arXiv:2603.00984v1 [quant-ph] 1 Mar 2026

存在信号传递时测量贝尔非定域性

Mark Broom,[1] Talel Naccache,[1] Emmanuel M. Pothos,[1] Christoph Gallus,[2] 和 Pawel Blasiak[3],*[1]
伦敦城市圣乔治大学，伦敦 *EC1V 0HB*，英国[2]中黑森应用技术大学，德国吉森 *D-35390*[3]波兰科学院核物理研究所，波兰克拉科夫 *31342*

科学探究旨在为观测到的现象寻找因果解释。贝尔实验提供了一个典范案例，揭示了空间分离系统之间的相关性，而任何局域模型都无法重现这种相关性。这类相关性称为贝尔非定域性，通常在无信号假设下进行分析；该假设要求局域统计数据不受远距离测量选择的影响。然而，真实实验以及物理学以外的应用往往涉及信号传递，这引出了一个问题：在不受这一约束的情况下，应如何刻画非局域性？我们提出一种通用方法，用于量化存在信号传递时的贝尔非定域性，其设计原则是尽可能少地放宽局域性。我们的方法围绕这样一个问题展开：在解释观测关联时，重复试验中有多少次能够保持局域性？这一任务可归结为将观测关联凸分解为局域成分与真正非局域成分，并求出最优分解。我们在线性规划框架内求解这一问题，得到适用于任意相关性的闭式解。我们进一步评估了相应的信号传递度量，展现了该方法的普适性以及结果的非平凡特征。通过将非局域性的概念扩展到无信号区域之外，我们的框架重塑了物理学实验分析的基础，并提供了可应用于物理学以外领域的工具。

引言

科学的核心在于揭示观测现象中的因果关系，而贝尔不等式所揭示的相关性，正是对这一追求的一项尤为严格的检验。 [1, 2]这些不等式最初是在物理学背景下提出的，它们挑战了关于自然运作方式的根深蒂固的假设，并表明局域性无法与量子力学的统计预言并存。在过去几十年里，日益精密的实验证实了这些不等式遭到违反，从而确立了贝尔非定域性是物理实在的内在特征。[3–9], 与此同时，这也为现代量子信息科学及其应用开辟了道路。这是跨学科更广泛的因果发现范式中的一个典型例子。 [10–15]本文将扩展原始贝尔框架，为分析各种可能物理背景及物理学之外应用中的贝尔类情景提供统一基础。

贝尔非定域性主要在无信号区域内得到研究，在这一框架中，一方的局域统计数据独立于另一方所作的测量选择 [16–18]。这一假设植根于传统的空间分离系统情境，在这种情境下，标准量子力学意味着参与方之间无法进行超光速通信。然而，有充分理由超越这一框架。首先，真实实验很少能做到完全无信号，设计上的不完美因素和噪声会导致不可避免的偏差 [19, 20]。这有时会让分析显得牵强，因为仅凭信号传递就足以证明非局域性，这凸显了需要建立一个统一框架，以平等对待所有条件。其次，并非所有物理学基本检验都依赖空间分离，时间场景 [21–24]或工具性检验 [25–27] 便是一些典型例子。在这些情形下，扰动是意料之中的，这进一步凸显了采用统一方法、一贯纳入有效信号传递的必要性。第三，在物理学以外的应用中——例如贝叶斯网络、流行病学、社会系统、计量经济学和认知研究——信号传递往往是设计本身固有的，因此，标准的贝尔无信号框架过于严格 [28–30]。因此，亟需一个更广泛的框架，使贝尔非定域性的研究能够与物理应用及其他科学领域中的一般因果发现范式相契合 [10–15], ；在这些领域中，信号传递往往是内在存在的，不能仅凭原则性理由将其排除。

本文研究不要求无信号条件的贝尔非定域性，并量化即使存在信号传递，局域性在多大程度上仍能解释观测行为。我们的方法由一个简单的问题引导：



我们将其称为（分数）局域性度量，或简而言之称为定域分数，因为它反映了可接受局域解释的实验试次所占的比例；参见 [31–37]。

请注意，将答案简化为“总是”与“有时”之间的粗略区分，会让我们回到贝尔最初的问题：观测统计数据是局域的还是非局域的？这个二元检验可由标准

判据：当且仅当相关性满足无信号条件且满足贝尔-*CHSH*不等式时，它们才具有局域解释 [38, 39]。不过，我们在此更进一步，引入一种定量测度，用以刻画观测关联偏离局域性的程度。至关重要的是，该测度提供了一种直接量化非局域性的方法，无需任何额外假设。如此一来，我们超越了文献 [37], 的范围，从而为超越无信号假设的非局域性定量框架奠定基础，并为理论和实验方面的进展开辟新的途径。

我们的结果为双设置、双结果贝尔情景中的任意相关性给出了闭式解。其核心挑战在于，计算给定行为到局域多面体的一个非平凡几何距离；该多面体由凸分解构造，并受可容许行为空间的约束。在一般情形下，允许存在信号传递时，这些约束可简化为简单的归一化条件。从几何角度来看，我们证明，该问题可归结为计算给定行为与一组特定向量的标量积，这些向量将观测行为投影到关联空间中的相关方向上。我们用前缀标明这些算子所属的类别，例如*f*向量或*e*向量，并将相应的接近度量称为*f*度量等。这种表示形式便于直接进行计算实现。总结见图1。

通过与一种量化信号程度的类似测度进行比较，可以部分展现该方法的适用范围和实用价值。仿照局域分数，我们定义一个量来刻画观测行为中无信号性的程度，称为（分数型）无信号性度量，简称无信号分数。这一表述将问题置于更广阔的背景之中，凸显了解的结构丰富性，并为比较分析提供了清晰的框架。最后，我们展示了解中各组成部分不可或缺的作用，并分析行为示例数据集，以说明解集中的各个元素在多大程度上实现了局域分数或无信号分数。

结果

贝尔情景、局域性与无信号

考虑最简单的贝尔情景，其中两方——爱丽丝和鲍勃对空间上彼此分离的系统进行测量。在每次试验中，爱丽丝从两种测量设置中选择一种$x \in \{0,1\}$，鲍勃也从两种设置中选择一种$y \in \{0,1\}$，并分别得到结果a和$b \in \{0,1\}$。重复实验多次后，会产生统计数据，从而定义四个条件分布 $\{P_{ab|xy}\}_{xy=00,01,10,11}$，其中$P_{ab|xy}$表示在给定测量选择$x$、$y$的情况下，得到结果$a$、$b$ 的概率。我们将这一完整集合称为行为，并用由十六个分量组成的向量 $\vec{P} \equiv (P_{ab|xy})$简洁地表示。一般而言，只要行为非负，即 $\vec{P} \geqslant 0$，且对每个x、y均正确归一化 $\sum_{ab} P_{ab|xy} = 1$，就是可接受的。所有此类行为构成关联（或行为）空间，记作 $\mathcal{P}$。

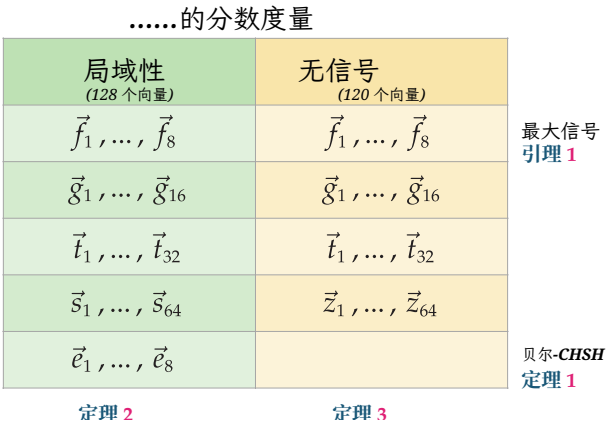

图 1。 **结果概述**。 分数度量 反映了在特定解释框架内仍可理解的实验试次所占比例，无论该框架是局域还是无信号。我们对其进行显式计算，并表明结果可表示为若干更简单线性度量中的最小值，每个度量都由一个向量表示，该向量将观测统计数据投影到相关性空间的相应方向上。因此，表格列出了各项度量对应的向量集合，其中 128个向量规定了局域分数(**定理 2**)，而 120 个向量规定了无信号分数(**定理 3**)。值得注意的是，这些向量无一可以省略，其中一些对应于熟悉的量：特别是，*f*向量对应于最大信号传递（**引理1**），而*e*向量与贝尔-CHSH表达式相符（**定理 1**）。

引入物理约束后，贝尔情景会展现出尤为深刻的意义。具体而言，通常认为空间分离可排除爱丽丝与鲍勃之间任何直接的因果影响。在这种观点下，观测关联（即行为）被归因于过去的某个共同原因，并由一个隐变量表示 λ （图 2，左）。这一原则称为（贝尔）局域性假设，其形式化表达为因子分解条件 [1, 2, 16–18]

$$P_{ab|xy} = \sum_{\lambda} P_{a|x\lambda} \cdot P_{b|y\lambda} \cdot P_{\lambda} \,. \tag{1}$$

通常，这一条件是基于因果依据来论证的；不过，就我们的目的而言，将其视为纯粹的统计约束也已足够。[1]

[1] 对于一场 d 关于贝尔定理所依据假设的详细讨论 尔的理论

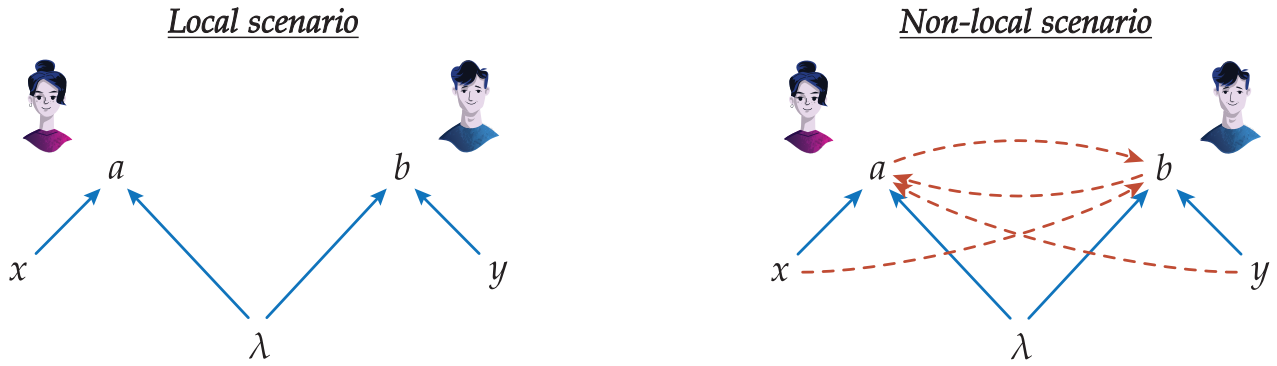

图 2。**贝尔实验的因果解释**。两位参与方爱丽丝和鲍勃在空间上彼此分离的位置进行实验。对于每一对自由选择的测量设置x和y，他们分别得到结果a和b，从而产生观测统计数据$\{P_{ab|xy}\}_{xy}$。假设原因只能沿时间向前传播，此类统计数据可以用有向无环图（*DAG*）描述，其中节点表示测量设置、结果或共享变量，箭头表示潜在的因果关系。左侧的因果有向无环图描绘了这样一种情形：局域性条件排除了参与方之间的任何直接因果影响，因此相关性只能源于过去的某个共享共同原因，以λ表示。右侧存在任何红色箭头，都表示直接因果影响，因而构成对局域性假设的违反。尽管局域情形无法重现任意相关性$P_{ab|xy}$，但在非局域情形中允许红色箭头——其可能在每一次实验试次中都处于激活状态——便可以产生任意行为。在本工作中，我们研究贝尔实验中观测到的相关性在多大程度上可以通过最小程度地放宽局域性来解释，也就是说，在重复试验中尽可能少地引入非局域（红色）箭头。

施加局域性与允许直接影响并放宽该假设的情形形成鲜明对比（图2，右）。核心问题是，能否仅凭观测数据区分这两种解释——局域与非局域——而无需获取隐变量λ。事实证明，局域性假设对观测行为$\vec{P}$施加了一组可检验的约束。

首先，相关性必须满足无信号条件。这要求爱丽丝无法仅凭自己一侧的统计数据推断鲍勃的测量选择（$y = 0$或1）；同样，鲍勃也无法凭自己的统计数据推断爱丽丝的选择（$x = 0$或1）。形式上，这些要求可归结为四个独立性条件，用以规定一侧的边缘概率如何依赖另一方的测量选择。这些条件可以简洁地表示为对所谓的最大信号传递的一项约束

$$\Delta := \max_{i=1,\dots,4} |\Delta_i| = 0, \tag{2}$$

其中

$$\Delta_1 = P_{a=0|00} - P_{a=0|01} \qquad [\text{Bob} \to \text{Alice}_{x=0}], \tag{3}$$
$$\Delta_2 = P_{a=0|10} - P_{a=0|11} \qquad [\text{Bob} \to \text{Alice}_{x=1}], \tag{4}$$
$$\Delta_3 = P_{b=0|00} - P_{b=0|10} \qquad [\text{Alice} \to \text{Bob}_{y=0}], \tag{5}$$
$$\Delta_4 = P_{b=0|01} - P_{b=0|11} \qquad [\text{Alice} \to \text{Bob}_{y=1}], \tag{6}$$

其中，$P_{a=0|xy} = \sum_b P^{0b|xy}$和$P_{b=0|xy} = \sum_a P^{a0|xy}$分别表示在爱丽丝和鲍勃一侧观测到的边缘概率。要求所有Δ_i均为零（或等价地，$\Delta = 0$）可确保双方都无法从各自的局域统计数据中提取有关对方测量选择的任何信息。

其次，相关性必须满足四个贝尔-*CHSH*不等式 [38]，，其紧凑形式为

$$S := \max_{i=1,\dots,4} |S_i| \leqslant 2, \tag{7}$$

其中四个线性*CHSH*表达式定义为

$$S_1 = \langle ab\rangle_{00} + \langle ab\rangle_{01} + \langle ab\rangle_{10} - \langle ab\rangle_{11}, \tag{8}$$
$$S_2 = \langle ab\rangle_{00} + \langle ab\rangle_{01} - \langle ab\rangle_{10} + \langle ab\rangle_{11}, \tag{9}$$
$$S_3 = \langle ab\rangle_{00} - \langle ab\rangle_{01} + \langle ab\rangle_{10} + \langle ab\rangle_{11}, \tag{10}$$
$$S_4 = -\langle ab\rangle_{00} + \langle ab\rangle_{01} + \langle ab\rangle_{10} + \langle ab\rangle_{11}, \tag{11}$$

且$\langle ab\rangle_{xy} = \sum_{a,\,b} (-1)^{a+b} P^{ab|xy}$表示给定测量选择$x$、$y$时的相关系数。请注意，虽然不存在局域性时的代数最大值为$S = 4$，但局域性假设将其界限制为$S \leqslant 2$。值得注意的是，正如贝尔所证明的 [1, 2]，，量子力学允许超出局域界的相关性，其上限可达齐雷尔森界$S = 2\sqrt{2}$ [43]。

orem，参见例如文献 [40]。为清晰起见，我们采用图中所示的传统因果方法 2 （左）。不过，我们要强调的是，我们的分析仅依赖于公式（1）中的因子分解条件，该条件定义了局域多面体$\mathcal{P}_{Loc}$——这是本文研究的核心对象。从这个角度看，因果概念在本文中仅起辅助（或说明性）作用。关于其他假设的讨论，参见文献 [37, 41]；关于贝尔不等式所依据假设的另一种纯概率分析，参见文献 [42]。

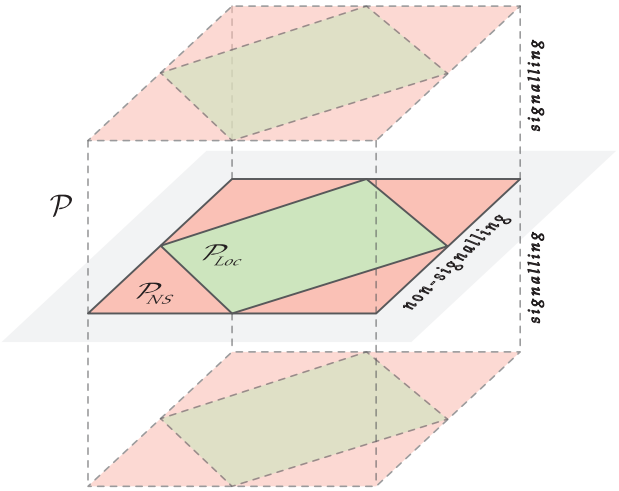

图 3. **行为几何**。 $\mathbb{R}^{16}$中嵌入的凸多面体嵌套结构示意图。每次放宽约束都会扩大集合：从局域多面体 $\mathcal{P}_{Loc}$ （8 维）到非信号多面体 $\mathcal{P}_{NS}$ （8 维），最终扩展到完整的关联空间（多面体）$\mathcal{P}$ （12 维）。

几何图景与 Fine 定理

根据 *Fine* 定理 [39], 行为 $\vec{P}$ 满足式（1）的局域隐变量模型，当且仅当它同时满足式（2）中的无信号条件和式（7）中的贝尔-CHSH不等式。违反这些条件中的任何一项，都排除了纯粹共同原因的解释，此时非局域机制成为唯一可行的解释。见图 2 （左图与右图）。

换言之，局域多面体 $\mathcal{P}_{Loc}$ 由一组线性约束完全刻画

$$\mathcal{P}_{Loc} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta = 0, \\ S \leqslant 2, \end{cases} \tag{12}$$

该组约束由四个等式和八个不等式构成。类似地，非信号多面体 $\mathcal{P}_{NS}$ 由四个等式约束刻画

$$\mathcal{P}_{NS} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = 0\,. \tag{13}$$

由此得到完整关联空间（多面体） $\mathcal{P}$的两个非平凡子集，构成自然的层级结构

$$\mathcal{P}_{Loc} \subsetneq \mathcal{P}_{NS} \subsetneq \mathcal{P} \subsetneq \mathbb{R}^{16}\,. \tag{14}$$

参见图3 以作说明。请注意，这些多面体也可以等价地通过其顶点来刻画： $\mathcal{P}_{Loc}$ 由以下各项生成：16个局域确定性策略 [39],$\mathcal{P}_{NS}$ 还包括8个外部 PR盒顶点 [44]，而 $\mathcal{P}$ 则由全部256 个确定性策略张成。详细说明见**方法**部分。

测量局域性与无信号性

当局域性无法维持时——尤其是当这有悖于直觉时——自然的问题不只是观测关联是否存在局域解释，而是必须在多大程度上诉诸非局域机制。若怀疑信号传递可能导致表面上的局域性违背，这个问题就尤为重要。

在以下讨论中，我们将非局域性视为一种特殊资源，仅在解释观测关联所必需时才调用；而如图 2 左侧所示，我们假定共同原因可自由获取，作为常规的相关性来源。这一观点自然促使我们将非局域性视为对主要由局域含量构成的部分的一种（可能很小的）修正。具体而言，对于给定的感兴趣行为 $\vec{P}$，我们因此考虑所有形如以下的可能凸分解

$$\vec{P} \;=\; p\cdot\vec{P}^{\,L} + (1-p)\cdot\vec{P}^{\,NL}\,, \tag{15}$$

其中 $\vec{P}_L \in \mathcal{P}_{Loc}$是局域行为， $\vec{P}_{NL} \in \mathcal{P}$是任意其他（可能是非局域的）行为，而 $0 \leqslant p \leqslant 1$。我们的目标是确定局域成分可能达到的最大贡献。

定义 1 （局域性度量）。
对于给定的观测行为$\vec{P}$的测度定义为

$$\mu_L(\vec{P}) \;:=\; \max_{\text{decomp. (15)}} p\,, \tag{16}$$

其中，最大值取遍式（15）所示形式的所有凸分解。

有时也称为行为 $\vec{P}$ 的定域分数 或局域内容，这一概念最初是在量子关联研究中提出的 [31–36]，随后扩展到任意无信号统计数据 [37]。[2] 在这项工作中，我们摒弃先前的假设，建立一个不受约束的框架，用以量化观测统计数据可在多大程度上由局域解释说明。

[2] 这一思想最早在参考文献 [32], 中提出，并用于推导贝尔不等式。与此同时，Elitzur 等人 [31]将其引入作为局域性度量，并证明当测量设置数量趋于无穷时，局域分数趋于零；参考文献 [33–35]进一步对其进行了完善。值得注意的是，后续研究成功地明确计算出任意纯双量子比特态的量子统计数据所对应的局域分数 [36]。重要的是，这一概念也适用于量子力学之外：在双方各有两个测量设置、每个设置有两个结果的贝尔情景中，参考文献 [37]证明，在无信号假设下，局域分数与贝尔-CHSH不等式的违背程度直接相关，参见**定理1**。

局域性度量 μ_L 的一个显著优点在于其直观的解释，具体如下：

问题 (局域性)

在重复贝尔实验中，最多有多大比例的试次可以由局域模型解释，同时仍能重现观测关联？

当然，在其余比例的试次中，必然需要某种形式的非局域机制参与。我们关注的并非具体的机制，因为非局域性的表现形式可能因实验情境而异，甚至可能仍然未知。重要的是，仍然可以清晰且有意义地提出这样一个问题："非局域性至少必须出现多频繁？"

为证明这种方法具有普适性，也可以对其进行调整，以量化给定行为中存在的信号传递程度。具体而言，可以通过考察以下形式的凸分解来刻画 $\vec{P}$ 的信号传递内容：

$$\vec{P} \;=\; p\cdot\vec{P}^{NS} + (1-p)\cdot\vec{P}^{S}, \tag{17}$$

其中，$\vec{P}_{NS}\in\mathcal{P}_{NS}$ 是无信号行为，$\vec{P}^{S}\in\mathcal{P}$ 是任意其他（可能有信号传递的）行为，且 $0\leqslant p\leqslant 1$。与局域情形直接类比，我们定义：

定义 2（无信号性度量）。
对于给定的观测行为，信号分量的度量定义为

$$\mu_{NS}(\vec{P}) \;:=\; \max_{decomp.\,(17)} p\,, \tag{18}$$

其中，最大值是在式（17）所示形式的所有可能凸分解中取到的。
类似地，这也可称为行为 $\vec{P}$ 的无信号比例 或无信号内容。这种情况也有一个简单的解释。如果把信号传递视为一种昂贵资源，那么无信号性度量 μ_{NS} 回答的是以下问题：[3]

问题（无信号）

在重复贝尔实验中，为了重现观测关联，最多有多大比例的试验可以由无信号统计数据解释？

总之，度量 μ_L 和 μ_{NS} 提供了一个统一的操作框架，用于量化重现观测行为时，非局域资源和信号资源的不可或缺程度。在这一框架下，我们推导出双设置、双结果贝尔情景中任意（可能存在信号传递的）相关性一般情形的显式表达式。

[3] 我们注意到，尽管局域性和信号传递都可以通过方程（1）和（2）进行统计定义，但只有局域性允许更深入的因果解释。这一区别带来了一个微妙的侧重点转变：对于局域性，可以探讨是否存在部分局域模型；而对于非局域性，则只能探讨是否存在适当的统计分解。参见脚注 1。

主要结果

首先，我们回顾参考文献 [37]中关于无信号统计的一项结果，并以适合本文目的的形式呈现。为使论述清晰，下文讨论中提及的所有证明和具体向量均在**补充信息**（另见**方法** 部分）中明确给出。

定理1。
给定一个无信号行为 $\vec{P}$，在双设置、双结果贝尔实验中，其局域性度量与贝尔-*CHSH*表达式方程(7)和(8-11)相关，其形式为

$$\mu_L(\vec{P}) \;=\; \min\left\{1\,,\tfrac{1}{2}(4-S)\right\} \;=\; \min_{i=1,\ldots,8}\left\{1\,,\,\vec{e}_i^{\,T}\cdot\vec{P}\right\}, \tag{19}$$

其中 $\vec{e}_i$ 是 $\mathbb{R}^{16}$ 中 *8* 个特定的向量，每个向量的元素仅限于 *0* 或 *1*（称为 *e*向量）。

这为无信号统计中贝尔-CHSH不等式的违反程度提供了清晰的解释。在第二个等式中，我们对表达式进行了改写，以突出它与后续分析的相似之处。关键观察是，测度 μ_L 可以简洁地表示为一族由八个较简单的线性表达式构成的最小值；这些表达式是行为 $\vec{P}$ 沿关联空间中特定方向（*e*向量）的投影。实际上，每个表达式只是根据 $\vec{e}_i$ 的非零元素，选取行为 $\vec{P}$ 的某些项并将它们相加。这些和可以看作是沿关联空间中特定方向对 $\vec{P}$ 进行的简单截取。

类似地，最大信号传递可以刻画为与关联空间中特定方向（*f*向量）相关的一组简单线性表达式的最小值。

引理1.
的量
给定行为的最大信号传递 $\vec{P}$，如方程（2）和（3-6）所定义，可以写成如下形式

$$\Delta \;=\; 1-\min_{j=1,\ldots,8}\vec{f}_j^{\,T}\cdot\vec{P}\,, \tag{20}$$

其中 $\vec{f}_j$ 是 $\mathbb{R}^{16}$中的*8*个特定向量，每个向量的分量仅限于 *0*或*1*（称为*f*向量）。

我们的目标是超越贝尔场景中的无信号统计，并考虑任意行为的全部范围 $\vec{P}$。人们可能会天真地认为**定理1**便已足够，只需本着**引理1**的精神对信号传递作适度调整。然而，这一直觉被证明是误导性的。

这项工作的主要结果是给出了一个闭式表达式，用于计算**定义1**中的局域性度量。我们将在以下定理中给出该表达式。

定理2。
对于双设置、双结果贝尔实验中的给定行为 $\vec{P}$，

的形式为

$$\mu_L(\vec{P}) \;=\; \min_{\vec{q}\in\mathbb{Q}} \vec{q}^{\,T}\cdot\vec{P}\,, \tag{21}$$

其中，$\mathbb{Q}$ 表示 $\mathbb{R}^{16}$中由*128*个特定向量组成的集合，每个向量的元素仅限于*0*或*1*。

因此，完整的解遵循上述概述的结构，表现为一族更简单的线性度量中的最小值，每个度量都对应关联空间中的一个特定方向。然而，值得注意的是，该解揭示了出乎意料的复杂性，因为集合 $\mathbb{Q}$ 中的128个向量缺一不可。

将上述结果与**定义2**中的平行无信号性度量进行比较，很有启发性；这能让我们更清晰地认识问题中的底层结构。

定理3。
对于双设置、双结果贝尔实验中的给定行为 $\vec{P}$，

无信号性度量的形式为

$$\mu_{NS}(\vec{P}) \;=\; \min_{\vec{q}\in\mathbb{S}} \vec{q}^{\,T}\cdot\vec{P}\,, \tag{22}$$

其中 $\mathbb{S}$ 表示 $\mathbb{R}^{16}$中由*120*个特殊向量构成的集合，每个向量的分量仅限于*0*、*1*或*2*。

同样，解的复杂性依然存在，因为所有120个该集合中的向量 $\mathbb{S}$ 都对结果有贡献。这表明，求局域分数的挑战源于非信号空间本身错综复杂的内部结构。几何上，在考察嵌套层级即式（14）时，问题的难点在于刻画嵌入 $\mathcal{P}_{NS}\subsetneq\mathcal{P}$（**定理3**），而这又延伸到 $\mathcal{P}_{Loc}\subsetneq\mathcal{P}$（**定理2**）。相比之下，嵌入$\mathcal{P}_{Loc}\subsetneq\mathcal{P}_{NS}$（**定理1**）则简单得多，这说明更广泛的嵌入蕴含着更丰富的底层几何。

一份关于**定理2**的简洁证明通过线性规划方法获得，并概述于**方法**一节。所有证明，包括**定理3**的证明，以及所讨论向量的显式列表，均提供于**补充信息**。

解的结构

我们现在展开由集合 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{S}$所定义的解的完整结构，从而揭示该问题的复杂性、其内在对称性，以及与先前部分结果的联系。

分类。解集 $\mathbb{Q}$，与局域性度量 μ_L（**定理2**）相关，可自然划分为五类（见图1）：

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} \;=\; &\{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_8\}\cup\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_{16}\}\cup\{\vec{t}_1,\dots,\vec{t}_{32}\}\cup\\ &\{\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_{64}\}\cup\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_8\}\,.\end{aligned} \tag{23}$$

类似地，对于无信号测度 μ_{NS}（**定理3**），对应的解集 $\mathbb{S}$ 可分为四类（见图1）：

$$\begin{aligned}\mathbb{S} \;=\; &\{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_8\}\cup\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_{16}\}\cup\{\vec{t}_1,\dots,\vec{t}_{32}\}\cup\\ &\{\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_{64}\}\,.\end{aligned} \tag{24}$$

上述分组根据$\vec{\ }$其非零项的数量对向量进行组织：f有4个，$\vec{g}$有5个，$\vec{t}$、$\vec{s}$和$\vec{z}$各有6个，而$\vec{e}$有8个非零项。

值得注意的是，解集 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{S}$ 在方程（23）和（24）所述的f-、g-和t-向量上重叠。s-与z-向量之间的差异很小，因为每个s-向量与相应的z-向量仅相差将其中的一个1替换为2。本质区别在于额外的e-向量类别，它们仅出现在解集 $\mathbb{Q}$。参见方程（30）以了解每一类别的一个代表，并参见**补充信息**（A部分）以获取完整向量列表。

对称性。
本文所研究的问题在指标 a、b、x 和 y（或等价地，复合标签 $ab|xy$）的某些置换下保持不变。基本对称变换如下 [16,17]:

$$a \;\leftrightarrow\; 1-a\,, \tag{25}$$
$$b \;\leftrightarrow\; 1-b\,, \tag{26}$$
$$x \;\leftrightarrow\; 1-x\,, \tag{27}$$
$$y \;\leftrightarrow\; 1-y\,, \tag{28}$$
$$(x,a) \;\leftrightarrow\; (y,b)\,. \tag{29}$$

这些变换定义了 32 种对称性，体现了该问题的基本不变性，即无论进行结果重新标记，局域性和无信号性均保持不变 [方程(25)-(26)]，设置重新标记 [方程(27)-(28)]，以及参与方交换（爱丽丝-鲍勃对称性） [方程(29)]。这些操作共同构成了 局域多面体 $\mathcal{P}_{Loc}$和非信号多面体 $\mathcal{P}_{NS}$ 的自同构群。

利用这些对称性可以进一步简化解集。每个f-、g-和e-向量类别在由方程(25)-(29)生成的群作用下都构成一个轨道。t-向量类由两个大小为16的轨道组成，而s-和z-向量类各由三个轨道组成，其大小分别为16、16和32。各类别对应的代表向量如下所示

:

$$
\begin{aligned}
\vec{f}\,'\text{s:} \quad & \vec{f}_\alpha^{\,T} = (1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)\,, \\
\vec{g}\,'\text{s:} \quad & \vec{g}_\beta^{\,T} = (1,0,0,0,0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,0)\,, \\
\vec{t}\,'\text{s:} \quad & \begin{cases} \vec{t}_\beta^{\,T} = (1,1,0,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,1)\,, \\ \vec{t}_\gamma^{\,T} = (1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,0,0)\,, \end{cases} \\
\vec{s}\,'\text{s:} \quad & \begin{cases} \vec{s}_\beta^{\,T} = (1,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1)\,, \\ \vec{s}_\gamma^{\,T} = (1,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,0)\,, \\ \vec{s}_\delta^{\,T} = (1,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0)\,, \end{cases} \\
\vec{z}\,'\text{s:} \quad & \begin{cases} \vec{z}_\beta^{\,T} = (2,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1)\,, \\ \vec{z}_\gamma^{\,T} = (2,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,0)\,, \\ \vec{z}_\delta^{\,T} = (2,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0)\,, \end{cases} \\
\vec{e}\,'\text{s:} \quad & \vec{e}_\alpha^{\,T} = (1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0)\,,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

其中标签 α、β、γ和 δ 用于区分这些轨道，并分别表示其基数为8、16、16和32。

与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系 与先前结果的关系。更仔细的考察表明，方程(23)和(24)中解集 Q和 S 的若干分量可与一些众所周知的量相关联。具体而言，f-度量类别上的最小值与方程(2)中定义的最大信号传递Δ相吻合；见引理1。这是因为每个单独的f度量都可以用方程(3)-(6)中给出的相应信号传递特征 Δ_i 来表示；见补充信息中的方程(S24)-(S27)。因此，这些f-度量提供了非信号多面体 $\mathcal{P}_{NS}$ 的另一种刻画。同样，e 度量类别上的最小值与方程(7)中定义的最大贝尔-CHSH表达式S直接相关；见定理1及参考文献 [37]。此外，每个单独的e 度量都可以用方程(8)-(11)中给出的相应S_i 来表示；见补充信息中的方程(S29)-(S32)。这反映了将局域多面体 $\mathcal{P}_{Loc}$ 刻画为更大的非信号多面体 $\mathcal{P}_{NS}$的子集。

重要的是，所有其余类型，即g-、t-、s-和z-向量，仅在存在信号传递时才有非平凡贡献。因此，完整解揭示了比单纯的贝尔-CHSH表达式和信号传递特征（见图）丰富得多的结构。 1).

解的非冗余性。正如前文所述，方程 (23) 和 (24) 中解集里的向量都不可或缺。具体而言，对于 Q和 S中的每个向量，都存在一些行为，使得相应的测度分别在方程 (21) 和 (22) 中唯一地达到最小值。除非冗余性之外，还可以通过分析每种向量测度在多大比例的情况下

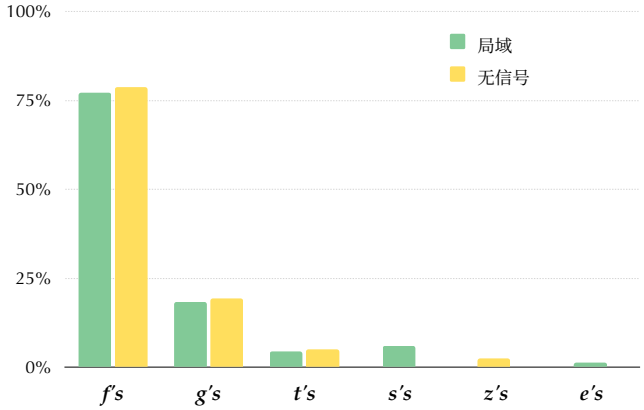

图4。 **向量测度的重要性**。 数值结果显示，在 Q（绿色）和 S（黄色）各自的子集中，每种向量类型唯一实现方程（21）和（22）中解的随机抽样行为所占比例。显然，f-度量（最大信号传递）在大多数行为中占主导地位，不过其余类型也解释了相当一部分。有趣的是，对于随机行为而言，e 度量（贝尔-CHSH表达式）最不可能对局域性的量化作出贡献，而各种形式的信号传递修正（f-、g-、t-、s-和z-度量）则发挥着更为显著的作用。

在方程 (21) 和 (22) 中，在随机采样的行为 $\vec{P}$上取得最小值。为此，我们通过数值计算估算了相应的频率，如图 4所示。结果表明，所有向量都对解有所贡献，但其出现频率存在显著差异，从而揭示了解空间的内部结构。

几何洞见。分数度量反映了观测行为 $\vec{P}$ 相对于目标集合和整个关联空间的位置，即它与局域多面体 $\mathcal{P}_{Loc}$（或非信号多面体 $\mathcal{P}_{NS}$）的距离，以及同样重要的，它与完全关联多面体 $\mathcal{P}$边界的接近程度。因此，解决这一问题需要洞察 $\mathcal{P}_{Loc}$（或 $\mathcal{P}_{NS}$）嵌入 $\mathcal{P}$ 的几何结构。值得注意的是，该任务可以表述为一个线性优化问题，而强对偶性则允许得到显式解（详情见方法部分）。也可以通过解析构造直接解决该问题（见补充信息）。这两种方法都得出相同的两个解集 Q 和 S，如方程(23)和(24)所示。它们通过简单的线性表达式，完整刻画了分数度量框架内的嵌入 $\mathcal{P}_{Loc} \subsetneq \mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}_{NS} \subsetneq \mathcal{P}$（定理2和定理3）。这大幅拓展了参考文献 [37], 的结果；该文献刻画了更简单的嵌入 $\mathcal{P}_{Loc} \subsetneq \mathcal{P}_{NS}$情形（见定理1）。

关于 $\mathcal{P}_{Loc}$ 和 $\mathcal{P}_{NS}$的几何结构，与各种解向量的关系相对简单；见图3。对于 $\mathcal{P}_{NS} \subsetneq \mathcal{P}$，八个$f$向量是

该多面体各面的法向量，因为无信号条件可以重新表述为：对所有 $j = 1, \ldots, 8$，均有 $\vec{f}_{T_j} \cdot \vec{P} = 1$（见引理1）。然后，嵌入 $\mathcal{P}_{Loc} \subsetneq \mathcal{P}_{NS}$ 由八个 e向量刻画，这些向量是 $\mathcal{P}_{Loc}$ 各面的法向量，而这些面本身是经局域性约束 $\vec{e}_{T_i} \cdot \vec{P} \geq 1$（对所有 $i = 1, \ldots, 8$）截取后的 $\mathcal{P}_{NS}$ 面（见定理1）。换言之，要在 $\mathcal{P}$中定义无信号多面体和局域多面体，f向量和e向量就足够了。此外，$\mathcal{P}_{NS}$ 相对于 $\mathcal{P}_{Loc}$的几何结构尤其简单，基本上每个相关的局域面都对应一个 PR 盒 [16, 17, 44]。这不足以计算局域分数（或无信号分数）的原因在于，答案取决于给定行为在 $\mathcal{P}_{Loc}$（或 $\mathcal{P}_{NS}$）与完整关联空间 $\mathcal{P}$之间所处的位置。设想一条线段穿过行为$\vec{P}$延伸，直到它分别与 $\mathcal{P}_{Loc}$（或 $\mathcal{P}_{NS}$）和 $\mathcal{P}$的边界相交。分数度量的计算方法是选择一个方向，使得沿该方向 $\vec{P}$ 到目标集合$\mathcal{P}_{Loc}$（或 $\mathcal{P}_{NS}$）的距离，相对于其到$\mathcal{P}$边界的距离最短。因此，几何关系更加复杂，这就是为何需要多达128个（或120个）向量，才能量化在 $\mathcal{P}$内，$\mathcal{P}_{Loc}$（或 $\mathcal{P}_{NS}$）边界附近的这种距离。

讨论

本文考虑的分数度量 提供了一种有原则的方法，用于量化观测行为对给定假设的违背程度。除了二元的通过／不通过分类外，该度量还通过提出一个简单的问题，为行为与相应约束集之间的“距离”赋予分级概念：有多大比例的实验运行次数可由与该假设相容的模型解释？只要问题能够通过凸几何刻画，这种方法就适用于广泛的问题，既涵盖因果概念，也涵盖纯操作性（统计性）问题。

本文研究标准的贝尔情景，其中有两个参与方、两种测量设置和两个结果。我们的目标是针对任意观测行为$P_{ab|xy}$，进行比较并明确计算

(i) 局域性（分数）度量 μ_L，以及
(ii) 无信号性（分数）度量 μ_{NS}。

注意，局域性本质上是因果性的，而信号传递则是依据观测统计数据在操作上定义的。然而，二者都容许凸几何表述，正如**定义1**和**定义2**中所采用的那样。该解利用局域多面体 $\mathcal{P}_L$ 与无信号传递多面体 $\mathcal{P}_{NS}$ 的几何，以量化观测行为$P_{ab|xy}$ 与它们各自的接近度，并受定义完整关联空间$\mathcal{P}$的概率约束。关键在于，该测度不仅取决于目标集合本身，还取决于它们嵌入于整体关联空间之中，从而为该解增添了相当大的几何复杂性。

我们证明，该问题的解可以写成一族较简单的向量度量的最小值，其中每个度量都是将观测行为投影到关联空间中的特定方向上得到的。一般而言，所需的方向集合由以下部分组成

(i) 128个用于测度的向量 μ_L，见**定理2**；以及*(ii)* 120 个用于测度的向量 μ_{NS}，见**定理 3**。

向量的数量可能令人惊讶，但这128/120 个方向无一冗余。虽然部分相关的向量测度与熟悉的量相同，例如贝尔-*CHSH*表达式(**定理 1**)和信号传递特征(**引理 1**)，其余方向则带来了真正非平凡的项，而这些项对于完整求解至关重要。这些额外方向捕捉了仅在信号体制下才变得相关的几何特征。

简而言之，在存在信号传递的情况下，很难将真正的非局域性与信号传递所诱发的效应区分开来，因为表面上的非局域性可能部分由信号传递所驱动。从操作层面看，信号传递意味着非局域性，但反之则不成立；这两个概念在理论上彼此不同。通过我们的分析，这些差异变得清晰；我们给出了两种分数度量的完整解，明确展示了整体结构，并提供了可直接用于实际计算的流程。[4] 值得注意的是，完整图景远不止于方程（8）—（11）中的贝尔-CHSH表达式 S_i（e-测度），即便再加上方程（3）—（6）中的信号传递特征 Δ_i（f-测度）也是如此。完整描述还涉及 g、t 和 s 度量。有趣的是，在评估无信号性本身的程度时，我们也观察到类似模式：完整刻画所涉及的远不止定义行为信号传递特征的 Δ_i（f-测度）。要捕捉完整结构，还需要 g、t 和 z 测度。

我们关注的是局域分数，因为在受贝尔启发、探究自然界量子结构的实验中，局域性具有基础性作用。同样重要的是，对无信号性（分数）测度的分析或许能为信号场景中的通信复杂度带来新的认识。无信号分数解集出人意料地丰富的几何结构，无疑有助于解释局域分数解的复杂性；事实证明，表面上违反局域性的现象中，相当大一部分可归因于信号传递，而这也解释了解集中大多数非平凡的

[4] 关于基于默认情境性框架的另一种方法，见参考文献 [45, 46]。不过，我们指出，我们的处理在概念上截然不同，因此所得结论也明显不同。

组成部分（显然可从比较 Q和 S看出）。

更一般地，由于这种表述自然适用于资源理论解释，本文提出的分数度量不仅适用于局域性和信号传递问题：如果违反某项给定假设需要付出代价，那么此类违反就构成了一种应谨慎使用的资源。从这个意义上说，分数度量 μ 量化了所需的这种资源的（最小）用量。我们的方法可视为先通过更简单的向量测度刻画可能的模拟策略，再选取达到（最小）比例的类别。从几何角度看，这个问题可以表述为对适当构造的对偶多胞体进行顶点枚举。

我们的结果建立在一条清晰的方法论路径之上：在**方法**部分，我们将问题表述为线性规划，并阐明强对偶性在求解中的作用。该框架可轻松扩展至任意数量的参与方、测量设置和结果。更一般地说，这一方法适用于广泛的一类约束，即任何可用凸几何表述的约束集，其中包括对因果图中给定箭头（或一组箭头）的因果强度进行（分数）度量。

我们这项成果的一个重要意义和动机，是消除了贝尔非局域性分析对无信号假设的依赖，从而能够以一致的方式处理一般行为（可能存在信号传递），并超越文献 [37] 的范围。为此，我们为标准贝尔非局域性检验提供了一个有原则的框架；其中的信号传递可能源于实验不完美或噪声，从而使实验结果的解释变得复杂 [19, 20, 47]。该框架还可能应用于处理有限样本效应 [18, 48–50] ,，而在标准分析中，通常通过施加无信号假设来简化对此类效应的处理。更重要的是，我们的成果建立了一个系统性框架，用于研究无法排除扰动、因而预期会出现信号传递的实验实现，为探索标准无信号贝尔框架之外的情形打开了大门；而标准框架或许过于严格。随着缺乏类空分离的情形日益增多，这一点也愈发重要 [21–27], 包括现代实验实现 [51], , 并促使人们拓展设备无关框架 [16, 17]。最后，在其他科学领域使用贝尔类型的因果图时，信号传递和扰动也十分常见 [10–15、28–30]。

总之，从历史上看，对表面上违反局域性的解释不得不依赖于精心设计的实验或统计保障措施。我们提出一种技术，用以区分局域性的违反与无信号的违反，其主要依据是此类资源代价高昂这一假设。本分析揭示了局域性或无信号可能被违反的丰富结构，并重要地表明，此类违反并非全都相同，有些比其他代价更高。

方法

在此，我们给出**定理 2**的证明概要，其基于线性规划方法。参见**补充信息**，以了解细节及其余结果的证明。

记号与预备知识

行为。 我们的分析关注非负向量 $\vec{P} = (P^{ab|xy}) \in \mathbb{R}^{16}$，它们服从归一化条件 $\sum_{a,b} P_{ab|xy} = 1$（对所有 x、$y \in \{0,1\}$）。这些向量在双测量设置、双结果贝尔情景中称为行为，表示获得结果 a、$b \in \{0,1\}$（在给定测量设置 x、$y \in \{0,1\}$的选择时）的条件概率。相应地，该十六分量列向量

$$\begin{aligned}\vec{P} = (&P_{00|00}, P_{01|00}, P_{10|00}, P_{11|00}, P_{00|01}, P_{01|01}, P_{10|01}, P_{11|01},\\ &P_{00|10}, P_{01|10}, P_{10|10}, P_{11|10}, P_{00|11}, P_{01|11}, P_{10|11}, P_{11|11})^T\end{aligned} \tag{31}$$

编码了贝尔实验中四种可能的测量设置组合所对应的结果分布。

局域多面体。 贝尔定理的本质在于，并非所有可容许行为都能以局域方式加以解释（图2，左）。如 A. Fine 所示， [39], 局域行为的集合构成局域多面体 $\mathcal{P}_{Loc}$，由局域确定性策略张成。这些策略可由 $16 = 4 \cdot 4$ 函数$i = (f、g)$的数对来标记，其中f、g： $\{0,1\} \to \{0,1\}$，并显式地由下式给出

$$(\vec{L}_{fg})_{ab|xy} = \delta_{a=f(x)} \cdot \delta_{b=g(y)} \,. \tag{32}$$

我们将这些策略排列成一个矩阵，记为$L \equiv (\vec{L}_1, \ldots, \vec{L}_{16})$，其列对应于十六种局域确定性策略 $\vec{L}_i$。所有策略的显式枚举见**补充信息**（B部分）。因此，任何局域行为 $\vec{P}^L$ 均可表示为如下形式的凸分解

$$\vec{P}^L = \sum_{i=1}^{16} \vec{L}_i \, q_i = L\,\vec{q}\,, \tag{33}$$

其中 $\vec{q}$ 是满足归一化条件$\sum_{i=1}^{16} q_i = 1$的非负权重向量。

表述为线性规划

我们证明，确定局域分数 $\mu_L(\vec{P})$（如式(16)所定义）等价于求解以下线性规划（LP）：

$$\text{maximize} \quad \vec{1}^T \cdot \vec{p}\,, \tag{34}$$

$$\text{subject to} \quad L\,\vec{p} \leqslant \vec{P}\,, \tag{35}$$

$$\vec{p} \geqslant 0\,, \tag{36}$$

其中 $\vec{p} \in \mathbb{R}^{16}$，而$L$ 是由上文讨论的十六个局域确定性策略组成的矩阵。我们将$\vec{1} := (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{16}$ 记为一个元素全为 1 的列向量。

论证。 让我们利用方程 (15) 中方程 (33) 引入的凸展开，重写分解中的局域部分，即

$$\vec{P} \;=\; q \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{16} \vec{L}_i \, q_i}_{\vec{P}^{\,L}} \;+\; (1-q) \cdot \vec{P}^{\,NL} \,. \tag{37}$$

这意味着存在系数 p_i，其定义为$p_i := q q_i$，满足

$$\vec{P} \;-\; \sum_{i=1}^{16} \vec{L}_i \, p_i \;\geqslant\; 0 \quad \text{and} \quad p_i \geqslant 0 \,. \tag{38}$$

我们发现，反向结论也成立：存在满足方程 (p_i 38) 的系数，即意味着方程 (37) 中的分解成立。这可通过重写

$$\begin{aligned} \vec{P} \;&=\; \sum_{i=1}^{16} \vec{L}_i \, p_i \;+\; \vec{P} \;-\; \sum_{i=1}^{16} \vec{L}_i \, p_i \qquad (39) \\ &=\; q \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{16} \vec{L}_i \, q_i}_{\vec{P}^{\,L}} \;+\; (1-q) \cdot \underbrace{\tfrac{1}{1-q} \left(\vec{P} \;-\; \sum_{i=1}^{16} \vec{L}_i \, p_i \right)}_{\vec{P}^{\,NL}} , \end{aligned}$$

其中 $q := \sum_i p_i$ ， 且 $q_i := p_i / q$。不难验证，以这种方式定义的向量 $\vec{P}^{\,L}$ 和 $\vec{P}_{NL}$ 都是恰当归一化的行为，因为根据构造， $\vec{P}$ 和 $\vec{L}_i$ 本身都是归一化行为。

这使我们能够将方程 ($\mu_L(\vec{P})$16) 中寻找 的任务表述为以下线性规划:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \textstyle\sum_{i=1}^{16} p_i && (40) \\ &\text{subject to} && \vec{P} - \textstyle\sum_{i=1}^{16} \vec{L}_i \, p_i \geqslant 0 \,, && (41) \\ & && p_i \geqslant 0 \,, && (42) \end{aligned}$$

简洁地说，这对应于方程 (34)-(36) 中给出的线性规划。 □

对偶线性规划与解

我们指出，方程（34）-（36）中的线性规划并不容易处理，因为其可行域依赖于所选行为 $\vec{P}$。这一困难可以通过考虑对偶线性规划（DLP）来克服，后者具有更便于处理的形式

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \vec{P}^{\,T} \cdot \vec{q} \,, && (43) \\ &\text{subject to} && L^T \vec{q} \;\geqslant\; \vec{1} \,, && (44) \\ & && \vec{q} \;\geqslant\; 0 \,. && (45) \end{aligned}$$

这一重新表述有两个主要优点：

(i) 与原始线性规划不同，所选行为 $\vec{P}$ 如今出现且仅出现在目标函数即式（43）中，并且

（*ii*）这些约束现在定义了一个固定的多面体，位于 $\mathbb{R}^{16}$ 中，由方程（44）-（45）指定，并且对所有行为 $\vec{P}$ 都相同。

我们现在可以求解该问题。根据强对偶定理 [52], , 原始线性规划与其对偶 DLP 的解相同。这一点得以保证，是因为方程（34）-（36）中的原始线性规划存在一个解，因为它是在紧致域上最大化一个线性函数。

因此，局域分数 μ_L（$\vec{P}$）同样可以由方程（43）-（45）中的 DLP 得到。由于线性规划的最优值在其可行域的某个顶点处达到，我们得到

$$\mu_L(\vec{P}) \;=\; \min_{\vec{q}_i} \; \vec{q}_i^{\,T} \cdot \vec{P} \,, \tag{46}$$

其中， $\{\vec{q}_i\}$ 是由以下 $32 = 16 + 16$ 不等式定义的多面体的顶点集合:

$$\begin{aligned} L^T \vec{q} \;&\geqslant\; \vec{1} \,, && (47) \\ \vec{q} \;&\geqslant\; 0 \,. && (48) \end{aligned}$$

利用凸分析的标准方法，可以明确枚举这些顶点 [52]。我们发现，相关顶点集合记为 $\mathbb{Q} \equiv \vec{q}_i$，包含128 个二进制向量（其元素为0 或1），如**定理2**所述。这些顶点的完整列表及更多讨论见**补充信息**。

致谢

我们感谢以下资助：EP 获得欧洲航空航天研究与发展办公室（EOARD）资助，项目编号为 grantFA8655-23-1-7220；CG 获得 LOEWE 资助，项目编号为 LOEWE/5/A004/519/06/00.006(0004)E36；TN 获得英国工程与物理科学研究委员会（EPSRC）资助，项目编号为 2919480。

作者贡献

MB 完成了解析证明；TN 开展了计算工作；PB 完成了线性规划证明并撰写了手稿初稿；PB、EP 和 CG 共同构思了该项目；所有作者均参与了数学工作以及手稿的修订。

利益冲突

作者声明无利益冲突。

* 通讯作者： pawel.blasiak@ifj.edu.pl[1]J. S. Bell, 《论爱因斯坦-波多尔斯基-罗森悖论》, 物理学 **1**, 195(1964)。[2] J. S. Bell, 《量子力学中可说与不可说的内容》(剑桥大学出版社, 1987)。[3] S. J. Freedman 和 J. F. Clauser, 《局域隐变量理论的实验检验》, 物理评论快报 **28**, 938(1972)。

[4]A. Aspect、J. Dalibard和G. Roger，“利用时变分析器对贝尔不等式的实验检验”，物理评论快报 49, 1804 (1982)。[5] B. Hensen、H. Bernien、A. E. Dreau、A. Reiserer、N. Kalb、M. S. Blok、J. Ruitenberg、R. F. L. Vermeulen、R. N. Schouten、C. Abellan、W. Amaya、V. Pruneri、M. W. Mitchell、M. Markham、D. J. Twitchen、D. Elkouss、S. Wehner、T. H. Taminiau和R. Hanson，“利用相距1.3公里的电子自旋实现无漏洞贝尔不等式违背”，《自然》526, 682 (2015)。[6]M. Giustina、M. A. M. Versteegh、S. Wengerowsky、J. Handsteiner、A. Hochrainer、K. Phelan、F. Steinlechner、J. Kofler、J.-A. Larsson、C. Abellán、W. Amaya、V. Pruneri、M. W. Mitchell、J. Beyer、T. Gerrits、A. E. Lita、L. K. Shalm、S. W. Nam、T. Scheidl、R. Ursin、B. Wittmann和A. Zeilinger，“利用纠缠光子对贝尔定理进行无显著漏洞检验”，物理评论快报 115, 250401 (2015)。[7] L. K. Shalm、E. Meyer-Scott、B. G. Christensen、P. Bierhorst、M. A. Wayne、M. J. Stevens、T. Gerrits、S. Glancy、D. R. Hamel、M. S. Allman、K. J. Coakley、S. D. Dyer、C. Hodge、A. E. Lita、V. B. Verma、C. Lambrocco、E. Tortorici、A. L. Migdall、Y. Zhang、D. R. Kumor、W. H. Farr、F. Marsili、M. D. Shaw、J. A. Stern、C. Abellán、W. Amaya、V. Pruneri、T. Jennewein、M. W. Mitchell、P. G. Kwiat、J. C. Bienfang、R. P. Mirin、E. Knill和S. W. Nam，“定域实在论的强无漏洞检验”，物理评论快报 115, 250402 (2015)。[8] BIG贝尔检验合作组，“以人类选择挑战定域实在论”，《自然》557, 212 (2018)。[9]D. Rauch、J. Handsteiner、A. Hochrainer、J. Gallicchio、A. S. Friedman、C. Leung、B. Liu、L. Bulla、S. Ecker、F. Steinlechner、R. Ursin、B. Hu、D. Leon、C. Benn、A. Ghedina、M. Cecconi、A. H. Guth、D. I. Kaiser、T. Scheidl和A. Zeilinger，“利用高红移类星体的随机测量设置进行宇宙贝尔检验”，物理评论快报 121, 080403 (2018)。[10] J. Pearl和D. Mackenzie，《为什么》：因果关系的新科学（Basic Books，2018）。[11] J. Pearl，《因果性：模型、推理与推断》，第2版（剑桥大学出版社，2009）。[12] P. Spirtes、C. Glymour和R. Scheines，《因果、预测与搜索》（麻省理工学院出版社，2000）。[13]J. D. Angrist和J.-S. Pischke，《基本无害的计量经济学：经验主义者指南》（普林斯顿大学出版社，2009）。[14] D. B. Rubin和G. W. Imbens，《面向统计学、社会科学与生物医学的因果推断：导论》（剑桥大学出版社，2015）。[15] M. A. Hernán和J. M. Robins，《因果推断：假如会怎样》（Chapman & Hall/CRC，2020）。[16]V. Scarani，《贝尔非定域性》（牛津大学出版社，2019）。[17] N. Brunner、D. Cavalcanti、S. Pironio、V. Scarani和S. Wehner，“贝尔非定域性”，现代物理评论 86, 419 (2014)。[18]R. D. Gill，“统计数据、因果性与贝尔定理”，《统计科学》29, 512 (2014)。[19]G. Adenier和A. Y. Khrennikov，“在Hensen无漏洞CHSH实验中对无信号传递原理的检验”，《物理学进展》65, 1600096 (2017)。[20] B. Hensen、N. Kalb、M. S. Blok、A. E. Dréau、A. Reiserer、R. F. L. Vermeulen、R. N. Schouten、M. Markham、D. J. Twitchen、K Taminiau，以及 R. Hanson，《使用金刚石中的电子自旋进行无漏洞贝尔检验：第二次实验及补充分析》，Sci. Rep. 6，30289（2016）。[21] C. Emary、N. Lambert 和 F. Nori，《Leggett–Garg 不等式》，Rep. Prog. Phys. 77，016001（2014）。[22] J. Kofler 和 C. Brukner，《超越 Leggett-Garg 不等式的宏观实在性条件》，Phys. Rev. A 87，052115（2013）。[23]Tobias Fritz，《时间型Clauser–Horne–Shimony–Holt（CHSH）情景中的量子关联》，New J. Phys. 12，083055（2010）。[24]S. Brierley、A. Kosowski、M. Markiewicz、T. Paterek 和 A. Przysiezna，《时间相关性的非经典性》，Phys. Rev. Lett. 115，120404（2015）。[25] M. Ringbauer、C. Giarmatzi、R. Chaves、F. Costa、A. G. White 和 A. Fedrizzi，《非局域因果性的实验检验》，Sci. Adv. 2，e1600162（2016）。[26] R. Chaves、G. Carvacho、I. Agresti、V. Di Giulio、L. Aolita、S. Giacomini 和 F. Sciarrino，《工具变量检验的量子违背》，Nature Phys. 14，291（2018）。[27]I. Agresti、D. Poderini、B. Polacchi、N. Miklin、M. Gachechiladze、A. Suprano、E. Polino、G. Milani、G. Carvacho、R. Chaves 和 F. Sciarrino，《量子因果影响的实验检验》，Sci. Adv. 8，eabm1515（2022）。[28] V. H. Cervantes 和 E. N. Dzhafarov，《雪后邪恶而美丽：人类选择中概率情境性的实验证据》，Decision 5，193（2018）。[29]P. D. Bruza、L. Fell、P. Hoyte、S. Dehdashti、A. Obeid、A. Gibson 和 C. Moreira，《认知概率模型中的情境性与情境敏感性》，Cogn. Psychol. 140，101529（2023）。[30] C. Gallus、E. M. Pothos、P. Blasiak、J. M. Yearsley 和 B. W. Wojciechowski，《物理学之外的贝尔关联》，Sci. Rep. 13，4394（2023）。[31] A. C. Elitzur、S. Popescu 和 D. Rohrlich，《系综中每一对粒子的量子非定域性》，Phys. Lett. A 162，25（1992）。[32] L. Hardy，《获得贝尔不等式的新方法》，Phys. Lett. A 161，21（1991）。[33] J. Barrett、A. Kent 和 S. Pironio，《最大非定域的单配量子关联》，Phys. Rev. Lett. 97，170409（2006）。[34] R. Colbeck 和 R. Renner，《量子理论的隐变量模型不可能具有任何局域部分》，Phys. Rev. Lett. 101，050403（2008）。[35] R. Colbeck 和 R. Renner，《量子理论在预测测量结果方面的完备性》，载于 Quantum Theory: Informational Foundations and Foils，G. Chiribella 和 R. W. Spekkens 编（施普林格，2016），第 497–528 页。[36]S. Portmann、C. Branciard 和 N. Gisin，《所有纯双量子比特态的局域内容》，Phys. Rev. A 86，012104（2012）。[37] P. Blasiak、E. M. Pothos、J. M. Yearsley、C. Gallus 和 E. Borsuk，《在贝尔实验中，局域性与自由选择的违背是等价资源》，美国国家科学院院刊（PNAS）118，e2020569118（2021），EurekAlert!（2021）：我们知道自由选择和局域性的代价——不仅在物理学中。[38] J. F. Clauser、M. A. Horne、A. Shimony 和 R. A. Holt，《检验局域隐变量理论的实验设想》，物理评论快报 23，880–884（1969）。[39] A Fine，“隐变量、联合概率与贝尔

不等式”，物理评论快报 48，291–295（1982）。[40] H. M. Wiseman 和 E. G. Cavalcanti，“因果探究与约翰·贝尔的两个贝尔定理”，载于《量子不可言说之物 II：贝尔定理问世半世纪》，R. Bertlmann 和 A. Zeilinger 编（施普林格，2017），第 119–142 页。[41]P. Blasiak 和 C. Gallus，“比较贝尔实验中违反因果假设的代价：局域性、自由选择与时间之箭”，英国皇家学会哲学汇刊A 382，20230005（2024）。[42] C. Vieira、R. Ramanathan 和 A. Cabello，“贝尔非定域性的物理意义检验”，自然·通讯 16，4390（2025）。[43]B. S. Tsirelson，“贝尔不等式的量子推广”，数学物理通讯 4，93–100（1980）。[44] S. Popescu 和 D. Rohrlich，“作为公理的量子非定域性”，物理学基础 24，379（1994）。[45] E. N. Dzhafarov、J. V. Kujala 和 J.-A. Larsson，“三类量子力学系统中的情境性”，物理学基础 45，762–782（2015）。[46] J. V. Kujala、E. N. Dzhafarov 和 J.-A. Larsson，“广泛一类量子力学系统中扩展非情境性的充要条件”，物理评论快报 115，150401（2015）。[47] M. Smania、M. Kleinmann、A. Cabello 和 M. Bourennane，“如何避免贝尔检验中的（表观）信号传递”，Quantum 9，1760（2025）。[48] D. Elkouss 和 S. Wehner，“所有贝尔不等式的（近乎）最优 P 值”，npj量子信息 2，16026（2016）。[49] M. O. Renou、D. Rosset、A. Martin 和 N. Gisin，“有限统计数据导致 CH 与 CHSH 不等式不等价”，物理学杂志A：数学与理论 50，255301（2017）。[50]R. D. Gill，“贝尔实验的最优统计分析”，Appl. Math. 3，446（2023）。[51] T. Rybotycki、T. Bialecki、J. Batle 和 Adam Bednorz，“公共量子计算机上的无信号性违背”，先进量子技术 8，2400661（2025）。[52] S. Boyd 和 L. Vandenberghe，《凸优化》（剑桥大学出版社，2004）。[53] T. Christof，“PORTA 软件系统（多面体表示变换算法）”，（1997），网址：https://porta.zib.de。

补充信息

信号传递存在时贝尔非定域性的测量

Mark Broom[1], Talel Naccache[1], Emmanuel M. Pothos[1],Christoph Gallus[2],和 Pawel Blasiak[3]

[1]伦敦城市圣乔治大学，伦敦 *EC1V 0HB*，英国[2]中黑森应用技术大学，
德国吉森 *D-35390*[3]波兰科学院核物理研究所，波兰克拉科夫 *31342*

本补充材料为正文手稿中提出的所有论述提供了详细证明，并对解的结构作了进一步的解析探讨。在 **A部分**中，我们提供了完整解集列表的索引 Q 和 S （见 **补充数据**）。在 **B部分**中，我们详述必要的技术细节，并给出**定理**1、2、3以及**引理** 1的完整证明。虽然**B部分** 采用线性规划方法求解，**C部分** 则基于显式参数化，对证明中的关键元素进行独立的解析处理。最后，**D部分**进一步探讨了解的结构。

目录：

A部分： 解集 Q和 S**B部分：** 线性规划方法 B.1. 技术背景B.2. 定理 **2 的证明**B.3. 定理 **3 的证明**B.4. 定理 **1 的证明**和**引理** 1B.5. 解向量的普遍性**P**

C部分： 分析方法 C.1. 向量空间 C.2. 向量空间参数化 C.3. 最大信号传递 C.4. 向量测度 C.5. 求无信号性度量 C.6. 求局域性度量

D部分： 对解的深入分析

A部分：解集 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{S}$

论文的主要结果见 **定理 2** 和 **定理 3**，这些结果基于解集 $\mathbb{Q}$和 $\mathbb{S}$，它们分别包含128 和 120 个向量。为清晰起见，我们在方程（23）和（24）中定义了这些集合，并描述了它们的结构，而未明确列出其中的元素，即

$$\mathbb{Q} = \{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_8\} \cup \{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_{16}\} \cup \{\vec{t}_1,\dots,\vec{t}_{32}\} \cup \{\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_{64}\} \cup \{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_8\} \qquad \text{(see } \textbf{Theorem 2}\text{)}, \tag{S1}$$

and

$$\mathbb{S} = \{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_8\} \cup \{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_{16}\} \cup \{\vec{t}_1,\dots,\vec{t}_{32}\} \cup \{\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_{64}\} \qquad \text{(see } \textbf{Theorem 3}\text{)}. \tag{S2}$$

为求完整起见，我们在两个**补充数据**文件中明确列出它们：

(i) `SolutionVectorsQ.txt` （定理 $\mathbb{Q}$ 中的**解集2**），以及*(ii)* `SolutionVectorsS.txt` （定理 $\mathbb{S}$ 中的**解集3**）。

这些文件可直接用于数值计算。

在正文中，我们还讨论了方程（25）-（29）中给出的两组对象各自的对称性。这些对称性进一步将 $\vec{f}$对应的子集、$\vec{g}$对应的子集、$\vec{t}$对应的子集、$\vec{s}/\vec{z}$对应的子集以及 $\vec{e}$对应的子集划分为等价类（轨道），其代表元见方程（30）。我们还在随附的**补充数据**文件中提供了这一分类。

B部分：线性规划方法

B.1. 技术背景

我们简要回顾证明手稿中所述结果所需的技术概念和定义。

B.1.1. 局域多面体 $\mathcal{P}_{Loc}$

该局域多面体 $\mathcal{P}_{Loc}$ 是十六种局域确定性策略 [16, 17, 39]的凸包。每种策略都可以用一对函数来标识$(f、g)$，其中$f、g\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$，总共产生 $16 = 4 \cdot 4$ 种不同组合。使用式（31）的记法，这些策略由式（32）明确给出，即：

$$(\vec{L}_{fg})_{ab|xy} \;=\; \delta_{a=f(x)} \cdot \delta_{b=g(y)}\,. \tag{S3}$$

将十六对函数(f, g) 分别标记为 1 至 16，并将相应策略排列为矩阵L的各列。为完整起见，其具体形式如下：

$$L \;:=\; (\vec{L}_1, \vec{L}_2, \ldots, \vec{L}_{16}) \;=\; \begin{array}{c} \\ P_{00|00} \\ P_{01|00} \\ P_{10|00} \\ P_{11|00} \\ \hline P_{00|01} \\ P_{01|01} \\ P_{10|01} \\ P_{11|01} \\ \hline P_{00|10} \\ P_{01|10} \\ P_{10|10} \\ P_{11|10} \\ \hline P_{00|11} \\ P_{01|11} \\ P_{10|11} \\ P_{11|11} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} \vec{L}_1 & \vec{L}_2 & \vec{L}_3 & \vec{L}_4 & \vec{L}_5 & \vec{L}_6 & \vec{L}_7 & \vec{L}_8 & \vec{L}_9 & \vec{L}_{10} & \vec{L}_{11} & \vec{L}_{12} & \vec{L}_{13} & \vec{L}_{14} & \vec{L}_{15} & \vec{L}_{16} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}. \tag{S4}$$

关键的是，一个 y 局部行为 $\vec{P}^{L}$ 具有方程（33）所给形式的凸分解，即 ，

$$\vec{P}^{L} \;=\; \sum_{i=1}^{16} \vec{L}_i\, q_i \;=\; L\,\vec{q}\,, \tag{S5}$$

其中 $\vec{q}$ 是满足归一化条件的非负权重向量 $\sum_{=1i}^{16} q_i =$ 1.

容易验证，以下 局域确定性策略 $\{\vec{L}_1、\vec{L}_2, \ldots、\vec{L}_{16}\}$定义的局域多面体 $\mathcal{P}_{Loc}$在方程（25）—（29）所给的对称变换下是不变的。

B.1.2. 无信号多面体 $\mathcal{P}_{NS}$

无信号多面体 $\mathcal{P}_{NS}$ 由上文介绍的十六个 局域确定性策略 以及八个所谓的 *PR*盒 [16, 17, 44]共同张成。这些盒对应于使 CHSH不等式的代数上界（$S = 4$）饱和的非确定性无信号行为。一个规范代表为

$$(\vec{R}_1)_{ab|xy} \;:=\; \tfrac{1}{2}\,\delta_{a\oplus b = x\cdot y}\,, \tag{S6}$$

其中， $\oplus$ 表示模2加法。其余各盒可通过重新标记测量设置和结果得到。总之，这些 $24 = 16 + 8$ 列向量可以汇集成矩阵$N = (\vec{N}_1, \ldots, \vec{N}_{24})$，其具体形式如下：

$$N := (\vec{L}_1, ..., \vec{L}_{16}, \vec{R}_1, ..., \vec{R}_8) =$$

	$\vec{L}_1$	$\vec{L}_2$	$\vec{L}_3$	$\vec{L}_4$	$\vec{L}_5$	$\vec{L}_6$	$\vec{L}_7$	$\vec{L}_8$	$\vec{L}_9$	$\vec{L}_{10}$	$\vec{L}_{11}$	$\vec{L}_{12}$	$\vec{L}_{13}$	$\vec{L}_{14}$	$\vec{L}_{15}$	$\vec{L}_{16}$	$\vec{R}_1$	$\vec{R}_2$	$\vec{R}_3$	$\vec{R}_4$	$\vec{R}_5$	$\vec{R}_6$	$\vec{R}_7$	$\vec{R}_8$
$P_{00\|00}$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2	0	0	0	0	1/2
$P_{01\|00}$	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	0																	
$P_{10\|00}$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0							
$P_{11\|00}$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1/2	1/2	1/2	0	0	0	0	1/2
$P_{00\|01}$	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1/2	1/2	0	1/2	0	0	1/2	0
$P_{01\|01}$	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2	1/2	0	1/2	
$P_{10\|01}$	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1/2	0	1/2	1/2	0	1/2
$P_{11\|01}$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1/2	1/2	0	1/2	0	0	1/2	0
$P_{00\|10}$	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1/2	0	1/2	1/2	0	1/2	0	0
$P_{01\|10}$	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1/2	0	0	1/2	0	1/2	1/2
$P_{10\|10}$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0	0	1/2	0	1/2	1/2	
$P_{11\|10}$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1/2	0	1/2	1/2	0	1/2	0	0		
$P_{00\|11}$	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	0	0	0
$P_{01\|11}$	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1/2	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2
$P_{10\|11}$	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	1	1	0
$P_{11\|11}$	1/2	1/2	1/2	1/2	0	0	0																	

. (S7)

这意味着，任何无信号行为 $\vec{P}^{NS}$ 都可以表示为上述极端点 $\vec{N}_i$的凸混合，即：

$$\vec{P}^{NS} = \sum_{i=1}^{24} \vec{N}_i q_i = N\vec{q}, \tag{S8}$$

其中 $\vec{q}$ 是满足归一化条件的非负权重向量$\sum_{=1i}^{24} q_i =$ 1.

同样可以验证，顶点集合($\vec{L}_1, ..., \vec{L}_{16}, \vec{R}_1, ..., \vec{R}_8$)，定义了非信号多面体 $\mathcal{P}_{NS}$，在方程（25）-（29）给出的对称变换下保持不变。

B.2. 定理2的证明

如**方法**一节所示，求局域分数 μ_L 可归结为求由方程（47）-（48）定义的多面体的顶点。局域分数 μ_L（$\vec{P}$）随后通过计算 $\vec{P}$与各顶点方向的标量积的最小值获得；见方程（46）。

顶点枚举任务实际上是借助计算机算法完成的。在本研究中，我们使用了PORTA软件系统（多面体表示变换算法） [53]，该系统采用傅里叶–莫茨金消元，在多面体的V-表示与H-表示之间进行转换。

由此可知，方程（47）-（48）定义的多面体是由132个顶点与一个锥构成的凸包。后者对应于非负正交象限，$\vec{q} \geqslant 0$，与解无关。在132个顶点中，有四个与我们的目的无关，分别是 $(1111000000000000)^T$、$(0000111100000000)^T$、$(0000000011110000)^T$ 和 $(0000000000001111)^T$，因为对于这些向量，方程（46）中的表达式的值为1。这直接来自方程（31）中的归一化条件，该条件要求对于所有 x、y $\in 0, 1$，都有 $\sum_{a,b} P_{ab|xy} = 1$。因此，方程（46）中参与取最小值的非平凡顶点还剩下128个；它们定义了解集 $\mathbb{Q}$，如定理2所述，从而完成了定理的证明。所有相关顶点的完整列表见A部分（SolutionVectorsA.txt）。

B.3. 定理3的证明

证明思路与**定理2**相同。该定理在论文的**方法**部分中提出，并在上文**B.2 节中**完成。这凸显了我们计算分数度量方法的普适性。

因此，第一步，我们证明，按公式（无信号分数 μ_{NS}（$\vec{P}$）（18）定义的量，等价于求解以下线性规划（LP）：

$$\text{最大化 } \vec{1}^T \cdot \vec{p}, \text{ 满足} \tag{S9}$$
$$\text{条件 } N\vec{p} \leqslant \vec{P}, \vec{p} \tag{S10}$$
$$\geqslant 0. \tag{S11}$$

此处 $\vec{p} \in \mathbb{R}^{24}$，而 $N \in \mathbb{R}^{16\times 24}$ 是由式（S7）所定义的非信号多面体 的 24 个顶点构成的矩阵。向量 $\vec{1}$：$=(1, 1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^{24}$ 表示所有元素均为 1 的列向量。

论证。关键观察在于，利用式（S8），式（17）中的分解可以写成如下形式：

$$\vec{P} \;=\; q\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{24}\vec{N}_i\,q_i}_{\vec{P}^{NS}} \;+\;(1-q)\cdot\vec{P}^{S}\,. \tag{S12}$$

注意，我们假设 $0\leqslant q\;<1$，因为$q\;=1$ 对应于平凡情形，即 $\vec{}P$ 是非信号传递行为。因此，存在系数p_i，定义为 $p_i:=qq_i$，使得

$$\vec{P}\;-\sum_{i=1}^{24}\vec{N}_i\,p_i\;\geqslant\;0\quad\text{and}\quad p_i\geqslant 0\,. \tag{S13}$$

反过来，存在满足式（p_i（S13）的系数S12），即可得到式（

$$\vec{P}\;=\;\sum_{i=1}^{24}\vec{N}_i\,p_i\;+\;\vec{P}\;-\;\sum_{i=1}^{24}\vec{N}_i\,p_i\;=\;q\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{24}\vec{N}_i\,q_i}_{\vec{P}^{NS}}\;+\;(1-q)\cdot\underbrace{\tfrac{1}{1-q}\left(\vec{P}\;-\;\sum_{i=1}^{24}\vec{N}_i\,p_i\right)}_{\vec{P}^{S}}\,, \tag{S14}$$

其中$q:=\sum_i p_i$，且$q_i:=p_i/q$。还需指出，以此方式定义的向量 $\vec{}P^{NS}$ 和 $\vec{}P^{N}$是恰当归一化的行为，因为根据构造，$\vec{}P$ 和 $\vec{}N_i$们都是归一化行为。

因此，求解 $\mu_{NS}(\vec{P})$ 在式（18）中等价于求解以下线性规划问题 m:

$$\begin{aligned}
&\text{maximize}\quad \textstyle\sum_{i=1}^{24}p_i && \text{(S15)}\\
&\text{subject to}\quad \vec{P}-\textstyle\sum_{i=1}^{24}\vec{N}_i\,p_i\geqslant 0\quad\text{(16 inequalities)}\,, && \text{(S16)}\\
&\qquad\qquad p_1,\ldots,p_{24}\;\geqslant 0\quad\text{(24 inequalities)}\,, && \text{(S17)}
\end{aligned}$$

其紧凑形式由线性规划给出，见方程（S9）-（S11）。

□

在第二步中，我们援引强对偶定理，它保证了原始线性规划与其对偶线性规划（DLP）之间的等价性，并由下式给出

$$\begin{aligned}
&\text{minimize}\quad \vec{P}^{T}\cdot\vec{q} && \text{(S18)}\\
&\text{subject to}\quad N^{T}\vec{q}\;\geqslant\;\vec{1}\quad\text{(24 inequalities)}\,, && \text{(S19)}\\
&\qquad\qquad \vec{q}\;\geqslant\;0\quad\text{(16 inequalities)}\,, && \text{(S20)}
\end{aligned}$$

其中 $\vec{}q\;\in\mathbb{R}^{16}$。这一等价性的有效性由方程（S9）-（S11）中原始线性规划解的存在性所保证，因为它在紧集上最大化一个线性函数。我们再次观察到，若将问题按如下方式表述：

(i) 所选行为 $\vec{}P$ 现在仅出现在目标函数，即方程（S18）中，且
(ii) 在 $\mathbb{R}^{16}$ 中由方程（S19）-（S20）所定义的多面体都是相同的，适用于所有行为 $\vec{}P$。

综上所述，由于方程（S18）-（S20）中DLP的解在其可行域的顶点处取得，我们已证明无信号分数 μ_{NS}（$\vec{}P$）可计算为

$$\mu_{NS}(\vec{P})\;=\;\min_{\vec{q}_i}\;\vec{q}_i^{\,T}\cdot\vec{P}\,, \tag{S21}$$

其中，$\{\vec{}q_i\}$ 是由 $40=24+16$ 不等式定义的多面体的顶点集合 :

$$\begin{aligned}
&N^{T}\vec{q}\;\geqslant\;\vec{1}\,, && \text{(S22)}\\
&\vec{q}\;\geqslant\;0\,. && \text{(S23)}
\end{aligned}$$

剩下的工作是枚举相关的顶点集合，在本情形中我们将其记为 $\mathbb{S}\equiv\{\vec{}q_i\}$。同样，这个问题可以使用 PORTA 软件系统（多面体表示变换算法）[53]高效求解。结果表明，由方程（S22）-（S23）定义的多面体是 124 个顶点与一个锥的凸包。仔细观察可知，该锥对应于非负正交象限，$\vec{}q\;\geqslant 0$，因此与解无关。在这 124 个顶点中，我们还可以忽略四个无关紧要的顶点：

即 (1111000000000000)^T、(0000111100000000)^T、(0000000011110000)^T 和 (0000000000001111)^T，因为对于这些向量，方程（S21）中的表达式求值为 1。这是由方程（31）中行为 $\vec{P}$ 的归一化得出的，该归一化满足：对于所有 x、y $\in 0$，$\sum_{a,b} P_{ab|xy} = 1$ 1。因此，方程（22）中贡献于最小值的非平凡顶点还剩下 120 个，它们定义了定理3中所述的解集 S，由此完成证明。所有相关顶点的完整列表见 A部分（SolutionVectorsS.txt）。

B.4. 定理1 和引理1的证明

证明引理。

利用f-向量在**A部分**（或**D部分**）中的显式列表以及方程（3）-（6）中的定义，可以直接验证，对于给定的行为 $\vec{P}$，我们有

$$\vec{f}_1^T \cdot \vec{P} = 1 + \Delta_1 \quad \& \quad \vec{f}_2^T \cdot \vec{P} = 1 - \Delta_1 , \tag{S24}$$
$$\vec{f}_3^T \cdot \vec{P} = 1 + \Delta_2 \quad \& \quad \vec{f}_4^T \cdot \vec{P} = 1 - \Delta_2 , \tag{S25}$$
$$\vec{f}_5^T \cdot \vec{P} = 1 + \Delta_3 \quad \& \quad \vec{f}_6^T \cdot \vec{P} = 1 - \Delta_3 , \tag{S26}$$
$$\vec{f}_7^T \cdot \vec{P} = 1 + \Delta_4 \quad \& \quad \vec{f}_8^T \cdot \vec{P} = 1 - \Delta_4 . \tag{S27}$$

由此可得

$$\min_{i=1,\dots,8} \vec{f}_i^T \cdot \vec{P} = 1 + \min_{i=1,\dots,4} \pm\Delta_i = 1 - \max_{i=1,\dots,4} |\Delta_i| \overset{(2)}{=} 1 - \Delta . \tag{S28}$$

根据方程（2）中的定义，这就证明了**引理1**。

□

证明定理。

对于任意行为 $\vec{P}$，A部分e-向量的显式列表（**或 D部分**），连同方程 (8)-(11，推出以下恒等式：

$$\vec{e}_1^T \cdot \vec{P} = 2 - \tfrac{1}{2} S_4 \quad \& \quad \vec{e}_2^T \cdot \vec{P} = 2 + \tfrac{1}{2} S_4 , \tag{S29}$$
$$\vec{e}_3^T \cdot \vec{P} = 2 - \tfrac{1}{2} S_3 \quad \& \quad \vec{e}_4^T \cdot \vec{P} = 2 + \tfrac{1}{2} S_3 , \tag{S30}$$
$$\vec{e}_5^T \cdot \vec{P} = 2 - \tfrac{1}{2} S_2 \quad \& \quad \vec{e}_6^T \cdot \vec{P} = 2 + \tfrac{1}{2} S_2 , \tag{S31}$$
$$\vec{e}_7^T \cdot \vec{P} = 2 - \tfrac{1}{2} S_1 \quad \& \quad \vec{e}_8^T \cdot \vec{P} = 2 + \tfrac{1}{2} S_1 . \tag{S32}$$

据此，我们可以写出

$$\min_{i=1,\dots,8} \vec{e}_i^T \cdot \vec{P} = 2 + \tfrac{1}{2} \min_{i=1,\dots,4} \pm S_i = 2 - \tfrac{1}{2} \max_{i=1,\dots,4} |S_i| \overset{(7)}{=} 2 - \tfrac{1}{2} S . \tag{S33}$$

现在，在假 设无信号行为 $\vec{P}$的条件下，根据参考文献 [37] 中推导出的结果， t

$$\mu_L(\vec{P}) \overset{[37]}{=} \min\left\{1 , \tfrac{1}{2}(4 - S)\right\} \overset{(S33)}{=} \min\left\{1 , \min_{i=1,\dots,8} \vec{e}_i^T \cdot \vec{P}\right\} , \tag{S34}$$

至此，**定理1**的证明完成。

□

顺便指出，上述推导中较为困难的部分，即方程（S34），依赖于参考文献 [37]中的结果。不过，我们也可以改为引用本文证明的更强结果——**定理 2**，并据此构造这一论证；该定理适用于任意行为（包括有信号传递的行为）。因此，下面我们将给出一个独立的第二种**定理1**的证明。

定理1111111111111111的证明由定理2222222222222222 定理的证明由定理 定理的证明由定理 定理的证明由定理

首先注意到，在无信号情形下，**引理1**意味着f-度量均等于 1。因此，要证明式（S35），只需证明，对于无信号行为 $\vec{P}$，g、t和s测度始终不小于 $\min_{i=1,\dots,8}\{1, \vec{e}_i^T\cdot\vec{P}\}$。

我们首先证明　　这一点适用于代表向量 $\vec{g}_\beta$、$\vec{t}_\beta$和 $\vec{t}_\gamma$，由方程（30）可知，我们可以验证

$$\vec{g}_\alpha^T\cdot\vec{P} = \Delta_1+\Delta_4+P_{01|01}+1 \geqslant 1, \tag{S36}$$
$$\vec{t}_\beta^T\cdot\vec{P} = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_4+P_{01|01}+P_{00|11}+1 \geqslant 1, \tag{S37}$$
$$\vec{t}_\gamma^T\cdot\vec{P} = \Delta_1+\Delta_2-\Delta_4+P_{01|01}+P_{10|11}+1 \geqslant 1, \tag{S38}$$

其中，Δ_i 表示方程（3）-（6）中定义的信号传递特征。三个情形中的最后一个不等式，对于无信号行为成立，因为在这种情况下，$\Delta_i=0$ 对所有$i=1,\dots,8$ 均成立。

对于方程（30）中的代表元 $\vec{s}_\gamma$、以及 $\vec{s}_\delta$，我们可以写成

$$\vec{s}_\beta^T\cdot\vec{P} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{e}_7^T\cdot\vec{P}+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+1\right) \overset{\Delta=0}{=} \tfrac{1}{2}\left(\vec{e}_7^T\cdot\vec{P}+1\right) \geqslant \min\left\{1,\vec{e}_7^T\cdot\vec{P}\right\} \geqslant \min_{i=1,\dots,8}\left\{1,\vec{e}_i^T\cdot\vec{P}\right\}, \tag{S39}$$
$$\vec{s}_\gamma^T\cdot\vec{P} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{e}_2^T\cdot\vec{P}+\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-\Delta_4+1\right) \overset{\Delta=0}{=} \tfrac{1}{2}\left(\vec{e}_2^T\cdot\vec{P}+1\right) \geqslant \min\left\{1,\vec{e}_2^T\cdot\vec{P}\right\} \geqslant \min_{i=1,\dots,8}\left\{1,\vec{e}_i^T\cdot\vec{P}\right\}, \tag{S40}$$
$$\vec{s}_\delta^T\cdot\vec{P} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{e}_5^T\cdot\vec{P}+\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+1\right) \overset{\Delta=0}{=} \tfrac{1}{2}\left(\vec{e}_5^T\cdot\vec{P}+1\right) \geqslant \min\left\{1,\vec{e}_5^T\cdot\vec{P}\right\} \geqslant \min_{i=1,\dots,8}\left\{1,\vec{e}_i^T\cdot\vec{P}\right\}, \tag{S41}$$

其中，三个情形中的最后一个等式用到了无信号假设。每种情形中的倒数第二个不等式均由基本界$x+1\geqslant 2\min\{1,x\}$得出。

现在，我们回想一下，这些代表向量（g-、t- 和s-型向量）在方程（25）-（29）所定义的对称群下生成所有其余的无信号在对称变换下保持不变，因此方程（S36）-（S41）中的不等式可直接推广到全轨道[5]，即，

$$\vec{g}_i^T\cdot\vec{P} \geqslant 1, \qquad \text{for } i=1,\dots,16, \tag{S42}$$
$$\vec{t}_j^T\cdot\vec{P} \geqslant 1, \qquad \text{for } j=1,\dots,32, \tag{S43}$$
$$\vec{s}_k^T\cdot\vec{P} \geqslant \min_{i=1,\dots,8}\{1,\vec{e}_i^T\cdot\vec{P}\}, \qquad \text{for } k=1,\dots,64, \tag{S44}$$

对于所有无信号 $\vec{P}$。由此我们确立了方程（S35），从而完成了证明。

□

B.5. 解向量的普遍性

B.5.1. 解集 Q和 S的非冗余性

自然会有人问，相应解集中所有128 和120 个测度 Q 和 S 是否确实都不可或缺，也就是说，是否可以在不损失一般性的情况下舍弃其中任何一个向量。我们发现每个向量都发挥着不可或缺的作用，因为对于每个向量，都存在一种行为 $\vec{P}$，使得方程（21）或（22）中的最小值恰好由该向量唯一取得。

考虑公式（21）/（23）中的解集 Q，它由128个向量组成，每个向量的分量均为0或1。对于每个向量 $\vec{\mathrm{q}}\in\mathrm{Q}$，通过将 $\vec{\mathrm{q}}$中的所有0替换为1、所有1替换为0，并对结果进行均匀归一化，使得对每个x、y $=0$，1都有 $\sum_{ab}\vec{\mathrm{P}}^{(q)}$ abxy $=1$，从而构造出相应的行为 $\vec{\mathrm{P}}^{(q)}$。这一构造保证，对于每个这样的行为 $\vec{\mathrm{q}}\,\mathrm{T}\cdot\vec{\mathrm{P}}^{(q)}=0$；而对于任何其他向量 $\vec{\mathrm{q}}'\neq\vec{\mathrm{q}}$，都有 $\vec{\mathrm{q}}'\mathrm{T}\cdot\vec{\mathrm{P}}^{(q)}>0$（因为某个分量满足$\mathrm{q}_i=0$ 且$\mathrm{q}'\mathrm{i}=1$）。因此，公式（21）中的最小值由向量 $\vec{\mathrm{q}}$唯一取得，这表明解集 Q 中的每个元素对于解结构的完备性都是必不可少的。

对于解集 S 在方程(22)/(24) 中，我们得到类似的结构，只不过在 z-向量中，原本等于 1 的一个分量被替换为 2。应用与上文相同的构造（同时将 2也替换为 0），可以

[5] 作为一条技术性说明，回顾一下：置换矩阵的逆矩阵就是其转置。事实上，任意置换都可以写成若干对换的乘积，而这一结论对每个对换都成立。显然，这适用于方程 (25)-(29) 中的对称性，因为它们在 $\vec{P}$ 上的作用是置换。

验证对于每个向量 $\vec{q} \in \mathbb{S}$，都存在一种行为 $\vec{P}^{(q)}$，使得方程(22) 中的最小值由该向量唯一取得。因此，解集中的所有 120 向量 S 同样都是必要的。

B.5.2. 图4中采样方法的详情

可通过对随机选取的行为进行估算，分析解集 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{S}$ 中各个向量的重要性：分别统计各测度在方程（21）和（22）中唯一取得最小值的频率。我们对这些频率进行了数值计算，并汇总了每个向量类的结果，如图 4所示。

在我们的分析中，我们生成了 500,000 个随机行为 $\vec{P} \in \mathcal{P}$，得到以下结果（注意，局域性和无信号计算基于同一组向量）：

局域性

类别	案例数	%
f's	380,881	76.18
g's	86,744	17.35
t's	13,096	2.62
s's	19,069	3.81
e's	210	0.04

无信号

类别	案例数	%
f's	389,161	77.83
g's	91,363	18.27
t's	15,664	3.13
z's	3,812	0.76

生成的十六分量向量 $\vec{\mathrm{P}}$ 经过归一化，使得对于每个 x、y，$\sum_{ab} \mathrm{P}_{ab|xy} = 1$（见公式 (31)）。为实现这一约束，我们采样了四个相互独立的均匀狄利克雷分布 Dir(1,1,1,1)，分别对应每个四元组 $\{\mathrm{P}_{ab|00}\}$、$\{\mathrm{P}_{ab|01}\}$、$\{\mathrm{P}_{ab|10}\}$ 和 $\{\mathrm{P}_{ab|11}\}$。实际操作中，我们使用了 Python 中 NumPy 包的函数 'np.random.dirichlet'。

总体而言，这些百分比符合预期。请注意，就z解与s解的百分比而言，z向量与s向量一一对应且形式相同，区别仅在于：某个s向量中的一个1在相应的z向量中变为2。因此，一个z测度的取值可能大于其对应的s测度，从而使z度量更不容易达到最小值，因而最小化类别往往会从s迁移到f、g、t或z度量。显然，对于e度量，最小化者必须完全转移到其他类别。对于生成的数据集，下表给出了在从 $\mathbb{Q}$ （测量局域性）切换到 $\mathbb{S}$ （测量无信号）时，最小化向量测度改变类别的行为的确切计数。

从 $\mathbb{Q}$ 切换到 $\mathbb{S}$时类别间的迁移

类别变化	案例数
s 类到 f 类	8,131
s 类到 g 类	4,576
s 至 t	2,557
s 至 z	3,805
e 至 f	149
e 到 g	43
e 到 t	11
e 到 z	7

C部分：分析方法

C.1. 向量空间

在本节中，我们提供一种理解**定理2** 与3的替代方法，该方法基于对解的显式构造。这对于希望了解如何逐一识别这些解，并明确理解任意向量的局域／非信号分量形式的读者会有所帮助（这或许能为当前工作在线性规划方法不适用情形下的扩展提供启示）。尽管该方法并不构成完整的证明（因为在若干处偶尔需要进行修正），但它有助于洞察解空间的结构。请注意，相对于正文，我们在此改变了各项结果的推导顺序，因为我们所采用的构造方法在我们所采用的这一不同顺序下更容易加以说明。

考虑主论文结果部分开头所描述的情形。空间有四种可能的状态，i $= 1, \ldots, 4$；每种状态又会产生四种可能的结果，j $= 1, \ldots, 4$。用 v^{ij} 表示处于状态 i 时结果 j 的概率。我们设想一个 4×4 矩阵，并将索引 i 称为行号，将索引 j 称为列号。这里，条件概率 $P^{ab|xy}$ 记为 v^{ij}，其中 i $= 1, 2, 3$ 和 4 分别对应 (x $= 0$, y $= 0$), (x $= 0$, y $= 1$), (x $= 1$, y $= 0$) 和 (x $= 1$, y $= 1$)，而 j $= 1, 2, 3$ 和 4 分别对应 (a $= 0$, b $= 0$), (a $= 0$, b $= 1$), (a $= 1$, b $= 0$) 和 (a $= 1$, b $= 1$)。N

低维约束 ider th向量空间 空间 $\mathcal{P}$，由所有可能的 16 元向量 $\mathbf{v} = (v^{ij})_{i,j=1,\ldots,4}$ 表示。显然， ll

$$v_{ij} \geq 0 \tag{S45}$$

and

$$\sum_j v_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{S46}$$

这些是一般关联空间 $\mathcal{P}$ 所遵循的唯一限制。

我们考虑 $\mathcal{P}$ 的两个子空间。第一个是无信号空间 $\mathcal{P}_{NS}$。这里的向量以类似的方式记为 $\mathbf{u} = (u^{ij})_{i,j=1,\ldots,4}$，它们满足上述条件，此外还满足主论文方程（3-6）中的四个无信号条件，我们将其写为：

$$\begin{aligned} &u_{11} + u_{12} = u_{21} + u_{22}, \quad u_{31} + u_{32} = u_{41} + u_{42}, \\ &u_{11} + u_{13} = u_{31} + u_{33}, \quad u_{21} + u_{23} = u_{41} + u_{43}. \end{aligned} \tag{S47}$$

第二个子空间是局域空间 $\mathcal{P}_{Loc}$。这里的向量满足一般条件和无信号条件，此外还满足四个局域性条件，这些条件由主论文方程（7）中的不等式概括，并使用方程（8-11）中的贝尔 CHSH表达式，下面将其写为：

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & u_{12} + u_{13} + u_{22} + u_{23} + u_{32} + u_{33} - u_{42} - u_{43} \leq 2, \\ 0 \leq\ & u_{12} + u_{13} + u_{22} + u_{23} - u_{32} - u_{33} + u_{42} + u_{43} \leq 2, \\ 0 \leq\ & u_{12} + u_{13} - u_{22} - u_{23} + u_{32} + u_{33} + u_{42} + u_{43} \leq 2, \\ 0 \leq\ & -u_{12} - u_{13} + u_{22} + u_{23} + u_{32} + u_{33} + u_{42} + u_{43} \leq 2. \end{aligned} \tag{S48}$$

该 闭包 度是从向量 $\mathbf{v}$ 到向量 $\mathbf{u}$ 的最大值 $p \in [0, 1]$，使得

$$v_{ij} = p u_{ij} + (1 - p) w_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, 4 \tag{S49}$$

对于某个行为 $\mathbf{w} = (w^{ij})_{i,j=1,\ldots,4} \in \mathcal{P}, p \in [0, 1]$

注意，由于 $\sum_j v_{ij} = 1$ 和 $\sum_j u_{ij} = 1$，对于满足（$w_{ij} = 1$ 式（S49）的任意向量，我们自动有 $\sum_j w_{ij} = 1$。因此，我们只需找出使所有 w^{ij} 项均为非负数的 p 的最大值。重新整理（S49）可得

$$w_{ij} = \frac{v_{ij} - p u_{ij}}{1 - p} \geq 0 \Rightarrow \tag{S50}$$

$$p \leq \frac{v_{ij}}{u_{ij}} \tag{S51}$$

对于所有正的 u^{ij}。对于 $u_{ij} = 0$ （或者甚至取负值，正如我们稍后在扩展空间 $\mathcal{P}_e$中所考虑的那样），w^{ij} 式（S49）中的各项显然都是非负的。

因此，p 的最大此类取值，即 $\mathbf{v}$ 与$\mathbf{u}$之间的接近度 ，为

$$p(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \min_{i,j} \left(\frac{v_{ij}}{u_{ij}} \right). \tag{S52}$$

类似地，我们可以通过在接近度 的焦点向量与目标空间的所有元素之间取最大值，来定义向量与向量空间的接近度 。例如，$\mathbf{v}$ 与 $\mathcal{P}_{NS}$ 之间的接近度为

$$p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{NS}) = \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{P}_{NS}} p(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{S53}$$

向量与非信号空间（或局域空间）之间的接近度，即为主论文中定义的无信号分数（或局域分数）。

无信号分数 μ_{NS} （见主论文的**定义2** ）即为

$$\mu_{NS} = p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{NS}). \tag{S54}$$

类似地，局域分数（见主论文的**定义1** ）为

$$\mu_L = p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{Loc}). \tag{S55}$$

请注意，向量与其所属空间之间的接近度，例如对于任意向量 $p(\mathbf{v}, \mathcal{P})$ （或当$\mathbf{v}$ 为局域向量时，$p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{NS})$ ），为 1。

C.2. 向量空间参数化

空间 $\mathcal{P}$ 很容易进行一般性表示，即所有非负且满足（S46）中四个求和条件的向量。这给出了一个 12 维空间（每行有三个自由元素，因为第四个元素由其余元素确定，以确保总和为一）。

空间 p集 $\mathcal{P}_{NS}$ 和 $\mathcal{P}_{Loc}$ 更为复杂 p，我们发现采用以下参 g p数化很有用。

对于 $\mathcal{P}_{NS}$，我们还需满足来自（S47）的四个附加条件。这些是等式约束，因此会使空间的维数进一步减少4维，降至8。于是我们的参数化为：

$$\begin{aligned}
u_{11} &= 1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8, \quad u_{12} = \lambda_2 + \lambda_4, \quad u_{13} = \lambda_8 - \lambda_6, \quad u_{14} = \lambda_6; \\
u_{21} &= 1 - \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_8, \quad u_{22} = \lambda_1 + \lambda_3, \quad u_{23} = \lambda_8 - \lambda_5, \quad u_{24} = \lambda_5; \\
u_{31} &= 1 - \lambda_2 - \lambda_6 - \lambda_7, \quad u_{32} = \lambda_2 + \lambda_6, \quad u_{33} = \lambda_7 - \lambda_4, \quad u_{34} = \lambda_4; \\
u_{41} &= 1 - \lambda_1 - \lambda_5 - \lambda_7, \quad u_{42} = \lambda_1 + \lambda_5, \quad u_{43} = \lambda_7 - \lambda_3, \quad u_{44} = \lambda_3.
\end{aligned} \tag{S56}$$

可以看到，采用这种参数化后，（S46）和（S47）中的所有条件都会自动满足，定义该空间的唯一附加条件是不等式约束：

$$u_{ij} \geq 0. \tag{S57}$$

我们注意到，定义 $\mathcal{P}_{NS}$的一个超空间也很方便，将其记为 $\mathcal{P}_e$。该空间与上述空间相同，但不包含约束（S57），允许 u^{ij} 向量违反标准的概率限制。在考虑最大信号传递及其与主论文和下文中发展的空间论证之间的关系时，这一点很有用（见引理1）。

对于 $\mathcal{P}_{Loc}$，我们同样有来自（S47）的四个约束。这些是不等式约束，因此虽然它们会缩小空间的大小，却不会降低其维数。于是，我们只需采用（S56）中的相同参数化，并将约束（S48）用我们的参数改写为：

$$\begin{aligned}
0 \leq \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_8 - \lambda_6 \leq 1, \\
0 \leq \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_8 - \lambda_5 \leq 1, \\
0 \leq \lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_7 - \lambda_4 \leq 1, \\
0 \leq \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_7 - \lambda_3 \leq 1,
\end{aligned} \tag{S58}$$

以及（S57）约束。

C.3. 最大信号传递

将非信号传递方程（S47）与行求和方程结合起来，我们恰好得到八组向量元素，它们的和在无信号传递时必定等于 1 （利用参数化（S56）很容易验证）。它们是：

$$\begin{aligned}
f_1 &= v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{24},\\
f_2 &= v_{13} + v_{14} + v_{21} + v_{22},\\
f_3 &= v_{31} + v_{32} + v_{43} + v_{44},\\
f_4 &= v_{33} + v_{34} + v_{41} + v_{42},\\
f_5 &= v_{11} + v_{13} + v_{32} + v_{34},\\
f_6 &= v_{12} + v_{14} + v_{31} + v_{33},\\
f_7 &= v_{21} + v_{23} + v_{42} + v_{44},\\
f_8 &= v_{22} + v_{24} + v_{41} + v_{43}.
\end{aligned} \tag{S59}$$

这些向量和就是主论文中介绍的八个f-度量。请注意，相应的算子称为f-向量等。

我们注意到，根据上述内容

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4 = f_5 + f_6 = f_7 + f_8 = 2. \tag{S60}$$

很容易看出，只有一种一般形式，且每一种都可以通过对f_1进行简单重新编号得到。我们将在本**补充信息** 的最后一部分（D 部分）对此进行说明。

因此，在不失一般性的前提下，我们可以考虑任意一个四元素度量，以证明下面的引理1。

当不存在信号传递时，最大信号传递（Δ 见主论文中的公式（2））为0。当存在信号传递时，该值大于0，其表达式由下述定理的第一条陈述给出。第二条陈述则说明，最大信号传递等价于 1 减去与扩展非信号传递空间的接近度$\mathcal{P}_e$。

引理1a （最大信号传递）。
$$\Delta = 1 - \min\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$$

证明。
由主论文中的方程（3-6）可得：

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= v_{11} + v_{12} - v_{21} - v_{22} = f_1 - 1 = 1 - f_2,\\
\Delta_2 &= v_{31} + v_{32} - v_{41} - v_{42} = f_3 - 1 = 1 - f_4,\\
\Delta_3 &= v_{11} + v_{13} - v_{31} - v_{33} = f_5 - 1 = 1 - f_6,\\
\Delta_4 &= v_{21} + v_{23} - v_{41} - v_{43} = f_7 - 1 = 1 - f_8.
\end{aligned} \tag{S61}$$

每对 f_1, f_2、f_3, f_4、f_5, f_6 和 f_7, f_8 中，恰有一个小于 1（除非两者都等于 1）。因此， Δ_1 的模为 1 减去f_1 与f_2, 中较小者；其他 Δ_i 项也同理。由于 Δ 是四个 Δ_i 项的模中的最大值，引理1a得证。

引理1b （最大信号传递与扩展非信号传递空间）。$p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_e) = \Delta$。

证明。
a) 首先，我们证明$p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_e) \le f_i$。我们给出代表性测度$f_1$ 的计算，但它们对所有度量都相同。由（S51）可知，对于接近度p 到 $\mathcal{P}_e$ 的任意元素，我们有

$$p \le \frac{v_{11}}{1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8}, p \le \frac{v_{12}}{\lambda_2 + \lambda_4}, p \le \frac{v_{23}}{\lambda_8 - \lambda_5}, p \le \frac{v_{24}}{\lambda_5}, \tag{S62}$$

当右侧的分母为正时成立，而分母不为正时则没有相应的条件。整理后得到

$$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8 \le \frac{v_{11}}{p}, \lambda_2 + \lambda_4 \le \frac{v_{12}}{p}, \lambda_8 - \lambda_5 \le \frac{v_{23}}{p}, \lambda_5 \le \frac{v_{24}}{p}. \tag{S63}$$

我们注意到，当右侧各项为负或为零时，上述条件显然成立。将式（S96）中的四项相加，得到

$$1 \leq \frac{v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{24}}{p} \Rightarrow p \leq f_1. \tag{S64}$$

因此，空间中任意向量（正文中我们使用术语“行为”）的接近度量以上界f_1, 为界，所以对空间本身的接近度同样以上界f_1, 为界，即$p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_e) \leq f_1$，更一般地，我们有

$$p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_e) \leq \min\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}. \tag{S65}$$

b) 现在不失一般性地假设：
$\min\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\} = f_1$。现在我们找到一个向量 u，使得接近度值 $p(v, u) = f_1$ 可以达到。这将意味着 $p(v, \mathcal{P}_e) \geq \min\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$，从而与上文 a) 相结合即可完成证明。

对 f度量f_1 的四个组成部分求解$v^{ij} = u^i j p$，我们得到

$$\lambda_5 = \frac{v_{24}}{p}, \lambda_8 = \frac{v_{23}+v_{24}}{p}, \lambda_2 + \lambda_4 = \frac{v_{12}}{p} \tag{S66}$$

and

$$p = v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{24} = f_1. \tag{S67}$$

因此，对于这四个组成部分，不等式（S51）以等式成立。为了表明这给出一个满足 $p(\mathbf{v},\mathbf{u}) = f_1$, 的向量，我们需要证明其余的 12 项也都满足（S51）（无论是否取等）。

为此，我们需要适当地选取 λ_i 的剩余值。这里有八种不同情况，具体取决于f_3、f_4, f_5、f_6, f_7 或f_8 中哪一个小于 1（回想一下，由于三个数对的和均为 2，除非它们等于 1，否则每种情况下恰好只有一个小于 1）。

我们选取的构造如下：
从第 3 行或第 4 行中任选一行。从该行中选取一个元素，使其满足不等式，其余三个元素满足等式。然后，从第 3 行和第 4 行中的另一行里，选取第一个和第三个元素，或第二个和第四个元素，使它们满足不等式，其余两个元素满足等式。这样实际上有 16 种可能的选择，但要得到所有相关情况，我们只需从中选取 8 种（无论选哪一种，上述两种选择都会导出同一种情况）。

我们将展示八种情况中的四种，由此说明这些解的规律。

	v_{i1}	v_{i2}	v_{i3}	v_{i4}
行 3	$>$	$=$	$>$	$=$
行 4	$>$	$=$	$=$	$=$

表 I. 情形 A：当$f_3 f_5$ 和f_7 小于 1 时，此情形可得到适当构造。对于情形 A，我们得到以下参数选择：$\lambda_1 = (v_{42} - v_{24})/p$, $\lambda_3 = v_{44}/p$, $\lambda_4 = v_{34}/p$, $\lambda_6 = (v_{32} + v_{34} - v_{12})/p, \lambda_7 = (v_{43} + v_{44})/p$.

	v_{i1}	v_{i2}	v_{i3}	v_{i4}
行 3	$>$	$=$	$=$	$=$
行 4	$>$	$=$	$>$	$=$

表 II. 情形 B：当$f_4 f_5$ 和f_7 小于 1 时，此情形可得到适当构造。对于情形 B，我们得到以下参数选择：$\lambda_1 = (v_{42} - v_{24})/p$, $\lambda_3 = v_{44}/p$, $\lambda_4 = v_{34}/p$, $\lambda_6 = (v_{32} + v_{34} - v_{12})/p, \lambda_7 = (v_{33} + v_{34})/p$.

从表 I–IV 可以看出这些情况之间的关系。B 是将 A 中第 3 行和第 4 行的符号对调，这使 f_5/ f_6 和 f_7/ f_8 的关系保持不变，但会对调 f_3/ f_4 这一对。以 A 为基础，D 改变了第 3 行中的那对不等式，但保持第 4 行不变（注意，此时这一行只有一个不等式）。这会对调 f_5/ f_6 的关系，但其他关系保持不变。C 将第 4 行中的不等式元素相对于 D 向前移动一位，其余均保持不变。这会对调 f_7/ f_8 的关系，而其他关系保持不变。

	v_{i1}	v_{i2}	v_{i3}	v_{i4}
行 3	=	>	=	>
行 4	=	>	=	=

表 III。情况 C：当 f_3,f_6 和 f_8 小于 1 时，此情况可得到适当构造。对于情况 C，我们得到以下参数选择： $\lambda_1 = (v_{11} + v_{12} + v_{23} - v_{41} - v_{43} - v_{44})/p, \lambda_3 = v_{44}/p$, $\lambda_4 = (v_{43} + v_{44} - v_{33})/p$, $\lambda_6 = (v_{11} + v_{23} + v_{24} - v_{31} - v_{33})/p, \lambda_7 = (v_{43} + v_{44})/p$。

	v_{i1}	v_{i2}	v_{i3}	v_{i4}
行 3	=	>	=	>
行 4	>	=	=	=

表 IV. 情形 D：当 f_3,f_6 和 f_7 均小于 1 时，此情形可得到适当构造。对于情形 D，我们得到以下参数选择： $\lambda_1 = (v_{42} - v_{24})/p, \lambda_3 = v_{44}/p$, $\lambda_4 = (v_{43} + v_{44} - v_{33})/p, \lambda_6 = (v_{11} + v_{23} + v_{24} - v_{31} - v_{33})/p, \lambda_7 = (v_{43} + v_{44})/p$。

向量 v^{ij}	局部参数化 u^{ij}	情形 A	情形 B	情况 C	情形 D
v_{11}	$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8$	o	o	o	o
v_{12}	$\lambda_2 + \lambda_4$	o	o	o	o
v_{13}	$\lambda_8 - \lambda_6$	$f_5 - f_1$	$f_5 - f_1$	$1 - f_6$	$1 - f_6$
v_{14}	λ_6	$1 - f_5$	$1 - f_5$	$f_6 - f_1$	$f_6 - f_1$
v_{21}	$1 - \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_8$	$f_7 - f_1$	$f_7 - f_1$	$1 - f_8$	$f_7 - f_1$
v_{22}	$\lambda_1 + \lambda_3$	$1 - f_7$	$1 - f_7$	$f_8 - f_1$	$1 - f_7$
v_{23}	$\lambda_8 - \lambda_5$	o	o	o	o
v_{24}	λ_5	o	o	o	o
v_{31}	$1 - \lambda_2 - \lambda_6 - \lambda_7$	$f_3 - f_1$	$1 - f_1$	o	o
v_{32}	$\lambda_2 + \lambda_6$	o	o	$f_3 - f_1$	$f_3 - f_1$
v_{33}	$\lambda_7 - \lambda_4$	$1 - f_3$	o	o	o
v_{34}	λ_4	o	o	$1 - f_3$	$1 - f_3$
v_{41}	$1 - \lambda_1 - \lambda_5 - \lambda_7$	$1 - f_1$	$f_4 - f_1$	o	$1 - f_1$
v_{42}	$\lambda_1 + \lambda_5$	o	o	$1 - f_1$	o
v_{43}	$\lambda_7 - \lambda_3$	o	$1 - f_4$	o	o
v_{44}	λ_3	o	o	o	o

表V。偏差a 高于目标值，对于 A、B、C 和 D 四种情况中的每一种，针对表I-IV中的构造 .

从表 V可以看出，对于上述四种情况中的每一种，目标值 v^{ij} 比相应的 $u^{ij}p$ 项高出多少。

C.4. 向量测度

对于引理1，该构造显然成立，因为空间 $\mathcal{P}_e$ 不会因概率约束而引入额外的界，并且 λ_i 参数可以任意取值。对于空间 $\mathcal{P}_{NS}$ 和 $\mathcal{P}_{Loc}$，则存在额外约束，因此更难刻画与这两个空间的接近度量。注意，我们有：

$$\mathcal{P}_{Loc} \subsetneq \mathcal{P}_{NS} \subsetneq \mathcal{P}_e. \tag{S68}$$

因此，对于 $\mathcal{P}_{NS}$，我们需要 120 个测度（见主论文中的定理2），而不是八个形式均为 (S59) 的接近度量；这些测度可分为四种不同形式，其中两种还可进一步细分为子类别，而每组中的不同测度之间的关系与之前一样，只是简单重新编号。对于 $\mathcal{P}_{Loc}$，我们需要 128 个测度（见主论文中的定理2），其中包括两种新的不同形式，以及定理3中针对 $\mathcal{P}_{NS}$的大多数形式。总共有十一种不同的类别，我们将其标记为 F、E、G、S_1,S_2,S_3, T_1, T_2, Z_1, Z_2, Z_3。在每个类别中，所有元素都可通过主论文中的对称性 (25-29) 相互等价。

我们注意到，在主论文中，编号尽可能保持简单。例如，f度量的编号为f_1, ……、f_8,，s度量的编号为s_1,……、s_{64}，以此类推。在下文中，随着我们构造不同的度量，有时使用不同的编号会更方便。因此，尽管f度量和e度量使用与主论文相同的单个下标，g度量和t度量使用两个下标，而s-

度量和z度量使用三个下标。在所有情况下，都可以通过按照自然方式按递增顺序重新标记度量，将论文中的简单数值排序转换为下面的排序，使得s_{111} 是s_1, s_{112} 是s_2 ，以此类推。

这些接近度量如下所述：

(i) 首先，F，即上文（S59）中的八个测度的集合。我们考虑的代表性测度仍为f_1, 。

(ii) 第二个集合E 是（S69）中列出的以下八个测度：

$$e_1 = v_{11} + v_{14} + v_{22} + v_{23} + v_{32} + v_{33} + v_{42} + v_{43}, e$$
$$_2 = v_{12} + v_{13} + v_{21} + v_{24} + v_{31} + v_{34} + v_{41} + v_{44}, e$$
$$_3 = v_{12} + v_{13} + v_{21} + v_{24} + v_{32} + v_{33} + v_{42} + v_{43}, e$$
$$_4 = v_{11} + v_{14} + v_{22} + v_{23} + v_{31} + v_{34} + v_{41} + v_{44}, e$$
$$_5 = v_{12} + v_{13} + v_{22} + v_{23} + v_{31} + v_{34} + v_{42} + v_{43}, e$$
$$_6 = v_{11} + v_{14} + v_{21} + v_{24} + v_{32} + v_{33} + v_{41} + v_{44}, e$$
$$_7 = v_{12} + v_{13} + v_{22} + v_{23} + v_{32} + v_{33} + v_{41} + v_{44}, e$$
$$_8 = v_{11} + v_{14} + v_{21} + v_{24} + v_{31} + v_{34} + v_{42} + v_{43}. \quad \text{(S69)}$$

(iii) 第三，有一组G 16个含有5个元素的度量。我们按如下方式描述它们。任选16个v^{ij}项中的一个。它恰好会出现在两个f_i度量中（一个来自f_1-f_4,，另一个来自f_5- f_8）。我们将纳入原测度，以及这两个测度各自另一行中的两个元素（每个测度两个）。

例如，选择代表性向量元素v_{11}。它属于f_1 和f_5。回想一下，$f_1 = v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{24}, f_5 = v_{11} + v_{13} + v_{32} + v_{34}$。

因此，我们选择v_{11}, v_{23}, v_{24}, v_{32} 和v_{34}。这给出了测度：
$g_{11} = v_{11} + v_{23} + v_{24} + v_{32} + v_{34}$。
类似地，g^{ij} 是从v^{ij}开始，按照相同过程得到的测度。所有测度都可以通过对g_{11}进行简单重新编号得到。

(vi) 第四类是另一组包含 6 个元素的测度，这次共有 32 组。具体如下：选取一对没有公共元素的 f_i 测度。这样的数对共有八个（每个 f_1 和 f_2 分别与每个f_3 和 f_4，配对，以及每个 f_5 和 f_6 分别与每个 f_7 和 f_8 配对）。从第一个测度中选取一行，再从第二个测度中选取与之非配对的行（因此，所选行中必须包含第 1 行和第 4 行中的一行，以及第 2 行和第 3 行中的一行）。这样选出的四个元素要么只来自两列，要么来自全部四列。
第一个子情况T_1 是只有两列：从其余各行中各选取一个元素，且这些元素不能位于同一列。这给出了 4x2x2=16 种情况。

例如，选择测度 f_1 和 f_3, $f_1 = v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{24}$ ，以及 $f_3 = v_{31} + v_{32} + v_{43} + v_{44}$。于是，我们的四种选择为：

$t_{11} = v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{31} + v_{32} + v_{44}, t_{12} = v_{11} +$
$v_{12} + v_{24} + v_{31} + v_{32} + v_{43}, t_{13} = v_{11} + v_{23} + v_{24} +$
$v_{32} + v_{43} + v_{44}, t_{14} = v_{12} + v_{23} + v_{24} + v_{31} + v_{43} +$
v_{44}.

在上述编号中，第一个索引表示所涉及的f_i 项数对，按自然数顺序 1 到 8 列出（这些数对为 1,3；1,4；2,3；2,4；5,7；5,8；6,7；6,8）；第二个索引则表示对应的所选行及最后两个条目，同样按自然顺序列出，如上文t^{1j} 向量和所示。

第二种子情况T_2 是拥有全部四列的情况，此时我们从每个剩余行中选取一个元素，这些元素必须位于配对列中（即第 1 列和第 4 列，或第 2 列和第 3 列）。这同样会得到 4x2x2=16 种情况。例如，选择向量和f_1 和f_4, $f_1 = v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{24}$ 以及$f_4 = v_{33} + v_{33} + v_{41} + v_{42}$。那么，我们的四种选择为：

$t_{21} = v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{33} + v_{34} + v_{42}, t_{22} = v_{11} +$
$v_{12} + v_{24} + v_{33} + v_{34} + v_{41}, t_{23} = v_{11} + v_{23} + v_{24} +$
$v_{34} + v_{41} + v_{42}, t_{24} = v_{12} + v_{23} + v_{24} + v_{33} + v_{41} +$
v_{42}.

这种形式的每个测度又都是t_{11} 或t_{21}的简单重新编号。

(v) 第五，有一组包含六个元素的 64 个度量，可描述如下：从 16 个v^{ij} 项中选一个。如上所述，该项恰好出现在两个f_i 度量中。我们将纳入原项，以及这两个度量中同一行的两个元素（每个度量各一个）。然后，从这两个度量的其他各行中分别选取一个剩余元素（共有两次两种

可能）。现在，从未使用的行中选取一个元素，使第 1 列和第 4 列中的元素总数相等，且第 2 列和第 3 列中的元素总数相等。符合条件的选法有一种。由此得到 16x4x1=64 个度量。

例如，选择v_{11}，，它属于f_1 和f_5。由于$f_1 = v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{24}, f_5 = v_{11} + v_{13} + v_{32} + v_{34}$，，因此我们从第 1 行中选取$v_{11}, v_{12}$ 和v_{13} 。这样，其他两个纳入的行可产生四种组合：v_{23},v_{32} ；为了使最后一行的第 1 列和第 4 列相等，我们需要v_{44}，

v_{23},v_{34} ，我们需要v_{42},v_{24},v_{32} ，
并且我们需要v_{43},v_{24},v_{34} ，还
需要v_{41}。
我们将上述度量分别记为$s_{111}, s_{112}, s_{113}$ 和s_{114} （通常，前两个指标将
表示最初选定元素的指标）。例如，$s_{111} = v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{23} + v_{32} + v_{44}$。
在上面每组四个元素中，有一个满足所选的前两个元素都不在未使用的列中，两个满足其中恰有一个在未使用的列中，还有一个满足两个元素都在未使用的列中。这三种不同情况分别记为S_1,S_2 和S_3 ；因此，这三个子情况分别有 16、32 和 16 个元素。64 个测度可通过对s_{111},s_{112} 或s_{114}进行简单重新编号得到。

(vi) 最后，还有一组由 64 个测度组成、每个测度含有六个元素的集合，与上文第五组密切相关。这里，每个向量的首个原始v^{ij} 项中，系数都只是 2。因此，所有情况下$z^{ijk} = s_{ijk} + v^{ij}$。

至于f_i 测度，出于类似原因，其他测度之间也存在一些关系。这里不一一列举，但值得注意的是：

$$e_1 + e_2 = e_3 + e_4 = e_5 + e_6 = e_7 + e_8 = 4. \tag{S70}$$

C.5. 求无信号分数

除了**引理1**之外，主论文还包含三个定理。**定理1** 是先前研究中的结果，因此我们的两个主要结果是**定理2** 和**定理3**。虽然按照主论文的叙述，按此顺序介绍它们是合理的，但对于下文关于解的构造的各节，按相反顺序讨论更为合理。因此，我们在此从无信号空间和**定理3**开始。

非信号空间由等式约束（S47）以及与概率定律（S57）相关的约束刻画。因此，我们的 11 个类别中有七个，F、G、T_1, T_2, Z_1, Z_2, Z_3。

定理3。
$p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{NS}) =$最小值$\{f_1, \ldots, f_8, g_1, \ldots g_{16}, t_1, \ldots t_{32}, z_1, \ldots, z_{64}\}$.

下面我们给出一种构造，用于找出非信号空间中达到适当接近度的点，并按照可能实现该接近度的不同度量逐项列出。

a) 首先，我们给出一种方法，证明 $p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{NS})$ 被所有 120 种度量从上界定；这有助于深入理解这些解，而正文中的证明无法提供这一点。对于每种情况，我们只针对一个单独的情形给出证明，但通过前面提到的简单重新编号，这些证明可以推广到其他情形。

(i) $p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{NS}) \leq f_i$。这显然成立，因为 $p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_e) \leq f_i$ 且 $\mathcal{P}_{NS}$ 是 $\mathcal{P}_e$的子空间。
(ii) $p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{NS}) \leq g^{ij}$。我们对 $g_{11} = v_{11} + v_{23} + v_{24} + v_{32} + v$进行计算 34.
根据 (S51)，我们知道，对于与任意 $\mathcal{P}_{NS}$中的元素的接近度 p ，有：

$$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8 \leq \frac{v_{11}}{p}, \lambda_8 - \lambda_5 \leq \frac{v_{23}}{p}, \lambda_5 \leq \frac{v_{24}}{p},$$
$$\lambda_2 + \lambda_6 \leq \frac{v_{32}}{p}, \lambda_4 \leq \frac{v_{34}}{p}. \tag{S71}$$

将不等式两边的所有项相加，得到：

$$1 + \lambda_6 \leq \frac{g_{11}}{p}. \tag{S72}$$

我们知道 $\lambda_6 = u_{14}$ ，因此它非负。所以

$$1 \leq \frac{g_{11}}{p} \Rightarrow p \leq g_{11}. \tag{S73}$$

其余15 个项的计算方式类似，与（S72）等价的左侧为 $1 + u_{ik}$ ，其余不同的15 u_{ik} 项依次类推。注意，u_{ik} 项的第二个指标与g^{ij}不同。它是同一行中的配对项，因此这里有g_{11} 和u_{14}。

（iii）p（$\mathbf{v}$，$\mathcal{P}_{NS}$）$\leq t^{ij}$。对于T_1，我们对$t_{11} = v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{31} + v_{32} + v_{44}$，根据（S51）可知：

$$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8 \leq \frac{v_{11}}{p}, \lambda_2 + \lambda_4 \leq \frac{v_{12}}{p}, \lambda_8 - \lambda_5 \leq \frac{v_{23}}{p},$$
$$1 - \lambda_2 - \lambda_6 - \lambda_7 \leq \frac{v_{31}}{p}, \lambda_2 + \lambda_6 \leq \frac{v_{32}}{p}, \lambda_3 \leq \frac{v_{44}}{p}. \tag{S74}$$

将不等式两边的所有项相加，得到：

$$1 + (1 - \lambda_5 - \lambda_7 + \lambda_3) \leq \frac{t_{11}}{p}. \tag{S75}$$

我们知道 $1 - \lambda_1 - \lambda_5 - \lambda_7 = u_{41}$ 且 $\lambda_1 + \lambda_3 = u_{22}$，因此它们的和，即（S78）左侧括号中的项，是非负的。因此

$$1 \leq \frac{t_{11}}{p} \Rightarrow p \leq t_{11}. \tag{S76}$$

对其余 15 项的计算类似，与（S75）等价的左侧为 1 加上两个 u_{ik} 项之和。它们同样是同一行中孤立元素（此次为多个）的配对项。因此，对于上述情况，我们有 v_{23} 以及 v_{44} 从而得到 u_{22} 以及 u_{41}。

对于 T_2，我们对 $t_{21} = v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{33} + v_{34} + v_{42}$ 进行计算。现在我们得到

$$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8 \leq \frac{v_{11}}{p}, \lambda_2 + \lambda_4 \leq \frac{v_{12}}{p}, \lambda_8 - \lambda_5 \leq \frac{v_{23}}{p},$$
$$\lambda_7 - \lambda_4 \leq \frac{v_{33}}{p}, \lambda_4 \leq \frac{v_{34}}{p}, \lambda_1 + \lambda_5 \leq \frac{v_{42}}{p}. \tag{S77}$$

将不等式两边的所有项相加，得到：

$$1 + (\lambda_1 + \lambda_7) \leq \frac{t_{21}}{p}. \tag{S78}$$

我们知道 $\lambda_1 + \lambda_3 = u_{22}$ 且 $\lambda_7 - \lambda_3 = u_{43}$，因此它们的和，即（S78）左侧括号中的项，是非负的。因此

$$1 \leq \frac{t_{21}}{p} \Rightarrow p \leq t_{21}. \tag{S79}$$

(iv) $p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{NS}) \leq z^{ijk}$。对于情形 Z_1，我们计算 $z_{111} = 2v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{23} + v_{32} + v_{44}$。根据（S51），我们知道：

$$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8 \leq \frac{v_{11}}{p}, \lambda_2 + \lambda_4 \leq \frac{v_{12}}{p}, \lambda_8 - \lambda_6 \leq \frac{v_{13}}{p},$$
$$\lambda_8 - \lambda_5 \leq \frac{v_{23}}{p}, \lambda_2 + \lambda_6 \leq \frac{v_{32}}{p}, \lambda_3 \leq \frac{v_{44}}{p}. \tag{S80}$$

将不等式两边的所有项相加，得到：

$$1 + (1 - \lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_3) \leq \frac{z_{111}}{p}. \tag{S81}$$

根据（S57），我们知道，（S81）中的括号项是三个非负项之和 $(1 - \lambda_1 - \lambda_5 - \lambda_7) + (\lambda_1 + \lambda_3) + (\lambda_7 - \lambda_4) = u_{41} + u_{22} + u_{33}$。因此

$$1 \leq \frac{z_{111}}{p} \Rightarrow p \leq z_{111}. \tag{S82}$$

其余15 项的计算类似，在每种情况下，括号内的项均为非负项。对于情形 Z_2，我们对 $z_{112} = 2v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{23} + v_{34} + v_{42}$进行计算。根据（S51），我们知道 th at:

$$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8 \leq \frac{v_{11}}{p}, \lambda_2 + \lambda_4 \leq \frac{v_{12}}{p}, \lambda_8 - \lambda_6 \leq \frac{v_{13}}{p},$$
$$\lambda_8 - \lambda_5 \leq \frac{v_{23}}{p}, \lambda_4 \leq \frac{v_{34}}{p}, \lambda_1 + \lambda_5 \leq \frac{v_{42}}{p}. \tag{S83}$$

将不等式两边的所有项相加，得到：

$$1+(1-\lambda_2+\lambda_1-\lambda_6)\leq\frac{z_{112}}{p}. \tag{S84}$$

由（S57）可知，（S84）中括号内的项是三个非负项之和 $(\lambda_7-\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_3)+(1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7)=u_{43}+u_{22}+u_{31}$。因此

$$1\leq\frac{z_{112}}{p}\Rightarrow p\leq z_{112}. \tag{S85}$$

其余 31 项的计算类似。
对于情形 Z_3，我们计算 $z_{114}=2v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{24}+v_{34}+v_{41}$。由（S51）可知：

$$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8\leq\frac{v_{11}}{p},\lambda_2+\lambda_4\leq\frac{v_{12}}{p},\lambda_8-\lambda_6\leq\frac{v_{13}}{p},$$
$$\lambda_5\leq\frac{v_{24}}{p},\lambda_4\leq\frac{v_{34}}{p},1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7\leq\frac{v_{41}}{p}. \tag{S86}$$

将不等式两边的所有项相加，得到：

$$1+(2-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7-\lambda_8)\leq\frac{z_{114}}{p}. \tag{S87}$$

由（S57）可知，（S87）中括号内的项是三个非负项之和 $\lambda_3+(1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8)+(1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7)=u_{44}+u_{21}+u_{31}$。因此

$$1\leq\frac{z_{114}}{p}\Rightarrow p\leq z_{114}. \tag{S88}$$

其余 15 项的计算类似。

b) 现在我们说明，当五个类别中各有一个接近度量取最小值时，如何达到该界。需要指出，这并非完整证明，因为有时需要进行“解的微调”（将在适当位置说明）。

(i) 我们从 f_i 度量开始。共有八个度量，而引理1中的构造对每个度量都涉及八种情形。我们展示 f_1 的处理过程，以及 f_3, f_5 和 f_7 小于 1 时的情形。因此，按照引理1的证明，我们考虑情形 A 中的局部向量。我们需要证明，当 f_1 是全部 120 个接近度量中的最小值时，也就是 $p=f_1$，（并且 f_3, f_5, f_7 也小于 1）时，所指定的解属于适当的空间。在上文中，我们着重于满足这些条件。实际上，有些条件可以留出充分裕度，使得超出量大于原目标，从而相应的 u^{ij} 项为负。在允许这类项的空间 $\mathcal{P}_e$ 中，这不是问题，但在这里则不允许出现这种情况。

然后，我们需要将解“微调”回该空间。每种情形的处理过程都类似。这里，我们需要处理的潜在元素，是表V中情形 A 列里取值非零的那些元素。如何调整 λ_i 的值，可以通过观察该列中对应于零的条目来确定；这些值因此无法增大。从该列底部开始，λ_3 只能减小，λ_7 也只能减小，且至少要减小 λ_3那么多。$\lambda_1+\lambda_5$ 只能减小。λ_5 由原始设置固定，以达到目标，因此 λ_1 只能减小。λ_4 只能减小。$\lambda_2+\lambda_6$ 只能减小。根据达到目标的原始要求，我们知道 $\lambda_2+\lambda_4$ 是固定的，因此，由于 λ_4 只能减小，λ_2 就只能增大，进而 λ_6 只能减小。我们知道，λ_8 由于原始设置而固定。因此，我们可以沿不同方向进行调整，将解微调回正确位置。

何时能够做到这一点？由于我们只能减小 λ_6，这意味着 $v_{14}\geq 1-f_5$, as u_{14} 必须已经是非负的（我们无法增大它）。$v_{14}-(1-f_5)=v_{14}+v_{11}+v_{13}+v_{32}+v_{34}-1=v_{32}+v_{34}-v_{12}=g_{11}-f_1\geq 0$，因此这一条件成立。随后，我们最多可以将 $\lambda_6 p$ 减小 $g_{11}-f_1$,，从而确保 u_{13} 也为非负。对 $\lambda_1+\lambda_3$ 也可作类似论证（其总和最多可以减小 $v_{42}+v_{44}-v_{24}=g_{23}-f_1$,，进而确保 u_{21} 和 u_{22} 都为正）。随后可以适当调整其余三个自由参数，将其他三种情况中的任意一种移入正确空间。

（ii）现在考虑z^{ijk} 度量，从Z_1 开始并选择z_{111}。对于该测度，我们需要使来自（S80）的条件以等式得到满足。由于此处$p=z_{111}$，共有八个不同的方程与八个变量。由此得到唯一的一组 λ_i 值，如表VI所示。

λ_1	$-v_{44}/p$
λ_2	$-(v_{11}+v_{23}+v_{44})/p$
λ_3	v_{44}/p
λ_4	$(v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{44})/p$
λ_5	$(v_{11}+v_{13}+v_{32}+v_{44})/p$
λ_6	$(v_{11}+v_{23}+v_{32}+v_{44})/p$
λ_7	$(v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{44})/p$
λ_8	$(v_{11}+v_{13}+v_{23}+v_{32}+v_{44})/p$

表 VI. 当最小值出现在z_{111}时， λ_i 的取值。

向量局部参数u^{ij}		目标偏差	比较
v_{11}	$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8$	0	0
v_{12}	$\lambda_2+\lambda_4$	0	0
v_{13}	$\lambda_8-\lambda_6$	0	0
v_{14}	λ_6	$v_{14}-v_{11}-v_{23}-v_{32}-v_{44}$	$1-z_{111}\geq 0$
v_{21}	$1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8$	$v_{21}-v_{11}-v_{12}$	$t_{51}-z_{111}\geq 0$
v_{22}	$\lambda_1+\lambda_3$	v_{22}	$v_{22}\geq 0$
v_{23}	$\lambda_8-\lambda_5$	0	0
v_{24}	λ_5	$v_{24}-v_{11}-v_{13}-v_{32}-v_{44}\,f_1$	$-z_{111}\geq 0$
v_{31}	$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7$	$v_{31}-v_{11}-v_{13}$	$t_{11}-z_{111}\geq 0$
v_{32}	$\lambda_2+\lambda_6$	0	0
v_{33}	$\lambda_7-\lambda_4$	v_{33}	$v_{33}\geq 0$
v_{34}	λ_4	$v_{34}-v_{11}-v_{12}-v_{23}-v_{44}\,f_5$	$-z_{111}\geq 0$
v_{41}	$1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7$	v_{41}	$v_{41}\geq 0$
v_{42}	$\lambda_1+\lambda_5$	$v_{42}-v_{11}-v_{13}-v_{32}$	$g_{23}-z_{111}\geq 0$
v_{43}	$\lambda_7-\lambda_3$	$v_{43}-v_{11}-v_{12}-v_{23}$	$g_{32}-z_{111}\geq 0$
v_{44}	λ_3	0	0

表 VII。对一个6 元素接近度量（来自第一类）的条件的演示，此处为z_{111}。 λ_i 值来自表VI。

表 VII 与基准进行比较的度量 z_{111} （不包括同样为零的项以及达到目标的项）如下：1

$v_{11}+v_{13}+v_{21}+v_{23}+v_{32}+v_{44}$
$v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{24}v_{11}+v_{12}+$
$v_{23}+v_{31}+v_{32}+v_{44}v_{11}+v_{13}+$
$v_{32}+v_{34}v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{42}+$
$v_{44}v_{11}+v_{13}+v_{32}+v_{43}+v_{44}$

现在对于 Z_2 我们选择 z_{112}。对于这个测度，我们需要使（S83）中的条件满足等式。由于这里 $p = z_{112}$ 有八个不同的方程，对应八个变量。与之前一样，这会得到一组唯一的 λ_i 取值，如表 VIII所示。

λ_1	$-(v_{11}+v_{13}+v_{34})/p$
λ_2	$(v_{12}-v_{34})/p$
λ_3	$(v_{11}+v_{13}+v_{34})/p$
λ_4	v_{34}/p
λ_5	$(v_{11}+v_{13}+v_{34}+v_{42})/p$
λ_6	$(v_{11}+v_{23}+v_{34}+v_{42})/p$
λ_7	$(v_{11}+v_{13}+v_{34})/p$
λ_8	$(v_{11}+v_{13}+v_{23}+v_{34}+v_{42})/p$

表 VIII. 当最小值出现在z_{112}时， λ_i 的取值。

在表 IX 中，与基准进行比较的度量z_{112} （不包括那些也为零的值，以及达到目标的值）如下：

向量局部参数u^{ij}		目标偏差	比较
v_{11}	$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8$	o	o
v_{12}	$\lambda_2+\lambda_4$	o	o
v_{13}	$\lambda_8-\lambda_6$	o	o
v_{14}	λ_6	$v_{14}-v_{11}-v_{23}-v_{34}-v_{42}$	$1-z_{112}\geq 0$
v_{21}	$1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8$	$v_{21}-v_{11}-v_{12}$	$t_{52}-z_{112}\geq 0$
v_{22}	$\lambda_1+\lambda_3$	v_{22}	$v_{22}\geq 0$
v_{23}	$\lambda_8-\lambda_5$	o	o
v_{24}	λ_5	$v_{24}-v_{11}-v_{13}-v_{34}-v_{42}f_1$	$-z_{112}\geq 0$
v_{31}	$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7$	v_{31}	$v_{31}\geq 0$
v_{32}	$\lambda_2+\lambda_6$	$v_{32}-v_{11}-v_{12}-v_{23}-v_{42}f_5$	$-z_{112}\geq 0$
v_{33}	$\lambda_7-\lambda_4$	$v_{33}-v_{11}-v_{13}$	$t_{21}-z_{112}\geq 0$
v_{34}	λ_4	o	o
v_{41}	$1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7$	$v_{41}-v_{11}-v_{12}-v_{23}$	$g_{34}-z_{112}\geq 0$
v_{42}	$\lambda_1+\lambda_5$	o	o
v_{43}	$\lambda_7-\lambda_3$	v_{43}	$v_{43}\geq 0$
v_{44}	λ_3	$v_{44}-v_{11}-v_{13}-v_{34}$	$g_{23}-z_{112}\geq 0$

表 IX。演示第二类的6 元素接近度量的条件，此处 z_{112}。 λ_i 数值来自表 VIII。

1
$v_{11}+v_{13}+v_{21}+v_{23}+v_{34}+v_{42}$
$v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{24}v_{11}+v_{13}+$
$v_{32}+v_{34}v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{33}+$
$v_{34}+v_{42}v_{11}+v_{13}+v_{34}+v_{41}+$
$v_{42}v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{42}+v_{44}$

最后，对于 Z_3 我们选择 z_{114}。对于这个测度，我们需要满足（S86）中的条件，且取等号。由于这里 $p = z_{114}$ 有八个变量对应八个不同的方程。与之前一样，这会得到一组唯一的 λ_i 取值，如表X所示。

λ_1	$(v_{11}+v_{12})/p$
λ_2	$(v_{12}-v_{34})/p$
λ_3	o
λ_4	v_{34}/p
λ_5	v_{24}/p
λ_6	$(v_{11}+v_{24}+v_{34}+v_{41})/p$
λ_7	$(v_{11}+v_{13}+v_{34})/p$
λ_8	$(v_{11}+v_{13}+v_{24}+v_{34}+v_{41})/p$

表 X。当最小值出现在z_{114}时， λ_i 的值。

在表XI 中度量 fo 用于与基准z_{114} 比较（不包括那些为零的值，以及例如那些达到目标的）a 如下：

1
$v_{11}+v_{13}+v_{22}+v_{24}+v_{34}+v_{41}$
$v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{24}v_{11}+v_{13}+$
$v_{32}+v_{34}v_{11}+v_{12}+v_{24}+v_{33}+$
$v_{34}+v_{41}v_{11}+v_{13}+v_{34}+v_{41}+$
$v_{42}v_{11}+v_{12}+v_{24}+v_{41}+v_{43}$

(iii) 现在考虑 t^{ij} 接近度量，选择 t_{11} 取自 T_1。对于此度量，我们需要满足（S74）中的条件，且取等号。由于这里 $p = t_{11}$ ，只有五个不同的方程，却有八个变量。不过，我们还需要满足条件（S75），且取等号，这又意味着 $1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7=0$和 $\lambda_1+\lambda_3=0$。由此得到一组 λ_i 值，其中只有一个自由参数，如表 XII 所示。在该表中，我们将其保留为一般值；但在接下来的解答中，我们选择 $\lambda_2 p = -\min(v_{34}-v_{12}, v_{14}-v_{32})$。

向量	局部参数 u^{ij}	目标偏差	比较
v_{11}	$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8$	o	o
v_{12}	$\lambda_2+\lambda_4$	o	o
v_{13}	$\lambda_8-\lambda_6$	o	o
v_{14}	λ_6	$v_{14}-v_{11}-v_{24}-v_{34}-v_{41}$	$1-z_{114}\geq 0$
v_{21}	$1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8$	v_{21}	$v_{21}\geq 0$
v_{22}	$\lambda_1+\lambda_3$	$v_{22}-v_{11}-v_{12}$	$t_{62}-z_{114}\geq 0$
v_{23}	$\lambda_8-\lambda_5$	$v_{23}-v_{11}-v_{13}-v_{34}-v_{41}f_1$	$-z_{114}\geq 0$
v_{24}	λ_5	o	o
v_{31}	$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7$	v_{31}	$v_{31}\geq 0$
v_{32}	$\lambda_2+\lambda_6$	$v_{32}-v_{11}-v_{12}-v_{24}-v_{41}f_5$	$-z_{114}\geq 0$
v_{33}	$\lambda_7-\lambda_4$	$v_{33}-v_{11}-v_{13}$	$t_{22}-z_{114}\geq 0$
v_{34}	λ_4	o	o
v_{41}	$1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7$	o	o
v_{42}	$\lambda_1+\lambda_5$	$v_{42}-v_{11}-v_{12}-v_{24}$	$g_{34}-z_{114}\geq 0$
v_{43}	$\lambda_7-\lambda_3$	$v_{43}-v_{11}-v_{13}-v_{34}$	$g_{23}-z_{114}\geq 0$
v_{44}	λ_3	v_{44}	$v_{44}\geq 0$

表 XI. 演示第三类中 6元素接近度量的条件，此处 z_{114}。这些 λ_i 值取自表 X。

与之前一样，重点在于满足更具挑战性的案例中的条件；对于某些参数值，上述条件以充分裕度得到满足，以至于最初选定的点实际上位于空间之外（也就是说，需要将其微调回正确空间）。此处省略这项计算，但将在下文相应的案例T_2 中展示，以作说明。

λ_1	$-v_{44}/p$
λ_2	free
λ_3	v_{44}/p
λ_4	$v_{12}/p\ -\lambda_2$
λ_5	$(v_{31}+v_{32}+v_{44})/p$
λ_6	$v_{32}/p\ -\lambda_2$
λ_7	$(v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{44})/p$
λ_8	$(v_{23}+v_{31}+v_{32}+v_{44})/p$

表 XII. 当最小值出现在t_{11}时， λ_i 的取值。

向量	局部参数u^{ij}	目标偏差	比较
v_{11}	$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8$	o	o
v_{12}	$\lambda_2+\lambda_4$	o	o
v_{13}	$\lambda_8-\lambda_6$	$v_{13}-v_{23}-v_{31}-v_{44}+$最小值（$v_{34}-v_{12}$,$v_{14}-v_{32}$）	$\geq 1-t_{11}\geq 0$
v_{14}	λ_6	$v_{14}-v_{32}-\min(v_{34}-v_{12},v_{14}-v_{32})$	≥ 0
v_{21}	$1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8$	$v_{21}-v_{11}-v_{12}$	$g_{44}-t_{11}\geq 0$
v_{22}	$\lambda_1+\lambda_3$	v_{22}	$v_{22}\geq 0$
v_{23}	$\lambda_8-\lambda_5$	o	o
v_{24}	λ_5	$v_{24}-v_{31}-v_{32}-v_{44}$	$f_1-t_{11}\geq 0$
v_{31}	$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7$	o	o
v_{32}	$\lambda_2+\lambda_6$	o	o
v_{33}	$\lambda_7-\lambda_4$	$v_{33}-v_{11}-v_{23}-v_{44}+$最小值$(v_{34}-v_{12},v_{14}-v_{32})$	$\geq 1-t_{11}\geq 0$
v_{34}	λ_4	$v_{34}-v_{12}-\min(v_{34}-v_{12},v_{14}-v_{32})$	≥ 0
v_{41}	$1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7$	v_{41}	$v_{41}\geq 0$
v_{42}	$\lambda_1+\lambda_5$	$v_{42}-v_{31}-v_{32}$	$g_{23}-t_{11}\geq 0$
v_{43}	$\lambda_7-\lambda_3$	$v_{43}-v_{11}-v_{12}-v_{23}$	$f_3-t_{11}\geq 0$
v_{44}	λ_3	o	o

表 XIII. 第一类中一个 6 元素接近度量的条件演示，此处 t_{11}。该 λ_i 数值来自表 XII。

表XIII 中用于与基准比较的度量t_{11} 如下：
$v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{32}-L\ v_{11}+v_{12}+$
$v_{14}+v_{23}+v_{31}+v_{44}+L\ v_{21}+v_{23}+v$
$_{31}+v_{32}+v_{44}v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{24}v$
$_{12}+v_{31}+v_{32}+v_{33}-L\ v_{11}+v_{23}+$
$v_{31}+v_{32}+v_{34}+v_{44}+L\ v_{11}+v_{12}+v$
$_{23}+v_{42}+v_{44}v_{31}+v_{32}+v_{43}+v_{44}.$

这里，L 表示 $\lambda_2 p = \lambda_2 t_{11}$，在参数分配（如表XII所述）后，它是唯一的自由项。如表 XIII所示，所选的 $L = -\min(v_{34}-v_{12}, v_{14}-v_{32})$ 值满足所有不等式（事实上，在某些情况下，它是唯一能在v_{13} 和v_{33} 情况下做到这一点的项）。

有四个需要检验的条件，它们涉及将向量微调回正确空间；这些条件与$v_{13}, v_{14}, v_{33}, v_{34}$ 相关（我们需要看到，表 XV 中的目标偏差小于原始v^{ij} 向量元素的相应值；其他条件在这方面自动满足）。考虑相应的$v_{ij}+t_{11}$ 减去该偏差，即可很容易看出，此时得到的接近度量大于t_{11} （每种情况皆然）。

从T_2 中我们选取t_{21}。按照同样的过程，我们需要使（S77）中的条件以等式成立。同样，存在五个不同的方程与八个变量，以及需以等式成立的条件（S78），进而意味着 $\lambda_1+\lambda_3=0$ 与 $\lambda_7-\lambda_3=0$。由此得到仅含一个自由参数的一组 λ_i 值，如表XIV所示。在该表中，我们将其保留为一般值，但在随后的解中，我们选择$L = \lambda_2 p = \max(v_{23}+v_{33}+v_{34}+v_{42}-v_{13}, v_{11}+v_{23}+v_{34}+v_{42}-v_{31})$。

λ_1	$-(v_{33}+v_{34})/p$
λ_2	$(v_{12}-v_{34})/p$
λ_3	$(v_{33}+v_{34})/p$
λ_4	v_{34}/p
λ_5	$v_{33}+v_{34}+v_{42})/p$
λ_6	free
λ_7	$(v_{33}+v_{34})/p$
λ_8	$(v_{23}+v_{33}+v_{34}+v_{42})/p$

表 XIV. 当最小值出现在t_{21}时， λ_i 的值。

Vt.	局部参数u^{ij}	目标偏差	比较
v_{11}	$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8$	0	0
v_{12}	$\lambda_2+\lambda_4$	0	0
v_{13}	$\lambda_8-\lambda_6$	$\max(0, v_{11}+v_{13}-v_{31}-v_{33})$	最大$(1-f_6, 0)$
v_{14}	λ_6	$v_{14}-v_{23}-v_{34}-v_{42}-$最大$(v_{33}-v_{13}, v_{11}-v_{31})$	最小$(1, f_6)-t_{21}$
v_{21}	$1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8$	$v_{21}-v_{11}-v_{12}$	$g_{42}-t_{21}\geq 0$
v_{22}	$\lambda_1+\lambda_3$	v_{22}	$v_{22}\geq 0$
v_{23}	$\lambda_8-\lambda_5$	0	0
v_{24}	λ_5	$v_{24}-v_{33}-v_{34}-v_{42}$	$f_1-t_{21}\geq 0$
v_{31}	$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7$	$\max(0, v_{31}+v_{33}-v_{11}-v_{13})$	最大$(1-f_5, 0)$
v_{32}	$\lambda_2+\lambda_6$	$v_{32}-v_{12}-v_{23}-v_{42}-$最大$(v_{33}-v_{13}, v_{11}-v_{31})$	最小$(1, f_5)-t_{21}$
v_{33}	$\lambda_7-\lambda_4$	0	0
v_{34}	λ_4	0	0
v_{41}	$1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7$	$v_{41}-v_{11}-v_{12}-v_{23}$	$f_4-t_{21}\geq 0$
v_{42}	$\lambda_1+\lambda_5$	0	0
v_{43}	$\lambda_7-\lambda_3$	v_{43}	$v_{43}\geq 0$
v_{44}	λ_3	$v_{44}-v_{33}-v_{34}$	$g_{23}-t_{21}\geq 0$

表 XV. 第二类的 6元素接近度量的条件演示，此处为 t_{21}。 λ_i 数值取自表 XIV。

在表 XV 与基准进行比较的度量 t_{21} 如下：$v_{11}+v_{12}+v_{13}+Lv_{11}+v_{12}+v_{14}+v$
$_{23}+v_{33}+v_{34}+v_{42}-L$

$v_{21} + v_{23} + v_{33} + v_{34} + v_{42} v_{11} + v_{12} +$
$v_{23} + v_{24} v_{12} + v_{31} + v_{33} + L\ v_{11} + v$
$_{23} + v_{32} + v_{33} + 2v_{34} + v_{42} - L\ v_{33} +$
$v_{34} + v_{41} + v_{42} v_{11} + v_{12} + v_{23} + v_{42} +$
v_{44}
此处 L 表示 $\lambda_2 p = \lambda_2 t_{21}$，按照表XIV所述完成参数分配后，它是唯一的自由项。如表XV所示，选定的$L = \max(v_{23} + v_{33} + v$
$_{34} + v_{42} - v_{13}, v_{11} + v_{23} + v_{34} + v_{42} - v_{31})$值满足所有不等式（事实上，对于$v_{13}$ 和v_{33} 项，这是唯一能做到这一点的项）。

与之前一样，我们可以看到，所选向量位于正确空间 $\mathcal{P}_{NS}$ 内。

(iv) 现在考虑 g^{ij} 度量，选取 g_{11}。对于此测度，我们需要使条件（S71）满足等式。由于此处 $p = g_{11}$，，只有四个不同的方程，却有八个变量。不过，我们还需要使条件（S72）满足等式，这意味着 $\lambda_6 = 0$。由此得到一组 λ_i 值，其中有三个自由参数，如表 XVI所示。在此表中，我们将这些值保留为一般值，但在接下来的求解中，我们选取以下几种情况：
$f_3 < 1, f_7 < 1$ 则 $\lambda_1 = (v_{42} - v_{24})/p, \lambda_3 = v_{44}/p,\ \lambda_7 = (v_{43} + v_{44})/p$. $f_3 < 1, f_7 > 1$ 则 $\lambda_1 = (v_{42} - v_{24})/$
$p + (1 - f_7), \lambda_3 = v_{44}/p,\ \lambda_7 = (v_{43} + v_{44})/p$. $f_3 > 1, f_7 < 1$ 则 $\lambda_1 = (v_{42} - v_{24})/p, \lambda_3 = v_{44}/p,\ \lambda_7 = (v$
$_{43} + v_{44})/p + 1 - f_3$. $f_3 > f_7 > 1$ 则 $\lambda_1 = (v_{42} - v_{24})/p,\ \lambda_3 = v_{44}/p + 1 - f7, \lambda_7 = (v_{43} + v_{44})/p + 1 - f_3$.
$f_7 > f_3 > 1$ 则 $\lambda_1 = (v_{42} - v_{24})/p,\ \lambda_3 = v_{44}/p + 1 - f7, \lambda_7 = (v_{43} + v_{44})/p + 1 - f_7$.

λ_1	free
λ_2	v_{32}/p
λ_3	free
λ_4	v_{34}/p
λ_5	v_{24}/p
λ_6	o
λ_7	free
λ_8	$(v_{23} + v_{24})/p$

表 XVI. 当最小值出现在g_{11}时，λ_i 的取值。

向量局部参数u^{ij}		目标偏差	比较
v_{11}	$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8$	o	o
v_{12}	$\lambda_2 + \lambda_4$	$v_{12} - v_{32} - v_{34}$	$f_1 - g_{11} \geq 0$
v_{13}	$\lambda_8 - \lambda_6$	$v_{13} - v_{23} - v_{24}$	$f_3 - g_{11} \geq 0$
v_{14}	λ_6	v_{14}	$v_{14} \geq 0$
v_{21}	$1 - \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_8$	最小值$(1, f_7) - g_{11}$	≥ 0
v_{22}	$\lambda_1 + \lambda_3$	最大值$(v_{22} + v_{24} - v_{42} - v_{44}, 0)$	最大值$(1 - f_7, 0) \geq 0$
v_{23}	$\lambda_8 - \lambda_5$	o	o
v_{24}	λ_5	o	o
v_{31}	$1 - \lambda_2 - \lambda_6 - \lambda_7$	$f_3/1/(1 + f_3 - f_7) - g_{11}$	≥ 0
v_{32}	$\lambda_2 + \lambda_6$	o	o
v_{33}	$\lambda_7 - \lambda_4$	$(1 - f_3)/0/(f_7 - f_3)$	≥ 0
v_{34}	λ_4	o	o
v_{41}	$1 - \lambda_1 - \lambda_5 - \lambda_7$	$f_4/f_8/1 - g_{11}$	≥ 0
v_{42}	$\lambda_1 + \lambda_5$	最大值$(v_{42} + v_{44} - v_{22} - v_{24}, 0)$	最大值$(f_7 - 1,\ 0) \geq 0$
v_{43}	$\lambda_7 - \lambda_3$	$(f_3 - 1)\ /\ (f_3 - f_7)\ /0$	≥ 0
v_{44}	λ_3	最大值$(v_{42} + v_{44} - v_{22} - v_{24}, 0)$	最大值$(f_7 - 1,\ 0) \geq 0$

表XVII。t 的演示　　满足 5元素接近度量的条件，此处 g_{11}。λ_i 数值来自表 XVI。

在表 XVII 中，用于与基准比较的度量 g_{11} 如下：$v_{21} + v_{23} + v_{24} + L_1 + L_3 v_{11} + v$
$_{22} + v_{23} + v_{24} + v_{32} + v_{34} - L_1 - L_3 v_{31} + v_{32} + L_7$

$v_{11}+v_{23}+v_{24}+v_{32}+v_{33}+2v_{34}-L_7v_{24}+$
$v_{41}+L_1+L_7v_{11}+v_{23}+v_{32}+v_{34}+v_{42}-$
$L_1v_{11}+v_{23}+v_{24}+v_{32}+v_{34}+v_{43}+L_3-L_7$
$v_{31}+v_{23}+v_{24}+v_{32}+v_{34}+v_{44}-L_3$。

此处 L_i 表示 $\lambda_i p = \lambda_i g_{11}$ 对应 $i = 1、3、7$。这些是在按照表 XVI所述分配参数后得到的自由项。必须根据其他参数值适当选取这些值，以确保满足各项条件。如表 XVII所示，所选取的值 L_1,L_2,L_3 满足了所有不等式。请注意，与之前一样，所选取的点可能位于允许空间之外，因此需要采用前文所述的类似微调程序。

C.6. 寻找局域性度量

非信号空间由等式约束（S47）以及与概率定律（S57）相关的约束刻画。局域空间还包含额外的不等式约束（S58）。因此，这里有八个不同的类别： F、E、G、S_1,S_2,S_3, T_1, T_2。

定理2。
$p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{Loc}) = \min\{f_1,\ldots,f_8,e_1,\ldots,e_8,g_1,\ldots g_{16},t_1,\ldots t_{32},s_1,\ldots,s_{64}\}$.

至于 **定理 3**，该定理的证明见其他文献。下面我们将逐项介绍一种构造方法，用于找出非信号空间中能达到最佳接近度的适当点，并按可能适用的不同度量分类。

首先，我们给出一种方法，证明 $p(\mathbf{v},\mathcal{P}_{Loc})$ 在所有 128 种接近度量下都有上界。对于每种情况，我们只演示一个特例（对于 e_i 则演示两个特例）的证明，但通过前面提到的简单重新编号，这些证明可以推广到其他情况。

(i) $p(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{Loc}) \leq f_i$。这显然成立，因为 $p(\mathbf{v},\mathcal{P}_{NS}) \leq f_i$，且 $\mathcal{P}_{Loc}$ 是 $\mathcal{P}_{NS}$的子空间。
(ii) $p(\mathbf{v},\mathcal{P}_{Loc}) \leq e_i$。我们分别对 e_1 和 e_2进行计算。由（S51）可知，对于与U_L中任意元素的接近度 p，有：

$$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8\leq\frac{v_{11}}{p},\lambda_6\leq\frac{v_{14}}{p},\lambda_1+\lambda_3\leq\frac{v_{22}}{p},\lambda_8-\lambda_5\leq\frac{v_{23}}{p},$$
$$\lambda_2+\lambda_6\leq\frac{v_{32}}{p},\lambda_7-\lambda_4\leq\frac{v_{33}}{p},\lambda_1+\lambda_5\leq\frac{v_{42}}{p},\lambda_7-\lambda_3\leq\frac{v_{43}}{p}. \tag{S89}$$

将不等式两边的所有项分别相加，得到：

$$1+2(\lambda_1+\lambda_6+\lambda_7-\lambda_4)\leq\frac{e_1}{p}. \tag{S90}$$

我们注意到，根据（S58），（S90）中括号内的项大于0。因此

$$1\leq\frac{e_1}{p}\Rightarrow p\leq e_1. \tag{S91}$$

对e_2 重复计算可得：

$$\lambda_2+\lambda_4\leq\frac{v_{12}}{p},\lambda_8-\lambda_6\leq\frac{v_{13}}{p},1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8\leq\frac{v_{21}}{p},\lambda_5\leq\frac{v_{24}}{p},$$
$$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7\leq\frac{v_{31}}{p},\lambda_4\leq\frac{v_{34}}{p},1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7\leq\frac{v_{41}}{p},\lambda_3\leq\frac{v_{44}}{p}. \tag{S92}$$

将不等式两边的所有项相加，得到：

$$3-2(\lambda_1+\lambda_6+\lambda_7-\lambda_4)\leq\frac{e_2}{p}. \tag{S93}$$

注意，由（S58）可知 $\lambda_1+\lambda_6+\lambda_7-\lambda_4$ 小于 1。因此

$$1\leq\frac{e_2}{p}\Rightarrow p\leq e_2. \tag{S94}$$

其余六项的计算类似，（S58）中总结的八个不等式各恰好出现一次。

(iii) (i) $p(\mathbf{v},\ \mathcal{P}_{Loc}) \leq g^{ij}$。这显然成立，因为 $p(\mathbf{v},\mathcal{P}_{NS}) \leq g^{ij}$ 且 $\mathcal{P}_{Loc}$ 是 $\mathcal{P}_{NS}$ 的子空间。(iv) (i) p $(\mathbf{v},\ \mathcal{P}_{Loc}) \leq t^{ji}$。这显然成立，因为 $p(\mathbf{v},U_{NS}) \leq t^{ij}$ 且 $\mathcal{P}_{Loc}$ 是 $\mathcal{P}$ 的子空间 ^{NS}.

(v) $p(\mathbf{v},\mathcal{P}_{Loc}) \leq s^{ijk}$。对于情形 S_1，我们对 $s_{111} = v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{23} + v_{32} + v_{44}$ 进行计算。由 (S51) 可知：

$$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8 \leq \frac{v_{11}}{p}, \lambda_2 + \lambda_4 \leq \frac{v_{12}}{p}, \lambda_8 - \lambda_6 \leq \frac{v_{13}}{p},$$
$$\lambda_8 - \lambda_5 \leq \frac{v_{23}}{p}, \lambda_2 + \lambda_6 \leq \frac{v_{32}}{p}, \lambda_3 \leq \frac{v_{44}}{p}. \tag{S95}$$

对不等式两边的所有项求和可得：

$$1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_8 - \lambda_5) \leq \frac{s_{111}}{p}. \tag{S96}$$

由 (S58) 可知，(S96) 中方括号内的项非负。因此

$$1 \leq \frac{s_{111}}{p} \Rightarrow p \leq s_{111}. \tag{S97}$$

其余 15 项的计算类似，且每种情形下方括号内的项均非负。对于情形 S_2，我们对 $s_{112} = v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{23} + v_{34} + v_{42}$ 进行计算。由 (S51) 可知：

$$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8 \leq \frac{v_{11}}{p}, \lambda_2 + \lambda_4 \leq \frac{v_{12}}{p}, \lambda_8 - \lambda_6 \leq \frac{v_{13}}{p},$$
$$\lambda_8 - \lambda_5 \leq \frac{v_{23}}{p}, \lambda_4 \leq \frac{v_{34}}{p}, \lambda_1 + \lambda_5 \leq \frac{v_{42}}{p}. \tag{S98}$$

将不等式两边的所有项相加，得到：

$$1 + (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_8 - \lambda_6) \leq \frac{s_{112}}{p}. \tag{S99}$$

由（S58）可知（S99）中括号内的项是非负的。因此

$$1 \leq \frac{s_{112}}{p} \Rightarrow p \leq s_{112}. \tag{S100}$$

其余 31 项的计算类似。
F或情况 $S_{3,}$ 我们 do 计算 $s_{114} = v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{24} + v_{34} + v_{41}$。由（S51）可知：

$$1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_8 \leq \frac{v_{11}}{p}, \lambda_2 + \lambda_4 \leq \frac{v_{12}}{p}, \lambda_8 - \lambda_6 \leq \frac{v_{13}}{p},$$
$$\lambda_5 \leq \frac{v_{24}}{p}, \lambda_4 \leq \frac{v_{34}}{p}, 1 - \lambda_1 - \lambda_5 - \lambda_7 \leq \frac{v_{41}}{p}. \tag{S101}$$

将不等式两边的所有项相加，得到：

$$1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_6 - \lambda_7 + \lambda_4) \leq \frac{s_{114}}{p}. \tag{S102}$$

由式（S58）可知，式（S102）中括号内的项非负。因此

$$1 \leq \frac{s_{114}}{p} \Rightarrow p \leq s_{114}. \tag{S103}$$

其余 15 项的计算类似。

b）现在，我们通过说明如何在五个类别中各有一个测度达到最小值时实现上述界，来证明该界是紧的。

(i) 我们从f_i 度量开始。我们再次从引理1中的构造开始，并展示f_1 且当f_3,f_5 和f_7 小于 1 时的过程。因此，按照引理1中的证明，我们考虑局部向量

来自情形 A。我们需要证明，当f_1 是所有128 接近度量中最小的，因此$p = f_1$ （并且还要证明f_3, f_5, f_7 小于1），不等式 S58 成立。

使用 λ_i 方程S66 和表I中的数值，我们得到：

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_8 - \lambda_6 &= (v_{42} + v_{12} + v_{23} - v_{32})/p = (s_{331} - 1)/f_1, \\
\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_8 - \lambda_5 &= (v_{12} - v_{34} + v_{44} + v_{23})/p = (s_{311} - 1)/f_1, \\
\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_7 - \lambda_4 &= (v_{42} - v_{24} + v_{32} - v_{12} + v_{43} + v_{44})/p = (s_{441} - f_1)/f_1, \\
\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_7 - \lambda_3 &= (v_{12} - v_{34} + v_{24} + v_{43})/p = (s_{312} - 1)/f_1.
\end{aligned} \tag{S104}$$

我们需要确认上面的所有表达式都大于 0 且小于 1。为此，我们需要确认第一个、第二个和第四个s^{ijk} 值都大于 1 且小于 $1 + f_1$, ，并且第三个s^{ijk} 值介于f_1和 $2f_1$之间。因此，我们有八个条件需要满足。

和之前一样，解可能刚好落在正确空间之外，这种情况下我们需要将它们“推”回去。根据第一个方程，如果$s_{331} < 1$, 我们可以通过减小 λ_6 来增大它，最多可以减小到 0，同时保持所有其他λ_i 值不变。我们在最大限值处得到

$$\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_8 - \lambda_6 = (v_{23} + v_{34} + v_{42})/p, \tag{S105}$$

这显然大于 0，因此我们只需在某个合适的值处停止。这不会违反其他任何条件，只有第三个不等式中的下界可能例外，因为 λ_6 在这里的作用方向相反。我们注意到，这两项相加得到

$$(v_{11} + v_{12} + 2v_{23} + 2v_{42} + v_{43} + v_{44} - f_1)/f_1 = (g_{23} - f_1 + v_{23} + v_{42} + v_{43})/f_1. \tag{S106}$$

由于这个和为正，我们可以使两个表达式同时大于零。对其余每个条件也可以采用类似的步骤。

（ii）现在考虑度量 e_i，特别是 e_2。对于这个度量，我们需要使（S92）中的条件满足等式。由于这里 $p = e_2$ 只有七个不同的方程，却有八个变量。不过，我们还需要使条件（S94）满足等式，这意味着 $\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_7 - \lambda_4 = 1$。由此可得到一组唯一的 λ_i取值，如表 XVIII所示。显然，从表中可以看出，目标偏差介于 o 与相应的 v^{ij}之间，因此对应于局域空间中的一个向量。

λ_1	$(v_{12} + v_{31})/p$
λ_2	$(v_{12} - v_{34})/p$
λ_3	v_{44}/p
λ_4	v_{34}/p
λ_5	v_{24}/p
λ_6	$(v_{24} + v_{34} + v_{41})/p$
λ_7	$(v_{13} + v_{21} + v_{34} + v_{44})/p$
λ_8	$(v_{13} + v_{24} + v_{34} + v_{41})/p$

表 XVIII。当最小值出现在e_2时， λ_i 的值。

在表 XIX 八个 s^{ijk} 度量如下：

$s_{114} = v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{24} + v_{34} + v_{41} s_{141} =$
$v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{21} + v_{31} + v_{44} s_{221} = v_{13} + v$
$_{21} + v_{22} + v_{24} + v_{34} + v_{41} s_{234} = v_{12} + v_{21} + v$
$_{23} + v_{24} + v_{31} + v_{44} s_{323} = v_{13} + v_{21} + v_{31} + v$
$_{32} + v_{34} + v_{44} s_{331} = v_{12} + v_{24} + v_{31} + v_{33} + v$
$_{34} + v_{41} s_{423} = v_{13} + v_{21} + v_{34} + v_{41} + v_{42} + v_{44}$
$s_{432} = v_{12} + v_{24} + v_{31} + v_{41} + v_{43} + v_{44}$

注意，h前两个度量位于S_3, 接下来的四个度量位于S_2 最后两个度量位于S_1。

（iii）现在考虑t^{ij} 度量。我们从**定理3**中的构造开始。我们需要证明，当t_{11} 是所有128 个度量中最小的一个时，因此 $p = t_{11}$,成立时，不等式（S58）成立。

向量 v^{ij}	局部参数化 u^{ij}	目标偏差	比较
v_{11}	$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8$	$v_{11}-v_{21}-v_{31}-v_{44}$	$s_{114}-e_2\geq 0$
v_{12}	$\lambda_2+\lambda_4$	o	o
v_{13}	$\lambda_8-\lambda_6$	o	o
v_{14}	λ_6	$v_{14}-v_{24}-v_{34}-v_{41}$	$s_{141}-e_2\geq 0$
v_{21}	$1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8$	o	o
v_{22}	$\lambda_1+\lambda_3$	$v_{22}-v_{12}-v_{31}-v_{44}$	$s_{221}-e_2\geq 0$
v_{23}	$\lambda_8-\lambda_5$	$v_{23}-v_{13}-v_{34}-v_{41}$	$s_{234}-e_2\geq 0$
v_{24}	λ_5	o	o
v_{31}	$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7$	o	o
v_{32}	$\lambda_2+\lambda_6$	$v_{32}-v_{12}-v_{24}-v_{41}$	$s_{323}-e_2\geq 0$
v_{33}	$\lambda_7-\lambda_4$	$v_{33}-v_{13}-v_{21}-v_{44}$	$s_{331}-e_2\geq 0$
v_{34}	λ_4	o	o
v_{41}	$1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7$	o	o
v_{42}	$\lambda_1+\lambda_5$	$v_{42}-v_{12}-v_{24}-v_{31}$	$s_{423}-e_2\geq 0$
v_{43}	$\lambda_7-\lambda_3$	$v_{43}-v_{13}-v_{21}-v_{34}$	$s_{432}-e_2\geq 0$
v_{44}	λ_3	o	o

表 XIX. 一个8 元素接近度量的条件演示，此处e_2。 λ_i 数值来自表XVIII。

使用 λ_i 方程（XII）中的值，我们得到：

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_4+\lambda_8-\lambda_6&=\frac{1}{t_{11}}(v_{12}+v_{23}+v_{31}),\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_8-\lambda_5&=\frac{1}{t_{11}}(v_{23}+v_{44}-\min(v_{34}-v_{12},v_{14}-v_{32})),\\ \lambda_1+\lambda_6+\lambda_7-\lambda_4&=\frac{1}{t_{11}}(v_{11}+v_{23}+v_{32}),\\ \lambda_2+\lambda_5+\lambda_7-\lambda_3&=\frac{1}{t_{11}}(v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{31}+v_{32}+v_{44}-\min(v_{34}-v_{12},v_{14}-v_{32})).\end{aligned}\tag{S107}$$

第一和第三个表达式显然介于 0 和 1 之间。第二个表达式显然小于第四个，因此我们需要证明第二个表达式大于 0，且第四个表达式小于 1。现在考察第四个表达式。由于 $s_{321}-t_{11}=v_{34}-v_{12}$ and $s_{121}-t_{11}=v_{14}-v_{32}$，这两个表达式均非负，因此 $\min(v_{34}-v_{12},v_{14}-v_{32})$ 非负，第二个表达式不会超过 1，符合要求。对于第二个表达式，所选的 L 值可能会使其取负值，若$-(v_{23}+v_{44})>L=-\min(v_{34}-v_{12},v_{14}-v_{32})$。我们需要通过增大 L，使其进入该范围，令其等于$-(v_{23}+v_{44})$（此处可以看到，所有其他条件仍然成立）。

t_{12} 也有类似的论证。

(iv) 现在考虑g^{ij} 度量，选择g_{11}。我们从表**XVII中的定理**3的构造开始。我们需要证明，当g_{11} 是所有128 个度量中最小的一个时，因此$p=g_{11}$，时，S58 中的不等式成立。和上面一样，如果不对解进行适当微调，这一点也未必成立。

(v) 现在考虑s^{ijk} 度量，从S_1 开始，并选择s_{111}。对于这个度量，需要使（S95）中的条件以等式形式成立。还需要使条件（S96）以等式形式成立，进而意味着 $\lambda_2+\lambda_3+\lambda_8-\lambda_5=0$。对于$S_1$ 中的向量（以及S_2,S_3），和上面一样，可能需要进行一些微调。

由于这里$p=s_{111}$ 有六个不同的方程和八个变量，因此得到一组仅含两个自由参数的 λ_i 值，如表 XX所示。在该表中，我们将这些值保留为一般值，但在后续解中，我们选择 $\lambda_1 p=\min(v_{22}-v_{44},v_{42}-v_{13}-v_{32}-v_{44})$和 $\lambda_7 p=\min(v_{43}+v_{44},v_{12}+v_{23}+v_{33}+v_{44})$。

在表XXI 与基准比较的度量s_{111} 如下 s:

1

$v_{13}+v_{21}+v_{23}+v_{32}+2v_{44}+L_1v_{11}+v_{12}+$

$v_{13}+v_{22}+v_{23}+v_{32}-L_1v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{24}$

$v_{31}+v_{32}+L_7v_{11}+2v_{12}+v_{13}+2v_{23}+v_{32}+$

$v_{33}+2v_{44}-L_7v_{11}+v_{13}+v_{32}+v_{34}v_{13}+v$

$_{32}+v_{41}+v_{44}+L_1+L_7$

λ_1	free
λ_2	$-(v_{23}+v_{44})/p$
λ_3	v_{44}/p
λ_4	$(v_{12}+v_{23}+v_{44})\ /p$
λ_5	$(v_{13}+v_{32}+v_{44})\ /p$
λ_6	$(v_{23}+v_{32}+v_{44})\ /p$
λ_7	free
λ_8	$(v_{13}+v_{23}+v_{32}+v_{44})/p$

表 XX. 最小值出现在s_{111}时， λ_i 的取值。

向量局部参数u^{ij}		目标偏差	比较
v_{11}	$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8$	o	o
v_{12}	$\lambda_2+\lambda_4$	o	o
v_{13}	$\lambda_8-\lambda_6$	o	o
v_{14}	λ_6	$v_{14}-v_{23}-v_{32}-v_{44}$	$1-s_{111}\geq 0$
v_{21}	$1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8$	$v_{21}-v_{11}-v_{12}+$最小值$(v_{22},v_{42}-v_{13}-v_{32})$	最小值$(s_{211},f_7)\ -s_{111}\geq 0$
v_{22}	$\lambda_1+\lambda_3$	$\max(0,v_{13}+v_{22}+v_{32}-v_{42})$	≥ 0
v_{23}	$\lambda_8-\lambda_5$	o	o
v_{24}	λ_5	$v_{24}-v_{13}-v_{32}-v_{44}$	$f_1-s_{111}\geq 0$
v_{31}	$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7$	$v_{31}-v_{11}-v_{13}-$最小值$(v_{33},v_{43}-v_{12}-v_{23})$	最小值$(f_3,s_{311})\ -s_{111}\geq 0$
v_{32}	$\lambda_2+\lambda_6$	o	o
v_{33}	$\lambda_7-\lambda_4$	最大$(v_{12}+v_{23}+v_{33}-v_{43},0)$	≥ 0
v_{34}	λ_4	$v_{34}-v_{12}-v_{23}-v_{44}$	$f_5-s_{111}\geq 0$
v_{41}	$1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7$	最小$(s_{422},e_7,1,s_{433})\ -s_{111}$	≥ 0
v_{42}	$\lambda_1+\lambda_5$	最大值$(v_{42}-v_{13}-v_{22}-v_{32},0)$	≥ 0
v_{43}	$\lambda_7-\lambda_3$	最大$(0,v_{43}-v_{12}-v_{23}-v_{33})$	≥ 0
v_{44}	λ_3	o	o

表 XXI。演示第一类中某个6 元素接近度量的条件，此处为 s_{111}。 λ_i 数值来自表 XX。

$v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{42}-L_1 v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{23}+v_{32}+v_{43}+2v_{44}-L_7$这里$L_1=$最小值$(v_{22}-v_{44},v_{42}-v_{13}-v_{32}-v_{44})$ 以及$L_7=$最小值$(v_{43}+v_{44},v_{12}+v_{23}+v_{33}+v_{44})$

现在对于 S_2 ，我们选择 s_{112}。对于这一测度，我们需要满足条件 (S98) 中的等式。和之前一样，我们还需要满足条件 (S99) 中的等式，这意味着 $\lambda_1+\lambda_4+\lambda_8-\lambda_6=0$，因此对于 $p=s_{112}$ ，这里有八个变量和六个不同的方程。这给出了表XXII中所示的 λ_i 值集合。在该表中，我们将这些值保留为一般形式，但在后续解答中，我们选择λ_3 $p=\min(v_{44},v_{13}+v_{22}+v_{34})$ 和 $\lambda_7 p=v_{11}+v_{13}+v_{34}-\min(v_{31},v_{41}-v_{12}-v_{23})$。

λ_1	$-(v_{13}+v_{34})/p$
λ_2	$(v_{12}-v_{44})/p$
λ_3	free
λ_4	v_{34}/p
λ_5	$(v_{13}+v_{34}+v_{42})\ /p$
λ_6	$(v_{23}+v_{34}+v_{42})\ /p$
λ_7	free
λ_8	$(v_{13}+v_{23}+v_{34}+v_{42})/p$

表XXII。最小值出现在s_{112}时 λ_i 的取值。

在表 XXIII 中，与基准进行比较的度量 s_{112} 如下：$1 v_{21}+v_{23}+v_{42}+L_3 v_{11}+v_{12}+2$ $v_{13}+v_{22}+v_{23}+2v_{34}+v_{42}-L_3 v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{24}$

向量局部参数 u^{ij}		目标偏差	比较
v_{11}	$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8$	o	o
v_{12}	$\lambda_2+\lambda_4$	o	o
v_{13}	$\lambda_8-\lambda_6$	o	o
v_{14}	λ_6	$v_{14}-v_{23}-v_{34}-v_{42}$	$1-s_{112}\geq 0$
v_{21}	$1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8$	$v_{21}-v_{11}-v_{12}+$最小值$(v_{22},v_{13}+v_{22}+v_{34})$	最小值$(f_7,s_{212})-s_{112}\geq 0$
v_{22}	$\lambda_1+\lambda_3$	$v_{13}+v_{22}+v_{34}-$最小值$(v_{44}-v_{13}-v_{34},v_{22})$	≥ 0
v_{23}	$\lambda_8-\lambda_5$	o	o
v_{24}	λ_5	$v_{24}-v_{13}-v_{34}-v_{42}$	$f_1-s_{112}\geq 0$
v_{31}	$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7$	$v_{31}-$最小$(v_{31},v_{41}-v_{12}-v_{23})$	≥ 0
v_{32}	$\lambda_2+\lambda_6$	$v_{32}-v_{12}-v_{23}-v_{42}$	$f_5-s_{112}\geq 0$
v_{33}	$\lambda_7-\lambda_4$	$v_{33}-v_{11}-v_{13}+$最小值$(v_{31},v_{41}-v_{12}-v_{23})$	最小值$(s_{331},f_4)-s_{112}\geq 0$
v_{34}	λ_4	o	o
v_{41}	$1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7$	$v_{41}-v_{12}-v_{23}-$最小值$(v_{31},v_{41}-v_{12}-v_{23})$	≥ 0
v_{42}	$\lambda_1+\lambda_5$	o	o
v_{43}	$\lambda_7-\lambda_3$	最小$(s413,1,e_5,s_{442})-s_{112}$	≥ 0
v_{44}	λ_3	$v_{44}-$最小$(v_{44},v_{13}+v_{22}+v_{34})$	≥ 0

表XXIII. 演示一个 6 第二类的元素接近度量的条件，此处 s_{112}。 λ_i 这些值来自表 XXII。

$v_{12}+v_{23}+v_{31}+v_{42}+L_7v_{11}+v_{13}+v_{32}+v_{34}v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{23}+v_{33}+2v_{34}+v_{42}-L_7v_{41}+v_{42}+L_7v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{23}+v_{34}+v_{42}+v_{43}-L_7+L_3v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{23}+v_{34}+v_{42}+v_{44}-L_3$这里 $L_3=$最小值$(v_{44},v_{13}+v_{22}+v_{34})$ 和 $L_7=v_{11}+v_{13}+v_{34}-$最小值$(v_{31},v_{41}-v_{12}-v_{23})$。

最后，关于 S_3 ，我们以 s_{114}为例。对于这一测度，需要满足 (S101) 中的条件且取等号。与之前一样，我们还要求条件 (S102) 取等号，这意味着$\lambda_1+\lambda_6+\lambda_7-\lambda_4=1$，因此对于 $p=s_{114}$，有六个包含八个变量的不同方程。这得到了表 XXIV 所示的 λ_i 值集合。在该表中，我们将这些值保留为一般值，但在后续求解中，我们选择 $\lambda_1 p=\min(v_{42}-v_{24},v_{12}+v_{31})$ 和 $\lambda_3 p=\max(v_{11}+v_{12}-v_{21},v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{34}-v_{43})-\min(v_{42}-v_{24},v_{12}+v_{31})$。

λ_1	free
λ_2	$(v_{12}-v_{32})/p$
λ_3	free
λ_4	v_{34}/p
λ_5	v_{24}/p
λ_6	$(v_{24}+v_{34}+v_{41})/p$
λ_7	$(v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{34})/p-\lambda_1$
λ_8	$(v_{13}+v_{24}+v_{34}+v_{41})/p$

表 XXIV. 当最小值出现在s_{114}时， λ_i 的取值。

表 XXV 与基准进行比较的度量 s_{114} 如下：1

$v_{13}+v_{21}+v_{24}+v_{34}+v_{41}+L_1+L_3v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{22}+v_{24}+v_{34}+v_{41}-L_1-L_3v_{11}+v_{12}+v_{23}+v_{24}v_{11}+2v_{12}+v_{13}+v_{24}+v_{31}+v_{34}+v_{41}-L_1v_{11}+v_{13}+v_{32}+v_{34}v_{24}+v_{33}+v_{34}+v_{41}+L_1v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{34}+v_{41}+v_{42}-L_1v_{24}+v_{41}+v_{43}+L_1+L_3$

矢量	局部参数 u^{ij}	目标偏差	比较
v_{11}	$1-\lambda_2-\lambda_4-\lambda_8$	o	o
v_{12}	$\lambda_2+\lambda_4$	o	o
v_{13}	$\lambda_8-\lambda_6$	o	o
v_{14}	λ_6	$v_{14}-v_{24}-v_{34}-v_{41}$	$1-s_{114}\geq 0$
v_{21}	$1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_8$	$v_{21}+$最大值$(-v_{21},v_{13}+v_{34}-v_{43})$	≥ 0
v_{22}	$\lambda_1+\lambda_3$	$v_{22}-v_{11}-v_{12}+$最小值$(v_{21},v_{43}-v_{13}-v_{34})$	最小值$(s_{222},f_8)-s_{114}\geq 0$
v_{23}	$\lambda_8-\lambda_5$	$v_{23}-v_{13}-v_{34}-v_{41}$	$f_1-s_{114}\geq 0$
v_{24}	λ_5	o	o
v_{31}	$1-\lambda_2-\lambda_6-\lambda_7$	$v_{12}+v_{31}-$最小$(v_{42}-v_{24},v_{12}+v_{31})$	≥ 0
v_{32}	$\lambda_2+\lambda_6$	$v_{32}-v_{12}-v_{24}-v_{41}$	$f_5-s_{114}\geq 0$
v_{33}	$\lambda_7-\lambda_4$	$v_{33}-v_{11}-v_{13}+$最小$(v_{42}-v_{12}-v_{24},v_{31})$	$\min(f_4,s_{332})-s_{114}\geq 0$
v_{34}	λ_4	o	o
v_{41}	$1-\lambda_1-\lambda_5-\lambda_7$	o	o
v_{42}	$\lambda_1+\lambda_5$	$v_{42}-v_{24}-$最小值$(v_{42}-v_{24},v_{12}+v_{31})$	≥ 0
v_{43}	$\lambda_7-\lambda_3$	$v_{43}-v_{13}-v_{34}+$最大值$(-v_{21},v_{13}+v_{34}-v_{43})$	≥ 0
v_{44}	λ_3	最小值$(s_{423},e_2,1,s_{432})-s_{114}$	≥ 0

表 XXV. 第三类中一个6 元素接近度量的条件演示，此处为s_{114}。该 λ_i 数值来自表XXIV。

$v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{24}+v_{34}+v_{41}+v_{44}-L_3$此处 $L_1=\min(v_{42}-v_{24},v_{12}+v_{31})$，我们设定 $L_1+L_3=\max(v_{11}+v_{12}-v_{21},v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{34}-v_{43})$，由此得到 $L_3=\max(v_{11}+v_{12}-v_{21},v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{34}-v_{43})-\min(v_{42}-v_{24},v_{12}+v_{31})$，其中 $L_7=v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{34}-L_1$。

D部分：解的见解

我们在表 XXVI 中列出了公式（24）中无信号子空间的 f、g、t 和 z 的全部 120 个向量，以及公式（23）中局域性子空间的 f、g、t、s 和 e 的 128 个向量。另见 A部分。这些向量的标记方式（例如 f_1 或 g_{11}）遵循 C部分中的显式构造，而非 B部分中较简单的构造。

表 XXVI： Q 和 S中的向量列表。

ID	向量	方向类别		计算
f1	(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	LNNN	F	f1
f2	(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	RNNN	F	f2
f3	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)	NNLN	F	f3
f4	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)	NNRN	F	f4
f5	(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	NLNN	F	f5
f6	(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	NRNN	F	f6
f7	(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)	NNNL	F	f7
f8	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)	NNNR	F	f8
g11	(1, 0, 0, 0,0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1,0, 0, 0,0)	LLNN	G	f1 + f5 - (1 - v14)
g12	(0, 1, 0, 0,0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0,0, 0, 0,0)	LRNN	G	f1 + f6 - (1 - v13)
g13	(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	RLNN	G	f2 + f5 - (1 - v12)
g14	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	RRNN	G	f2 + f6 - (1 - v11)
g21	(0, 0, 1, 1,1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,0, 1, 0,1)	RNNL	G	f2 + f7 - (1 - v24)
g22	(0, 0, 1, 1,0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,1, 0, 1,0)	RNNR	G	f2 + f8 - (1 - v23)
g23	(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)	LNNL	G	f1 + f7 - (1 - v22)
g24	(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)	LNNR	G	f1 + f8 - (1 - v21)
g31	(0, 1, 0, 1,0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,0, 0, 1,1)	NRLN	G	f3 + f6 - (1 - v34)
g32	(1, 0, 1, 0,0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,0, 0, 1,1)	NLLN	G	f3 + f5 - (1 - v33)
g33	(0, 1, 0, 1,0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,1, 1, 0,0)	NRRN	G	f4 + f6 - (1 - v32)
g34	(1, 0, 1, 0,0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,1, 1, 0,0)	NLRN	G	f4 + f5 - (1 - v31)
g41	(0, 0, 0, 0,0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1,1, 0, 0,0)	NNRR	G	f4 + f8 - (1 - v44)
g42	(0, 0, 0, 0,1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1,0, 1, 0,0)	NNRL	G	f4 + f7 - (1 - v43)
g43	(0, 0, 0, 0,0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0,0, 0, 1,0)	NNLR	G	f3 + f8 - (1 - v42)
g44	(0, 0, 0, 0,1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0,0, 0, 0,1)	NNLL	G	f3 + f7 - (1 - v41)
t11	(1, 1, 0, 0,0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0,0, 0, 0,1)	LNLL	T1	g23 +g44 – f7
t12	(1, 1, 0, 0,0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0,0, 0, 1,0)	LNLR	T1	g24 +g43 – f8
t13	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)	LLLN	T1	g11 +g32 – f5
t14	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)	LRLN	T1	g12 +g31 – f6
t21	(1, 1, 0, 0,0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1,0, 1, 0,0)	LNRL	T2	g23 +g42 – f7
t22	(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)	LNRR	T2	g24 +g41 – f8
t23	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)	LLRN	T2	g11 +g34 – f5
t24	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)	LRRN	T2	g12 +g33 – f6
t31	(0, 0, 1, 1,1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0,0, 0, 0,1)	RNLL	T2	g21 +g44 – f7
t32	(0, 0, 1, 1,0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0,0, 0, 1,0)	RNLR	T2	g22 +g43 – f8
t33	(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)	RLLN	T2	g13 +g32 – f5
t34	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)	RRLN	T2	g14 +g31 – f6
t41	(0, 0, 1, 1,1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1,0, 1, 0,0)	RNRL	T1	g21 +g42 – f7
t42	(0, 0, 1, 1,0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1,1, 0, 0,0)	RNRR	T1	g22 +g41 – f8
t43	(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)	RLRN	T1	g13 +g34 – f5
t44	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)	RRRN	T1	g14 +g33 – f6
t51	(1, 0, 1, 0,1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0,0, 0, 0,1)	NLLL	T1	g32 +g44 – f3
t52	(1, 0, 1, 0,1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1,0, 1, 0,0)	NLRL	T1	g34 +g42 – f4
t53	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)	LLNL	T1	g11 +g23 – f1
t54	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)	RLNL	T1	g13 +g21 – f2
t61	(1, 0, 1, 0,0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0,0, 0, 1,0)	NLLR	T2	g32 +g43 – f3
t62	(1, 0, 1, 0,0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1,1, 0, 0,0)	NLRR	T2	g34 +g41 – f4
t63	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)	LLNR	T2	g11 +g24 – f1
t64	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)	RLNR	T2	g13 +g22 – f2
t71	(0, 1, 0, 1,1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0,0, 0, 0,1)	NRLL	T2	g31 +g44 – f3
t72	(0, 1, 0, 1,1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0,0, 1, 0,0)	NRRL	T2	g33 +g42 – f4
t73	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)	LRNL	T2	g12 +g23 – f1
t74	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)	RRNL	T2	g14 +g21 – f2

表 XXVI： Q 和 S中的向量列表。

ID	向量	方向类别		计算
t81	(0, 1, 0, 1,0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0,0, 0, 1,0)	NRLR	T1	g31 +g43 – f3
t82	(0, 1, 0, 1,0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0,1, 0, 0,0)	NRRR	T1	g33 +g41 – f4
t83	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)	LRNR	T1	g12 +g24 – f1
t84	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)	RRNR	T1	g14 +g22 – f2
z111	(2, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	LLLL (3)	Z3	t11 +t51 – g44
z112	(2, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	LLRL (3)	Z1	t21 +t52 – g42
z113	(2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	LLLR (3)	Z1	t12 +t61 – g43
z114	(2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	LLRR (3)	Z2	t22 +t62 – g41
z121	(1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	LRLL (3)	Z1	t11 +t71 – g44
z122	(1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)	LRRL (3)	Z2	t21 +t72 – g42
z123	(1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	LRLR (3)	Z3	t12 +t81 – g43
z124	(1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)	LRRR (3)	Z1	t22 +t82 – g41
z131	(1, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	RLLL (3)	Z1	t31 +t51 – g44
z132	(1, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	RLRL (3)	Z3	t41 +t52 – g42
z133	(1, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	RLLR (3)	Z2	t32 +t61 – g43
z134	(1, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	RLRR (3)	Z1	t42 +t62 – g41
z141	(0, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	RRLL (3)	Z2	t31 +t71 – g44
z142	(0, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)	RRRL (3)	Z1	t41 +t72 – g42
z143	(0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	RRLR (3)	Z1	t32 +t81 – g43
z144	(0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)	RRRR (3)	Z3	t42 +t82 – g41
z211	(0, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	RLLL (2)	Z1	t33 +t51 – g32
z212	(0, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	RLRL (2)	Z3	t43 +t52 – g34
z213	(0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	RRLL (2)	Z2	t34 +t71 – g31
z214	(0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)	RRRL (2)	Z1	t44 +t72 – g33
z221	(0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	RLLR (2)	Z2	t33 +t61 – g32
z222	(0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	RLRR (2)	Z1	t43 +t62 – g34
z223	(0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	RRLR (2)	Z1	t34 +t81 – g31
z224	(0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)	RRRR (2)	Z3	t44 +t82 – g33
z231	(1, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	LLLL (2)	Z3	t13 +t51 – g32
z232	(1, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	LLRL (2)	Z1	t23 +t52 – g34
z233	(0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	LRLL (2)	Z1	t14 +t71 – g31
z234	(0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)	LRRL (2)	Z2	t24 +t72 – g33
z241	(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	LLLR (2)	Z1	t13 +t61 – g32
z242	(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	LLRR (2)	Z2	t23 +t62 – g34
z243	(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	LRLR (2)	Z3	t14 +t81 – g31
z244	(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)	LRRR (2)	Z1	t24 +t82 – g33
z311	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)	LRLL (4)	Z1	t11 +t73 – g23
z312	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)	LRLR (4)	Z3	t12 +t83 – g24
z313	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)	RRLL (4)	Z2	t31 +t74 – g21
z314	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)	RRLR (4)	Z1	t32 +t84 – g22
z321	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 1)	LLLL (4)	Z3	t11 +t53 – g23
z322	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0)	LLLR (4)	Z1	t12 +t63 – g24
z323	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 1)	RLLL (4)	Z1	t31 +t54 – g21
z324	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0)	RLLR (4)	Z2	t32 +t64 – g22
z331	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0)	LRRL (4)	Z2	t21 +t73 – g23
z332	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0)	LRRR (4)	Z1	t22 +t83 – g24
z333	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0)	RRRL (4)	Z1	t41 +t74 – g21
z334	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0)	RRRR (4)	Z3	t42 +t84 – g22
z341	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 0)	LLRL (4)	Z1	t21 +t53 – g23
z342	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 0)	LLRR (4)	Z2	t22 +t63 – g24
z343	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 0)	RLRL (4)	Z3	t41 +t54 – g21
z344	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 0)	RLRR (4)	Z1	t42 +t64 – g22
z411	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 0)	LLRR (1)	Z2	t23 +t63 – g11
z412	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 0)	LRRR (1)	Z1	t24 +t83 – g12
z413	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 0)	RLRR (1)	Z1	t43 +t64 – g13
z414	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 0)	RRRR (1)	Z3	t44 +t84 – g14
z421	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1)	LLRL (1)	Z1	t23 +t53 – g11
z422	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1)	LRRL (1)	Z2	t24 +t73 – g12
z423	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1)	RLRL (1)	Z3	t43 +t54 – g13

表 XXVI： Q 和 S中的向量列表。

ID	向量	方向类别		计算
z424	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1)	RRRL (1)	Z_1	t_{44} +t74 – g14
z431	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1)	LLLR (1)	Z_1	t_{13} +t63 – g11
z432	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1)	LRLR (1)	Z_3	t_{14} +t83 – g12
z433	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1)	RLLR (1)	Z_2	t_{33} +t64 – g13
z434	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1)	RRLR (1)	Z_1	t_{34} +t84 – g14
z441	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2)	LLLL (1)	Z_3	t_{13} +t53 – g11
z442	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2)	LRLL (1)	Z_1	t_{14} +t73 – g12
z443	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2)	RLLL (1)	Z_1	t_{33} +t54 – g13
z444	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2)	RRLL (1)	Z_2	t_{34} +t74 – g14
s111	(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	LLLL (3)	S_3	z111 – v11
s112	(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	LLRL (3)	S_1	z112 – v11
s113	(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	LLLR (3)	S_1	z113 – v11
s114	(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	LLRR (3)	S_2	z114 – v11
s121	(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	LRLL (3)	S_1	z121 – v12
s122	(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)	LRRL (3)	S_2	z122 – v12
s123	(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	LRLR (3)	S_3	z123 - v12
s124	(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)	LRRR (3)	S_1	z124 – v12
s131	(1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	RLLL (3)	S_1	z131 – v13
s132	(1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	RLRL (3)	S_3	z132 – v13
s133	(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	RLLR (3)	S_2	z133 – v13
s134	(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	RLRR (3)	S_1	z134 – v13
s141	(0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	RRLL (3)	S_2	z141 – v14
s142	(0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)	RRRL (3)	S_1	z142 – v14
s143	(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	RRLR (3)	S_1	z143 – v14
s144	(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)	RRRR (3)	S_3	z144 – v14
s211	(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	RLLL (2)	S_1	z211 – v21
s212	(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	RLRL (2)	S_3	z212 – v21
s213	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	RRLL (2)	S_2	z213 – v21
s214	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)	RRRL (2)	S_1	z214 – v21
s221	(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	RLLR (2)	S_2	z221 – v22
s222	(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	RLRR (2)	S_1	z222 – v22
s223	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	RRLR (2)	S_1	z223 – v22
s224	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)	RRRR (2)	S_3	z224 – v22
s231	(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	LLLL (2)	S_3	z231 – v23
s232	(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	LLRL (2)	S_1	z232 – v23
s233	(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	LRLL (2)	S_1	z233 – v23
s234	(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)	LRRL (2)	S_2	z234 – v23
s241	(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	LLLR (2)	S_1	z241 – v24
s242	(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	LLRR (2)	S_2	z242 – v24
s243	(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	LRLR (2)	S_3	z243 – v24
s244	(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)	LRRR (2)	S_1	z244 – v24
s311	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)	LRLL (4)	S_1	z311 – v31
s312	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)	LRLR (4)	S_3	z312 – v31
s313	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)	RRLL (4)	S_2	z313 – v31
s314	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)	RRLR (4)	S_1	z314 – v31
s321	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)	LLLL (4)	S_3	z321 – v32
s322	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)	LLLR (4)	S_1	z322 – v32
s323	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)	RLLL (4)	S_1	z323 – v32
s324	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)	RLLR (4)	S_2	z324 – v32
s331	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)	LRRL（4）	S_2	z331 – v33
s332	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)	LRRR（4）	S_1	z332 – v33
s333	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)	RRRL (4)	S_1	z333 – v33
s334	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)	RRRR (4)	S_3	z334 – v33
s341	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)	LLRL (4)	S_1	z341 – v34
s342	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)	LLRR (4)	S_2	z342 – v34
s343	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)	RLRL (4)	S_3	z343 – v34
s344	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)	RLRR (4)	S_1	z344 – v34
s411	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)	LLRR（1）	S_2	z411 – v41
s412	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)	LRRR（1）	S_1	z412 – v41

表 XXVI： Q 和 S中的向量。

ID	向量	方向类别		计算
s413	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)	RLRR (1)	S_1	z413 – v41
s414	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)	RRRR (1)	S_3	z414 – v41
s421	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)	LLRL (1)	S_1	z421 – v42
s422	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)	LRRL (1)	S_2	z422 – v42
s423	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)	RLRL (1)	S_3	z423 – v42
s424	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)	RRRL (1)	S_1	z424 – v42
s431	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)	LLLR (1)	S_1	z431 – v43
s432	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)	LRLR (1)	S_3	z432 – v43
s433	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)	RLLR (1)	S_2	z433 – v43
s434	(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)	RRLR (1)	S_1	z434 – v43
s441	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)	LLLL (1)	S_3	z441 – v44
s442	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)	LRLL (1)	S_1	z442 – v44
s443	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)	RLLL (1)	S_1	z443 – v44
s444	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)	RRLL (1)	S_2	z444 – v44
e1	(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)	-	E	s122 + s133 – 1
				s214 + s241 – 1
				s314 + s341 – 1
				s414 + s441 – 1
e2	(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)	-	E	s114 + s141 – 1
				s222 + s233 – 1
				s323 + s332 – 1
				s423 + s432 – 1
e3	(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)	-	E	s113 + s142 – 1
				s221 + s234 – 1
				s312 + s343 – 1
				s412 + s443 – 1
e4	(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)	-	E	s121 + s134 – 1
				s213 + s242 – 1
				s321 + s334 – 1
				s421 + s434 – 1
e5	(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)	-	E	s112 + s143 – 1
				s212 + s243 – 1
				s331 + s324 – 1
				s413 + s442 – 1
e6	(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)	-	E	s124 + s131 – 1
				s224 + s231 – 1
				s313 + s342 – 1
				s424 + s431 – 1
e7	(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)	-	E	s111 + s144 – 1
				s211 + s244 – 1
				s311 + s344 – 1
				s422 + s433 – 1
e8	(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)	-	E	s123 + s132 – 1
				s223 + s232 – 1
				s322 + s333 – 1
				s411 + s444 – 1

可以根据违反的无信号约束来描述各类别中的向量——对于*f*、*g*、*t*和*z*/*s* 类别，这些向量分别对应违反 1、2、3 和 4 个无信号约束。

具体而言，我们按照方程 (3)-(6) 对信号约束排序为 $(\Delta_1, \Delta_3, \Delta_2, \Delta_4)$，即交替排列与爱丽丝到鲍勃方向相对应的约束。随后，可以依据违反无信号约束的启发式规则，按方向交替的顺序逐步增加被违反的无信号约束数量，从而确定所有向量。在表 XXVI 的“方向”列中，未违反任何约束记为 N，正向违反记为 L，负向违反记为 R。接着，违反单个约束会得到四个 f 向量： $\{(f_1, f_2)、(f_5, f_6)、(f_3, f_4)、(f_7, f_8)\}$。例如， $\Delta_1 = v_{11} + v_{12} - v_{21} - v_{22} = f_1 - 1 = 1 - f_2$，因此 f_1

对应于 Δ_{1-}，而f_2 对应于 Δ_{1+}。对于z向量，由于四个约束均被违反，因此首先违反哪个约束共有四种可能（括号中的数字）。例如， Δ_{1-}, Δ_{3-}, Δ_{2-},Δ_{4-} 分别对应 LLLL(1)、LLLL(2)、LLLL(3) 和 LLLL(4)，即z_{114}, 、z_{234}, 、z_{324} 和 z_{444} 。这一启发式规则可用于构造计算无信号分数所需的全部 120 个向量。为了构造计算定域性分数所需的 128 个向量，我们加入e，并将z替换为s——信号约束违背的基数及其对应关系相同。

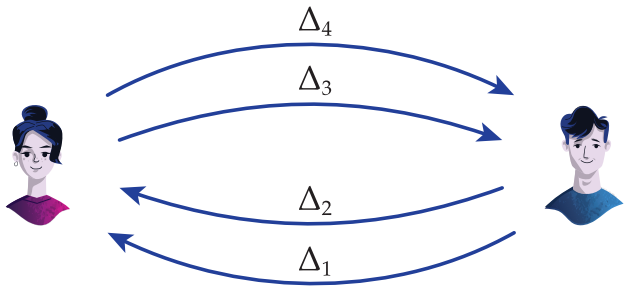

图 S1. **信号传递违背的“交替”方向**。 1) 有两个参与方 A 和 B，从 A 到 B 有两个箭头 (4,3)，从 B 到 A 有两个箭头 (2,1)。2) 我们从 B 或 A 出发遍历一条路径，每条箭头只使用一次。3) 遍历箭头时，我们携带标志 L 或 R（沿复合路径这些标志可以不同）。4) 路径反转是等价的，例如先沿 1 取 L 再沿 3 取 R，等价于先沿 3 取 R 再沿 1 取 L。5) 每条路径都有唯一的起点和终点。

关于该启发式规则的更完整描述见图 S1。这也有助于描述不同向量类之间对称轨道的若干方面，如表 XXVI 中“Cat.”（类别）列所示，其中 F、G、T1、T2、S1、S2、S3、Z1、Z2、Z3 和 E 表示方程(25)-(29)中对称群的轨道，分别对应于代表元 $\vec{\mathrm{f}}_\alpha$、 $\vec{\mathrm{g}}_\beta$、 $\vec{\mathrm{t}}_\beta$、 $\vec{\mathrm{t}}_\gamma$、 $\vec{\mathrm{s}}_\beta$、 $\vec{\mathrm{s}}_\gamma$、 $\vec{\mathrm{s}}_\delta$、 $\vec{\mathrm{z}}_\beta$、 $\vec{\mathrm{z}}_\gamma$、 $\vec{\mathrm{z}}_\delta$ 和 $\vec{\mathrm{e}}_\alpha$，如式 (30) 所列。对于 g-向量，它们仅对应于两处无信号约束的违背，每个方向各一处，因此只有一个向量类别。t-向量对应于三处无信号约束的违背，即从爱丽丝到鲍勃有两条路径、从鲍勃到爱丽丝有一条路径，或反之（见图 S1）。存在对称类，对应于同一方向上的两个无信号约束符号是否相同（T1）或不同（T2）。z-向量对应于全部四个无信号约束的违背。考虑每个方向上的两个无信号约束数对（Δ_1、 Δ_2 和 Δ_3、 Δ_4），对称轨道对应于：一个数对中符号相同而另一个数对中符号相反（Z1）、两个数对中符号均相反（Z2），以及两个数对中符号均相同（Z3）。

上述规则可用于计算每个向量类的基数。请注意，规则中的“交替”部分解释了为何各类别的基数并非仅由其中无信号约束的数量决定。例如，若没有交替规则，对于g 类的基数而言，向量数应为$\binom{4}{2}\cdot 2\cdot 2 = 24$，但实际上只有 16 个。

另一种展示向量集合的方式是使用一组 4x4 表格，每个表格代表解集中的一个向量。对于 f-向量，如图 S2 所示；而 f-度量与其对应的 g-、t-、z-度量之间的关系则如图 S3 所示。

解的对称性： 可利用正文方程（25）至（29）中的五个对称条件求得。依次应用这些条件，对于 f-度量 （其中“to”表示交换两个元素），可得：

式 (25) - a 到 $1-\mathrm{a}$：f_1 到 f_2, f_3 到 f_4；其他情况为（在图 S2 中交换第 1 列与第 3 列、第 2 列与第 4 列），式 (26) - b 到 $1-\mathrm{b}$：f_5 到 f_6, f_7 到 f_8；其他情况不变（在图 S2 中交换第 1 列与第 2 列、第 3 列与第 4 列），式 (27) - x 到 $1-\mathrm{x}$：f_1 到 f_3 , f_2 到 f_4, f_5 到 f_6, f_7 到 f_8（在图 S2 中交换第 1 行与第 3 行、第 2 行与第 4 行），式 (28) - y 到 $1-\mathrm{y}$：f_5 到 f_7 , f_6 到 f_8, f_1 到 f_2, f_3 到 f_4（在图 S2 中交换第 1 行与第 2 行、第 3 行与第 4 行），式 (29) - (x, a) 到 (y, b)：f_1 到 f_5, f_2 到 f_6, f_3 到 f_7, f_4 到 f_8（在图 S2 中交换第 2 行与第 3 行、第 2 列与第 3 列 ）.

因此，我们可以通过一系列移动，从f_1 到达任意其他位置（例如，$f_1 \to f_8$ 可以通过先执行$f_1 \to f_2$,，然后执行$f_2 \to f_4$, ，最后执行$f_4 \to f_8$来实现）。我们注意到，利用上述对称性，我们同样可以从任意向量到达其对称群的所有成员。

图 S3 展示了 f_1 与 g_{23} 和 g_{24}之间的联系。每个 g_{ij} 项都可以由两个 f_i 项构成，正如表二十六最后一列所示。例如，g_{23} 使用 f_1 和 f_7。一般来说，每个 f_i 项都参与四个 g_{ij}项（如上所述，f_1 用于 g_{23} 和 g_{24}, ，也用于 g_{11} 和 g_{12}）。

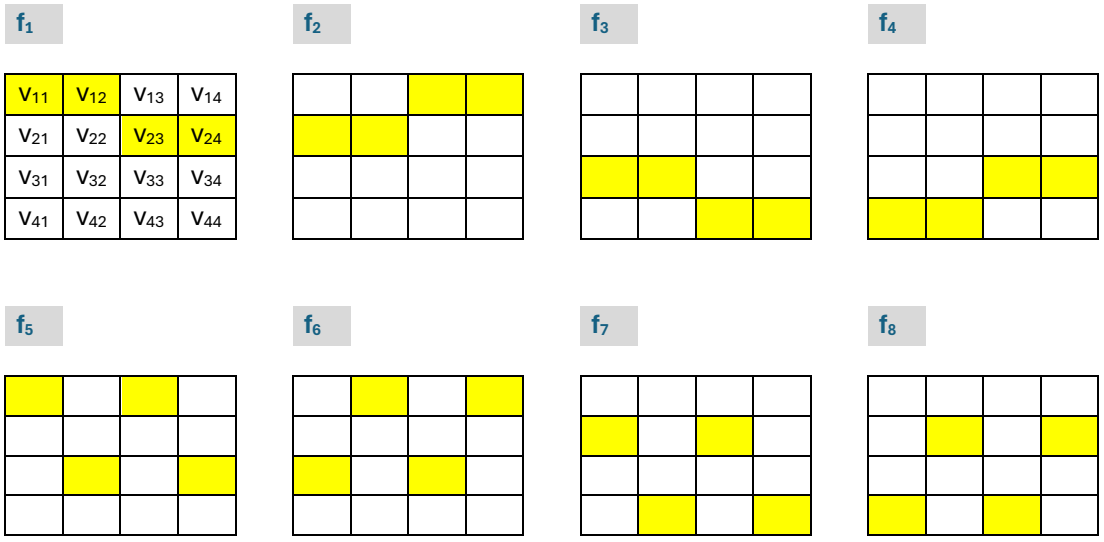

图 S2。**4×4 表示 *f*-度量**。上图是*f*向量的 4×4 表示，其中高亮单元格是行为向量的 16 个分量中构成每个*f*-度量的 4 个分量。*f*-度量分为两组，每组包含两对，分别为(f_1,f_2)、(f_3,f_4)和(f_5,f_6)、(f_7,f_8)；每对中的元素之和均为 2（例如$f_1+f_2=2$）。

同样，图中展示了例如 g_{23} 与 t_{21} 之间的联系，而 t_{11} 使用 g_{23} 和 g_{11}。每个 t^{ij} 项都使用两个 g^{ij} 项，另见表二十六。每个 g^{ij} 都用于四个 t^{ij} 项（如上所述，g_{23} 用于 t_{21} 和 t_{11}，也用于 t_{53} 和 t_{73}）。

接下来我们来看，例如，t_{21} 如何与 z_{122} 和 z_{112}相连。每个 z^{ijk} 项都可以由两个 t^{ij} 项构造而成（见表 XXVI）。例如，z_{122} 使用 t_{21} 和 t_{72}。每个 t^{ij} 项都会用于四个 z^{ijk} 项中（如上所述，t_{21} 用于 z_{122} 和 z_{112}，也用于 z_{331} 和 z_{341}）。

这些关系在表 二十六的“方向”和“计算”列中有进一步说明。请注意，*f*、*g*、*t*、*z*/*s* 类别中的每个向量，都可以通过违反特定无信号约束来刻画。若选取除 *f* 类别之外的任意一个目标向量，那么与该向量对应的无信号约束，恰好就是由更早类别中的向量组成该目标向量时所违反的那些约束。例如，每个 t^{ij} 都可由三项无信号约束的违反来刻画，而这些约束恰好就是组成该 t_{kl} 向量的两个 g^{ij} 向量所对应的约束（两个 g^{ij} 向量将由四项违反来刻画，但其中一项为两者共有）。另见下方图 S4 ——高亮连接与图 S3中的示例所用连接相同。

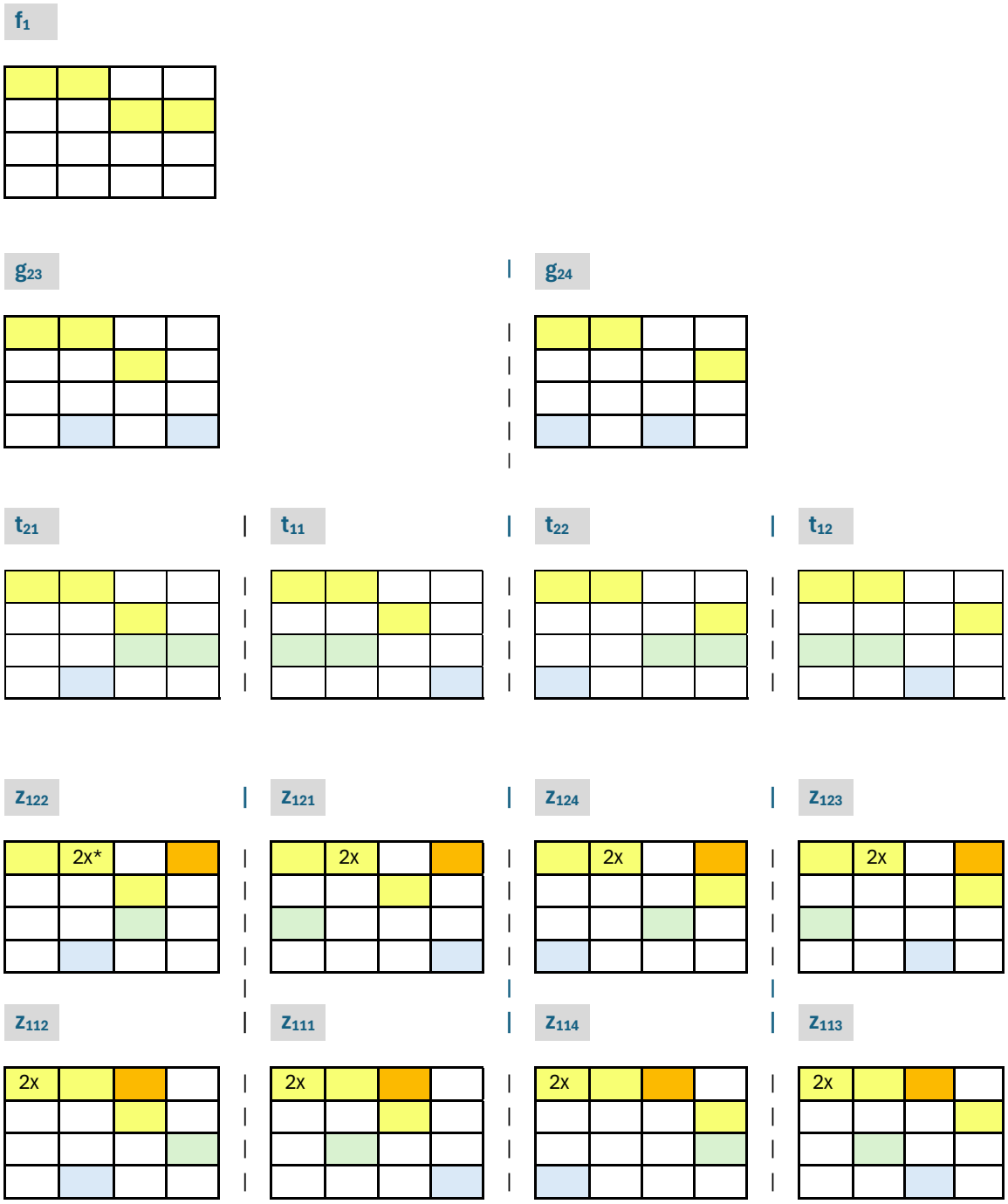

图 S3. **f-度量** 与相关的 **g-, t-, z-度量。 此处展示表** 二十六 中突出显示的部分关联（另见图 S4）。术语“2x”表示计算相应测度时，该分量乘以 2 （这些因子 2 仅出现在 z-向量中）。

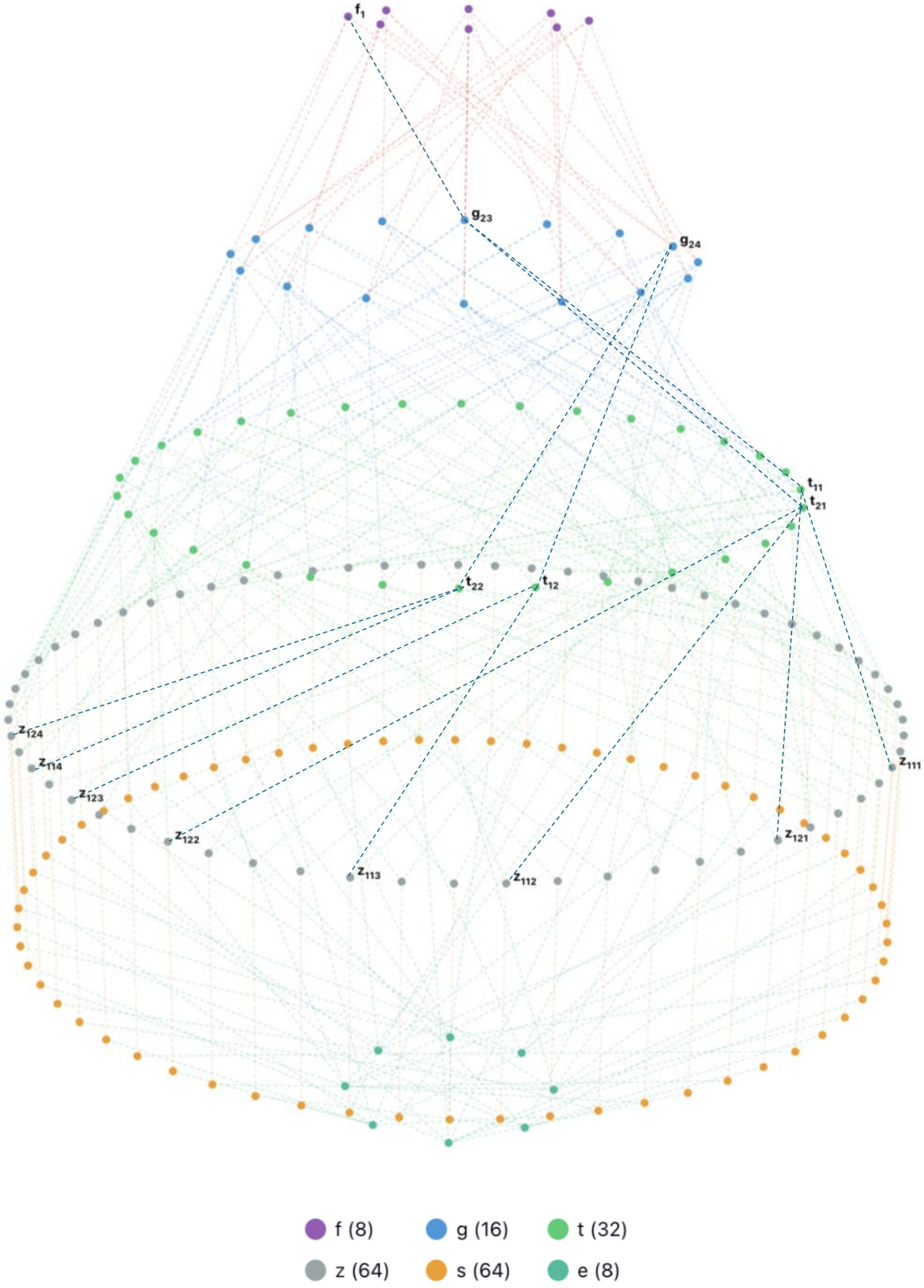

图 S4. 度量之间的联系。这是一张展示 f-、g-、t-、z- 和 s 度量之间联系的图，反映了代数表达式，即如何从一类方向推导出下一类：每一层代表 f-、g-、t-、z- 或 s 度量中的一个类别，每个 g-、t- 和 z-度量都与其上方一层中的两个量相连。每个 f-度量都与四个 g-度量相连，每个 g-度量都与四个 t-度量相连，每个 t-度量都与四个 z-度量相连。最后，每个 s 度量都与其对应的 z-度量以及一个 e-度量相连。这些关系与表 XXVI 中的关系一致，对比第一列和第五列的条目即可看出。该图使用 Python 的 Plotly 库绘制，随后通过重心优化算法进行视觉调整，以尽量减少边的交叉。图 S3 中所示的示例以黑色虚线叠加标出。