理想。则

$$I \not\subseteq \mathfrak{m} \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in T_w(P),$$

so

$$V_w(I) \subseteq S_w(P).$$

反之，若 $\mathfrak{n} \in S_w(P)$，则 $P_{\mathfrak{n}} = 0$。对任意 $g: P \to R$，该复合映射

$$P \xrightarrow{g} R \to R/\mathfrak{n} \hookrightarrow (R/\mathfrak{n})_w$$

唯一地延拓为一个映射 $P_w \to (R/\mathfrak{n})_w$（命题 2.3(4)）。但 $\mathrm{Hom}_R\left(P_w, (R/\mathfrak{n})_w\right) = 0$，故该复合映射为零。因此 $g(P) \subseteq \mathfrak{n}$，从而 $I \subseteq \mathfrak{n}$。所以

$$V_w(I) = S_w(P).$$

对于每个 $\mathfrak{n} \in S_w(P)$，由于 $P_{\mathfrak{n}} = 0$ 和 P是有限生成的，存在 $s_{\mathfrak{n}} \in R \setminus \mathfrak{n}$ 使得$s_{\mathfrak{n}}P = 0$。因此 $s_{\mathfrak{n}}I = 0$。

令 J 为由所有此类 $s_{\mathfrak{n}}$生成的理想。那么

$$JI = 0, \qquad (J + I)_w = R.$$

由此可得

$$J_w I_w = 0, \qquad (J_w + I_w)_w = R.$$

根据 [15, 引理 5.10],

$$R \cong J_w \oplus I_w.$$

这与 R的不可分解性相矛盾。因此 P 是 w-忠实投射的。

现设 P' 是一个非零的有限型GV-无挠 w-投射 R-模。由 [21, 命题6.3.13(3)], , 存在有限生成子模 $P \subseteq P'$ 使得 $P_w = (P')_w$。再由[21, 命题6.7.2(1)], P 也是 w-投射的。由证明的第一部分, P 是 w-忠实投射的。最后，由注记4.7, P' 同样是 w-忠实投射的。□

5. w-FAITHFULLY FLAT MODULES

由 [32, 例 3.4] 可知，在 (R,w)-mod 中的两个 R-模的张量积未必属于 (R,w)-mod，即使在 PvMD 上也是如此。为了解决这个问题，我们引入w-张量积的概念。

定义 5.1. 设 R 是一个交换环。对于 $M, N \in \mathrm{Mod}(R)$，定义

$$M \otimes_R^w N := L(M \otimes_R N).$$

这称为 M 和 N的 w-张量积 。

这一构造给出一个双函子

$$- \otimes_R^w - : \mathrm{Mod}(R) \times \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R,w)\text{-mod},$$

可将其视为 Ishikawa 张量积的 w-类比。

注记 5.2. 设 R为交换环，并固定一个 R-模 M。将函子 $(-) \otimes_R^w M$记为 $U_w(-)$。我们得到一个右正合函子

$$U_w(-) : \mathrm{Mod}(R) \xrightarrow{-\otimes_R M} \mathrm{Mod}(R) \xrightarrow{L(-)} (R,w)\text{-mod},$$

它消去 $\mathcal{T}(R)$。

函子

$$U_w(-) = (-) \otimes_R^w M : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R,w)\text{-mod}$$

当且仅当 M 是 w-平坦模时，该函子才是正合 的。此刻画将在本节中反复使用（参见 [14,定理 3.9]）。

定义 5.3. 设 R 为交换环。若函子忠实平坦 , 则称 R-模 M 为 w

$$U_w(-) = (-) \otimes_R^w M : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R,w)\text{-mod}$$

是 w-忠实正合。

显然，每个 w-忠实平坦模都是 w-平坦的。

由 [35] 可知，一个 R-模 E 称为 w-泛内射，如果 E 是内射的，并且对每个非零的 GV-无挠 R-模 A，存在一个 R-同态 $f:\ A \to E$, 使得 $f \neq 0$。等价地,

$$\mathrm{Hom}_R(A,E) \neq 0 \text{ 对每个非零的 GV-挠无模 } A.$$

命题 5.4. 设 R 是一个交换环。一个 R-模 M 是 w-忠实平坦的，当且仅当对每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$，$M_{\mathfrak{m}}$ 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 上是忠实平坦的。

等价地（由 *Ishikawa–Lambek* 定理的 w 版本，参见 [8, 命题 3。6]） , M 是 w-忠实平坦的，当且仅当对于某个（等价地，对于每个）内射的 R-模 E，$\mathrm{Hom}_R(M, E)$ 是 w-泛内射的。

证明。设

$$U_w(-) = (-) \otimes_R^w M : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R,w)\text{-mod}, \qquad X \otimes_R^w M = L(X \otimes_R M).$$

步骤 *1*：正合性与局部平坦性。

U_w(–) 的正合性恰好是 M 的 w-平坦性。根据 w-平坦性的局部判据，这等价于对每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$, $M_{\mathfrak{m}}$ 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 上平坦。

步骤 *2*：忠实性与局部忠实平坦性。

假设 U_w(–) 是正合的。根据定理 3.7， U_w(–) 是 w-忠实正合的当且仅当 if

$$U_w(R/\mathfrak{m}) \neq 0 \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R).$$

Now

$$U_w(R/\mathfrak{m}) = (R/\mathfrak{m}) \otimes_R^w M = L\big((R/\mathfrak{m}) \otimes_R M\big).$$

由于 L(–) 恰好零化 GV-挠，且 $R/\mathfrak{m}$仅在 $\mathfrak{m}$ 处有支撑，上述模非零当且仅当

$$\big((R/\mathfrak{m}) \otimes_R M\big)_{\mathfrak{m}} \neq 0.$$

局部化得到

$$(R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}) \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \neq 0.$$

在局部环 $R_{\mathfrak{m}}$ 上，这个条件与 $M_{\mathfrak{m}}$ 的平坦性一起，等价于 $M_{\mathfrak{m}}$ 的忠实平坦性。

步骤 *3*：*Ishikawa–Lambek*等价。

由 Ishikawa–Lambek 定理的 w 版本，可得它与 $\mathrm{Hom}_R(M,E)$ 的 w-泛单射性等价。□

推论 5.5. 若 $f: M \to M'$ 是 R-模的 w-同构，则 M 是 w-忠实平坦的，当且仅当 M' 是 w-忠实平坦的。

证明. 由于 $L(M) \cong L(M')$，函子

$$(-) \otimes_R^w M \quad \text{and} \quad (-) \otimes_R^w M'$$

自然同构。因此，一个是 w-忠实正合的，当且仅当另一个也是。 □

定理 5.6. (w-Ishikawa 的 [8, 定理 2.1], 带极大w-理想条件的类比）设 M是一个 w-平坦 R-模。则下列条件等价。

(1) M 是 w-忠实平坦的。(2) $A \otimes_R^w M \neq 0$ 对每个非零 w-模 A 都成立。(3) $\varphi \otimes_R^w 1_M \neq 0$ 对 (R,w)-模中的每个非零态射 φ 都成立。(4) $B \otimes_R^w M \neq 0$ 对每个非零的GV-挠无 R-模 B都成立

.

(5) 对每个真 w-理想 I *of* R,

$$L(IM) \neq L(M), \qquad \textit{equivalently} \qquad (R/I) \otimes_R^w M \cong L(M/IM) \neq 0.$$

(6) $(R/\mathfrak{m}) \otimes_R^w M \neq 0$ 对每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$。

(6′) 对于每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$,

$$L(M/\mathfrak{m}M) \neq 0, \qquad \textit{equivalently} \qquad M_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}} \neq 0.$$

(7) $M_{\mathfrak{m}}$ 对于每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$ 都是忠实平坦的。

证明。 根据定理 3.7，条件 (1)–(6) 等价，因为 M 是 w-平坦的，因此 $U_w(-) = (-) \otimes_R^w M$ 是正合的。

(6)、(6′) 和 (7) 的等价性由命题 5.4 得出。 □

引理5.7. 设 M 是一个 GV-挠无 R模，且 $\mathfrak{m}$ 是 R 的一个极大 w理想。则以下条件等价。

(1) $(M_w/(\mathfrak{m}M)_w)_w = 0$。(2) $M_w/(\mathfrak{m}M)_w$ 是 GV-挠。(3) $M_w = (\mathfrak{m}M)_w$。(4) $M/\mathfrak{m}M$ 是GV-挠。(5) $L(M) = L(\mathfrak{m}M)$。

证明。 (1)–(4) 的等价性在 [30, 引理 2.1] 中已得到证明。
(3) $\Leftrightarrow$ (5)。这直接由恒等式 $L(X) = X_w$ 对每个 GV-挠无模X成立得出。□

注记 5.8。 在定理 5.6 中，循环非消失条件

$$L(\mathfrak{m}M) \neq L(M) \qquad (\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R))$$

根据引理5.7，等价于

$$(M_w/(\mathfrak{m}M)_w)_w \neq 0 \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R).$$

此外， [30, 引理 2.1] 表明，消失条件 $(M_w/(\mathfrak{m}M)_w)_w = 0$ 等价于引理5.7中的条件 (2)–(4) 中的任意一个。因此，我们的非消失准则 $L(\mathfrak{m}M) \neq L(M)$ 恰好是 Xing 的消失条件 [30] 的否定。

因此，当前对 w-忠实平坦模 的定义与 Xing 的表述完全兼容。

命题 5.9。 (wIshikawa 的 [8, 命题 2.3]的类比) 如果 P 是一个 w-忠实投射R-模，那么 P 是 w-投射且 w-忠实平坦。反之，如果 P 是有限型的，那么逆命题也成立。

证明。 假设 P 是 w-忠实投射的；也就是说，函子 $H_w(-) = \hom_w(P, -)$ 是 w-忠实正合的。

由命题 4.2， $H_w(-)$ 的正合性蕴含 P 是 w-投射的。因此，根据 [19,命题 2.4]， P 也是w-平坦的。

现在令 B为一个 GV-挠无的 R-模，使得 $B \otimes_R^w P = 0$. 那么 $L(B \otimes_R P) = 0$, 所以$B \otimes_R P$是 GV-挠的。由于 P和 $L(P)$ 是 w-同构的， $B \otimes_R L(P)$ 也是 GV-挠的。

令 C 为一个 w-模。那么 $\mathrm{Hom}_R(B, C)$ 仍是一个 w-模，并且我们有

$$\hom_w\big(P, \mathrm{Hom}_R(B, C)\big) = \mathrm{Hom}_R\left(L(P), \mathrm{Hom}_R(B, C)\right) \cong \mathrm{Hom}_R\left(B \otimes_R L(P), C\right) = 0.$$

由于 $\hom_w(P, -)$ 是 w-忠实正合的，由定理 3.7(2) 得

$$\mathrm{Hom}_R(B, C) = 0 \quad \text{for every nonzero } w\text{-module } C.$$

现在令 D 为任意 GV-挠无模。由于 $D \hookrightarrow D_w$ 是本质的，且 D_w 是一个 w-模，.....的正合性

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, D_w)$$

蕴含 s 使得 $\mathrm{Hom}_R(B, D) = 0$。因此，对于每个 GV-无挠模 D，$\mathrm{Hom}_R(B, D) = 0$。

由此可得， B 是 GV-挠的。但 B 也是 GV-无挠的，因此 $B = 0$。所以，根据定理 5.6(4)， P 是 w-忠实平坦的。

反过来，假设 P 为有限型，且同时是 w-投射和 w-忠实平坦的。由 [21,定理 6.7.29(8)]， P 是有限表示型的 w- 平坦模。于是，定理 5.6(7) 和 4.10(7) 表明 P 是 w- 忠实投射的。□

命题 5.10. 设 R 是一个交换环。

(1) 如果每个非零的 w-平坦 R-模都是 w-忠实平坦的，那么 R 是一个 *DW*-环。(2) 反过来，

如果 R 不可分解，那么每个有限表示型的非零 *GV*-挠无挠 w-平坦 R-模都是 w-忠实平坦的。

证明。 (1) 假设 R 不是 DW-环。那么存在一个 $J \in \mathrm{GV}(R)$，使得 $J \neq R$。令 $M := R/J$。于是 M 是一个非零的 GV-挠模，因此是 w-平坦的。

根据假设， M 是 w-忠实平坦的。因此，命题 5.4 推出，对于所有 $\mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R)$， $M_{\mathfrak{m}}$ 在$R_{\mathfrak{m}}$ 上都是忠实平坦的。但 M 是 GV-挠的，所以对所有这样的 $\mathfrak{m}$， $M_{\mathfrak{m}} = 0$ ，矛盾。因此，R 必定是 DW-环。

(2) 假设 R 不可分解，并令 M 为一个非零的 GV-无挠 w-平坦 R-模，且属于有限表示型。根据 [21, 定理 6.7.29]， M 是 w- 投射的。于是命题 4.14(2) 推出， M 是 w- 忠实投射的。最后，根据命题 5.9， M 是 w-忠实平坦的。□

6. w-FAITHFULLY INJECTIVE MODULES

对于固定的 R-模 E，定义一个反变函子

$$V_w(X) := \hom_w(X, E) := \mathrm{Hom}_R\big(L(X),\, L(E)\big), \qquad X \in \mathrm{Mod}(R).$$

因此我们得到一个左正合函子

$$V_w(-) : \mathrm{Mod}(R) \xrightarrow{L(-)} (R, w)\text{-mod} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(-, L(E))} (R, w)\text{-mod},$$

它消去 $\mathcal{T}(R)$。

回顾 [19] 中的定义，若一个 R-模 Q 满足：对于每个 w-正合序列，则称其为 w-内射 e

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

诱导出的序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, L(Q)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, L(Q)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, L(Q)) \longrightarrow 0$$

是 w-正合的。 [14, 定理 4.5] 证明了，函子

$$V_w(-) = \hom_w(-, E) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R, w)\text{-mod}$$

是正合的，当且仅当 E 是 w-内射的。

另据 [27] ，若存在一个 w-分裂短正合列，则称 R-模 N 为 iw-分裂

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

其中 E 是内射的。

命题 6.1。 设 R 是一个交换环，且 E 是 R上的 w-模，即 $E \in (R, w)$-模。那么以下条件等价。

(1) E 是(R, w)-mod的内射对象。

(2) 对于$\mathrm{Mod}(R)$ 中满足$\ker(f) \in \mathcal{T}(R)$的每个态射 $f\colon A \to B$，诱导映射

$$\mathrm{Hom}_R\big(L(B), E\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(L(A), E\big)$$

在 (R, w)-模.(3) 函子 $V_w(-)$ 是正合的。(4) E 是一个 w-内射 R-模。(5) E 是一个 iw-分裂 R-模。(6) E 是一个内射 R-模，即 $\mathrm{Mod}(R)$中的内射对象。

证明。 (1)⇒(2)。设 $f\colon A \to B$是 Mod(R) 中的一个态射，且 ker(f) $\in \mathcal{T}(R)$。则 $L\big(\ker(f)\big) = 0$，因此有如下序列

$$0 \longrightarrow L(A) \longrightarrow L(B)$$

在 (R, w)-模中是正合的。由于 E在 (R, w)-模中是内射的，诱导映射

$$\mathrm{Hom}_R\big(L(B), E\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(L(A), E\big)$$

是满射。

(2)⇒(3)。这直接由恒等式得出

$$V_w(-) = \mathrm{Hom}_R\big(L(-), E\big).$$

(3)⇒(1). 设

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B$$

在 (R, w)-mod 中正合。由于 $L(A) = A$ 且 $L(B) = B$，$V_w(-)$ 的正合性给出

$$\mathrm{Hom}_R(B, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, E) \longrightarrow 0$$

在 (R, w)-mod 中正合。因此 E在 (R, w)-mod 中是内射的。

(3)⇔(4). 这正是 [14, 定理 4.5]。

(4)⇔(5). 这在 [27,推论 2.5] 中得到证明。

(1)⇒(6). 这由 [16, 第 X 章，命题 1.7]，得出，因为 (R, w)-mod 是 Mod(R) 的具有正合反射函子的反射子范畴。

(6)⇒(4)。参见 [19,推论 3.5]。 □

推论 6.2。 每个 GV-无挠内射 R-模都是 (R, w)-模的内射对象。

证明。 如果 E 是内射且为 GV-无挠，则 $L(E) = E$。根据命题 6.1，既是内射 R-模又是 w-模的模是 (R, w)-模中的内射对象。□

推论 6.3。 设 E 是一个 R-模。以下条件等价。

(1) E 是 w-内射的。(2) $L(E)$是 w-内射的。(3) $L(E)$是一个 iw-分裂 R-模。(4) $L(E)$是一个内射 R-模。

证明。 由于 E 和 $L(E)$ 同构，且 $L(E)$ 是一个 w-模，因此 E 是内射的，当且仅当$L(E)$ 是内射的（参见 [19, 例 3.2]）。其余等价结论由命题 6.1 得出。

□

定义 6.4。 设 R 是一个交换环，且 E 是一个 R-模。若函子 E 是w-忠实内射 的，则称其具有该性质

$$V_w(-) = \hom_w(-, E) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow (R, w)\text{-mod}$$

是 w-忠实正合的。等价地，对象 $L(E)$ 在阿贝尔范畴 (R, w)-模中是忠实内射的。

显然，每个 w-忠实内射模都是 w-内射的。

注记 6.5. 若 E 和 E' 是 w-同构的 R-模，则 $L(E) \cong L(E')$。因此， E 是 w-忠实内射的，当且仅当 E' 也是如此。

定理 6.6. (w-Ishikawa 的 [8, 定理 3 的版本。1]) 设 E 是一个 w-内射 R-模。则以下条件等价。

(1) E 是 w-忠实内射的。(2) 对任意非零的 -模 $w(A, E) \neq 0$ 。(3) 对于每个非零态射 $\varphi : A \to B$ ，在 (R, w)-模中，诱导映射

$$\mathrm{Hom}_R(A, L(E)) \xrightarrow{\varphi \circ -} \mathrm{Hom}_R(B, L(E))$$

非零；等价地，存在 $\psi \in \mathrm{Hom}_R(B, L(E))$ 使得 $\psi \circ \varphi \neq 0$。
(4) $\hom_w(B, E) \neq 0$ 对每个非零的 GV-挠无 R-模 B .
(5) $\hom_w(R/I, E) \neq 0$ 对 R 的每个真 w-理想 I 。(6) ho
$\mathrm{m}_w(R/\mathfrak{m}, E) \neq 0$ 对每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$。

证明。 由于 E 是 w-内射的，函子

$$G = V_w(-) = \hom_w(-, E)$$

是正合的，并且湮灭 $\mathcal{T}(R)$。将定理 3.7 应用于 G ，即可得到所需的等价关系。 □

推论 6.7。 设 E 是一个 R-模。那么，当且仅当 $L(E)$ 是w-泛内射时， E 才是 w-忠实内射的。

此外，若 E 是一个 w-模，则 E 是 w-忠实内射，当且仅当它是 w-泛内射。

证明。 由推论 6.3， E 是 w-忠实内射，当且仅当 $L(E)$是 w-内射。由定理 6.6(4)，这等价于对每个非零 GV-无挠模 B，$\hom_w(B, E) \neq 0$ 。由于

$$\mathrm{Hom}_R(A, L(E)) \cong \mathrm{Hom}_R(A_w, L(E))$$

对每个 GV-无挠模 A，这恰好就是 w-泛内射的定义，其中$L(E)$。□

设 A, B 是 R-模，且 $c_A : A \to L(A)$和 $c_B : B \to L(B)$是典范同态。定义

$$c_A \oplus c_B : A \oplus B \longrightarrow L(A) \oplus L(B)$$

by

$$(c_A \oplus c_B)(a, b) = \big(c_A(a), c_B(b)\big) \quad \text{for all } (a, b) \in A \oplus B.$$

由于 $L(A) \oplus L(B)$ 是一个 w-模，态射 $c_A \oplus c_B$ 诱导出一个同态

$$L(c_A \oplus c_B) : L(A \oplus B) \longrightarrow L(A) \oplus L(B).$$

引理 6.8. 在上述记号下，

$$L(c_A \oplus c_B) : L(A \oplus B) \longrightarrow L(A) \oplus L(B)$$

是一个 R-同构。

证明。 考虑下列交换图，其中各行在 (R, w)-模中正合 ：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L(A) & \longrightarrow & L(A \oplus B) & \longrightarrow & L(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle L(c_A \oplus c_B)} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & L(A) & \longrightarrow & L(A) \oplus L(B) & \longrightarrow & L(B) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由于外侧的垂直映射都是恒等映射，且两行均正合，因此 $L(c_A \oplus c_B)$ 是 (R, w)-模中的同构。因此，它也是 Mod(R) 中的同构。□

引理 6.9。 设 A, B 是 R-模。那么 $A \oplus B$ 是 w-内射，当且仅当 A 和 B 都是 w-内射。

证明。 由引理 6.8,

$$L(A \oplus B) \cong L(A) \oplus L(B).$$

由推论 6.3, R-模 X 是 w-内射的，当且仅当 $L(X)$在 Mod(R) 中是内射的。由于内射性在有限直和下保持，因此结论成立。□

推论 6.10。 （w-类比于 Ishikawa 的 [8, 推论 3.2]）

（1）若 E 是 w-忠实内射的，且 E' 是 w-内射的，则 $E \oplus E'$ 是 w-忠实内射的。（2）令

$$Q = \mathrm{E}_R\left(\bigoplus_{\mathfrak{n} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R)} R/\mathfrak{n}\right), \qquad Q' = \prod_{\mathfrak{n} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R)} \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{n}),$$

其中$\mathrm{E}_R(-)$表示$\mathrm{Mod}(R)$中的内射包。则 Q和 Q' 都是 w-忠实内射的。

证明。（1）由引理 6.9, $E \oplus E'$ 是 w-内射的。

令 A 为一个 w-模，使得 $\hom_w(A, E \oplus E') = 0$.

利用引理 6.8,

$$\begin{aligned} \hom_w(A, E \oplus E') &= \mathrm{Hom}_R\left(A, L(E \oplus E')\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R\left(A, L(E) \oplus L(E')\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R\left(A, L(E)\right) \oplus \mathrm{Hom}_R\left(A, L(E')\right) \\ &= \hom_w(A, E) \oplus \hom_w(A, E'). \end{aligned}$$

因此 $\hom_w(A, E) = 0$。由于 E 是 w-忠实内射的，定理6.6(2)推出 $A = 0$。因此$E \oplus E'$ 是 w-忠实内射的。

(2) Q 和 Q' 都是内射的 R-模，且是 GV-无挠的。因此，根据推论 6.3，它们是 w-内射的。

对于每个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R),

$$\hom_w(R/\mathfrak{m}, Q) = \mathrm{Hom}_R\left((R/\mathfrak{m})_w, Q\right) \cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, Q) \neq 0,$$

因为 $R/\mathfrak{m}$嵌入其内射包中。

类似地,

$$\hom_w(R/\mathfrak{m}, Q') \cong \prod_{\mathfrak{n}\in w\text{-Max}(R)} \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{n})).$$

与 $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ 对应的分量非零，因此乘积非零。

因此，根据定理 6.6， Q 和 Q' 都是 w-忠实内射的。 □

回顾 [21, 定义 6.4。1] 若非零 w-模 M 没有非平凡的 w-子模，则称其为 w-单模。回顾 [7]，若一个 R-模 M 不是 τ_w-挠的，且 $\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)$ 是 M 唯一的真 τ_w-纯子模，则称其为 τ_w-单模。

引理 6.11. 设 M 是 R 上的一个 w-模，且 $\{T_i\}_{i\in I}$ 是 M 的一族 w-单 R-子模，使得

$$M = \sum_{i\in I} T_i.$$

那么：

(1) 对于 M 的每个 w-子模 K，都存在一个子集 $J \subseteq I$，使得 $\{T_j\}_{j\in J}$ 线性无关（即 $\sum_{j\in J} T_j = \bigoplus_{j\in J} T_j$），并且

$$M = K \oplus \left(\bigoplus_{j\in J} T_j \right).$$

(2) 对于 M 的每个 w-单 R-子模 T，都存在 $i \in I$，使得 $T \cong T_i$。

证明。 (1) 设 K 是 M 的一个 w-子模。考虑

$$\Gamma = \left\{ J \subseteq I \;\middle|\; \{T_j\}_{j\in J} \text{ is independent and } K \cap \Big(\sum_{j\in J} T_j \Big) = 0 \right\}.$$

按包含关系排序，每条链都有一个上界，因此根据佐恩引理， Γ 有一个极大元 J。

Set

$$N = K + \sum_{j\in J} T_j.$$

由构造可知,

$$N = K \oplus \left(\bigoplus_{j\in J} T_j \right).$$

我们断言 $N = M$。设 $i \in I$。由于 T_i 是 w-单模，且 $T_i \cap N$ 是 T_i 的一个 w-子模，因此或者

$$T_i \cap N = 0 \quad \text{or} \quad T_i \subseteq N.$$

如果 $T_i \cap N = 0$，那么 $J \cup \{i\} \in \Gamma$，这与极大性矛盾。因此，对所有 i， $T_i \subseteq N$，所以 $M = N$。

(2) 将 (1) 应用于 $K = 0$，则存在 $J \subseteq I$ 使得

$$M = \bigoplus_{j\in J} T_j.$$

现在将 (1) 应用于 $K = T$。于是

$$M = T \oplus \left(\bigoplus_{l \in L} T_l \right)$$

对于某个 $L \subseteq J$。

但还有

$$M = \left(\bigoplus_{j \in J \setminus L} T_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{l \in L} T_l \right).$$

因此

$$T \cong \bigoplus_{j \in J \setminus L} T_j.$$

由于 T 是 w-单的，$|J \setminus L| = 1$。因此，对于某个 $i \in J \subseteq I$，有 $T \cong T_i$。 □

引理 6.12。设 M 是一个 w-模，且 $M_1, \ldots, M_n$ 是 M 的两两不同构的 w-单 R-子模。则

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i.$$

证明。我们对 n 使用归纳法。

情形 $n = 1$ 显然。假设 $n > 1$，且结论对 $n - 1$ 成立。

假设对于某个 i,

$$M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j \neq 0.$$

由归纳法,

$$\sum_{j \neq i} M_j = \bigoplus_{j \neq i} M_j,$$

这是一个 w-模。因此

$$M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j$$

是 M_i 的一个 w-子模。由于 M_i 是 w-单的,

$$M_i \subseteq \sum_{j \neq i} M_j.$$

Thus

$$M_i \cong M_j$$

对某个 $j \neq i$，这与假设矛盾。因此，所有交集都为零。 □

推论 6.13。(统一的 w-Ishikawa 的类比 [8, 推论 3。3]) 设 E 是一个 w-内射 R-模，且 Q 如推论 *6.10* 中所述。以下条件等价:

(1) E 是 w-忠实内射的。(2) $L(E)$包含每个 τ_w-单 R-模的一个同构副本。(3) $L(E)$有一个与 Q 同构的直和项。

证明。 (1)⇒(2) 设 M 是一个 τ_w-单 R-模。由 [10, 推论 2.4 和命题 2.3],$M_w \cong (R/\mathfrak{m})_w$ ，其中某个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)。

由于 E 是 w-忠实内射，定理 6.6(6) 得出 $\hom_w(R/\mathfrak{m}, E) \neq 0$. 因此

$$\mathrm{Hom}_R(M, L(E)) \cong \mathrm{Hom}_R(M_w, L(E)) \neq 0.$$

设 $f: M \to L(E)$ 非零。由于 M 是 τ_w-单的，且 $\ker(f)$ 是 τ_w-闭的， f 必为内射。因此， M 嵌入到 $L(E)$ 中。

(2)⇒(3) 对每个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)，$(R/\mathfrak{m})_w$ 既是 τ_w-单的，也是 w-单的。根据 (2)，存在一个单态射

$$f_{\mathfrak{m}} : (R/\mathfrak{m})_w \to L(E).$$

Let

$$f : \bigoplus_{\mathfrak{m}} (R/\mathfrak{m})_w \to L(E)$$

定义如下

$$f([x_{\mathfrak{m}}]) = \sum_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}}(x_{\mathfrak{m}}).$$

由于这些像是两两不同构的 w-单子模，引理 6.12 推出 f 是内射的。

由于 $L(E)$ 是内射的，且 Q 是 $\bigoplus_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}$的内射包，因此 f 可延拓为单态射 $g: Q \to L(E)$。由于 Q 是内射的， g 可分裂。因此 Q 是 $L(E)$ 的直和项。

(3)⇒(1) 若 $L(E) = Q \oplus L$ 且 L 内射，则由推论 6.10， $L(E)$ 是 w-忠实内射的。由于 E 与 $L(E)$ 同构于 w， E 是 w-忠实内射的。□

推论 6.14。 设 E 是 R 上的 w-内射 w-模（等价地， E 是 GV-挠无的且内射），并设 Q 如推论 *6.10* 中所述。那么下列条件等价:

(1) E 是 w-忠实内射的。(2) E 包含每个 τ_w-单 R-模的一个同构像。(3) E 有一个与 Q同构的直和项。

命题 6.15. (w-Ishikawa [8, 命题 3 的类比。4]) 设 R 是一个交换环。若每个非零的 w-内射 R-模都是 w-忠实内射的，则 R 是 w-局部的；也就是说，

$$|\, w\text{-Max}(R) \,| = 1.$$

因此， R 是一个 *DW*-环。

证明。 假设每个非零的 w-内射 R-模都是 w-忠实内射的。

反设,

$$|\, w\text{-Max}(R) \,| \geq 2,$$

并取不同的 w-极大理想 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$。

那么 $\mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$ 是 w-内射的，因此根据假设，它是 w-忠实内射的。因此 ,

$$\hom_w(R/\mathfrak{n}, \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})) \neq 0.$$

由于 $(R/\mathfrak{n})_w \cong R/\mathfrak{n}$，这给出

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{n}, \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})) \neq 0.$$

Let

$$f : R/\mathfrak{n} \to \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$$

非零。

由于 $R/\mathfrak{n}$ 是 w-单的，且 ker(f) 是一个 w-子模，因此 f 必定是内射的。因此

$$R/\mathfrak{n} \cong f(R/\mathfrak{n}) \subseteq \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m}).$$

由于 $\mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$ 是 $R/\mathfrak{m}$的本质扩张，我们必有

$$f(R/\mathfrak{n}) \cap R/\mathfrak{m} \neq 0.$$

取

$$0 \neq x \in f(R/\mathfrak{n}) \cap R/\mathfrak{m}.$$

Then

$$\mathrm{Ann}_R(x) = \mathfrak{m} \quad \text{and} \quad \mathrm{Ann}_R(x) = \mathfrak{n},$$

于是 $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$，矛盾。

因此 $|w\text{-Max}(R)| = 1$，所以 R是 w-局部的。

最后，由 [10, 命题 2.6]，，w-局部环是一个 DW-环。 □

如果交换环 R 的每个 w-理想的升链都 R 稳定，则称其为 w-诺特环。等价地，R 的每个 w-理想都是有限型的；也就是说，对于 R的每个 w-理想 I，都存在一个有限生成理想 $J \subseteq I$，使得 $I = J_w$（[21, 定理 6.8.5]）。

命题 6.16。（wIshikawa 的 [8, 命题 3.5]的类比）设 R 是一个 w-诺特交换环，且 E 是一个 w-内射 R-模。那么，E 是 w-忠实内射，当且仅当对于每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$，$E_{\mathfrak{m}}$ 都是一个忠实内射 $R_{\mathfrak{m}}$-模。

证明。（⇒）假设 E 是 w-忠实内射，并固定一个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)。

由推论 6.3，$L(E)$ 是 GV-无挠内射 R-模。因此，由 [11, 定理 2.13],

$$E_{\mathfrak{m}} \cong L(E)_{\mathfrak{m}}$$

是 $R_{\mathfrak{m}}$ 上的内射模。

由于 E 是 w-忠实内射的，

$$\hom_w(R/\mathfrak{m}, E) \neq 0.$$

Thus

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, L(E)) \neq 0.$$

由 [11, 引理 2.12(1)], , 对 $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}$,

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, L(E))_{\mathfrak{n}} = 0.$$

因此

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, L(E))_{\mathfrak{m}} \neq 0.$$

局部化可得

$$\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}\left(R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}, E_{\mathfrak{m}}\right) \neq 0.$$

在局部环上，内射性与此条件合起来等价于忠实单射性。因此，$E_{\mathfrak{m}}$ 是忠实内射的。

(⇐) 假设对于每个 $\mathfrak{m} \in w$-Max(R)，$E_{\mathfrak{m}}$ 都是忠实内射的。

设 I 是 R 的一个真 w-理想。那么存在 $\mathfrak{n} \in w$-Max(R)，使得 $I_{\mathfrak{n}} \neq R_{\mathfrak{n}}$。

$E_{\mathfrak{n}}$ 的忠实单射性意味着

$$\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{n}}}\left(R_{\mathfrak{n}}/I_{\mathfrak{n}}, E_{\mathfrak{n}}\right) \neq 0.$$

But

$$\hom_w(R/I,E)_{\mathfrak{n}} \cong \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{n}}}\left(R_{\mathfrak{n}}/I_{\mathfrak{n}}, E_{\mathfrak{n}}\right),$$

so

$$\hom_w(R/I,E)_{\mathfrak{n}} \neq 0.$$

因此

$$\hom_w(R/I,E) \neq 0.$$

由定理 6.6(5)， E 是 w-忠实内射的。 □

注记 6.17。 命题 6.16 中的 w-Noetherian 条件仅用于确保对于 R的每个真 w-理想 I ，模 R/I 都属于有限表示型。除了 w-内射性之外，不需要对 E作任何有限性假设。

推论 6.18。 假设 R 是 w-*Noetherian* 的，并设 E 是 R上的一个 w-内射 w-模。那么以下条件等价。

(1) E 是 w-忠实内射的（等价地，是 w-泛内射的）。(2) 每个 w-极大理想都属于 E的支撑，即

$$w\text{-}\mathrm{Max}(R) \subseteq \mathrm{Supp}_R(E),$$

等价地，

$$\mathrm{Ann}_R(E) \subseteq \mathfrak{m} \quad \textit{for every } \mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R).$$

证明。 由于 E 是 w-内射的，反变函子

$$V_w(-) := \hom_w(-,E)$$

是正合的。

(1)⇒(2)。若 E 是 w-忠实内射的，则由定理 6.6(6),

$$\hom_w(R/\mathfrak{m},E) \neq 0 \quad \text{for every } \mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R).$$

由于 $(R/\mathfrak{m})_w \cong R/\mathfrak{m}$，这等价于

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},E) \neq 0.$$

But

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},E) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ann}_R(E) \subseteq \mathfrak{m},$$

这等价于 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}_R(E)$。因此

$$w\text{-}\mathrm{Max}(R) \subseteq \mathrm{Supp}_R(E).$$

(2)⇒(1)。假设

$$\mathrm{Ann}_R(E) \subseteq \mathfrak{m} \quad \text{for every } \mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R).$$

Then

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},E) \neq 0 \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R),$$

因此

$$\hom_w(R/\mathfrak{m},E) \neq 0 \quad \text{for all } \mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R).$$

根据定理 6.6， E 是 w-忠实内射的。 □

命题 6.19. (w-Ishikawa 的类似 [8, 命题 3.6]) 设 M 为一个 R-模，并设E 为一个 w-忠实内射 R-模。置

$$H \;:=\; \hom_w(M,E).$$

那么：

(1) M 是 w-平坦的，当且仅当 H 是 w-内射的；这又当且仅当 H 是一个内射 R-模。(2) M 是 w-忠实平坦的，当且仅当 H 是 w-忠实内射的。

证明。 我们首先建立 w-张量–Hom伴随：对于每个 R-模 X ，存在一个自然同构

$$(\dagger)\qquad \hom_w\big(X\otimes_R^w M,\,E\big)\;\cong\;\hom_w\big(X,\,\hom_w(M,E)\big)\;=\;\hom_w(X,H).$$

事实上，由于

$$X\otimes_R^w M = L(X\otimes_R M)\quad\text{and}\quad \hom_w(A,B)=\mathrm{Hom}_R(L(A),L(B)),$$

我们计算得

$$\begin{aligned}\hom_w\big(X\otimes_R^w M,E\big)&=\mathrm{Hom}_R\big(L(X\otimes_R M),L(E)\big)\\&\cong\mathrm{Hom}_R\big(X\otimes_R M,L(E)\big)\\&\cong\mathrm{Hom}_R\big(X,\mathrm{Hom}_R(M,L(E))\big)\\&\cong\mathrm{Hom}_R\big(L(X),\mathrm{Hom}_R(M,L(E))\big)\\&\cong\mathrm{Hom}_R\big(L(X),\mathrm{Hom}_R(L(M),L(E))\big)\\&=\hom_w(X,H).\end{aligned}$$

L(–)的函子性以及经典张量–Hom 伴随保证了自然性。

(1) 首先假设 M 是 w-平坦的。那么函子

$$U(-)\;:=\;-\otimes_R^w M$$

是正合的。由于 E 是 w-内射的，函子

$$V(-)=\hom_w(-,E)$$

是正合的。因此复合函子 $V\circ U$ 是正合的。由 (†),

$$V(U(X))\cong\hom_w(X,H)$$

for 对所有 X均成立。因此函子 $X\mapsto \mathbf{hom}_w(X,\;H)$ 是正合的，这意味着 H 是 w-内射的 e.

反过来，假设 H 是 w-内射的。那么 $X\mapsto \mathbf{hom}_w(X,\;H)$ 是正合的。由 (†) ,

$$X\longmapsto\hom_w(X\otimes_R^w M,E)$$

是正合的。由于 E 是 w-忠实内射的，函子 $\mathbf{hom}_w(-,\;E)$ 是忠实正合的。因此,

$$X\longmapsto\hom_w(X\otimes_R^w M,E)$$

迫使

$$X\longmapsto X\otimes_R^w M$$

为正合的。因此， M 是 w-平坦的。

最后，由于 H 是一个 w-模，根据命题 6.1， H 是 w-内射的，当且仅当它作为一个 R-模是内射的。

(2) 假设 M是 w-忠实平坦的。那么 U(–) $=-\otimes_R^w M$是忠实正合的。

设 $0 \neq X \in (R,\ w)$-模。则 $U(X) \neq 0$。由于 E 是 w-忠实内射的，

$$\hom_w(U(X), E) \neq 0.$$

由（†），

$$\hom_w(X, H) \cong \hom_w(U(X), E) \neq 0.$$

因此，$\hom_w(-,\ H)$ 不湮灭任何非零对象。结合第（1）部分的正合性，这表明 H 是 w-忠实内射的。

反之，假设 H 是 w-忠实内射的。令 $0 \neq X \in (R,\ w)$-模。则

$$\hom_w(X, H) \neq 0.$$

由（†），

$$\hom_w(X \otimes_R^w M, E) \neq 0.$$

由于 E 是 w-忠实内射的，$\hom_w(Y,\ E) \neq 0$ 意味着 $Y \neq 0$。因此

$$X \otimes_R^w M \neq 0 \quad \text{for all } 0 \neq X.$$

结合第（1）部分的 w-平坦性，这表明 $U(-)$ 是忠实正合的。因此，M 是w-忠实平坦的。□

定理6.20。（w-Ishikawa 的 [8, 定理41]的类似物) 设 E 是一个 w-内射 w-模。对于 R 的每个理想 A，置

$$A^* := 0{:}_E A = \{\, q \in E \mid Aq = 0 \,\}, \qquad A^{**} := 0{:}_R A^* = \{\, r \in R \mid rA^* = 0 \,\}.$$

以下条件等价。

(1) E 是 w-忠实内射的。(2) 对于 R 的每个真 w-理想 I，$I = I^{**}$。(3) 对于每个 $\mathfrak{m} \in w\text{-}\mathrm{Max}(R)$，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{**}$。

证明。 由于 E 是 w-内射的，反变函子

$$V(-) := \hom_w(-, E)$$

是正合的。

步骤 *0*：循环同一化。 对每个理想 $I \lhd R$，存在一个典范同构 m

$$(\ddagger) \qquad \mathrm{Hom}_R(R/I, E) \xrightarrow{\sim} I^*, \qquad f \longmapsto f(\overline{1}),$$

其逆映射将 $q \in I^*$ 映到映射 $R/I \to E,\ r \mapsto rq$。因此

$$I^{**} = 0_R : I^* = \{\, r \in R \mid rI^* = 0 \,\}.$$

若 I 是 w-理想，则 R/I 是GV-无挠的。由于 E 是 w-模，我们得到

$$(\star) \qquad \hom_w(R/I, E) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, E) \cong I^*.$$

(1)⇒(2) 设 I 为真 w-理想。包含关系 $I \subseteq I^{**}$ 由定义恒成立 n.

假设 $I \subsetneq I^{**}$。选取 $r \in I^{**} \setminus I$，从而 $r \neq 0$ 属于 R/I。

由于 E 是 w-忠实内射的，定理 6.6（循环检验）给出

$$\hom_w(R/I, E) \neq 0.$$

因此，根据（$\star$），存在 $q \in I^*$，使得 $q \neq 0$。等价地，存在 $h \in \mathrm{Hom}_R(R/I,\ E)$，使得 $q = h(\overline{1}) \neq 0$。

Then

$$h(\overline{r}) = rh(\overline{1}) = rq.$$

由于 $r\neq 0$ 和 $h\neq 0$，我们可以选择 h，使得 $h(r)\neq 0$。因此 $rq\neq 0$，这与 $r\in I^{**}=0_R:I^*$ 矛盾。

因此 $I^{**}\subseteq I$，从而 $I=I^{**}$。

(2)⇒(3) 取 $I=\mathfrak{m}$ 为 $\mathfrak{m}\in w\text{-Max}(R)$ 即得。

(3)⇒(1)

固定 $\mathfrak{m}\in w\text{-Max}(R)$。若 $\mathfrak{m}^{**}=\mathfrak{m}$，则必有 $\mathfrak{m}^*\neq 0$；否则 $\mathfrak{m}^*=0$ 将给出

$$\mathfrak{m}^{**}=0_R:\mathfrak{m}^*=R,$$

这与 $\mathfrak{m}^{**}=\mathfrak{m}\neq R$ 矛盾。

因此

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},E)\ \cong\ \mathfrak{m}^*\ \neq\ 0.$$

由于 $R/\mathfrak{m}$ 是GV-无挠的（因为 $\mathfrak{m}$ 是一个 w-理想），我们得到

$$\hom_w(R/\mathfrak{m},E)=\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},E)\neq 0\qquad \text{for all } \mathfrak{m}\in w\text{-Max}(R).$$

根据定理 6.6，这种循环非消失等价于 E的 w-忠实单射性 . □

命题 6.21. 设 R 是以 Q为分式域的整环，并设 $\mathfrak{m}\in w\text{-Max}(R)$。假设 $R_{\mathfrak{m}}$ 是离散赋值环（等价地，具有主极大理想的秩一赋值整环）。

则 $R_{\mathfrak{m}}$-模 $Q/R_{\mathfrak{m}}$ 是忠实内射的。特别地，

$$E^{(w)}\ :=\ \prod_{\mathfrak{m}\in w\text{-Max}(R)}\big(Q/R_{\mathfrak{m}}\big)$$

是一个 w-泛内射 R-模。

因此，对于每个非零理想 $I\lhd R$ 以及每个 $\mathfrak{m}\in w\text{-Max}(R)$，*Matlis* 评价映射

$$\theta:\ R_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}\ \longrightarrow\ \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}\big(\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(R_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}},\,Q/R_{\mathfrak{m}}),\,Q/R_{\mathfrak{m}}\big),\qquad a\longmapsto(\varphi\mapsto\varphi(a)),$$

是内射的。

证明。 固定 $\mathfrak{m}\in w\text{-Max}(R)$，并将 $Q/R_{\mathfrak{m}}$ 视为一个 $R_{\mathfrak{m}}$-模。

由于 $R_{\mathfrak{m}}$ 是离散赋值环，因此它是主理想整环。在主理想整环上，剩余域的内射包同构于 $Q/R_{\mathfrak{m}}$，且 $Q/R_{\mathfrak{m}}$ 是可除的。因此，根据经典 Matlis 理论， $Q/R_{\mathfrak{m}}$ 是 $R_{\mathfrak{m}}$上的内射余生成元。

特别地，对于每个非零理想 $J\lhd R_{\mathfrak{m}}$，有

$$\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(R_{\mathfrak{m}}/J,\,Q/R_{\mathfrak{m}})\ \neq\ 0,$$

这表明 $Q/R_{\mathfrak{m}}$ 作为一个 $R_{\mathfrak{m}}$-模是忠实内射的。

现在定义

$$E^{(w)}\ :=\ \prod_{\mathfrak{m}\in w\text{-Max}(R)}(Q/R_{\mathfrak{m}}).$$

每个 $Q/R_{\mathfrak{m}}$ 都是整环 R 上的可除模，因此作为 R-模是内射的。因此，作为内射 R-模的乘积， $E^{(w)}$ 在 R 上是内射的。

对于每个 $\mathfrak{m}\in w\text{-Max}(R)$，我们有

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},\,E^{(w)})\ \cong\ \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}},\,Q/R_{\mathfrak{m}})\ \neq\ 0.$$

因此，每个 w-极大理想都属于 $E^{(w)}$ 的支撑。根据推论 6.18， $E^{(w)}$ 是 w-泛内射的。

最后，令 $0 \neq I \lhd R$ 并固定 $\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(R)$。在局部环 $R_{\mathfrak{m}}$ 上，$Q/R_{\mathfrak{m}}$ 的忠实单射性意味着，对于每个非零元素 $a \in R_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}$，都存在

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(R_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}, Q/R_{\mathfrak{m}}) \quad \text{with} \quad \varphi(a) \neq 0.$$

因此 $\theta(a) \neq 0$，所以 Matlis 评价映射 θ 是内射的。 □

资助。H. Kim 获得了通过韩国国家研究基金会（NRF）提供的基础科学研究计划资助，该计划由教育部资助（2021R1I1A3047469）。

References

[1] F. W. Anderson、K. R. Fuller，《 *Rings and Categories of Modules*》，第2版，《数学研究生教材》第13卷，施普林格出版社，纽约，1992年。[2] H. X. Chen、J. S. Hu，《Resolving dualities and applications to homological invariants》，*Canad. J. Math.* **77** （2025年），第6期，1861–1889。[3] L. W. Christensen、F. K¨oksal、L. Liang，《无界复形的Gorenstein 维数与基变换》（附D. Bennis的附录），*Sci. China Math.* **60** （2017年），401–420。[4] S. El Baghdadi、H. Kim、F. G. Wang，《Pr

¨ v *Comm. Algebra* ufer -乘法 **42** 2014 298
整环上的内射模》，（），第1期，286–。[5] E. E. Enochs、O. M. G. Jenda，《 *Relative Homological Algebra*》，第1卷，第2次修订扩充版，《德格鲁伊特数学论丛》第30卷，Walter de Gruyter，柏林，2011年。[6] L. Fuchs、L. Salce，《 *Modules over Non-Noetherian Domains*》，《数学调查与专著》第84卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2001年。[7] J. S. Golan，《 *Torsion Theories*》，《Pitman纯粹与应用数学专著及调查》第29卷，朗文科技，哈洛，1986年。[8] T. Ishikawa，《忠实正合函子及其在投射模和内射模中的应用》，*Nagoya Math. J.* **24** 1964 29 42 （），–。

[9] L. Keenan，《THH上的May滤过与忠实平坦下降》，*J. Pure Appl. Algebra* **229** （2025年），第1期，文章107806，30页。[10] H. Kim、J. W. Lim、D. C. Zhou，《 τ_w-Loewy模及其应用》，*Bull. Korean Math. Soc.* **56** （2019年），第6期，1617–1642。[11] H. Kim、F. G. Wang，《 w-诺特环上的内射模的局部化》，*Bull. Korean Math. Soc.* **50** （2013年），第2期，475–483。[12] H. Kim、F. G. Wang，《关于LCM稳定模》，*J. Algebra Appl.* **13** （2014年），第4期，1350133，18页。[13] Y. Mikami，《通过凝聚数学研究刚性解析簇上拟凝聚复形的忠实平坦下降》，*Int. Math. Res. Not.* （2024年），第8期，7099–7128。[14] L. Qiao、F. Wang，《

w *J. Sichuan Norm. Univ. Nat. Sci.* **38** 2015 4, 481 486 -模范畴上的两个函子及其应用》，（），第–期。[15] L. Qiao、K. Zuo，《交换环上模相对于遗传挠理论的正则性》，*J. Korean Math. Soc.* **59** 2022 4, 821 841 （），第–期。[16] B. Stenstr¨om，《 *Rings of Quotients*》，施普林格出版社，柏林，1975年。[17] R. G. Swan，《 *Algebraic K-Theory*》，施普林格出版社，柏林，1968年。[18] F. G. Wang、R. L. McCasland，《强Mori整环上的

w 1997 4, -模》，*Comm. Algebra* **25** （），第–期。[19] F. G. Wang、H. Kim，《 1285 1306

w w 2014 3, -内射模与-半遗传环》，*J. Korean Math. Soc.* **51** （），第–期。[20] F. G. Wang、H. Kim，《投射模的两个推广及其应用》，*J. Pure Appl. Algebra* **219** 2015 2123 （），第509 525
6期，2099–。[21] F. G. Wang、H. Kim，《 *Foundations of Commutative Rings and Their Modules*》，第2版，《代数与应用》第31卷，施普林格出版社，新加坡，2024年。[22] F. G. Wang、L. Qiao，《交换环的 w-弱整体维数》，*Bull. Korean Math. Soc.* **52** （2015年），第4期，1327–1338。[23] F. G. Wang、L. Qiao，《Krull整环的同调刻画，II》，*Comm. Algebra* **47** （2019 5，1917 1929 ），第–期。

[24] F. G. Wang、L. Qiao, 《长田环与模的两个应用》, *J. Algebra Appl.* **19** （2020 6, 2050115, 15 ）, 第[25] 期。F. G. Wang、L. Qiao, 《Kaplansky 定理的新版本》, *Comm. Algebra* **48** （2020年）, 3415–3428。[26] F. G. Wang、D. C. Zhou, 《Krull整环的同调刻画》, *Bull. Korean Math. Soc.* **55** （2018年）, 第2期, 649–657。[27] X. Y. Wu, 《 iw-分裂模》, *Bull. Korean Math. Soc.* **61** （2024年）, 第5期, 1241–1252。[28] S. Q. Xing、F. G. Wang, 《Pr
¨ v 2018 6, 1850100, ufer -乘法
11
整环上的纯性》, *J. Algebra Appl.* **17** （ ）, 第期, pp。[29] S. Q. Xing、F. G. Wang, 《Pr
¨ v 2018 12, ufer -乘法
1850223, 11
整环上的纯性, II》, *J. Algebra Appl.* **17** （ ）, 第期, pp。[30] S. Q. Xing, 《
w 2025 11, -忠实平坦
4676, 4683
模的同调刻画》, *Comm. Algebra* **53** （ ）, 第–期。[31] M. Zafrullah, 《应用
t *Non-Noetherian Commutative Ring* -可逆性》,
Theory 520, 2000, 429 457
载于: S. T. Chapman等（编）, 《》, 《数学及其应用》, 第Kluwer Academic Publishers卷, Kluwer Academic
Publishers, 多德雷赫特, 第–页。[32] X. L. Zhang、H. Kim, 《Pr
¨ v *Bull. Iranian Math.* ufer -乘法
Soc. **52** 2026 10 1007 41980 026 01035
整环的模论刻画》, （ ）, 第12期, https://doi.org/ 。/s - - 。[33] X. L. Zhang、F. G. Wang、W. Qi, 《
w 2020 11, -相容环的
4681, 4697
刻画》, *Comm. Algebra* **48** （ ）, 第–期。[34] X. L. Zhang、F. G. Wang, 《
w 2021 9, -相容环的
3926, 3940
刻画, II》, *Comm. Algebra* **49** （ ）, 第–期。[35] D. C. Zhou、H. Kim、W. Zhao、K. Hu, 《交换环上的 w-泛内射模及其应用》, *Czechoslovak Math. J.* **75** （2025年）, 第3期, 915–932。
(Zhang) School of Mathematics and Statistics、 Tianshui Normal University、 Tianshui 741001、 China*Email address*: zxlrghj@163.com
(Qiao) School of Mathematical Sciences、 Sichuan Normal University、 Chengdu, 610066, China
Email address: lqiao@sicnu.edu.cn(Kim) Division of Computer & Information Engineering、 Hoseo University、 Asan 31499、 Republic ofKorea*Email address*: hkkim@hoseo.edu