arXiv:2603.01005v1 [math.CO] 1 Mar 2026

关于缩短多维排列的万有词

Sergey Kitaev[1] 和 Dun Qiu[2]

[1] 斯特拉斯克莱德大学数学与统计学系，26 Richmond Street，格拉斯哥 G1 1XH，英国[2]南开大学组合数学中心（LPMC），天津 300071，中国。电子邮箱：[1]sergey.kitaev@strath.ac.uk, [2]qiudun@nankai.edu.cn

摘要。 </style}一个万有词（u-词）是指一种二维词，它有 $d-1$ 行，对于长度为 d、每个维度有 n 个元素的排列，其中任意大小为 n 的窗口都与恰好一个长度为 n 的排列序同构，并且涵盖了所有长度为 n 的排列。已知 d 维排列存在 u-词（事实上，甚至存在更强的 u-圈）。

本文利用不可比较元素的思想证明，对于 $d \geq 2$ 和，存在长度为 $(n!)^{d-1}+n-1-i(n-1)$ 的 u-词

$$0 \leq i \leq \frac{2^{d-1}}{n-1}\left[(1+(n-1)!)^{d-1}-\left(1+\frac{(n-1)!}{2}\right)^{d-1}\right],$$

对于长度为 n 的 d维排列存在，这推广了 Kitaev、Potapov 和 Vajnovszki 关于“通常”排列的相应结果（$d=2$）。

关键词：万有词；u-词；组合生成；多维排列

AMS 学科分类：05A05

1 引言

文献中有一长串研究致力于各类通用对象的研究；特别是，通用循环（*u*-循环）这一针对组合结构的概念推广了德布鲁因序列的概念，于 [6] 中提出，并已针对各种对象得到广泛研究。考虑通用循环的线性（即非循环）版本，我们得到万有词（*u*-词）的概念，它也出现在文献的多处，例如在 [13]中。

多维排列这一概念有多种定义方式，其中一种定义中“多维”一词的视觉动机例如描绘于 [18, 图 2]中。遵循 [1], 本文作者 [14],所采用的定义，他们使用贪心算法，并指出典型的图论方法并不（容易）适用，从而将 [6, 9, 11] 中的结果推广为证明了以下对象的存在性：

u-循环（适用于 d维排列），由此可直接推出适用于 d维排列的 u-词存在。本文的主要目标是推广 [13] 中的结果，说明如何利用不可比较元素缩短适用于 d维排列的 u-词。我们将证明以下定理，从而推广 [13] 中的相应结果（通过代入 $d = 2$得到）。

定理 1.1。 长度为$(n!)^{d-1} + n - 1 - i(n-1)$的 *u*-词，对于 $d \geq 1$ *and*

$$0 \leq i \leq \frac{2^{d-1}}{n-1}\left[(1+(n-1)!)^{d-1} - \left(1 + \frac{(n-1)!}{2}\right)^{d-1}\right],$$

长度为 n 的 d 维排列存在。

虽然定理 1.1 的证明步骤与 [13] 中证明相应结果的步骤相似，但我们仍需克服若干障碍，才能得出适用于 d维情形的结果，尤其需要恰当地定义 李生排列 。正如 [14], 所述，将“通常的”二维排列的通用对象相关结果推广到 d维类比情形，并不能像采用 [7]中讨论的通用循环的乘积那样，以一种普遍适用的方式实现。

我们的工作与一个更广泛的研究领域相关，该领域研究通用词（排列以外的组合对象的通用词）及其缩短，例如， [5, 10] 关于通用部分排列词/循环， [4] 关于词模式和集合划分的通用循环缩短，以及 [2]关于二维通用部分排列词/循环。

本文的组织结构如下：第2 节给出所有必要的定义，第3节证明定理1.1。第4节给出总结性评论。

2 预备知识

2.1 d维排列

我们对多维排列的引入，很大程度上受到 [3, 14]中相应定义的启发。考虑一个长度为 $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$的排列 n，即对称群 S_n中的一个元素。本文中，我们对π采用单线表示法，但回顾一下，其双线形式为

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_n \end{pmatrix}.$$

长度为 n 的 d维排列，或称 d维 n排列，定义为一个有序的 $(d-1)$ 元组 (π^2， π^3， ……， π^d)，其中每个 $\pi^i = \pi^i_1\pi^i_2\ldots\pi^i_n \in S_n$ 对于 $i = 2$， ……， d。例如，三元组 (321，123，231) 是一个长度为 3 的 4维排列。我们

用 S_n^d 表示所有长度为 n 的 d 维排列的集合。注意， $S_n^2 = S_n$，因此普通排列自然可视为 2 维排列。

我们将双行表示法扩展为 d行表示法。具体而言，若定义 $\pi^1 = \pi_1^1\pi_2^1\ldots\pi_n^1 = 12\ldots n$，则 d 维排列 $\Pi = (\pi^2, \pi^3, \ldots, \pi^d)$ 可表示为一个 $d \times n$ 矩阵：

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \pi_2^1 & \ldots & \pi_n^1 \\ \pi_1^2 & \pi_2^2 & \ldots & \pi_n^2 \\ \pi_1^3 & \pi_2^3 & \ldots & \pi_n^3 \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ \pi_1^d & \pi_2^d & \ldots & \pi_n^d \end{pmatrix}.$$

或者，我们也可以将其简洁地写作

$$\Pi = \left\{\pi_j^i\right\}_{\substack{1\le i\le d \\ 1\le j\le n}}.$$

类比双行表示法，我们将矩阵的列 解释为 Π 的元素 ，记作 $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$，因此

$$\Pi = \Pi_1\Pi_2\ldots\Pi_n, \quad \text{where } \Pi_j = (\pi_j^1, \pi_j^2, \ldots, \pi_j^d)^T = (j, \pi_j^2, \pi_j^3, \ldots, \pi_j^d)^T.$$

举一个具体例子，设 $\Pi = (\pi^2, \pi^3) \in S_5^3$，其中 $\pi^2 = 21534$ 且 $\pi^3 = 41253$。那么：

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Π的对应元素为：

$$\Pi_1 = (1,2,4)^T, \quad \Pi_2 = (2,1,1)^T, \quad \Pi_3 = (3,5,2)^T, \quad \Pi_4 = (4,3,5)^T, \quad \Pi_5 = (5,4,3)^T.$$

对于一个（二维）排列或词 π， π的约化形式记作 red(π)，其求法是将 π 中第 i 小的元素替换为 i。例如，red(5294) =3142。词或排列 w 中任意 i 个连续元素构成 w 的一个因子。若 w 中有一个因子是 u ，我们也称 w 覆盖 red(u)。设 π 是一个由 $\{1,\ldots,n\}$ 构成的二维排列， x 是 $\{1,\ldots,n\}$ 的一个元素。对于 $x < n$，令 x^+ 表示满足 $x < y < x+1$ 的一个数 y；而对于 $x = n$， $x^+ = n+1$。此外，对于 $x > 1$，令 x^- 表示满足 $x-1 < y < x$ 的一个元素 y；而对于 $x = 1$， $x^- = 0$。将 x^+ 和 x^- 的定义推广到任意词（而非排列） π 是显而易见的： x^+ 指大于 x 但小于下一个更大元素（如果存在）的元素；而 x^- 指小于 x 但大于下一个更小元素（如果存在）的元素。

在下文中，对于多维排列，我们通常不呈现顶行，因为它始终是相应的递增排列。此外，对于一个矩阵 M ，

其中每一行都包含互异元素（但不同行中可以有相等元素），M 的约化形式记为 red(M)，其通过对每一行取约化形式得到。

2.2 d维排列的万有词

下列万有词的定义引自 [14]。

定义 2.1。一个有 $d-1$ 行的矩阵 U，若在其约化形式中，d 维 n-排列的每个 d维排列（不含顶行）都能作为连续的 n 列在 U 恰好出现一次，则称其为万有词，或u-词。

例如，$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 是三维2-排列的 u-词。事实上，前两列包含排列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，第 2 列和第 3 列包含排列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，依此类推。

然而，我们需要扩展定义 2.1 中引入的 u-词概念，使其允许使用不可比较元素。我们首先介绍相关思路 [13]，这些思路针对二维排列，通过偏序集（posets）的线性扩张缩短 u-词。

词 11211 按照以下意义是所有长为3的排列的 u-词，因此缩短了这些排列的一个“经典”u-词，例如 14524314。具体来说，我们将相等元素视为不可比较元素，同时必须保留这些不可比较元素与其他元素之间的相对次序。因此，112 编码了所有末元素为最大元素的排列，即 123 和 213；从第二个位置开始，我们得到词 121，它编码排列 132 和 231；最后，从第三个位置开始，我们读出词 211，它编码排列 312 和 321。更一般地，显然词 $11\ldots1\,2\,11\ldots1 = 1^{n-1}21^{n-1}$ 编码了所有排列

$$\underbrace{\qquad}_{n-1 \text{ times}} \quad \underbrace{\qquad}_{n-1 \text{ times}}$$

其长度为 $2n-1$（而不是先前为排列定义的u-词的长度 $n+n-1$）。然而，还存在其他压缩方式，可以生成长度介于 n 和 n 之间的 u-词！$+n-1$。例如，词 123212 也是长为3的排列的一个 u-词。注意，形如 11 ...1 的词是相应长度的所有排列的 平凡u-词。

在 [13] 中，已证明对于 n-排列，存在长度为 $n!+(1-i)(n-1)$ 的 u-词，其中 $0 \le i \le (n-2)!$。更具体地说，[13] 关注的主要问题是，是否存在这样的排列的 u-词：其中连续相等元素之间恰好有$n-1$ 个元素。我们的论文也关注类似问题。然而，为了证明定理 1.1，我们没有将不可比较元素引入

所讨论矩阵中的整列，而是细化了这一思路（因此得到了更多可能的 u-词长度）：在各行中分别引入彼此独立的不可比较元素。因此，相隔 $n-1$ 列的两列中，有些行的元素可能相同，而另一些行的元素则不同。例如，我们通过分别取这两个

不可比较元素对，作为四个矩阵的编码，即 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3 图论背景

构造通用对象的一种典型方法是定义一个合适的转移图，其中顶点对应于所讨论的对象，然后证明该图是哈密顿图。证明哈密顿性通常需要证明另一个相关的图是欧拉图。接下来将介绍这些概念。

设 $G=(V,E)$ 是一个有向图（digraph）。对于边 $u\to v\in G$，v 称为该边的头，u 称为该边的尾。在 G 中，有向路径是由互不相同的节点组成的序列 $v_1,\ldots,v_t$，且对于每个 $1\le i\le t-1$，都存在一条边 $v_i\to v_{i+1}$。如果一条路径包含 G 中的所有节点，则称其为哈密顿路径。若一条闭合的哈密顿路径（$v_t\to v_1$ 是一条边）构成哈密顿回路。若 G 有哈密顿回路，则称 G 为哈密顿图。如果任意一个节点到任意其他节点都存在有向路径，则称有向图是强连通的。如果对于任意一对节点 a 和 b，在底层无向图（通过移除有向图中的所有方向得到）中都存在一条路径，则称有向图是连通的。有向图 G 中的迹是由节点组成的序列 $v_1,\ldots,v_t$，且对于每个 $1\le i\le t-1$ 都存在一条边 $v_i\to v_{i+1}$，并且每条边至多经过一次。G 中的欧拉迹是恰好经过每条边一次的迹。闭合的欧拉迹称为欧拉回路。如果有向图包含欧拉回路，则称其为欧拉图。令 $d^+(v)$（分别为 $d^-(v)$）表示节点 v 的出度（分别为入度），即从（分别指向）v 的边的数量。如果图中的每个节点 v 都满足 $d^+(v)=d^-(v)$，则称该有向图是平衡的。以下结果众所周知，且不难证明。

定理 2.2。有向图 G 是欧拉图，当且仅当它是平衡的且（强）连通。

2.4 重叠排列图及其聚类

u-词的循环版本，即词的因子可以循环读取的情形，称为通用循环，或*u*-循环。对于 n-排列，u-循环（长度为 $n!$）的存在性（由此只需在末尾附加长度为

的词的前缀，即可显然推出 u-词的存在性 $n-1$）已由 [6] 针对任意 n 通过对由重叠排列构成的图进行聚类 n-排列。该图有 $n!$ 个顶点，分别以 n-排列为标记；当且仅当词 $x_1x_2\cdots x_n \to y_1y_2\cdots y_n$ 与 $x_2x_3\cdots x_n$ 序同构时，存在一条边 $y_1y_2\cdots y_{n-1}$，也就是说，当且仅当 $x_i < x_j$ 对于所有 $y_{i-1} < y_{j-1}$，均有 $2 \le i < j \le n$。

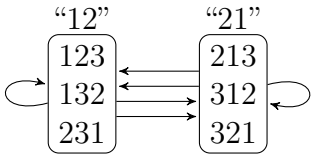


图 1：对重叠 3-排列图进行聚类

长度为 k 的模式 $\{1,2,\ldots,k\}$ 是 的一个排列。每个簇包含所有 n-排列，这些排列的前 $n-1$ 个元素构成相同的模式；也就是说，簇中每个排列的这些元素都与同一个（$n-1$）-排列序同构。我们将这样的模式称为簇的签名。对于 1 的情形，见图 $n=3$；对于 2 的情形，见图 $n=4$，其中簇被视为“超节点”。每个排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 恰好对应一条边，该边指向签名与 $x_2x_3\cdots x_n$ 序同构的簇。边也被视为簇之间的边。

由簇构成的图中的任何欧拉回路，都可以扩展为重叠排列图中的哈密顿回路（因为每条边恰好对应一个排列，而且我们知道这个排列）。这些哈密顿回路中至少有一部分（猜想可能是全部）可以通过偏序集的线性扩张，扩展为排列的 u-循环，具体如 [6] 所述。

将刚刚引入的概念，即重叠排列图、簇和签名，推广到 d维n排列的情形是显而易见的。特别地，将有 $((n-1)!)^{d-1}$ 个簇，而一个簇的签名是一个 $(d-1)\times(n-1)$ 矩阵，其各行都是“通常的”排列。显然，对于d维 2-排列，我们只有一个簇。最后，重叠的三维三排列图的聚类如图 3所示。

3 定理1.1的证明

考虑到 d维 n排列由 $d-1$ 行表示，这样的排列属于型 i，$i>0$，如果其 i 行的形式为 $x_1x_2\ldots x_n$，其中 $|x_n-x_1|=1$，其余各行均为单调的（即递增、 $12\ldots n$或递减，$n(n-1)\ldots.1$）。为确保定义明确无歧义，我们假设 $n\ge 3$，但无论哪种情况，我们的定义都推广了李生在 [13]中的概念。例如，

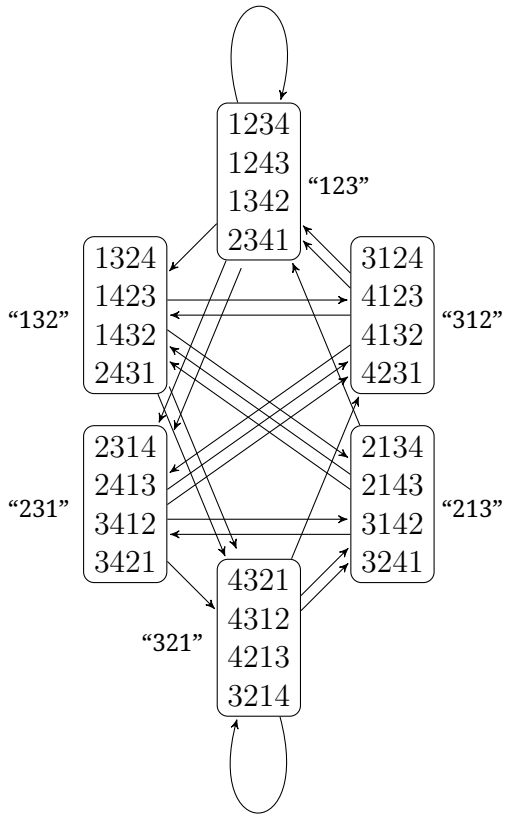


图 2: 重叠4-排列图的聚类

5维4-排列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 属于2型，其中顶行和底行均为单调行。如果一个排列对于某个 $i > 0$不属于 i 型，我们就称它为0型。

两个不同的 d维 n-排列若满足以下条件，则称为 i-孪生：它们都属于类型 i，其中的单调行彼此匹配（位置和类型均相同），且这两个排列属于同一个簇（即它们具有相同的签名，也就是最左侧 $n-1$ 列的约化形式）。例如，$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，以及 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，都是2-孪生。再如，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 是1-孪生。最后，$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 是（4维）3-孪生的例子。

请注意，对于固定的 i，同一个簇可能有多个 i-孪生类，其中

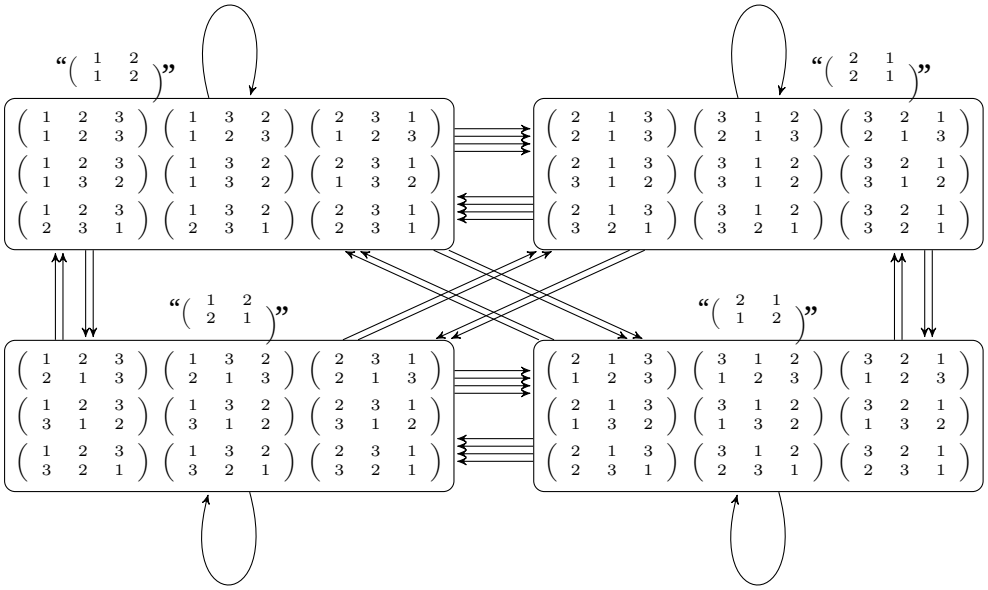


图3：重叠的三维 3-排列图的聚类

一个 i-孪生类是在“属于 i-孪生”这一等价关系下的等价类。然而，虽然每个簇都有一个（$d-1$）-孪生类（见引理 3.1），对于 $n \geq 4$ 某些簇在某些 i的取值下并没有 $i \neq d-1$-孪生类。另外请注意，根据定义，任何 i-孪生类都包含在一个簇内。

我们请读者在图3中验证以下结论；这是本文中能够完整绘出的最大的重叠排列聚类图。

引理 3.1. 每个簇恰好包含 2^{d-1} $(d-1)$-孪生，且它们属于同一个 $d-1(d-1)$-孪生类。此外，对于类型为 $i>0$ 的排列，其 i-孪生类的大小为 2^i。

证明。 对于第一个结论，设一个簇的签名为“$S=\{s_m^j\}_{1\leq j\leq d}$ ”。构造 $(d-1)$-孪生的唯一$_{1\leq m\leq n-1}$可能方式是在每一行中独立地在 $s_1^j \ldots s_{n-1}^j$ 的末尾添加 j、 $2 \leq j \leq d$、$(s_1^j)^+$ 或 $(s_1^j)^-$，由此得到 2^{d-1} 种选择。第二个结论基本上由相同的论证得出，同时需注意单调行是固定的（因此，不可能出现单调行集合或位置不同的 i-孪生）。

□

平行边是连接两个簇且方向相同的重边。

引理 3.2。 对于 $i>0$，簇 X 中的一个 i-孪生类 I 会贡献 2^i 条从X 到某个簇 Y的平行边，并且没有其他边从 X 通向 Y。此外，如果簇 X 中有 k个（互不相交的） i-孪生类 I_1、 I_2、……、 I_k，那么就有不同的簇 Z_1、Z_2、……、 Z_k，每个簇都含有 i-孪生类，它们分别有 2^i 条从 Z_j到 X、 $j=1$、2、……、 k的平行边。

证明。 根据定义，集合 I 中的所有 i-孪生元素具有相同的约化形式，即 $n-1$最右侧列的约化形式相同，因为最左侧和最右侧的元素相对于中间的 $n-2$ 元素具有相同的相对次序。因此，每个 i-孪生元素都会贡献一条指向同一个簇的边，记该簇为 Y。由引理 3.1，有 2^i i-孪生元素，从而证明了第一个断言，因为从同一簇出发并到达同一簇的边（等价地， d维 n 排列）在每一行中，前 $n-1$ 个元素具有相同的相对次序，最后 $n-1$ 个元素也具有相同的相对次序，而这决定了除首尾元素之外所有元素对的相对次序。

现在，不失一般性地，假设一个类 I_j 中的 i 个非单调行位于顶部，并且对于 $m=1,\ldots,i$，一个 i- 孪生中的第 m 行是 $s_1^m \ldots s_n^m$。有 2^i 条平行边从包含 i- 孪生的簇 Z_j 连向 X，这些孪生的顶部 i 行为 $s_0^m s_1^m \ldots s_{n-1}^m$, $m=1,\ldots,i$，其中 $s_0^m \in \{(s_{n-1}^m)^+,(s_{n-1}^m)^-\}$，并且单调行与类 I_j 中对应的行相匹配。注意，无论选择 I_j 中哪个 i-孪生来定义 $s_1^m \ldots s_n^m$，$\mathbf{red}(s_0^m s_1^m \ldots s_{n-1}^m)$ 都相同。最后， $I_a \neq I_b$ 在同一簇X 中出现的唯一方式是单调行不同。在这种情况下，必然有 $Z_a \neq Z_b$。 □

引理 3.3。 重叠排列的聚类图可以划分为若干个循环的不交并，每个循环长度为 $n-1$，由簇之间的 2^{d-1} 条平行边构成（其他边均忽略）。此外，对于每个 i， $1 \leq i \leq d-1$，存在

$$\frac{1}{n-1}\binom{d-1}{i}((n-1)!)^i 2^{d-i-1} \tag{1}$$

长度为 $n-1$ 的不相交圈，由簇之间的 2^i 条平行边构成 s.

证明。 首先注意，由引理 3.1 （第一部分）和引理 3.2，我们可以将重叠排列的聚类图划分为若干个循环的不交并，这些循环由 2^{d-1}条平行边构成；此外，还有由 i-孪生构成的、由 2^i 条平行边构成的不相交圈。接下来注意，由 2^i 条平行边构成的每个循环，其长度必为 $n-1$。这是因为，若从簇 X 到簇 Y有 2^i 条平行边，那么 Y 在非单调行上的签名（长度为 $n-1$）是 X 在非单调行上的签名向右循环移位一位，而单调行保持不变。因此，只会发生 $n-1$ 种不同的移位。

最后，为了计算由 2^i 平行边 构成的不相交圈的数量，我们首先注意到，选择一个 i-孪生类来开始这样的循环，共有 $\binom{d-1}{i}((n-1)!)^i 2^{d-1-i}$ 种可能，其中 $\binom{d-1}{i}2^{d-1-i}$ 是选择单调行及其类型的方式数，而 $((n-1)!)^i$ 是选择非单调行签名的方式数。然而，由于每个循环的长度为 $n-1$，我们需要除以这个数（否则，每个循环都会被计算 $n-1$ 次，因为它可以从循环的任意排列位置开始）。

□

为完成定理 1.1 的证明，我们遵循以下观察。注意，重叠排列的聚类图中的每条边都对应一个 d-维排列。由于 d-维排列的 u-圈存在 [14], ，因此

聚类图必须包含一个欧拉回路。考虑该图中的一条欧拉路径，它给出一个长度为 $(n!)^{d-1}+n-1$ 的 u-词。对于任意固定的 i、$1 \le i \le d-1$，选取一个长度为 $n-1$ 、由 2^i 条平行边构成的循环（根据引理 3.2，该循环存在）。确定循环中每个顶点的一个行 j，使第一个元素等于最后一个元素，即呈现 $s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_1$ 的形式。在每一行中使用重复元素j，实际上会从循环中移除 $n-1$ 条边，并使图中的排列数量减少 $n-1$。该图仍然是平衡且连通的，因此仍然存在一个欧拉回路，对应于一个长度为 $(n!)^{d-1}+n-1-(n-1)$ 的 u-词。现在，我们可以再选取另一个（任意的！）循环进行移除，从而得到一个长度为 $(n!)^{d-1}+n-1-2(n-1)$ 的 u-词。依此类推。通过移除所有重边可实现最大压缩——从每组平行边中移除一条，并从每个循环中移除 $n-1$ 条；对于由 2^i 条平行边组成的 $(n-1)$-循环，这需要“移除一个循环” 2^i-1 次（每组仅保留 1 条边），因此应用的总次数可通过将引理 3.3 中的公式乘以 2^i-1 并对所有 i 求和来计算：

$$\frac{2^{d-1}}{n-1}\sum_{i=1}^{d-1}\binom{d-1}{i}((n-1)!)^i(1-2^{-i}) = \frac{2^{d-1}}{n-1}\left[(1+(n-1)!)^{d-1}-\left(1+\frac{(n-1)!}{2}\right)^{d-1}\right].$$

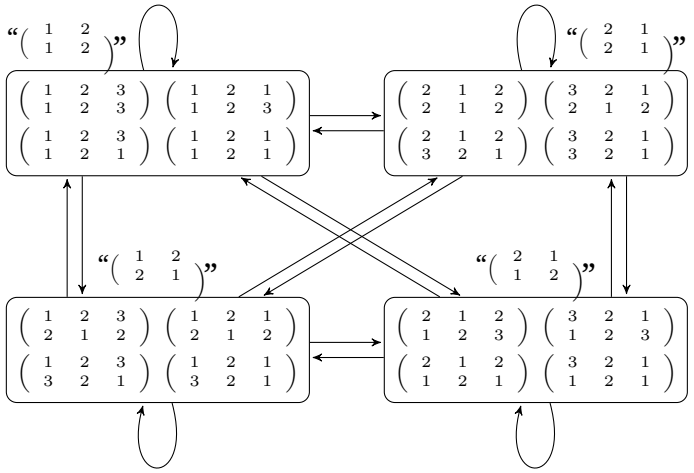


图 4：利用距离为 2 的不可比较元素，对三维 3-排列进行压缩的最大可能性所对应的聚类图

图 4展示了对应于三维 3-排列最大压缩可能性的图，其中使用了距离为 2 的不可比较元素。图中的一条特定欧拉路径如下：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

根据以下一般性描述，可以将这条路径转换为一个长度为 18 的三维 3-排列 u-词，如下所示。

考虑欧拉路径中涉及矩阵 $A = \{a_{i,j}\}_{1\le i\le d-1}$ 和$_{1\le j\le n}B = \{b_{i,j}\}_{\substack{1\le i\le d-1\\1\le j\le n}}$的第 $(k+1)$ 步 $A \to B$，并假设矩阵 $X_k = \{x_{i,j}\}_{\substack{1\le i\le d-1\\1\le j\le k+n}}$已经构造完成（其中 X_0 为欧拉路径中的初始矩阵）。注意$\mathrm{red}(x_{i,k+1}x_{i,k+2}\dots x_{i,k+n}) = a_{i,1}a_{i,2}\dots a_{i,n}$。

为构造 X_{k+1}，我们在每一行$x_{i,1}x_{i,2}\dots x_{i,n+k}$, $1 \le i \le d-1$中独立进行，其中$\max_i$ 表示 X_k的第 i 行中的最大元素：

- 若可能，令$x_{i,n+k+1}$为 $\{x_{i,1},\dots,x_{i,n+k},1+\max_i\}$ 中满足$\mathrm{red}(x_{i,k+2}x_{i,k+3}\dots x_{i,k+n+1}) = b_{i,1}b_{i,2}\dots b_{i,n}$的最小选项，并且不改变 X_k的第 i 行中的其他元素。这包括$b_{i,n} = n$的情形。

- 否则，我们有$b_{i,\,n} < n$并令$x_{i,\,n+k+1}$ 为$\{x_{i,k+2}, x_{i,k+3},\dots,x_{i,k+n}\}$的第$b_{i,\,n}$小的元素。此外，对于 $1 \le j \le n+k$，每当$x_{i,\,j} \ge x_{i,\,n+k+1}$时，将$x_{i,\,j}$替换为$x_{i,\,j}+1$。

对于上述欧拉路径，构造u-词的步骤如下，其中我们仅标出那些需要重写某一行中已有元素的箭头：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&2&1\\1&2&3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&4&3&2&1\\1&2&3&2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&4&5&4&3&2&1&2&3&4&3&4&5&4\\1&2&3&2&1&2&3&2&1&2&3&4&3&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}3&4&5&4&3&2&1&2&3&4&3&4&5&4&5&4&1&4\\2&3&4&3&2&3&4&3&2&3&4&5&4&2&1&2&1&2\end{pmatrix}.$$

为了总结本节，我们给出一个由非最大压缩得到的 u-词示例，它对应于图5中的聚类图。在该图中，顶部簇之间四条平行边中仅移除了一条，因此$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&3&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2&3&1\\2&3&1\end{pmatrix}$ 彼此之间以及与 $\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}$未合并，且$\begin{pmatrix}2&1&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}3&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}$ 彼此之间以及与 $\begin{pmatrix}2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$未合并。该图中的一条特定欧拉路径如下：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2\\2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}2&3&1\\2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

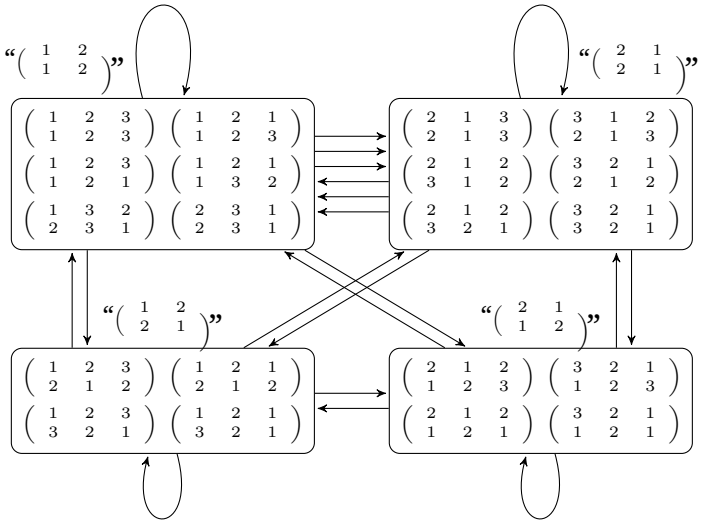


图5：对于三维 3-排列，使用距离为2的不相容元素构成的聚类图所给出的非最大压缩可能性

使用“最大压缩示例”中的方法，可以将上述路径转换为一个长度为 22 的三维 3-排列 u-词，如下所示：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 5 & 6 & 5 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 6 & 7 & 6 & 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 7 & 8 & 7 & 3 & 7 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4 结语

定义4.1。 在 u-词的定义中允许将连续列视为循环的情况下，我们将 d 维 n-排列的万能循环或u-循环定义如下。

例如，$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 是三维2-排列的一个u-循环。再举一例，我们有如下长度为16的三维 3-排列的u-循环：

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kirsch 等人 [15] 证明了该猜想，见 [13]，表明可以利用不可比较元素将排列的 u-圈缩短至长度 $n!-i(n-1)$，对于任意 $1 \leq i \leq (n-2)!$，从而推广了 [13] 中关于存在排列的u-词、其长度为 $n!+(1-i)n-1)$ 这一结果。下面的问题是关于定理1.1 的一个推广，以及对 [15] 中与 $d=2$情形相关的主要结果的推广。

问题 1. 是否存在长度为$(n!)^{d-1}-i(n-1)$、针对 $d \geq 2$ 和

$$0 \leq i \leq \frac{2^{d-1}}{n-1}\left[(1+(n-1)!)^{d-1}-\left(1+\frac{(n-1)!}{2}\right)^{d-1}\right],$$

针对 d 维、长度为 n 的排列的 *u*-圈？

关于另一个研究方向，请注意，我们在定理证明中描述的移除循环的过程 1.1，立即给出了一个下界，不过这个下界与真实值相差甚远：

$$2^{\frac{2^{d-1}}{n-1}\left[(1+(n-1)!)^{d-1}-\left(1+\frac{(n-1)!}{2}\right)^{d-1}\right]}$$

这是不同（缩短后的）u-词的数量。事实上，一旦我们能够逐个移除循环，就可以选取一个要移除的循环子集，从而得到一个不同的 u-词。要显著提高下界，需要将我们的方法与*BEST* 定理结合起来。

“BEST”这个名称是“BEST 定理”发现者姓名的首字母缩写：N. G. de Bruijn、Tatyana Ehrenfest、Cedric Smith 和 W. T. Tutte。BEST 定理 [17, 定理 5b]（另见 [16, 第 56, 68] 和 [8]）指出，顶点集为 V、初始边为 $e=v \to u$ 的欧拉有向图中欧拉回路（遍历）的数量由以下公式给出

$$(\#\text{ spanning trees rooted at } v)\cdot\prod_{x\in V}(\text{outdegree}(x)-1)!. \tag{2}$$

这里假设生成树的方向指向 v，并且已知 v 的选择并不重要（结果始终相同）。遗憾的是，在移除部分循环后应用 BEST 定理来计数欧拉路径，进而计数不同的 u-词，即使对于较小的 n 和 d，也已经很困难；一般情形则可能无法实现。

事实上，本文提出的方法可能无法生成所有可能的 u-词，因为如果允许连续相等元素之间的距离不仅为 $n-1$，还可以更短（本文并未采用这种情况），那么我们就能大幅扩充多维排列的 u-词/u-圈类别，并获得更短的长度。例如，在 $n=4$ 的二维情形中，对于 [13],，可以得到一个长度为 17 的 u-词（¡ 21，即定理 1.1 中的最短长度）：34321432345234343。

问题 2. 描述不同于定理 d维 n排列的 *u*-词可能具有的长度*1.1*。

问题 3. 为多维排列的 u-词数量给出一个“较好”的上界。

致谢。 作者感谢匿名审稿人认真审阅本文，并提出了许多有益的建议，帮助改进了本文的表述。第一作者获得 Leverhulme研究奖学金资助（项目编号 RF-2023-065\9）。第二作者部分获得中央高校基本科研业务费、中国国家自然科学基金（12271023 和 12171034）以及天津市自然科学基金（24JCZDJC01390）的资助。

参考文献

[1] S. Avgustinovich、S. Kitaev、J. Liese、V. Potapov、A. Taranenko。多维排列中的单点网格模式，《组合理论杂志 *A* 辑》**201** (2024)，论文编号 105801，共 23 页。[2] W. Carey、M. Kearney、R. Kirsch 和 S. Popescu。通用部分环面，设计、编码与密码学(2025)。 https://doi.org/10.1007/s10623-025-01609-9[3] S. Chen、H. Fang、S. Kitaev、C. X. T. Zhang。多维排列中的模式，《欧洲组合学杂志》**130**(2025) 104203。[4] H. Z. Q. Chen、S. Kitaev。关于词模式与集合划分的通用部分词。《*RAIRO* 理论信息与应用》**54**(2020)，论文编号 5，共 14 页。[5] H. Z. Q. Chen、S. Kitaev、T. M¨utze、B. Y. Sun。关于通用部分词。《离散数学理论与计算机科学》**19** (2017)，第 1 期，论文编号 16，共 19 页。[6] F. Chung、P. Diaconis、R. Graham。组合结构的通用循环，《离散数学》**110** (1992) 43–59。[7] P. Diaconis、R. Graham。通用循环的乘积，载于《致敬 Martin Gardner 九十寿辰的谜题集》，第 35–55 页。E. D. Demaine、M. L. Demaine 和 T. Rodgers 编。A K Peters, Ltd.，韦尔斯利，马萨诸塞州，2008。x+349页。[8] H. Fredricksen。全长非线性移位寄存器循环算法综述，《*SIAM* 综述》**24** (1982)，第 2 期，195–221。[9] A. Gao、S. Kitaev、W. Steiner、P. Zhang。构造排列通用循环的贪心算法，《国际计算机科学基础杂志》**30** (2019) 1，61–72。[10] B. Goeckner、C. Groothuis、C. Hettle、B. Kell、P. Kirkpatrick、R. Kirsch、R. Solava。非二元字母表上的通用部分词。《理论计算机科学》**713** (2018)，56–65。

[11] G. Hurlbert。通用循环：超越 de Bruijn，博士论文，罗格斯大学，1990。[12] R. Johnson。排列的通用循环，《离散数学》**309** (2009) 17，5264–5270。[13] S. Kitaev、V.N. Potapov、V. Vajnovszki。关于缩短排列的 u-圈和 u-词，《离散应用数学》**260**(2019)，203–213。[14] S. Kitaev 和 D. Qiu。多维排列的一类通用循环，《离散应用数学》**359**(2024) 310–320。[15] R. Kirsch、B. Lidick´y、C. Sibley、E. Sprangel。缩短的排列通用循环。《离散应用数学》**324**(2023)，219–228。[16] R.P. Stanley。枚举组合学。第 2 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999。[17] T. van Aardenne-Ehrenfest 和 N.G. de Bruijn。有向线性图中的回路与树，*Simon Stevin* **28** (1951)，203–217。[18] H. Zhang 和 D. Gildea。可因子分解多维排列的枚举。《整数数列杂志》**10**(**5**)(2007)，文章 07.5.8。