arXiv:2603.01002v1 [math.CO] 1 Mar 2026

游戏《风险或安全》中的最优策略

R¨udiger Jehn*

2026年3月

摘要

本文证明了双人回合制随机博弈“风险或安全”存在唯一解。若要最大化获胜机会，双方玩家都需要采用相同的策略。本文提出了一种解析方法，该方法基于转移方程，而转移方程取决于玩家在每个游戏局面中的决策。然而，该方法需要求解许多大型线性方程组，因此当硬币数量超过 6 枚时，实际中几乎无法求解。因此，本文采用迭代方法来确定最多 20 枚硬币时的最优策略。查找表列出了玩家在每种可能的游戏局面下应掷出的硬币数量。

1 引言

“风险或安全”游戏由两名相互竞争的玩家组成。轮到某位玩家时，该玩家投掷一枚硬币。若为正面，他们获得一分，并可以选择采取安全，将该分放入储分箱，然后把回合交给对手。或者，他们冒险继续，再次投掷硬币。若再次为正面，“开放”点数增加一分，他们可以再次选择继续或停止，将“开放”点数转换为“已储存”点数。每当出现反面，所有开放点数都会丢失，并轮到另一位玩家。谁先收集到 n 分，谁就获胜。

显而易见的问题是：何时建议冒险继续，何时停止并保住手中的分数。我们采用了两种方法来确定最优策略。解析方法仅在 $n = 6$ 之前有效，因为需要分析的可能策略数量迅速增长。因此，对于 $n = 7$ 到20，结果通过迭代模拟该游戏获得：在 k回合后选择获胜概率最高的方案，并持续这一过程，直到不再有进一步改进。

这个游戏的一种变体是：轮到某位玩家时，他们选择数量为$x \leq n$ 枚的硬币并将其投掷；如果全部是正面，就能获得 x 分。如果至少

*rjehn@yahoo.com

有一枚硬币是反面，就得零分。玩家轮流进行。从逻辑上看，这与原游戏完全相同，不过逐枚投掷硬币，并在每次投掷后做出决策，可能会增加悬念。

2 解的唯一性

与游戏“Super Six”类似 [3], ，该游戏属于二人回合制随机博弈（TBSG）。Cui and Yang [1] 指出，作为一种零和博弈，TBSG已知存在纳什均衡策略，这意味着存在一个策略对，使得任何一方都无法通过单方面偏离而获益。为支持这一说法，他们引用了沙普利的原始研究[5]。

在第3章中，我们希望利用策略对具有对称性这一事实，也就是说，两位玩家采用相同的最优策略。Glenn等人的一篇论文 [2], 分析了二人游戏“Can't Stop”。该游戏的原理与我们的游戏相同：每次成功投掷后，玩家都需要决定是继续还是停止；但可能出现的游戏局面数量要大得多。该论文中的定理2指出，此游戏的博弈图有唯一解，其中所有位置都对应一个位于区间 $[0, 1]$ 内的获胜概率。

在定理2的证明中，博弈图被划分为若干强连通分量，并按自底向上顺序逐一考察。我们以有3枚硬币的游戏为例，说明这种方法。自底向上意味着我们先解决只有1枚硬币的情形（这很简单：先手获胜的概率为2/3），然后在下一步解决有2枚硬币的情形（这里省略这一步）。

一个博弈位置由三元组 $(a_0,\ a_1,\ b)$ 表示，其中 a_0 和 a_1 分别是玩家1的未结算分与已保存分，而 b是玩家2的已保存点数。我们从局面 (0, 2, 0) 开始，也就是说，玩家1已经保存了2分。设 x_2 为玩家1先开始时获胜的概率，y_2 为玩家2先开始时玩家1获胜的概率。如果玩家1掷出正面，就获胜；如果掷出反面，则轮到玩家2，因此

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_2. \tag{1}$$

另一方面，如果轮到玩家2，则有三种可能：玩家2在以下情况下停止

1. 投掷，然后 $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}P(0,2,1) = \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{5}$
2. 投掷，然后 $y_2 = \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{4}P(0,2,2) = \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{6}$
3. 投掷，然后 $y_2 = \frac{7}{8}x_2$

其中，$P(a_0, a_1, b)$ 表示玩家1在位置（a_0, a_1, b）获胜的概率。在前面的步骤中，我们已计算出 $P(0,2,1) = \frac{4}{5}$和 $P(0,2,2) = \frac{2}{3}$。由于

玩家2试图尽量降低玩家1的获胜机会

$$y_2 = \min\left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{5}, \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{6}, \frac{7}{8}x_2\right). \tag{2}$$

方程1和方程2可以通过迭代求解（例如从$x_2 = 0$开始），并得出结果 $x_2 = P(0,2,0) = \frac{8}{9}$和 $y_2 = \frac{7}{9}$。

接下来，我们求出 $P(0,1,0)$。设 x_1 为玩家1先开始时的获胜机会， y_1 为玩家2先开始时的获胜机会。玩家1有两种选择，可以在投掷后停止

1. throw, then $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{7}{18}$
2. throw, then $x_1 = \frac{3}{4}y_1 + \frac{1}{4}$

由于玩家希望最大限度地提高自己的获胜机会

$$x_1 = \max\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{7}{18}, \frac{3}{4}y_1 + \frac{1}{4}\right). \tag{3}$$

另一方面，如果轮到玩家2，则有三种选择：玩家2可以在投掷后停止

1. 投掷后停止，那么 $y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}P(0,1,1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{7}$
2. 投掷后停止，那么 $y_1 = \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}P(0,1,2) = \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{10}$
3. 投掷后停止，那么 $y_1 = \frac{7}{8}x_1$

在前面的步骤中，我们已经计算出 $P(0,\ 1,\ 1) = \frac{4}{7}$和 $P(0,\ 1,\ 2) = \frac{2}{5}$。由于玩家2试图将玩家1的获胜机会降至最低

$$y_1 = \min\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{7}, \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{10}, \frac{7}{8}x_1\right). \tag{4}$$

方程3和方程4可以通过迭代求解，得出结果 $x_1 = P(0,\ 1,\ 0) = \frac{8}{11}$和 $y_1 = \frac{7}{11}$。

三枚硬币游戏的最后一步是确定 $P(0,0,0)$。设 x_0 为玩家1开始时的获胜机会， y_0 为玩家2开始时的获胜机会。玩家1有三种可能，他们可以在之后停止

1. throw, then $x_0 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_1 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{7}{22}$
2. throw, then $x_0 = \frac{3}{4}y_0 + \frac{1}{4}y_2 = \frac{3}{4}y_0 + \frac{7}{36}$
3. throw, then $x_0 = \frac{7}{8}y_0 + \frac{1}{8}$

由于玩家希望最大化其获胜机会

$$x_0 = \max\left(\frac{1}{2}y_0 + \frac{7}{22}, \frac{3}{4}y_0 + \frac{7}{36}, \frac{7}{8}y_0 + \frac{1}{8}\right). \tag{5}$$

另一方面，如果轮到玩家2，则有三种可能：玩家2在以下次数的投掷后停止：

1. 投掷，然后 $y_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}P(0,\ 0,\ 1) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{2}{11}$
2. 投掷，然后 $y_0 = \frac{3}{4}x_0 + \frac{1}{4}P(0,\ 0,\ 2) = \frac{3}{4}x_0 + \frac{1}{18}$
3. 投掷，然后 $y_0 = \frac{7}{8}x_0$

在前面的步骤中，我们已经计算出 $P(0,\ 0,\ 1) = \frac{4}{11}$ 和 $P(0,\ 0,\ 2) = \frac{2}{9}$。由于玩家2试图尽量降低玩家1的获胜机会

$$y_0 = \min\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{2}{11}, \frac{3}{4}x_0 + \frac{1}{18}, \frac{7}{8}x_0\right). \tag{6}$$

方程5和6可以通过迭代求解，得出结果 $x_0 = P(0,\ 0,\ 0) = \frac{6}{11}$ 和 $y_0 = \frac{5}{11}$。

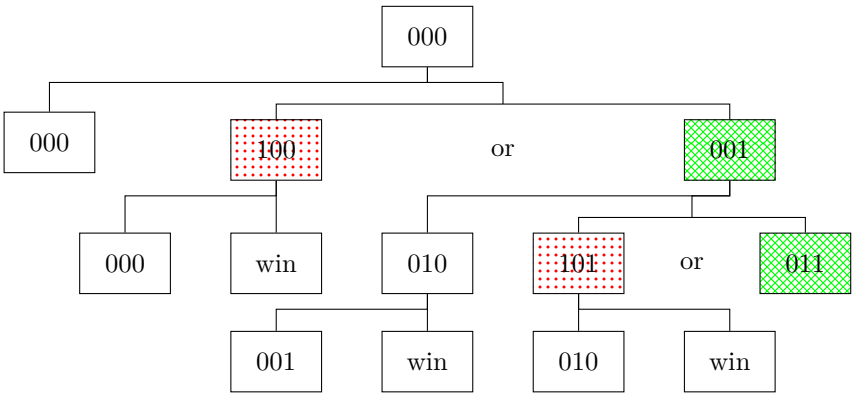
我们在这里对使用3枚硬币的游戏所展示的方法，下一步可以应用于使用4枚硬币的游戏，依此类推。对于任何给定的游戏局面，都可以确定最优策略及其对应的获胜概率。这些都是唯一的，并且对双方玩家都适用，因此，如果双方都想最大化自己的获胜机会，就必须采用相同的策略。

3 确定最优策略的解析方法

我们不再区分玩家1和玩家2，而只区分当前轮到掷硬币的玩家与对手。如上所述，每个博弈位置都由三元组（a_0、a_1、b）来描述，其中 a_0 是当前轮到掷硬币的玩家的开放点数，a_1 是该玩家的已保存点数，b 是对手的已保存点数。

3.1 还差两分获胜

我们从分析赢得游戏还需要两分的情况开始。位置 (0, 1, 1) 很简单：掷硬币的玩家的获胜概率为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{2}{3}$。对于其他 5 种可能的位置，获胜概率取决于玩家选择的策略。此图示展示了所有可能的游戏分支。



如果掷出反面，即没有得分，则适用左分支。如果在位置 (0, 0, 0) 掷出正面，则适用右分支；若玩家选择“冒险”，游戏将进入位置 (1, 0, 0)，该位置以红点标示。然而，如果玩家选择“安全”，就会将这一分计入自己的得分；由于轮到对手，新的游戏局面为 (0, 0, 1)，该位置以绿色标示。

令 $P_{a_0a_1b} = P(a_0, a_1, b)$ 表示位置 (a_0, a_1, b) 上的获胜概率，则有以下方程：

$$P_{000} = \frac{1}{2}(1 - P_{000}) + \frac{1}{2}P_{100} \text{ or}$$

$$P_{000} = \frac{1}{2}(1 - P_{000}) + \frac{1}{2}(1 - P_{001})$$

第一个方程适用于玩家选择冒险并继续投掷硬币的情况，第二个方程则适用于玩家停止游戏并将游戏交给对手的情况。

同理可得

$$P_{001} = \frac{1}{2}(1 - P_{010}) + \frac{1}{2}P_{101} \text{ or}$$

$$P_{001} = \frac{1}{2}(1 - P_{010}) + \frac{1}{2}(1 - P_{011})$$

其中 $P_{011} = \frac{2}{3}$。

对于另外三个位置，只有一个方程：

$$P_{010} = \frac{1}{2}(1 - P_{001}) + \frac{1}{2}$$

$$P_{100} = \frac{1}{2}(1 - P_{000}) + \frac{1}{2}$$

$$P_{101} = \frac{1}{2}(1 - P_{010}) + \frac{1}{2}$$

有三种不同的策略：

1. 在 (1, 0, 0) 处继续，2. 在 (1, 0, 0) 处停止，并在 (1, 0, 1) 处继续；3. 在 (1, 0, 0) 处停止，并在 (1, 0, 1) 处停止。

因此，根据三种可能的策略，我们得到三个不同的由5个线性方程组成的方程组。我们如何有效地确定最佳策略?

如果玩家在 (1, 0, 0) 处停止，则位置 (0, 0, 1) 的获胜概率在玩家于 (1, 0, 1) 处继续时为 $\frac{2}{5}$，在玩家于 (1, 0, 1) 处停止时为 $\frac{2}{9}$。因此策略2优于策略3。下一步我们比较位置 (0, 0, 0) 的获胜概率。对于策略2，该概率为 $\frac{8}{15}$，小于策略1所得的 $\frac{4}{7}$。因此策略1是最优的。

3.2 先得三分获胜

有 12 个新的游戏位置需要建立方程:

$$P_{000} = \frac{1}{2}(1 - P_{000}) + \frac{1}{2}P_{100} \text{ or } P_{000} = \frac{1}{2}(1 - P_{000}) + \frac{1}{2}(1 - P_{001})$$

$$P_{001} = \frac{1}{2}(1 - P_{010}) + \frac{1}{2}P_{101} \text{ or } P_{001} = \frac{1}{2}(1 - P_{010}) + \frac{1}{2}(1 - P_{011})$$

$$P_{010} = \frac{1}{2}(1 - P_{001}) + \frac{1}{2}P_{110} \text{ or } P_{010} = \frac{1}{2}(1 - P_{001}) + \frac{1}{2}(1 - P_{002})$$

$$P_{100} = \frac{1}{2}(1 - P_{000}) + \frac{1}{2}P_{200} \text{ or } P_{100} = \frac{1}{2}(1 - P_{000}) + \frac{1}{2}(1 - P_{001})$$

$$P_{002} = \frac{1}{2}(1 - P_{020}) + \frac{1}{2}P_{102} \text{ or } P_{002} = \frac{1}{2}(1 - P_{020}) + \frac{1}{2}(1 - P_{021})$$

$$P_{020} = \frac{1}{2}(1 - P_{002}) + \frac{1}{2}$$

$$P_{101} = \frac{1}{2}(1 - P_{010}) + \frac{1}{2}P_{201} \text{ or } P_{101} = \frac{1}{2}(1 - P_{010}) + \frac{1}{2}(1 - P_{011})$$

$$P_{110} = \frac{1}{2}(1 - P_{001}) + \frac{1}{2}$$

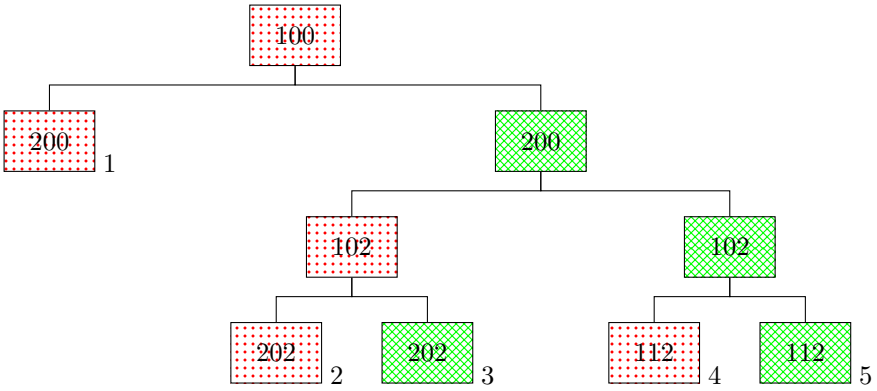
$$P_{200} = \frac{1}{2}(1 - P_{000}) + \frac{1}{2}$$

$$P_{102} = \frac{1}{2}(1 - P_{020}) + \frac{1}{2}P_{202} \text{ or } P_{102} = \frac{1}{2}(1 - P_{020}) + \frac{1}{2}(1 - P_{021})$$

$$P_{201} = \frac{1}{2}(1 - P_{010}) + \frac{1}{2}$$

$$P_{202} = \frac{1}{2}(1 - P_{020}) + \frac{1}{2}$$

树中在位置 (1, 0, 0) 继续的左侧分支展示了 5 种可能的策略：

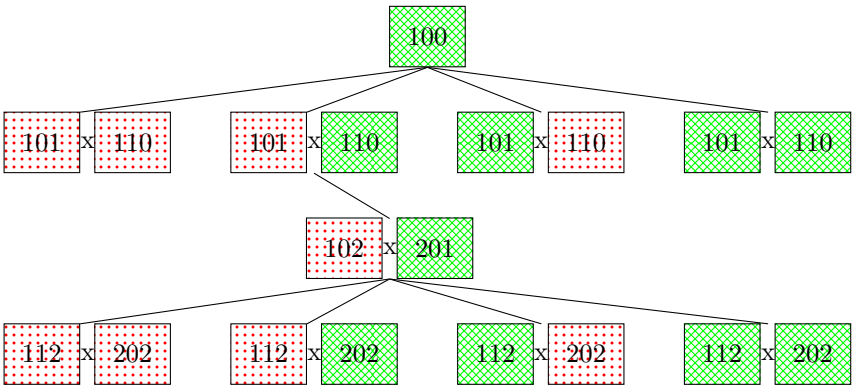


再次说明，红色虚线框表示冒险策略，绿色方框表示安全策略。方框旁的数字表示策略编号。无需再比较策略 4 和 5，因为我们从上一节的 $n = 2$ 得知，策略 4 更优。为了确定策略 2 和 3 哪个更优，我们需要比较在 (1, 0, 2) 位置的获胜概率：如果玩家在成功投掷后继续（策略 2），获胜概率为$_{1\ 3}$；如果玩家停止（策略 3），则只有$_{1\ 5}$。因此，策略 2 优于策略 3。

接下来，我们比较位置 (0, 0, 2) 处的获胜概率：如果玩家在成功投掷后继续（策略 2），则为$_{2\ 9}$；如果玩家停止（策略 4），则仅为$_{2\ 15}$。因此，策略 2 优于策略 4。

最后，我们比较位置 (1, 0, 0) 处的获胜概率：如果玩家在成功投掷后继续（策略 1），则为$_{3\ 5}$；如果玩家停止（策略 2），则为$_{13\ 21}$，略高一些。因此，策略 2 优于策略 1。

同样的练习需要在树的右分支上进行，那里总共存在26种策略。如果我们在位置(1, 0, 0)停止，玩家将需要在位置(1, 0, 1)或(1, 1, 0)做出下一个决策。因此，我们有4种情况需要研究。这在本图示的第二行中加以说明：



我们只选取玩家在位置(1, 0, 1)决策继续（=红色）且在位置(1, 1, 0)决策停止（=绿色）的情况。从这一分支出发，玩家可以到达需要做出新决策的位置(2, 0, 1)和(1, 0, 2)。同样存在4种停止与继续的可能组合，为便于说明，我们选取在(1, 0, 2)处“继续”、在(2, 0, 1)处“停止”。随后又出现4种选择：在位置(1, 1, 2)和(2, 0, 2)停止或继续。应当注意，在该方法的实现中，不再研究在(1, 1, 2)停止这一选项，因为我们从 $n = 2$ 得知这是一种糟糕的策略。因此，对于这一分支，只需比较在位置(2, 0, 2)停止或继续这两种情况。结果表明，在此情形下“继续”是最优策略。

如果我们复用 $n = 2$ 情形的结果，在 31 种可能策略中还剩下 16 种，也就是说，需要反复求逆矩阵并比较结果，共计 16 次。除了位置 (1, 0, 0) 建议停止外，最优策略是在所有情形下继续。这使先手玩家的获胜概率达到 $\frac{6}{11}$（54.54 %）。

3.3 赢得四分及以上

对于 $n = 4$，新增了 22 种游戏情境，在总计 3011 种策略中，需要比较 125 种。最优策略是在 (1, 2, 0)、(2, 0, 0) 和 (2, 0, 2) 时停止，其他情况下继续。这使先手玩家的获胜概率达到 $\frac{2236}{4165}$（53.69 %）。

对于 $n = 5$，共有 35 种新的游戏局面，在总计 5,755,251 种策略中，需要比较 1296 种。最优策略使先手玩家的获胜概率达到 $\frac{1026}{1925}$（53.30 %）。

对于 $n = 6$，会产生 51 个新的游戏情境。在 3570 亿种可能的策略中，需要比较 16807 种。最优策略使先手玩家的获胜概率达到 $\frac{275848876}{521145625}$ (52.93 %)。

一般而言，会产生 $\frac{n}{2}(3n-1)$ 个新的游戏情境，这也是每种可能策略所需求逆矩阵的维度。因此，这种解析方法很快就会达到数值极限。

4 确定最优策略的迭代方法

对于任意 b和$\frac{1}{2}\ 1-P\ 0\ b\ c\ +\frac{1}{2}P\ 1\ c\ b$，我们有 $P(0,b,)=\frac{1}{2}(1-P(0,,b))+\frac{1}{2}P(1,b,)$ 和 $P(0,,b)\ (\ (,,))\ (,,)$。将第二个方程代入第一个方程，得到

$$P(0,b,c)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}P(1,b,c)-\frac{1}{3}P(1,c,b) \tag{7}$$

在位置 (a,b,c) 应用方程 7 $a\geq 1$ 可得:

$$P(a,b,c)=\frac{1}{2}(1-P(0,c,b))+\frac{1}{2}P(a+1,b,c)$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P(1,c,b)+\frac{1}{6}P(1,b,c)+\frac{1}{2}P(a+1,b,c)$$

当当前玩家选择继续时，以及

$$P(a,b,c)=1-P(0,c,a+b)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}P(1,c,a+b)+\frac{1}{3}P(1,a+b,c)$$

当当前玩家选择停止时。

我们只需对满足 $0<a<n$, $0<a+b<n$ 和 $0\leq c<n$的位置 (a,b,c) 进行迭代。这样的位置共有 $(n-1)_2^{n^2}$个。

对于每个位置（a，b，c），令 P_{min}（a，b，c）表示目前已知的最小获胜概率，P_{max}（a，b，c）表示在该迭代中获得的最大获胜概率。并令 S（a，b，c）表示当前玩家的策略，其中 S（a，b，c）$\in${未知、继续、停止}。

第一步是初始化所有变量：对于每个位置（a，b，c），P_{min}（a，b，c）：$=0$，P_{max}（a，b，c）：$=1$，以及 S（a，b，c）：$=$未知。

在迭代步骤中，将区分 S 的三种可能情况:

1. S（a，b，c）$=$未知。

   如果 $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P_{\max}\ 1\ c\ b\ +\frac{1}{6}P_{\min}\ 1\ b\ c\ +\frac{1}{2}P_{\min}\ a+1\ b\ c\ >\frac{2}{3}-\frac{2}{3}P_{\min}\ 1\ c\ a+$（，，）$b\quad 1\ a+b\ c\quad S\ a\ b\ c\ =$（，，）（，，）（，，）$+\frac{1}{3}P_{\max}$（，，），则（，，）继续。

   如果 $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}P_{\max}\ 1\ c\ a+b\ +\frac{1}{3}P_{\min}\ 1\ a+b\ c\ >\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P_{\min}\ 1\ c\ b\ +\frac{1}{6}P_{\max}\ 1\ b\ c\ +$(,,)(,,)(,,)(,,)(,,)，则(,,)停$\frac{1}{2}P_{\max}\ a+1\ b\ c\ ,\quad S\ a\ b\ c\ =$止。

$$P_{\min}(a,b,c) := \min\Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}P_{\max}(1,c,b) + \tfrac{1}{6}P_{\min}(1,b,c) + \tfrac{1}{2}P_{\min}(a+1,b,c),$$
$$\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}P_{\max}(1,c,a+b) + \tfrac{1}{3}P_{\min}(1,a+b,c)\Big).$$

$$P_{max}(a,b,c) := \max\Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}P_{min}(1,c,b) + \tfrac{1}{6}P_{max}(1,b,c) + \tfrac{1}{2}P_{max}(a+1,b,c),$$
$$\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}P_{min}(1,c,a+b) + \tfrac{1}{3}P_{max}(1,a+b,c)\Big).$$

注意，如果 a+b=n，那么 $P_{min}(a,b,c) := P_{max}(a,b,c) := 1$。

2. $S(a,b,c)$ =继续

$$P_{min}(a,b,c) := \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}P_{max}(1,c,b) + \tfrac{1}{6}P_{min}(1,b,c) + \tfrac{1}{2}P_{min}(a+1,b,c)$$
$$P_{max}(a,b,c) := \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}P_{min}(1,c,b) + \tfrac{1}{6}P_{max}(1,b,c) + \tfrac{1}{2}P_{max}(a+1,b,c)$$

3. $S(a,\ b,\ c)$ =停止

$$P_{min}(a,b,c) := \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}P_{max}(1,c,a+b) + \tfrac{1}{3}P_{min}(1,a+b,c)$$
$$P_{max}(a,b,c) := \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}P_{min}(1,c,a+b) + \tfrac{1}{3}P_{max}(1,a+b,c)$$

当所有位置的 $S(a,\ b,\ c)$ 都处于继续或停止状态时，迭代便会停止。用这种方法，可以确定 n 不超过 20 时的最优策略。一旦找到最优策略，就可以建立相应的位置获胜概率方程，并用标准线性方程求解器求解方程组。初始游戏局面 (0, 0, 0) 的获胜概率可在在线整数数列百科全书中的两个数列 A387261 和 A387262 [4] 中查到，适用于 n不超过 15 的情况。

5 最优策略

如果玩家1只差一分就获胜，则不需要策略，因为他们只需再投一次。

如果对手只差一分就获胜，玩家1必须“全押”，也就是说始终继续。证明很简单：采用“全押”策略获胜的概率 P_{all} 是

$$P_{all} = p_n\left(1 + \frac{1-p_n}{2} + (\frac{1-p_n}{2})^2 + \dots\right) = \frac{2p_n}{1+p_n}$$

以 $p_n = 2^{-n}$ 连续 n 次掷出正面的概率。

如果玩家决定存下中间的 x 分数，则获胜的概率 P_x 为

$$P_x = \frac{2p_x}{1+p_x}\frac{p_{n-x}}{2}\left(1+\frac{1-p_{n-x}}{2}+(\frac{1-p_{n-x}}{2})^2+\dots\right) = \frac{2p_x}{1+p_x}\frac{p_{n-x}}{1+p_{n-x}}.$$

P_x 小于 P_{all} ，对所有 x 和 n均成立：

$$\frac{2p_x}{1+p_x}\frac{p_{n-x}}{1+p_{n-x}} < \frac{2p_n}{1+p_n} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+p_x}{2p_x}\frac{1+p_{n-x}}{p_{n-x}} > \frac{1+p_n}{2p_n} \Leftrightarrow$$

$$(1+p_x)(1+p_{n-x}) > 1+p_n \Leftrightarrow p_x+p_{n-x} > 0.$$

由于将连胜拆分成两部分会降低获胜概率，拆分成两部分以上的效果就更差。因此，在这种情况下，全押是最佳策略。

剩下的情况是，双方玩家都至少还需要 2 分。表达最优策略的一种简单方法是，列出在任何给定的游戏局面下，玩家在将开放点数转换为已保存点数之前应该尝试投掷的硬币数量。表格1 列出了 n最多到 20 的最优数量。

例如，如果双方玩家都还需要 4 分才能获胜，那么轮到的玩家如果在第一轮投出正面，就应该继续；但如果第二次投出正面，就应该停止，从而转换两个开放点数。

致谢

作者谨此感谢 Jinyuan Wang 提供用于确定最优策略的迭代方法；感谢 Lucas Wey Hacker 提请我关注 Glenn 等人的论文；感谢 Kester Habermann 提供编码支持；并感谢 Tatiana Tatarenko、Misha Lavrow 和 Denizalp Goktas 提供宝贵建议。

参考文献

[1] Qiwen Cui 和 Lin F. Yang。回合制随机博弈的极小极大样本复杂度，2020 年。[2] James Glenn、Haw-ren Fang 和 Clyde P. Kruskal。双人游戏《Can't Stop》的逆向逼近算法，2008 年。[3] R. Jehn。《*Super Six*》游戏的最优策略。 https://arxiv.org/abs/2109.10700，2021 年。

Points Player 1 needs	对手需要的点数																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
13	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
14	4	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
15	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
16	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
17	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
18	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1
19	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
20	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

表1：玩家应掷出的硬币数量，以最大化其获胜机会。

[4] R Jehn。 在线整数数列百科全书中的序列 *A387261* 和 *A387262*。 https://oeis.org/A387261和 https://oeis.org/A387262，2025 年。

[5] Lloyd S. Shapely。《随机博弈》。《美国国家科学院院刊》，39(10)：1095–1100，1953。