arXiv:2603.01028v1 [cs.CV] 1 Mar 2026

基于傅里叶-切比雪夫特征的隐式神经表示内容感知频率编码

Ke Junbo[1] Xu Yangyang[1] Wen You-Wei[1], * Wang Chao[2]1湖南师范大学数学与统计学院2南方科技大学统计与数据科学系

摘要

隐式神经表示（*INR*）已成为各种信号处理任务的强大范式，但其固有的频谱偏置限制了捕捉高频细节的能力。现有方法通过使用基于傅里叶的特征，在一定程度上缓解了这一问题，而这些特征通常依赖固定的频率基。这迫使多层感知机（*MLP*）低效地组合所需频率，从而限制其表征能力。为解决这一局限，我们提出内容感知频率编码（*CAFE*），它在傅里叶特征的基础上，通过哈达玛积组合多个并行线性层。*CAFE* 能够显式且高效地合成更广泛的频率基，同时利用学习到的权重选择与任务相关的频率。此外，我们将这一框架扩展为 *CAFE+*，并将切比雪夫特征作为傅里叶基的补充成分。二者结合可提供更强且更稳定的频率表示。在多个基准测试上开展的大量实验验证了我们方法的有效性和效率，其性能始终优于现有方法。我们的代码可在以下地址获取：*https://github.com/JunboKe0619/CAFE*。

1. 引言

隐式神经表示（INR） [37] 是一类利用神经网络学习从坐标到信号或场景值的连续映射的方法。与离散表示 [6, 34], 不同，隐式神经表示可生成连续输出，从而在任意位置实现精确重建。这些特性近年来备受关注，其应用涵盖连续图像超分辨率 [4, 5, 15], 图像压缩 [9, 12, 38], 逆问题 [29, 39, 47], 和神经渲染 [26, 27]。

尽管取得了这些成功，众所周知，隐式神经表示仍存在频谱偏置 [31, 45], ，即神经网络往往倾向于优先捕捉低频分量，从而限制了其表示高频细节的能力。为了解决上述局限性，一种广泛采用的策略是使用傅里叶特征映射，例如随机傅里叶特征（RFF） [40] 或位置编码（PE） [26]。这些技术利用预定义的一组正弦

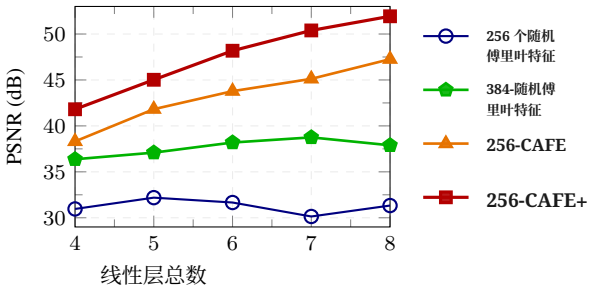


图1. 线性层总数对图像拟合任务峰值信噪比的影响。对于随机傅里叶特征基线，线性层仅存在于多层感知机中。对于我们的方法（CAFE和CAFE+），线性层总数包括编码阶段和多层感知机中的线性层。该总数的任何增加均来自编码阶段中的额外层，而多层感知机的深度保持固定。图例表示每层的隐藏神经元数量。

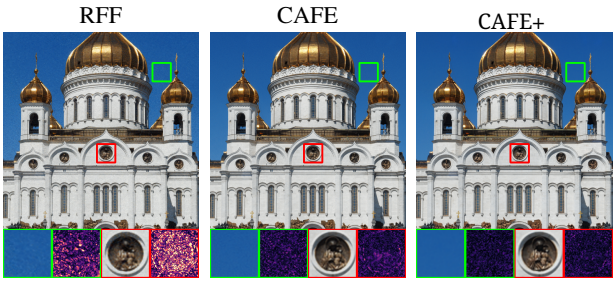


图 2. 在图像拟合任务中，随机傅里叶特征、CAFE 和 CAFE+在参数数量相同的条件下的定性比较。放大展示了高频和低频区域，并提供了相应的误差图以进行详细评估。

*通讯作者：wenyouwei@gmail.com。

基函数将输入坐标投影到高维空间中。这种映射已被证明能够增强神经切线核（NTK）的频谱特性 [11], , 从而使多层感知机（MLP）能够更准确地逼近目标信号的高频分量。

然而，这些方法的有效性从根本上受到固定频率基的限制。因此，多层感知机必须通过其非线性变换，基于这些预定义的频率基隐式合成目标频率；从理论上讲，这是可行的 [45] ，但在实践中效率低下且难以优化。如图 1 所示，尽管增加网络深度原则上应能增强模型合成频率的能力，但其对重建精度几乎没有提升。此外，增大网络宽度只能带来适度的收益，却会导致参数量大幅增加。这一分析促使我们将目标频率合成的负担从多层感知机转移至编码阶段，而不是扩大网络容量。

基于这一思想，我们提出了内容感知频率编码（*CAFE*）。该框架通过一种动态机制实现这一转变：用学习生成一组能够根据目标信号内容进行最优适配的频率基，替代固定的随机频率基。具体而言，由傅里叶特征生成的正弦基经过 N 并行线性层映射，其输出通过哈达玛积进行组合，从而诱导频率交互。我们的分析表明，该设计将可表示的频率空间从 M 固定的傅里叶基扩展为 $\mathcal{O}(M^N 3^{N-1})$ 个分量，同时通过学习到的权重实现对任务相关频率的自适应选择。这种对目标频率的显式合成被证明更加有效，如图 1 所示：我们的方法能够从编码阶段增加线性层数量中受益。

尽管 CAFE 为频率合成提供了一种强大且自适应的机制，但所表示频率的范围仍取决于傅里叶特征的初始化。由于神经网络倾向于先学习低频分量 [44], , 如果 CAFE 未能纳入必要的低频基，网络可能会被迫过度使用高频基，以弥补缺失的低频信息。这会在低频区域引入噪声，也会损害高频信号的重建 [10, 23]。

为实现更稳定、鲁棒的低频分量表示，我们提出了切比雪夫特征，利用切比雪夫多项式固有的稳定性和强大的逼近能力 [30]。我们将切比雪夫特征作为傅里叶特征的补充，使编码能够更有效地覆盖整个频谱。我们将融合了傅里叶-切比雪夫特征的增强变体称为 CAFE+。

如图 2所示，CAFE+ 在低频区域表现出更好的噪声抑制效果，并且对高频分量具有更强的拟合能力，从而有效缓解了上述问题。

总而言之，我们的主要贡献如下：

- 我们提出了 CAFE，这是一种新颖的编码框架，可从指数扩展的频谱中自适应地选择与任务相关的频率，从而显著减轻多层感知机进行频率合成的负担。
- 我们引入切比雪夫特征，作为傅里叶特征的补充，为低频提供更强且更稳定的表示，并进一步增强表示能力。
- 我们的框架取得了最先进的结果，广泛的实验进一步证明了其在各种隐式神经表示任务中的有效性和泛化能力。

2. 相关工作

隐式神经表示（INR）在使用标准多层感知机时通常会受到频谱偏置的影响 [31, 45] ，限制了其捕捉高频细节的能力。针对这一局限性，相关研究主要集中于两个具有代表性的方向：设计专用的激活函数，以及开发更有效的输入编码策略。

激活函数。 SIREN [37] 首次引入了正弦激活函数及有效的初始化方案。随后，GAUSS [32] 提出了高斯非线性激活函数，WIRE [35] 则开发了连续复数 Gabor 小波激活函数，从而实现了准确且抗噪的信号重建。FINER [21] 进一步引入了可变周期激活函数，可灵活调节频谱偏置，以增强高频细节表示能力和整体性能。此外，研究还证明了其他激活函数的有效性 [14, 36, 41]。近期，MIRE [13] 引入了一种字典学习框架，从预定义的原子库中为每个隐式神经表示层动态选择最优激活函数，从而增强了对任务特定频率特征的适应能力。

输入编码策略。 傅里叶特征由位置编码 [26] 和随机傅里叶特征 [40]，表示，可将坐标映射到高维正弦空间，从而提升多层感知机表示高频信号的能力。然而，这些方法对初始采样频率的选择较为敏感，其整体表示能力仍有提升空间。为解决这些问题，SAPE [10]随时间和空间逐步展现频率分量，而 SCONE [18] 则使用可学习的空间掩码，将傅里叶基分配到不同区域，以改善局部表示。尽管如此，这两种方法仍受限于对固定傅里叶基的依赖。MFN [7]和 BACON [20]依靠哈达玛积来

以串行方式递归合成频率。相比之下，我们的方法基于编码并采用并行架构设计，从而实现更快的训练，同时无需 BACON 所要求的精心设计的初始化。除傅里叶特征外，自适应小波位置编码 [46]也被提出用于增强高频表示。近期工作 SL^{2}A [33]引入了 KAN [22], , 显著提升了模型的表达能力。

3. 方法

3.1. 预备知识

隐式神经表示将连续信号建模为函数 $f_{\boldsymbol{\theta}}:\mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$，该函数由多层感知机参数化：

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(0)} &= \gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D, \\ \mathbf{z}^{(\ell)} &= \rho^{(\ell)}\left(\mathbf{W}^{(\ell)}\mathbf{z}^{(\ell-1)} + \mathbf{b}^{(\ell)}\right), \quad \ell = 1, \ldots, L-1, \\ f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{W}^{(L)}\mathbf{z}^{(L-1)} + \mathbf{b}^{(L)} \in \mathbb{R}^{\tilde{D}}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中$\mathbf{x}$ 表示一个 D维坐标， $\gamma(\mathbf{x})$ 是输入编码函数，$\rho^{(\ell)}$ 表示第 ℓ层的非线性激活函数。为了更好地捕捉高频细节，通常会通过傅里叶特征对输入坐标进行映射：

定义 1 (傅里叶特征 [40])。 傅里叶特征将输入坐标$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ 映射到一个高维向量空间，可定义为

$$\Phi_{\mathrm{FF}}(\mathbf{x}) = \left[\sin(2\pi\boldsymbol{\omega}_i^\top \mathbf{x}),\ \cos(2\pi\boldsymbol{\omega}_i^\top \mathbf{x})\right]_{i=1}^{M}, \tag{2}$$

其中， $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^D$ 是由不同采样策略确定的频率向量。两种常见的策略是：

- 位置编码（***PE***）：频率设为 $\boldsymbol{\omega}_i = b^{i/M}\mathbf{e}_d$, $i = 0, \ldots, M-1$, $d = 1, \ldots, D$，其中 $\mathbf{e}_d$ 表示 $\mathbb{R}^D$ 中的第 d 个标准基向量， b 为常数。
- 随机傅里叶特征（***RFF***）：频率从各向同性高斯分布 $\boldsymbol{\omega}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, s^2\mathbf{I}_D)$ 中采样，其中 s 控制频率尺度。

基于此，傅里叶特征网络是隐式神经表示的一种特定实例，其编码函数 $\gamma(\mathbf{x})$定义为定义 $\Phi_{\mathrm{FF}}(\mathbf{x})$ 1 中的傅里叶特征映射1，激活函数 $\rho^{(\ell)}$ 为 ReLU [28]。

3.2. 内容感知频率编码

为理解隐式神经表示的频率合成能力，我们首先回顾以下定理。

定理1 ([45])。 设 $f_{\boldsymbol{\theta}}$： $\mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$ 是形式如式 (1) 的隐式神经表示，且 $\rho(z) = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k z^k$。该网络接收一个输入编码 $\gamma(\mathbf{x}) = \sin(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x} + \boldsymbol{\phi})$，其中 $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^{M\times D}$ 是频率矩阵， $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^M$ 是相位向量。该架构只能表示如下形式的函数

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\omega}' \in \mathcal{H}(\boldsymbol{\Omega})} c_{\boldsymbol{\omega}'}\ \sin\left(\langle \boldsymbol{\omega}', \mathbf{x}\rangle + \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\omega}'}\right),$$

其中，$c_{\boldsymbol{\omega}'} \in \mathbb{R}$ 为由网络参数确定的系数。可容许频率集为

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\Omega}) \subseteq \left\{ \sum_{t=1}^{M} s_t\, \boldsymbol{\Omega}_t \;\middle|\; s_t \in \mathbb{Z},\ \sum_{t=1}^{M} |s_t| \le K^{L-1} \right\},$$

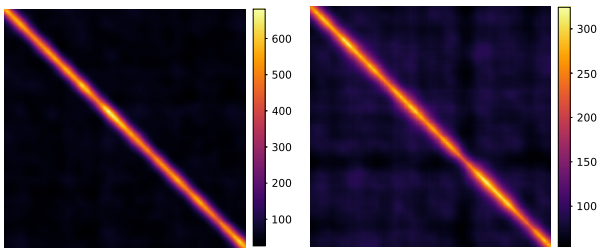
其中$\boldsymbol{\Omega}_t$ 表示$\boldsymbol{\Omega}$的第 t行。需要注意的是，激活函数 $\rho(\cdot)$ 并不局限于多项式函数，因为解析激活函数可以通过多项式或切比雪夫展开有效近似。

定理1 表明，多层感知机可以将初始采样频率的整数组合$\boldsymbol{\Omega}$合成为新的频率，并将信号表示为正弦函数的线性组合。即使初始采样$\boldsymbol{\Omega}$ 并非最优，多层感知机理论上仍应能够组合出目标信号所需的频率，从而获得较强的表示能力。此外，增加层数还能进一步拓展可合成频率的范围，有望提升表达能力。然而在实践中，傅里叶特征网络对初始频率的选择高度敏感 [2, 10, 23], , 而且单纯增加层数只能带来有限的改进（见图1）。这反映出，仅依靠深层多层感知机隐式合成并选择目标信号所需频率，既效率低下，也难以优化。

上述分析促使我们设计一种根据信号内容合成频率的编码机制，从而减轻多层感知机合成频率的负担，并提高整体效率。一个直接的想法是增加式M (2) 中的傅里叶特征数量 M，并为每个频率分配可学习权重，使模型能够从更广的频谱中选择与任务相关的频率。然而，这种方法效率不高，因为可表示频率集仅随 M线性增长。更有效的替代方案是在频率分量之间引入乘法交互，利用三角积化和差恒等式，从固定的一组基中生成丰富的组合频率。为此，我们提出了内容感知频率编码（*CAFE*），该方法利用可学习的线性变换驱动这些频率交互，从而根据固定的傅里叶基自适应地生成更丰富的频谱。

具体而言，给定输入坐标 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$，我们将其傅里叶特征 $\Phi_{\mathrm{FF}}(x)$输入多个并行线性层：

$$H_i(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_i\, \Phi_{\mathrm{FF}}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3}$$



(a) CAFE (b) RFF

图 3. CAFE 和 RFF 的神经正切核矩阵。网络宽度和采样点数量均设为 1024。

其中$\mathbf{W}_i$和$\mathbf{b}_i$分别表示第i个线性层的权重矩阵和偏置向量。随后，通过哈达玛积融合所有层的输出：

$$\Psi(\mathbf{x}) = \bigodot_{i=1}^{N} H_i(\mathbf{x}), \tag{4}$$

其中$\odot$表示哈达玛积。得到的$\Psi(\mathbf{x})$构成 CAFE 编码特征，作为多层感知机的输入，用于信号重建。此外，图3 显示，CAFE 产生的神经切线核矩阵条件更好，验证了其优越性。

3.3. CAFE 分析

为了深入了解 CAFE 带来的性能提升背后的机制，我们进一步分析其内在原理。设输入坐标为$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$，其通过傅里叶特征编码为

$$\mathbf{z} = [\sin(\theta_1), \ldots, \sin(\theta_M), \cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_M)]^\top, \tag{5}$$

其中$\theta_i = 2\pi\boldsymbol{\omega}_i^\top\mathbf{x}$。

为简单起见，我们考虑两个并行线性层。对于输入$\mathbf{z}$，第一个投影（$\mathbf{h}^{(1)}$）$_j$的第j个元素计算如下：

$$(\mathbf{h}^{(1)})_j = \sum_{i=1}^{M} w_{1,j,i}^{(s)} \sin(\theta_i) + \sum_{i=1}^{M} w_{1,j,i}^{(c)} \cos(\theta_i) + b_{1,j}, \tag{6}$$

其中，$\mathbf{W}_1 = [\mathbf{W}_1^{(s)}, \mathbf{W}_1^{(c)}] \in \mathbb{R}^{D_h \times 2M}$ 和 $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^{D_h}$ 分别为可学习权重和偏置，而 $w_{1,j,i}^{(s)}$（$w_{1,j,i}^{(c)}$）将第i个正弦（余弦）特征连接到第j个神经元。第二层$\mathbf{h}^{(2)}$遵循相同的形式。

哈达玛积 $\psi = \mathbf{h}^{(1)} \odot \mathbf{h}^{(2)}$ 通过 $(\mathbf{h}^{(1)})_j$ 和 $(\mathbf{h}^{(2)})_j$ 的正弦分量之间的乘法交互引发频率混合。应用积化和差恒等式，$(\mathbf{h}^{(1)})_j$ 和 $(\mathbf{h}^{(2)})_j$ 之间的乘法交互会产生和频与差频分量：

$$\frac{1}{2}\sum_{i,m}\Big[(C_a + C_b)\cos(\theta_i - \theta_m) + (C_b - C_a)\cos(\theta_i + \theta_m) + (C_c - C_d)\sin(\theta_i - \theta_m) + (C_c + C_d)\sin(\theta_i + \theta_m)\Big].$$

系数定义如下

$$\begin{aligned} C_a &= w_{1,j,i}^{(s)} w_{2,j,m}^{(s)}, \quad C_b = w_{1,j,i}^{(c)} w_{2,j,m}^{(c)}, \\ C_c &= w_{1,j,i}^{(s)} w_{2,j,m}^{(c)}, \quad C_d = w_{1,j,i}^{(c)} w_{2,j,m}^{(s)}. \end{aligned} \tag{7}$$

C_a、C_b、C_c 和 C_d 的线性组合使网络能够有选择地增强或抑制合成频率。例如，如果目标信号不需要和频分量 $\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_m$，网络可以令 $C_b - C_a = 0$, $C_c + C_d = 0$, ，从而消除相应项。类似的分析也适用于偏置项与正弦分量之间的相互作用，这些相互作用对应于频率分量 $\boldsymbol{\omega}_i$ 或 $\boldsymbol{\omega}_m$ 本身。以下定理将形式化地阐述 CAFE 的频率合成。

定理 2。 设 *CAFE* 编码 $\Psi(\mathbf{x})$由基础频率集合 $\mathcal{F}_{\text{base}} = \{\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_M\}$和$N$ 带偏置的并行线性层构造，则 $\Psi(\mathbf{x})$的可用频率构成集合

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{CAFE}}^{+} &= \bigcup_{I=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{I} \sigma_i \boldsymbol{\omega}_{k_i} \;\middle|\; \boldsymbol{\omega}_{k_i} \in \mathcal{F}_{\text{base}},\ \sigma_i \in \{-1, +1\} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \boldsymbol{\omega}_{k_i} \;\middle|\; \boldsymbol{\omega}_{k_i} \in \mathcal{F}_{\text{base}},\ \sigma_i \in \{-1, 0, +1\} \right\}. \end{aligned}$$

根据定理2，CAFE 理论上能够合成 $\mathcal{O}(M^N 3^{N-1})$ 个频率。它还会通过学习到的权重进一步筛选与任务相关的频率。

3.4. 具有傅里叶-切比雪夫特征的 CAFE+

虽然 CAFE 显著增强了网络的表示能力，但其可合成的频率仍取决于随机初始化的傅里叶特征。由于大多数现实世界信号的能量集中在低频区域 [8], ，这种随机性可能无法充分覆盖重要的低频基，进而可能迫使网络使用过多的高频基来弥补低频结构的缺失。此外，傅里叶基并非天然适合高效建模平滑的低频结构 [3], 还可能在这些区域引入噪声 [17, 45]。为了提供更稳定且更具表现力的低频表示，我们引入了基于切比雪夫多项式的切比雪夫特征。

定义 2（切比雪夫特征）。 给定$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ 和多项式阶数 J，切比雪夫特征映射定义为

$$\Phi_{\text{CF}}(\mathbf{x}) = \big[T_j(x_d)\big]_{d=1,\ldots,D;\, j=0,\ldots,J-1} \in \mathbb{R}^{DJ}, \tag{8}$$

其中，T_j 表示第 j个第一类切比雪夫多项式，其递归定义如下

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{j+2}(x) = 2xT_{j+1}(x) - T_j(x).$$

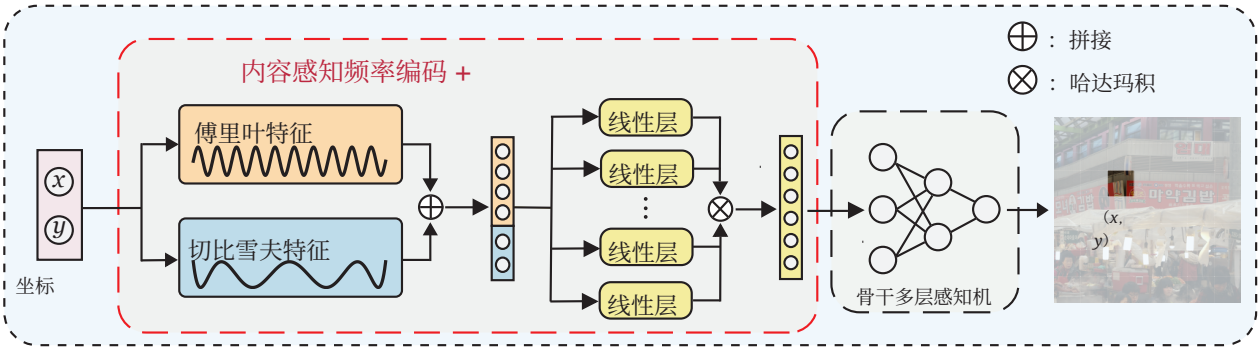


图 4. CAFE+的整体框架。CAFE+ 将输入坐标分别映射为切比雪夫特征和傅里叶特征，然后将二者拼接，作为多个并行线性层的输入。这些层的输出通过哈达玛积组合，得到经 CAFE+ 编码的特征，随后将其输入骨干多层感知机，以生成相应的值。

切比雪夫多项式对于光滑函数具有近乎最优的逼近性质，在所有次数相同的多项式基中，其最大误差最小。由于具有正交性且在 $[-1,1]$上振荡有界，它们还表现出优异的数值稳定性 [42]，因此特别适合表示低频或平滑变化的结构 $T_p(x)T_q(x) = \frac{1}{2}\left[T_{p+q}(x) + T_{|p-q|}(x)\right]$，这些性质使切比雪夫特征成为傅里叶特征自然而有效的补充。更重要的是，由于切比雪夫多项式还满足积化和差恒等式，CAFE框架及其分析可以扩展到切比雪夫特征。换言之，CAFE能够从在切比雪夫域内合成的高阶基函数中自适应地进行选择。通过结合傅里叶-切比雪夫特征，我们得到CAFE的增强版本，记为CAFE+，整体框架如图4所示。

CAFE+ 的完整公式如下。给定一个坐标 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$，采用组合特征嵌入的 CAFE 表示为

$$\Psi(\mathbf{x}) = \bigodot_{i=1}^{N} \{\mathbf{W}_i\left[\Phi_{\text{FF}}(\mathbf{x}),\ \Phi_{\text{CF}}(\mathbf{x})\right] + \mathbf{b}_i\},$$

该结果输入多层感知机，以生成预测值。

图 5展示了推理过程中屏蔽切比雪夫特征或傅里叶特征的结果。结果表明，这两个组成部分在信号表示中发挥互补作用：切比雪夫特征提供稳定的全局结构，而傅里叶特征捕捉精细的高频细节。此外，我们还为切比雪夫特征建立了一个类似于定理 1 的定理，以进一步完善理论分析。

定理 3. 设 $f_{\boldsymbol{\theta}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是形式如式 (1) 的隐式神经表示，且 $\rho(z) = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k z^k$。该编码采用切-



(a) 真实值　(b) 仅使用切比雪夫特征　(c) 仅使用傅里叶特征

图 5. 切比雪夫特征和傅里叶特征互补作用的示意图。首先使用 CAFE+训练网络，在推理过程中，将对应于 $\Phi_{\text{CF}}(\mathbf{x})$ 或 $\Phi_{\text{FF}}(\mathbf{x})$ 的神经元置零以停用它们，从而分别分离出各自的影响。仅使用切比雪夫特征 对应于使用 $[\mathbf{0}, \Phi_{\text{CF}}(\mathbf{x})]$，而仅使用傅里叶特征 对应于 $[\Phi_{\text{FF}}(\mathbf{x}), \mathbf{0}]$。

比雪夫特征构造如下：

$$\gamma(x) = \left[T_{j_1}(x), T_{j_2}(x), \ldots, T_{j_M}(x)\right]^\top.$$

此处，指标 j_1、j_2、……、j_M 表示切比雪夫多项式的任意非负阶数。该架构只能表示如下形式的函数

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \sum_{j \in \mathcal{H}(J)} c_j T_j(x),$$

其中，$c_j \in \mathbb{R}$ 是由网络参数确定的系数，所得阶数组合 $\mathcal{H}(J)$ 由下式给出

$$\mathcal{H}(J) \subseteq \left\{ \left| \sum_{t=1}^{M} s_t j_t \right| \;\middle|\; s_t \in \mathbb{Z},\ \sum_{t=1}^{M} |s_t| \le K^{L-1} \right\}.$$

定理 3 证明，在切比雪夫特征上运行的骨干多层感知机能够保持这一表示，从而确保网络可以有效地利用切比雪夫多项式拟合信号的低频部分。证明见补充材料。

4. 实验

在本节中，我们展示 CAFE+在多项任务中的有效性。为此，我们评估了我们

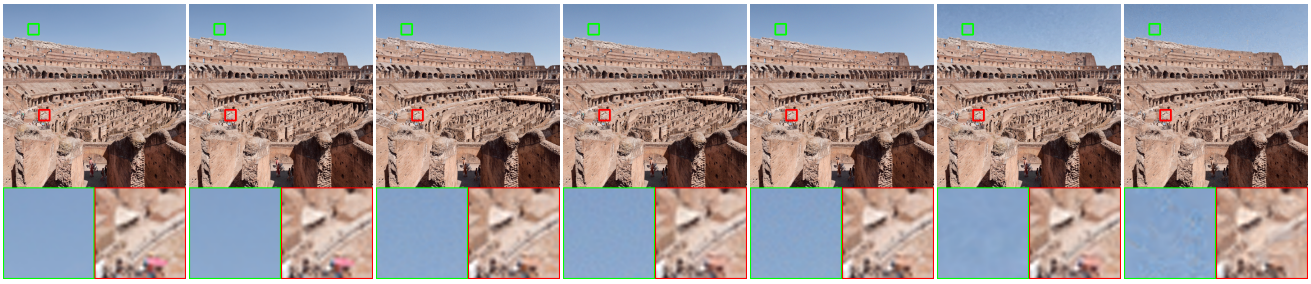


图6. D2K4 数据集上二维图像拟合任务的可视化结果。

的方法在拟合任务中的表现，并采用了多种具有代表性的方法，包括 SIREN [37], WIRE [35], FINER [21], SCONE [18], 和 SL^{2}A [33]。由于 SCONE 和 SL^{2}A 尚未发布其 NeRF [26] 实现，我们还加入 GAUSS [32] 进行比较。所有基线实现均基于作者发布的官方代码。对于拟合任务，我们使用尺度参数固定为 30 的随机傅里叶特征；对于 NeRF 实验，我们则使用位置编码。根据任务的不同，所有方法均采用适当选择的学习率和调度策略，并使用 Adam [16]进行优化。所有实验均在一台配备 Intel Core i9-12900K CPU、62 GB RAM 和 NVIDIA RTX 4090 GPU 的工作站上进行。补充实验、实现细节和可视化结果见补充材料。

4.1. 主要结果

二维图像拟合。对于二维图像拟合任务，目标是学习一个连续的二维函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$，该函数将像素坐标映射为RGB颜色值。在我们的实验中，我们从 DIV2K 数据集 [1]（由FINER代码库提供[1], ）中选取了8幅自然图像，并将其记为D2K0–D2K7。我们的方法与各基线方法均进行6,000次迭代训练。我们还报告了一个规模更大的变体，其训练时间与最快的基线相当，记为我们的方法（L）。重建质量使用峰值信噪比指标进行定量评估 [43]。在图6中，拟合结果通过低频区域与高频区域的放大视图进行可视化。与基线方法相比，我们的方法能够更有效地捕捉高频细节，同时显著抑制低频区域中的噪声。如表1所示，其余图像上的定量结果表明，我们的方法取得了最佳性能。

三维形状表示。我们研究三维形状建模 [19]（基于隐式神经表示）的任务。目标是学习一个连续映射函数 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$，其中 $f(\mathbf{x})$输出给定三维点$\mathbf{x}$的有符号距离值。我们从公开数据集[2], 中选取五个形状，包括泰国

[1]https://github.com/liuzhen0212/FINER[2]
https://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/

表 1. 不同方法在二维图像拟合任务中的定量比较，指标包括峰值信噪比（分贝）、参数数量和训练时间。

方法	峰值信噪比（分贝） D2K0	D2K1	D2K2	D2K3	D2K4	D2K5	D2K6	D2K7	参数	时间（秒）
SIREN	33.48	40.08	36.68	40.39	34.41	38.78	37.58		0.20M	148.16
WIRE	27.99	34.44	31.12	36.06	28.80	32.50	33.50	0.07M		373.60
SCONE	35.32	41.88	38.56	42.27	36.87	**41.78**	38.92	0.19M		380.49
FINER	35.93	42.33	39.44	41.99	36.78	41.08	39.73		0.20M	203.51
SL^{2}A	36.22	41.91	39.87	41.87	**37.03**	41.11	40.23	0.46M		270.50
Ours	**36.92**	**42.57**	**42.13**	**42.92**	36.64	41.00	**42.61**	0.22M		**107.83**
我们的方法（L）	39.47	44.34	44.18	44.69	39.15	42.63	45.01	0.33M		149.78

表2. 不同方法在三维形状表示任务上的定量比较，指标为交并比（%）和训练时间。

方法	交并比（%） 泰国雕像	Lucy	犰狳	龙	佛像	时间（秒）
SIREN	0.9797	0.9866	0.9933	0.9940	0.9934	**826**
WIRE	0.9887	0.9930	0.9861	0.9934	0.9945	1,824
SCONE	0.9875	0.9905	0.9930	0.9918	0.9924	1,662
FINER	0.9893	0.9929	0.9950	0.9959	0.9958	1,056
SL^{2}A	0.9987	0.9992	0.9993	0.9991	0.9994	1,282
Ours	**0.9992**	**0.9995**	**0.9996**	**0.9994**	**0.9995**	860

雕像、露西、犰狳、龙和佛像。训练时，所有体素在每次迭代中被随机打乱，并以最多200,000个点的小批次进行处理，共计200次迭代。交并比（IoU）指标 [25]被计算，以定量比较不同方法。我们可视化重建的泰国雕像三维形状，用于定性分析（图7），并在表2中总结定量结果，表明所有对比方法均表现出较强性能。

学习神经辐射场。在使用隐式神经表示进行新视角合成时，每次查询都包含一个三维空间坐标$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$和一个二维观察方向$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$，二者共同构成一个五维输入向量。网络学习一个映射 $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$，输出每个点对应的 RGB颜色$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$和密度 $\sigma \in \mathbb{R}$。最终图像通过可微体积渲染 [26]，沿相机射线对这些预测值进行积分得到。所有方法均遵循以下实验设置：

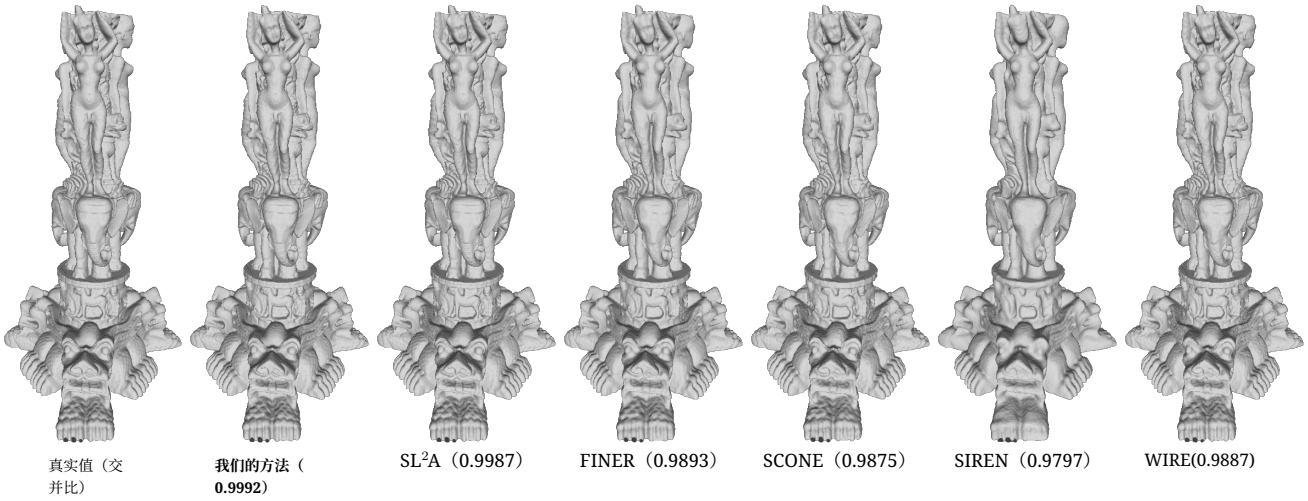


图 7. 三维形状表示任务的可视化。

表 3. 在 NeRF 任务上，不同方法在峰值信噪比（分贝）和训练时间方面的定量比较。

	峰值信噪比（分贝）				时间（秒）
方法	Ship	Drums	Lego	Hotdog	
高斯	21.24	22.46	26.40	31.28	685.2
SIREN	21.79	25.55	29.94	<u>33.91</u>	<u>403.5</u>
WIRE	21.33	24.57	29.22	32.78	973.8
FINER	<u>22.02</u>	**25.66**	<u>30.78</u>	33.80	437.0
Ours	**23.12**	<u>25.59</u>	**31.86**	**34.65**	**363.2**

表 4. CAFE 和切比雪夫特征组件效果的消融研究。在五幅二维测试图像上报告峰值信噪比（分贝）。

CAFE	切比雪夫	D2K0	D2K1	D2K2	D2K3	D2K4
✗	✗	26.18	30.19	30.98	29.46	30.92
✗	✓	33.00	37.23	35.60	36.97	35.91
✓	✗	34。87	37。36	40.42	40.15	40.52
✓	✓	**39.47**	**44.34**	**44.18**	**44.69**	**44.97**

FINER [21], 仅使用 25 张图像进行训练，并采用混合精度训练。我们在 Blender 数据集 [26], 上评估我们的框架，具体包括*Ship*、*Lego*、*Hotdog* 和*Drums* 场景。定量结果见表3，我们的方法在四个数据集中的三个上取得了最佳性能，在 Drums 场景上也取得了可比的结果。图9展示了 Lego 场景的重建结果。与以往方法相比，我们的方法在保留高频细节方面优势明显。

4.2. 消融研究

CAFE 和切比雪夫特征的作用。我们开展了对比实验，以分析以下方法的有效性：

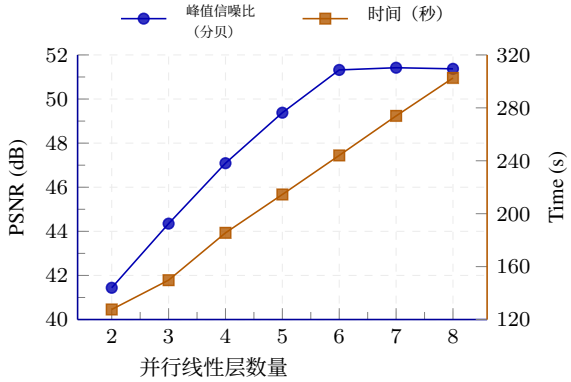


图 8. 并行线性层数量对二维图像拟合任务中峰值信噪比和训练时间的影响。

CAFE 和切比雪夫特征，所有设置均在参数数量和配置相同的条件下进行训练。在表4中，标准 RFF 基线代表两种组件均未使用的情况，而仅使用切比雪夫特征的配置则将傅里叶-切比雪夫编码输入多层感知机。结果清楚地表明，CAFE 和切比雪夫特征对于提升表示质量都至关重要。

并行线性层数量的影响。我们在 DIV1 数据集上进行实验，以探究并行线性层数量与拟合能力之间的关系（见图8）。结果表明，随着层数增加，我们的方法性能稳步提升；当层数足够多时，性能逐渐趋于饱和。这一现象可归因于层数增加引入了更丰富的基函数集合，从而提升了拟合性能。然而，当所提供的基函数已充分覆盖所需的频率范围后，

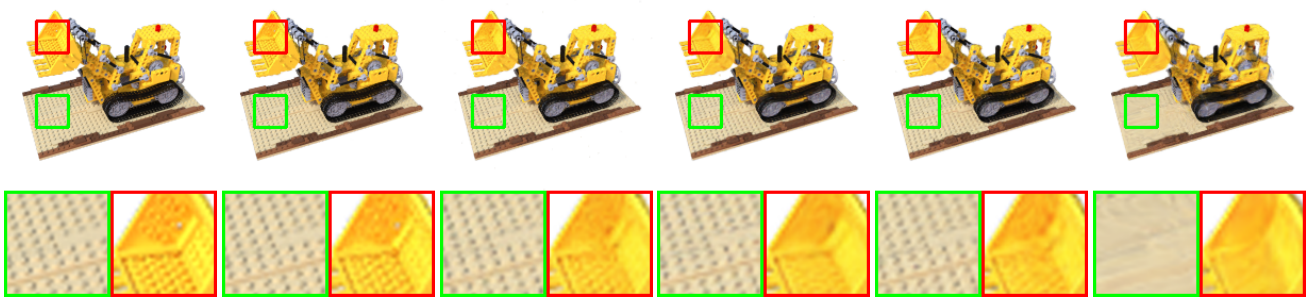


图 9. 神经辐射场的可视化 t ask.

进一步增加层数几乎不会带来额外收益。此外，计算成本随阶数近似线性增长，这表明 CAFE+仅带来了适度且可预测的额外开销。

超参数敏感性分析。 在图10中，我们分析了 CAFE 中两个关键超参数的影响+：RFF 中傅里叶特征的尺度 s，以及定义 2 中切比雪夫特征的多项式阶数 J。分析尺度时，我们将多项式阶数固定为 $J = 32$。当尺度处于 20 到 50 之间时，我们的框架表现出色；即使尺度略低或略高，性能仍处于可接受的范围内，展现出显著的鲁棒性。分析阶数时，我们将尺度固定为 $s = 30$，并将 J 从 0 变至 64。结果表明，当 J 超过 16 后，模型便已具备稳定的低频基集合，并且面对阶数进一步增加时仍表现出很强的鲁棒性。

骨干多层感知机深度的影响。 我们分析了骨干多层感知机深度对拟合性能的影响。表 5给出了相应的定量结果。值得注意的是，完全移除多层感知机会导致性能大幅下降，这凸显了骨干多层感知机在我们框架中的不可或缺性。两层多层感知机的表现优于单层多层感知机，但继续增加深度只能带来微小的提升。这一观察表明，我们的编码有效地将大部分频率合成过程外化，从而减轻了多层感知机合成目标频率的负担。

5. 结论

本文针对固定随机傅里叶基以及多层感知机中低效的隐式频率合成问题进行了研究。我们提出了 CAFE，这是一种新颖的编码框架，能够执行内容感知的频率合成，从而大幅减轻多层感知机在低效频率生成方面的负担。此外，我们将切比雪夫特征引入 CAFE，以更好地建模低频分量并提升整体稳定性。大量实验

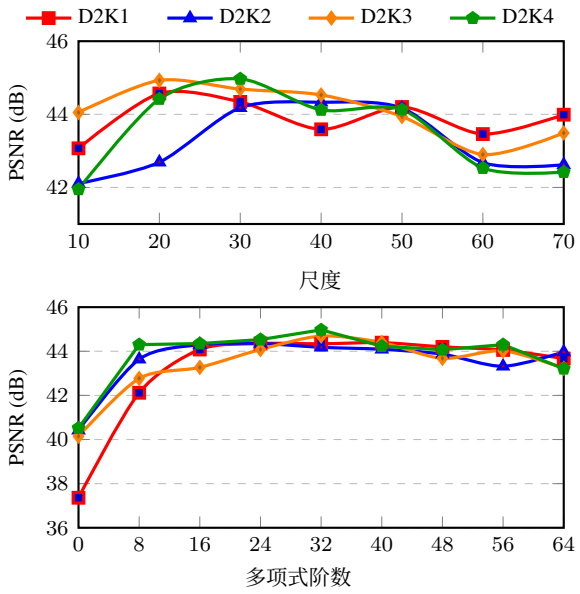


图10. 不同傅里叶特征尺度（上）和切比雪夫特征多项式阶数（下）下的峰值信噪比变化。

表5. 骨干多层感知机深度影响的消融研究。报告了三幅测试图像的峰值信噪比（分贝）。

多层感知机层数	D2K5	D2K6	D2K7	Avg.
0	31.23	36.78	38.66	35.56
1	37.78	42.31	42.99	41.03
2	39.15	42.63	45.01	42.26
3	39.36	42.49	44.67	42.17
4	39.60	42.56	45.40	42.52

实验结果表明，我们的框架始终优于现有方法。未来，我们将探索把先进的激活函数集成到框架中，并将 CAFE+拓展至更广泛的应用领域。

参考文献

[1] Eirikur Agustsson 和 Radu Timofte。《Ntire 2017 单幅图像超分辨率挑战赛：数据集与研究》。载于《IEEE计算机视觉与模式识别会议研讨会论文集》，第 126–135 页，2017 年。6，3[2] Nuri Benbarka、Timon H¨ofer、Andreas Zell 等。《将隐式神经表示视为傅里叶级数》。载于《IEEE/CVF计算机视觉应用冬季会议论文集》，第 2041–2050 页，2022年。3[3] John P Boyd。《切比雪夫与傅里叶谱方法》。Courier Corporation，2001 年。4[4] Jiezhang Cao、Qin Wang、Yongqin Xian、Yawei Li、Bingbing Ni、Zhiming Pi、Kai Zhang、Yulun Zhang、Radu Timofte 和 Luc Van Gool。《Ciaosr：用于任意尺度图像超分辨率的连续隐式注意力中注意力网络》。载于《IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集》，第 1796–1807 页，2023 年。1[5] Yinbo Chen、Sifei Liu 和 Xiaolong Wang。《利用局部隐式图像函数学习连续图像表示》。载于《计算机视觉与模式识别会议论文集》，第 8628–8638 页，2021年。1[6] Christopher B Choy、Danfei Xu、JunYoung Gwak、Kevin Chen 和 Silvio Savarese。《3d-r2n2：一种用于单视图与多视图三维物体重建的统一方法》。载于《欧洲计算机视觉会议》，第 628–644 页。施普林格，2016 年。1[7] Rizal Fathony、Anit Kumar Sahu、Devin Willmott 和 J Zico Kolter。《乘法滤波器网络》。载于《国际学习表征会议》，2020 年。2[8] David J Field。《自然图像统计特性与皮层细胞响应特性之间的关系》。《美国光学学会杂志 A》，4(12)：2379–2394，1987 年。4[9] Woo Kyoung Han、Byeonghun Lee、Hyunmin Cho、Sunghoon Im 和 Kyong Hwan Jin。《通过位平面分解实现无损隐式神经表示》。载于《计算机视觉与模式识别会议论文集》，第 2269–2278 页，2025年。1[10] Amir Hertz、Or Perel、Raja Giryes、Olga Sorkine-Hornung 和 Daniel Cohen-Or。《Sape：用于神经优化的空间自适应渐进编码》。《神经信息处理系统进展》，34：8820–8832，2021年。2，3[11] Arthur Jacot、Franck Gabriel 和 Cl´ement Hongler。《神经切线核：神经网络中的收敛与泛化》。载于《神经信息处理系统进展》，2018 年。2[12] Dhananjaya Jayasundara、Sudarshan Rajagopalan、Yasiru Ranasinghe、Trac D Tran 和 Vishal M Patel。《Sinr：稀疏驱动的压缩隐式神经表示》。载于《计算机视觉与模式识别会议论文集》，第 3061–3070 页，2025年。1[13] Dhananjaya Jayasundara、Heng Zhao、Demetrio Labate 和 Vishal M Patel。《Mire：匹配式隐式神经表示》。载于《计算机视觉与模式识别会议论文集》，第 8279–8288 页，2025年。2[14] Dhananjaya Jayasundara、Heng Zhao、Demetrio Labate 和 Vishal M Patel。《Pin：基于长椭球波函数的隐式神经表示。载于第十三届国际学习表征会议，2025年。2[15] Yuxuan Jiang、Ho Man Kwan、Tianhao Peng、Ge Gao、Fan Zhang、Xiaoqing Zhu、Joel Sole 和 David Bull。Hiif：用于连续超分辨率的层次编码隐式图像函数。载于计算机视觉与模式识别会议论文集，第2289–2299页，2025年。1 –。[16] Diederik P Kingma。Adam：一种随机优化方法。载于国际学习表征会议，2015年。6[17] Zoe Landgraf、Alexander Sorkine-Hornung 和 Ricardo Silveira Cabral。Pins：用于多尺度神经表示的渐进式隐式网络。载于第39届国际机器学习会议（ICML）论文集，第11969–11984页。PMLR，2022年。4[18] Jason Chun Lok Li、Chang Liu、Binxiao Huang 和 Ngai Wong。为隐式神经表示学习空间拼贴傅里叶基。载于 AAAI 人工智能会议论文集，第13492–13499页，2024年。2、6、3[19] Zhaoshuo Li、Thomas M¨uller、Alex Evans、Russell H Taylor、Mathias Unberath、Ming-Yu Liu 和 Chen-Hsuan Lin。Neuralangelo：高保真神经表面重建。载于 IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，第8456–8465页，2023年。6[20] David B Lindell、Dave Van Veen、Jeong Joon Park 和 Gordon Wetzstein。Bacon：用于多尺度场景表示的带限坐标网络。载于 IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，第16252–16262页，2022年。2[21] Zhen Liu、Hao Zhu、Qi Zhang、Jingde Fu、Weibing Deng、Zhan Ma、Yanwen Guo 和 Xun Cao。Finer：通过可变周期激活函数调节隐式神经表示中的频谱偏置。载于 IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，第2713–2722页，2024年。2、6、7、3[22] Ziming Liu、Yixuan Wang、Sachin Vaidya、Fabian Ruehle、James Halverson、Marin Soljacic、Thomas Y. Hou 和 Max Tegmark。KAN：Kolmogorov–Arnold网络。载于第十三届国际学习表征会议，2025年。3[23] Mingze Ma、Qingtian Zhu、Yifan Zhan、Zhengwei Yin、Hongjun Wang 和 Yinqiang Zheng。增强隐式神经表示中傅里叶特征嵌入的鲁棒性。arXiv预印本 arXiv:2502.05482，2025年。2、3[24] Julien NP Martel、David B Lindell、Connor Z Lin、Eric R Chan、Marco Monteiro 和 Gordon Wetzstein。Acorn：用于神经场景表示的自适应坐标网络。arXiv预印本 arXiv:2105.02788，2021年。5[25] Lars Mescheder、Michael Oechsle、Michael Niemeyer、Sebastian Nowozin 和 Andreas Geiger。占用网络：在函数空间中学习三维重建。载于 IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，第4460–4470页，2019年。6[26]Ben Mildenhall、Pratul P Srinivasan、Matthew Tancik、Jonathan T Barron、Ravi Ramamoorthi 和 Ren Ng。NeRF：

将场景表示为神经辐射场以合成新视图。ACM 通讯，65(1)：99–106，2021年。1、2、6、7、3[27] Thomas M¨uller、Alex Evans、Christoph Schied 和 Alexander Keller。采用多分辨率哈希编码的即时神经图形基元。ACM 图形学汇刊（TOG），41(4)：1–15，2022年。1[28] Vinod Nair 和 Geoffrey E Hinton。整流线性单元能够改进受限玻尔兹曼机。载于第27届国际机器学习会议（ICML-*10* 807 814, 2010 3）论文集，第–页。[29] Mahrokh Najaf 和 Gregory Ongie。迈向隐式神经表示的采样理论。载于2024年第58届阿西洛马会议信号、系统与计算论文集，第105–110页。IEEE，2024年。1[30] Michael James David Powell。逼近理论与方法。剑桥大学出版社，1981年。2[31] Nasim Rahaman、Aristide Baratin、Devansh Arpit、Felix Draxler、Min Lin、Fred Hamprecht、Yoshua Bengio 和 Aaron Courville。论神经网络的频谱偏置。载于国际机器学习会议论文集，第5301–5310页，2019年。1、2[32] Sameera Ramasinghe 和 Simon Lucey。超越周期性：迈向坐标多层感知机激活函数的统一框架。载于欧洲计算机视觉会议论文集，第142–158页。施普林格，2022年。2、6[33] Reza Rezaeian、Moein Heidari、Reza Azad、Dorit Merhof、Hamid Soltanian-Zadeh 和 Ilker Hacihaliloglu。SL2A-INR：用于隐式神经表示的单层可学习激活函数。载于 IEEE/CVF国际计算机视觉会议论文集，第26065–26074页，2025年。3、6[34] Gernot Riegler、Ali Osman Ulusoy 和 Andreas Geiger。OctNet：以高分辨率学习深度三维表示。载于 IEEE 计算机视觉与模式识别会议论文集，第3577–3586页，2017年。1[35] Vishwanath Saragadam、Daniel LeJeune、Jasper Tan、Guha Balakrishnan、Ashok Veeraraghavan 和 Richard G Baraniuk。WIRE：小波隐式神经表示。载于 IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，第18507–18516页，2023年。2、6、3[36] Danzel Serrano、Jakub Szymkowiak 和 Przemyslaw Musialski。HOSC：一种用于保留隐式神经表示中尖锐特征的周期激活函数。arXiv预印本 arXiv:2401.10967，2024年。2[37] Vincent Sitzmann、Julien Martel、Alexander Bergman、David Lindell 和 Gordon Wetzstein。采用周期激活函数的隐式神经表示。神经信息处理系统进展，33：7462–7473，2020年。1、2、6、3[38] Yannick Str¨umpler、Janis Postels、Ren Yang、Luc Van Gool 和 Federico Tombari。用于图像压缩的隐式神经表示。载于欧洲计算机视觉会议论文集，第74–91页。施普林格，2022年。1[39] Yu Sun、Jiaming Liu、Mingyang Xie、Brendt Wohlberg 和 Ulugbek S. Kamilov。COIL：用于断层成像的基于坐标的内部学习。IEEE计算成像汇刊，7：1400–1412，2021年。1

[40] Matthew Tancik、Pratul Srinivasan、Ben Mildenhall、Sara Fridovich-Keil、Nithin Raghavan、Utkarsh Singhal、Ravi Ra- mamoorthi、Jonathan Barron 和 Ren Ng。傅里叶特征使网络能够在低维域中学习高频函数。《神经信息处理系统进展》，33：7537–7547，2020年。1、2、3[41] Pandula Thennakoon、Avishka Ranasinghe、Mario De Silva、Buwaneka Epakanda、Roshan Godaliyadda、Parakrama Ekanayake 和 Vijitha Herath。BandRC：带移位升余弦激活的隐式神经表示。arXiv 预印本 arXiv:2505.11640，2025年。2[42] Lloyd N Trefethen。《逼近理论与逼近实践》。技术报告，SIAM，2013年。5[43] Zhou Wang、Alan C Bovik、Hamid R Sheikh 和 Eero P Si- moncelli。图像质量评估：从误差可见性到结构相似性。《IEEE图像处理汇刊》，13(4)：600–612，2004年。6[44] Zhi-Qin John Xu、Yaoyu Zhang、Tao Luo、Yanyang Xiao 和 Zheng Ma。频率原理：傅里叶分析揭示深度神经网络的奥秘。arXiv 预印本 arXiv:1901.06523，2019年。2[45] Gizem Y¨uce、Guillermo Ortiz-Jim´enez、Beril Besbinar 和 Pascal Frossard。隐式神经表示的结构化字典视角。载于《IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集》，第19228–19238页，2022年。1、2、3、4[46] Hongxu Zhao、Zelin Gao、Yue Wang、Rong Xiong 和 Yu Zhang。用于隐式神经表示高频信息学习的自适应小波位置编码。载于《AAAI人工智能会议论文集》，第10430–10438页，2025年。3[47] Hao Zhu、Shaowen Xie、Zhen Liu、Fengyi Liu、Qi Zhang、You Zhou、Yi Lin、Zhan Ma 和 Xun Cao。置乱不变的隐式神经表示。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，46(8)：5463–5478，2024年。1

采用傅里叶-切比雪夫特征的隐式神经表示内容感知频率编码

补充材料

我们在第 3 节中给出定理 A 的证明。论文中主要实验的参数设置见第 B 节。补充实验见第 C 节，进一步的消融研究则见第 D 节。

A. 定理证明

在给出定理之前，我们先重述隐式神经表示的框架。隐式神经表示通常定义为一个坐标映射函数 γ：$\mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^M$，后接一个多层感知机。多层感知机由权重矩阵 $W^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{F_{\ell-1}\times F_\ell}$、偏置向量$b^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{F_\ell}$和逐元素激活函数 $\rho^{(\ell)}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 参数化，并在每一层$\ell = 1, \ldots..., L-1$应用。令 $z^{(\ell)}$ 表示第 ℓ层的激活后输出。前向计算表示为：

$$\begin{aligned} z^{(0)} &= \gamma(x), \\ z^{(\ell)} &= \rho^{(\ell)}\left(W^{(\ell)} z^{(\ell-1)} + b^{(\ell)}\right), \quad \ell = 1, \ldots, L-1, \\ f_{\boldsymbol{\theta}}(x) &= W^{(L)} z^{(L-1)} + b^{(L)}. \end{aligned} \tag{9}$$

定理。设 $f_{\boldsymbol{\theta}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是具有式 (9)形式、深度为 L的隐式神经表示，其中激活函数是次数至多为 K的多项式，即 $\rho(z) = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k z^k$。设$J = \{j_1, \ldots, j_M\} \subset \mathbb{N}$是由 M个任意非负整数次数组成的集合。输入映射 $\gamma(x)$ 将坐标 x嵌入为一个切比雪夫多项式向量：

$$z^{(0)} = \gamma(x) = \left[T_{j_1}(x), T_{j_2}(x), \ldots, T_{j_M}(x)\right]^\top.$$

具体而言，该架构的函数空间被约束为以下形式：

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \sum_{m \in \mathcal{H}(J)} c_m T_m(x),$$

其中，$c_m \in \mathbb{R}$ 是由网络参数决定的系数，可达谱阶集合 $\mathcal{H}(J)$是整数组合集合的一个子集：

$$\mathcal{H}(J) \subseteq \tilde{\mathcal{H}}(J) := \Big\{ h = |\sum_{t=1}^{M} s_t j_t| \;\Big|\; s_t \in \mathbb{Z}, \sum_{t=1}^{M} |s_t| \le K^{L-1} \Big\}.$$

由于切比雪夫多项式具有余弦函数的三角函数性质，因此满足积化和差恒等式：

$$T_p(x)T_q(x) = \tfrac{1}{2}\left[\, T_{p+q}(x) + T_{|p-q|}(x) \,\right]. \tag{10}$$

利用这一性质，我们通过以下引理将理论框架扩展到切比雪夫多项式。

引理 1(切比雪夫乘积)。设 $\{T_p(x)\}_{p\in P}$ 和$\{T_q(x)\}_{q\in Q}$ 是两组由集合 P、$Q \subset \mathbb{N}$索引的第一类切比雪夫多项式。设 $\{\beta_p^{(1)}\}_{p\in P}$和$\{\beta_q^{(2)}\}_{q\in Q}$是它们对应的标量系数。那么，

$$\left(\sum_{p\in P} \beta_p^{(1)} T_p(x)\right)\left(\sum_{q\in Q} \beta_q^{(2)} T_q(x)\right) = \sum_{h\in\mathcal{S}} \hat{\beta}_h T_h(x), \tag{11}$$

其中，得到的指标集 $\mathcal{S}$ 定义如下：

$$\mathcal{S} = \left\{\, h \mid h = p+q \text{ or } h = |p-q|,\ p \in P,\ q \in Q \,\right\}, \tag{12}$$

and $\{\hat{\beta}_h \mid h \in \mathcal{S}\} \subset \mathbb{R}$ *are the combined coefficients.*

证明。展开两个求和的乘积，并应用式（10）中的恒等式：

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{p\in P} \beta_p^{(1)} T_p(x)\right)\left(\sum_{q\in Q} \beta_q^{(2)} T_q(x)\right) \\ &= \sum_{p\in P}\sum_{q\in Q} \beta_p^{(1)}\beta_q^{(2)} T_p(x)T_q(x) \\ &= \sum_{p\in P}\sum_{q\in Q} \frac{1}{2}\beta_p^{(1)}\beta_q^{(2)}\left[\, T_{p+q}(x) + T_{|p-q|}(x) \,\right] \\ &= \sum_{h\in\mathcal{S}} \hat{\beta}_h T_h(x). \end{aligned} \tag{13}$$

最后一步是将与相同切比雪夫阶 $h \in \mathcal{S}$相关的项合并得到的。 □

引理 2 (切比雪夫幂)。令 $\{T_j(x)\}_{j\in J}$为一组由 $J \subset \mathbb{N}$索引、系数为 $\{\beta_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}$的第一类切比雪夫多项式。对于任意整数 $k \ge 1$,

$$\left(\sum_{j\in J} \beta_j T_j(x)\right)^k = \sum_{h\in\mathcal{S}_k} \tilde{\beta}_h T_h(x), \tag{14}$$

其中阶集合 $\mathcal{S}_k$ 递归定义如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= J,\\ \mathcal{S}_{k+1} &= \mathcal{D}(\mathcal{S}_k, J) := \big\{\, h' \mid h' = h + j \text{ or } \\ &\qquad h' = |h - j|,\ h \in \mathcal{S}_k,\ j \in J \,\big\}.\end{aligned}$$

此外，$\mathcal{S}_k$ 是"阶组合"集合$\tilde{\mathcal{S}}_k(J)$的子集：

$$\mathcal{S}_k \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_k(J) := \Big\{ h = \Big|\sum_{j\in J} c_j j\Big| \;\Big|\; c_j \in \mathbb{Z},\ \sum_{j\in J}|c_j| \le k \Big\}. \tag{15}$$

证明。我们采用归纳法进行。

1. 式的证明 (14)（递归结构）

基础情形（$k=1$）：显然，$\mathcal{S}_1 = J$。

归纳步骤：假设式 (14) 对某个 $k \ge 1$成立。于是，

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j\in J}\beta_j T_j(x)\Big)^{k+1} &= \Big(\sum_{j\in J}\beta_j T_j(x)\Big)^{k}\Big(\sum_{j\in J}\beta_j T_j(x)\Big)\\ &= \Big(\sum_{h\in\mathcal{S}_k}\tilde{\beta}_h T_h(x)\Big)\Big(\sum_{j\in J}\beta_j T_j(x)\Big).\end{aligned} \tag{16}$$

将切比雪夫乘积引理应用于式(16)，所得指标 h' 属于由 $\mathcal{S}_k$ 与 J中指标的和与差构成的集合。因此，$\mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{D}(\mathcal{S}_k, J)$，且式 (14) 对 $k+1$成立。

2. $\mathcal{S}_k \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_k(J)$ 的证明

基础情形（$k=1$）：任意$j \in J$均可写成$|\sum_{i\in J} c_i i|$，其中 $c_j = 1$，其余为零，从而满足 $\sum|c_i| = 1$。因此$\mathcal{S}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_1(J)$。

归纳步骤：假设$\mathcal{S}_k \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_k(J)$，考虑$h' \in \mathcal{S}_{k+1}$。根据定义，对某个 $h \in \mathcal{S}_k$ 与$j \in J$，有 $h' = |h \pm j|$。根据归纳假设，$h = |\sum_{i\in J} c_i i|$，其中$\sum|c_i| \le k$。利用 $T_{-n}(x) = T_n(x)$，我们可以将符号吸收到系数中：

$$h' = \Big|\Big(\pm\sum_{i\in J} c_i i\Big) \pm j\Big| = \Big|\sum_{i\in J} c'_i i\Big|, \tag{17}$$

其中，对$i \ne j$有$c'_j = \pm c_j \pm 1$与$c'_i = \pm c_i$。复杂度满足 $\sum|c'_i| \le \sum|c_i| + 1 \le k+1$。因此，$h' \in \tilde{\mathcal{S}}_{k+1}(J)$。 □

上述引理已得到证明，现在我们继续证明该定理。

定理证明。通过对层索引 ℓ进行归纳法，追踪阶数复杂度的传播过程。

基础情形（$\ell = 0$）。初始表示为 $z^{(0)} = [T_{j_1}(x), \dots, T_{j_M}(x)]^\top$。每个分量都对应一个阶数为 $m \in J = \{j_1, \dots, j_M\}$的切比雪夫多项式。根据 $\mathcal{H}(J)$ 中定义的系数复杂度，对于第 t 个分量 $T_{j_t}(x)$，我们可以将整数权重定义为 $s_t = 1$ 和 $s_{t'} = 0$，其中 $t' \ne t$。由此得到的谱复杂度为 $\sum_{i=1}^{M}|s_i| = 1 = K^0$。因此，该结论对 $\ell = 0$ 成立。

归纳假设。假设对于隐藏层 ℓ–1（其中 $1 \le \ell < L$），$z^{(\ell-1)}$ 的每个分量都是切比雪夫多项式 $T_m(x)$的线性组合，其中每个次数 m 都属于以下集合：

$$\Omega_{\ell-1} = \Big\{ \Big|\sum_{t=1}^{M} s_t j_t\Big| \;\Big|\; \sum_{t=1}^{M}|s_t| \le K^{\ell-1} \Big\}.$$

归纳步骤。考虑第 ℓ 层的表示：

$$z^{(\ell)} = \rho^{(\ell)}\Big(W^{(\ell)} z^{(\ell-1)} + b^{(\ell)}\Big).$$

令 $v = W^{(\ell)} z^{(\ell-1)} + b^{(\ell)}$ 为预激活向量。由于 $z^{(\ell-1)}$ 由次数属于 $\Omega_{\ell-1}$ 的多项式组成，且偏置 $b^{(\ell)}$ 对应于 $T_0(x)$（其中所有 $s_t = 0$ 均满足 $\sum|s_t| = 0 \le K^{\ell-1}$），因此 v 的每个分量都是切比雪夫多项式的线性组合，其次数属于 $\Omega_{\ell-1}$。

激活函数是次数为 K的多项式，即 $\rho(z) = \sum_{k=0}^{K}\alpha_k z^k$。我们分析 v^k 这一项，其中 v的任意一个分量均适用。根据引理2，将切比雪夫多项式之和提升到 k次幂会产生新的次数。具体而言，如果输入次数的系数复杂度不超过 C，则输出次数的复杂度不超过 $k \cdot C$。

将其应用于我们的情形：输入复杂度为 $C = K^{\ell-1}$，最高幂次为 $k = K$，则 $z^{(\ell)}$ 中所得的阶 m满足：

$$\sum_{t=1}^{M}|s'_t| \le K \cdot K^{\ell-1} = K^{\ell}.$$

因此，$z^{(\ell)}$ 的元素由阶属于Ω_ℓ的切比雪夫多项式组成。

最后，网络输出是线性变换$f_{\theta}(x) = W^{(L)} z^{(L-1)} + b^{(L)}$。由于该线性运算不会提高多项式次数复杂度，谱阶仍受限于 $z^{(L-1)}$的谱阶。将 $\ell = L-1$ 代入我们的归纳结果后，输出阶属于 $\mathcal{H}(J)$，并满足如下约束：

$$\sum_{t=1}^{M}|s_t| \le K^{L-1}.$$

证明至此结束。 □

B. 主要任务的实验设置

我们简要回顾 CAFE+，并阐明实验描述中使用的两个符号M 和 J 。给定一个坐标输入$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$，CAFE + 会将其映射为一个高维向量，其过程为

$$\Psi(\mathbf{x}) = \bigodot_{i=1}^{N} \left\{ \mathbf{W}_i \left[\Phi_{\mathrm{FF}}(\mathbf{x}),\ \Phi_{\mathrm{CF}}(\mathbf{x}) \right] + \mathbf{b}_i \right\}, \qquad (18)$$

其中， Φ_{FF} 和 Φ_{CF} 分别表示傅里叶编码和切比雪夫编码。

傅里叶特征映射定义为

$$\Phi_{\mathrm{FF}}(\mathbf{x}) = \left[\sin(2\pi \boldsymbol{\omega}_i^\top \mathbf{x}),\ \cos(2\pi \boldsymbol{\omega}_i^\top \mathbf{x}) \right]_{i=1}^{M}, \qquad (19)$$

其中， M 表示采样的傅里叶频率数量。

切比雪夫特征映射定义为

$$\Phi_{\mathrm{CF}}(\mathbf{x}) = \left[T_j(x_d) \right]_{d=1,\ldots,D;\, j=0,\ldots,J-1} \in \mathbb{R}^{DJ}, \qquad (20)$$

其中， $T_j(\cdot)$ 是次数为 j 的切比雪夫多项式，J 指定每个维度的切比雪夫基函数数量。

在我们的所有实验中，我们使用 M 和 J 明确表示坐标编码中所采用的傅里叶特征和切比雪夫特征的数量。

实现说明。对于我们的方法，需要指定傅里叶特征的数量 M 和切比雪夫特征的数量 J。在实践中，我们的模型对 J 的选择相对稳健，因此建议选择 M 和 J，使傅里叶编码和切比雪夫编码后的特征维度保持约为 3:1 的比例。该比例无需严格满足，只是为选择 M 和 J 提供一个方便的指导。例如，在目标隐藏维度为 256 的二维图像拟合任务中，可以设置 $M = 96$ 和 $J = 32$。编码后，傅里叶特征生成长度为 $2M = 192$ 的向量，而切比雪夫特征生成长度为 $2J = 64$ 的向量。因此，它们的比例为 192: $64 = 3$:1，拼接后的表示与所需的 256 维相匹配。

以下提供 2D 图像拟合、三维形状表示和 NeRF 实验的详细实验设置：

- **2D 图像拟合**。对于 SIREN [37] 和 FINER [21], 我们使用 $\omega_0 = 30$和三个隐藏层。对于 WIRE [35],我们使用 $\omega_0 = 20$, $s_0 = 30$ 和两个隐藏层。SCONE [18]使用三个隐藏层，搭配 $\omega_0 = 30$ 和$\omega_\ell = [90, 60, 30, 10]$。SL^{2}A [33] 使用三个隐藏层，次数为 $= 512$，秩为 $= 128$。我们的方法采用三个并行线性层，随机傅里叶特征尺度为 30。默认配置在骨干多层感知机中使用傅里叶特征 $M = 88$ 和切比雪夫特征 $J = 30$，并设置一个隐藏层；而较大参数量的变体则采用 $M = 96$ 和 $J = 32$，并设置两个骨干多层感知机隐藏层。除 SCONE 使用 250 个隐藏神经元外，其他所有方法均使用 256 个隐藏神经元。我们对所有模型训练 6,000 次迭代。
- **3三维形状表示**。对于 SIREN 和 FINER，我们使用 $\omega_0 = 30$ 和三个隐藏层。WIRE 使用 $\omega_0 = 20$、$s_0 = 30$ 和两个隐藏层。SCONE 使用两个隐藏层，配有 $\omega_0 = 30$ 和 $\omega_\ell = [60, 30, 10]$。SL^{2}A 使用两个隐藏层，次数为 $= 256$，秩为 $= 128$。我们的方法采用两个并行线性层，随机傅里叶特征尺度为 30。我们使用 $M = 98$ 个傅里叶特征和 $J = 20$个切比雪夫特征，确保编码维度为 $2M + 3J = 256$。除 SCONE 使用 250 个隐藏神经元外，其他所有方法均使用 256 个隐藏神经元。训练期间，每次迭代都会随机打乱所有体素，并以小批次处理，每批最多包含 200,000 个点，总计进行 200 次迭代。
- **NeRF [26].** 我们的实现遵循FINER提供的设置。对于我们的方法，我们将位置编码中的频率特征设为10，并将切比雪夫特征与 $J = 8$拼接，得到长度为 $3 \times 2 \times 10 + 3 \times 8 = 84$的拼接特征。两个并行的线性投影将这些特征映射到长度182，并通过哈达玛积进行组合。骨干多层感知机有两个隐藏层，每层182个神经元。由此产生一个182维特征向量。排除第一个特征后，其余181个特征与输入坐标拼接，经两个并行线性层处理，再通过两层骨干多层感知机得到最终输出。

此外还提供了二维图像拟合（图19）、三维形状表示（图20）以及NeRF（图21）的可视化结果。

C. 补充实验

C.1. 全分辨率 DIV2K 表示

我们在全分辨率下对 DIV2K [1]图像0873（2040×1456）、0878（2040×1740）和0891（1668×2040）进行图像拟合，并使用它们的 2× 下采样版本。训练 6,000 次迭代，每次迭代随机采样 512×512个点。所有方法均使用包含 384 个神经元的隐藏层。对于 SIREN 和 FINER，我们采用三个隐藏层，使用 $\omega_0 = 30$。对于 Wire，我们使用两个隐藏层，分别包含 $\omega_0 = 20$ 和 $s_0 = 20$。对于 SCONE，我们使用三个隐藏层，分别包含 $\omega_0 = 30$和 $\omega_\ell = [90, 60, 30, 10]$。对于 SL^{2}A，我们使用三个隐藏层，次数为 $= 512$、秩为 $= 192$。对于我们的方法，我们采用三个并行线性层，随机傅里叶特征尺度为 30，使用 $M = 144$ 个傅里叶特征和 $J = 48$ 个切比雪夫特征。我们展示了

表6。在全分辨率和 $\times 2$ 下采样设置下，对 DIV2K 图像 0873、0878 和 0891 的峰值信噪比进行比较。还报告了参数数量和每张图像的平均推理时间。

方法	0873	0873（×2）	0878	0878（×2）	0891	0891（×2）	参数（M）	平均时间（秒）
SIREN	24.91	31.56	32.42	36.94	27.20	32.48	0.45	292.50
WIRE	23.45	28.98	29.12	32.04	23.99	27.23	0.18	707.48
SCONE	26.10	33.14	34.09	39.12	27.68	33.19	0.45	647.06
FINER	25.28	31.59	32.66	36.86	26.77	32.07	0.45	375.28
SL^2A	25.95	34.28	34.00	38.59	26.82	32.53	0.84	456.12
Ours	**29.65**	**37.18**	**35.79**	**40.82**	**30.79**	**36.46**	0.74	326.95

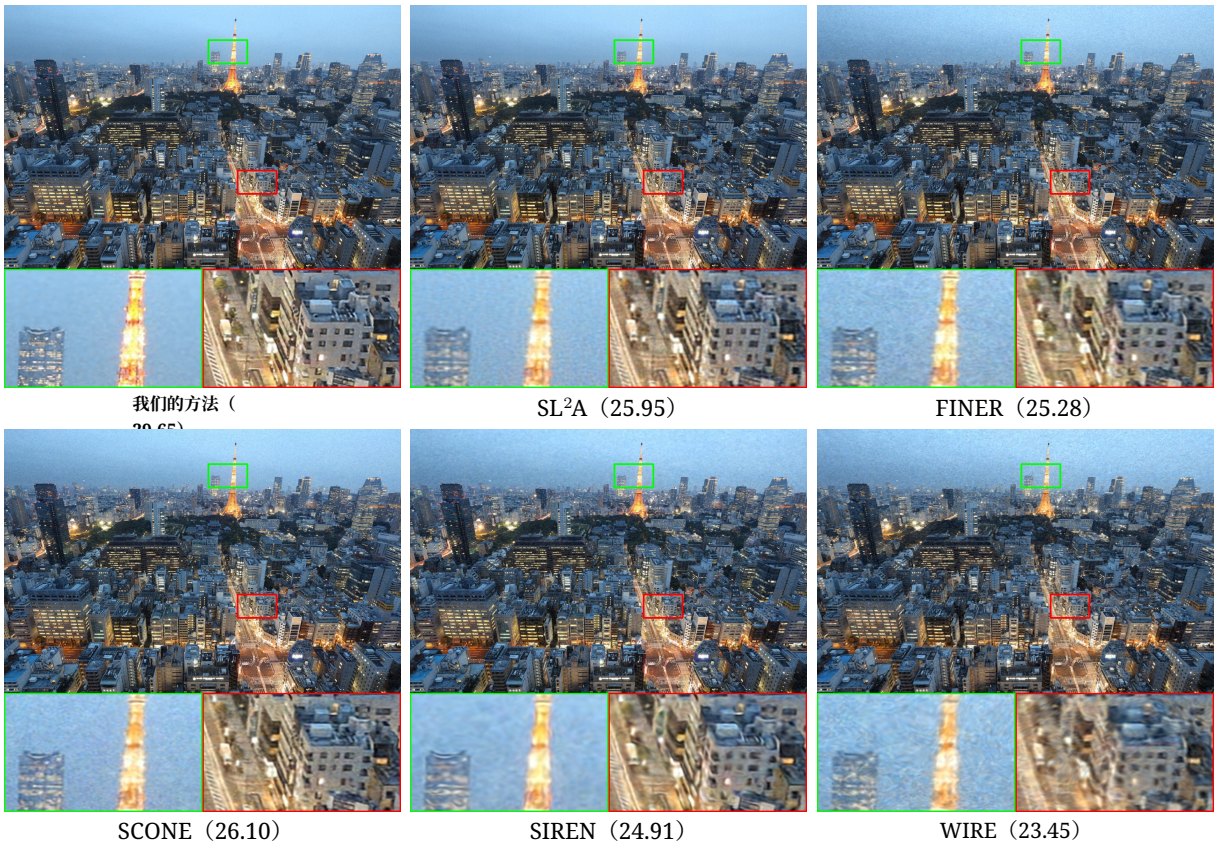


图11。 全分辨率 DIV2K 图像0873上的可视化结果，其中我们放大了两个选定区域 s.

DIV2K 图像0873在原始分辨率下的可视化结果见图11。峰值信噪比、模型参数量和训练时间列于表6。这些结果进一步证明了我们方法的有效性。

C.2. 图像复原

我们将框架应用于三种经典的图像复原任务，即图像去噪、图像修复和超分辨率。具体而言，我们使用标准差为 0.2 的高斯噪声，随机移除 50% 的像素进行图像修复，并执行 $\times 4$超分辨率。

各项任务的详细配置总结如下：

• **去噪**。 所有方法均使用包含 256 个神经元的隐藏层，并采用两个隐藏层。SIREN 和 FINER 使用$\omega_0 = 10$；Wire 使用 $\omega_0 = 4$ 和 $s_0 = 4$；SCONE 使用$\omega_0 = 2$以及 $\omega_\ell = [60, 30, 10]$；$SL^2A$ 使用次数 $= 64$和秩 $= 64$。对于我们的方法，我们使用两个并行线性层，包含 $M = 96$傅里叶特征、 $J = 32$ 切比雪夫特征，以及随机傅里叶特征尺度为 2。

• **图像修复**。 所有方法均使用含 256 个神经元的隐藏层，并采用两个隐藏层。SIREN 和 FINER 使用

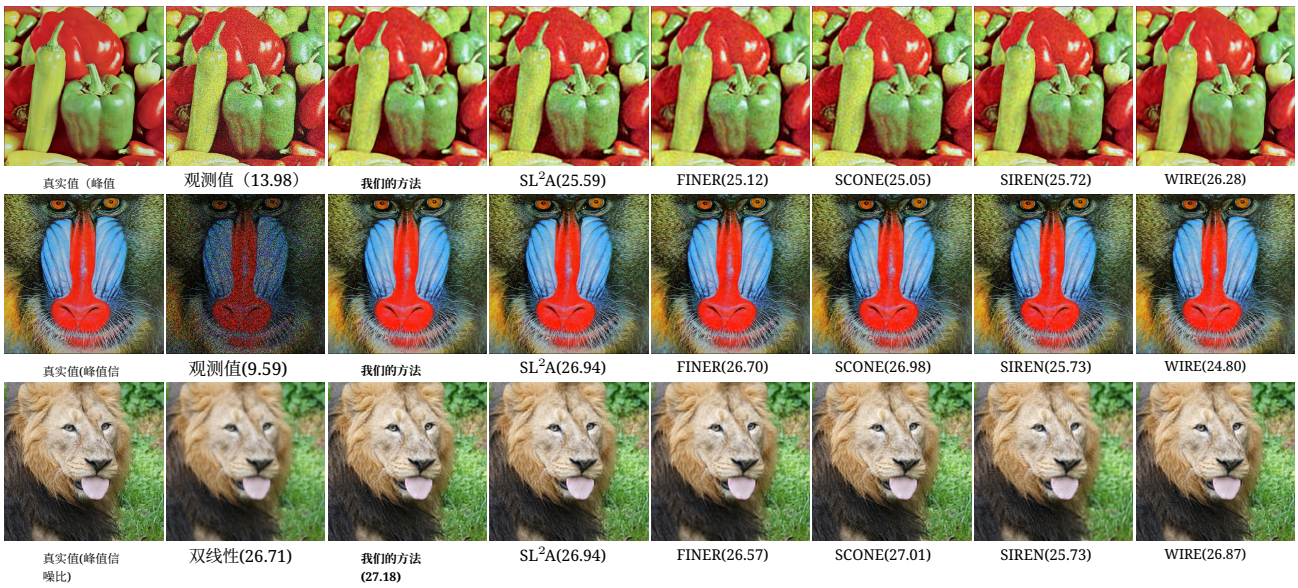
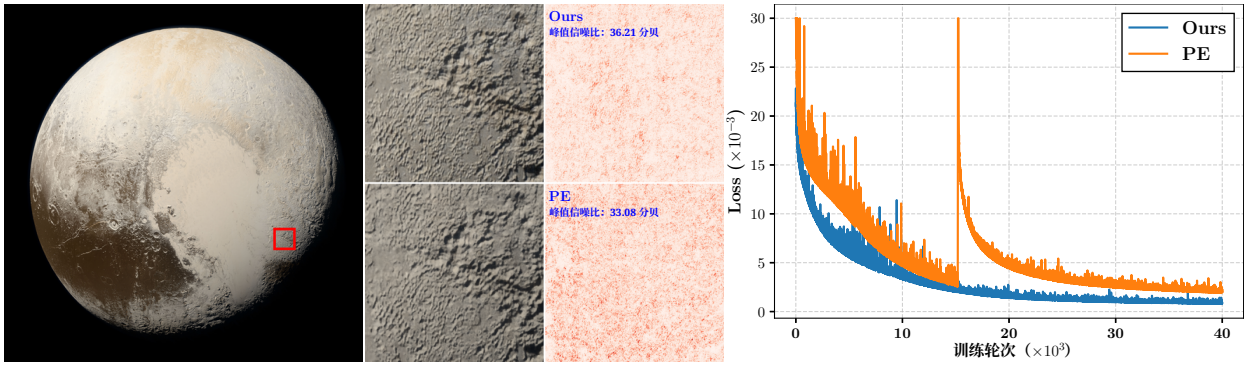


图 12. 图像去噪、图像修复和单幅图像超分辨率任务的可视化结果（从上到下）。去噪时，添加标准差为 0.2 的高斯噪声。图像修复中随机移除 50% 的像素。超分辨率的缩放因子为 4。



(a) 真实值　(b) 带有残差的裁剪块　(c) 训练损失曲线

图 13. 十亿像素冥王星图像拟合结果的可视化。(a) 为原始 8000×8000 图像，(b) 展示了由我们的方法和位置编码拟合的 512×512 图像块，以及对应的残差图；(c) 展示了训练损失曲线。

$\omega_0 = 30$；Wire 使用 $\omega_0 = 20$和 $s_0 = 20$；SCONE 使用 $\omega_0 = 30$ 与 $\omega_\ell = [60, 30, 10]$；SL²A 使用次数 $= 256$和秩 $= 128$。对于我们的方法，我们使用两个并行线性层，包含 $M = 96$ 傅里叶特征、$J = 32$切比雪夫特征，以及随机傅里叶特征尺度 30。

- **超分辨率**（$\times 4$）。所有方法均使用包含 256 个神经元的隐藏层和两个隐藏层。SIREN 和 FINER 使用 $\omega_0 = 10$；Wire 使用 $\omega_0 = 8$和 $s_0 = 6$；SCONE 使用 $\omega_0 = 2$ 和 $\omega_\ell = [60, 30, 10]$；SL²A 使用次数 $= 64$ 和秩 $= 64$。对于我们的方法，我们使用两个并行线性层，分别采用 $M = 96$ 傅里叶特征、$J = 32$ 切比雪夫特征，随机傅里叶特征尺度为 2。

针对每项任务，我们从标准数据集中选取一张具有代表性的图像，并在图中展示结果。12我们的方法在这些图像复原任务。

C.3. 十亿像素图像表示

我们进一步展示了所提出的 CAFE+在十亿像素图像表示任务上的优越性。遵循 ACORN [24]，，我们使用广泛采用的 8000×8000冥王星图像，并训练 40k 次迭代。对于基线，位置编码方法采用一个包含四个隐藏层的多层感知机，每层有 1,536 个神经元。相比之下，我们的方法通过将切比雪夫特征与 $J = 8$ 拼接来增强原始位置编码，随后使用两个线性层（每层将 62 个输入映射为 1,536 个输出），并在将输出馈入骨干多层感知机之前通过哈达玛积将其合并。此修改使我们能够使用仅包含两个隐藏层、每层有 1,536 个神经元的骨干网络，同时保持其他所有设置与位置编码相同，

。因此，参数数量从 9.52M 减少到 4.92M。如图所示 13，我们的方法能够重建更精细的细节，峰值信噪比提升 3.13 分贝，且收敛更快、更稳定。这些结果清楚地证明了我们方法的有效性。

C.4. 更大尺度的 NeRF 与场景级 SDF 重建

更大尺度的 NeRF。 我们进一步在标准场景（*Lego* / *Ship* / *Drums* /*Hotdog*）上使用原始分辨率的全部训练图像评估 NeRF。我们将我们的方法与两个最强基线 SIREN 和 FINER 进行比较。定量结果见表 7。**场景级 SDF**。 我们在 *Replicaroom0* 场景上评估这些方法，在相同参数预算下以交并比作为指标。结果如下：SIREN（0.854）、FINER（0.844）和我们的方法（**0.899**）。

表 7. 使用原始分辨率下的全部训练图像，对 NeRF 场景进行定量比较。峰值信噪比以分贝为单位报告。

方法	Lego	Ship	Drums	Hotdog
SIREN	26.94	20.62	23.09	30.89
FINER	28.00	20.88	**23.65**	31.64
Ours	**30.26**	**21.92**	23.51	**32.35**

C.5. 与MFN和BACON的比较

MFN、BACON和我们的方法均采用哈达玛积，其中MFN和BACON通过串行递归架构在各层中逐步合成频率分量。相比之下，我们的方法基于编码并采用并行设计，从而加快了训练速度，且无需精心调制的初始化。如表8所总结，与MFN和BACON相比，我们的方法在显著缩短训练时间的同时，持续取得更好的重建质量。

表8. 在图像拟合上与BACON和MFN的比较

方法	D2K0	D2K1	D2K2	D2K3	D2K4	D2K5	D2K6	D2K7	参数	时间(s)
MFN	35.6	40.1	36.4	41.9	38.4	35.2	39.9	38.9	0.33M	279.1
BACON	34.0	39.0	37.6	39.6	39.5	35.7	38.2	36.0	0.33M	245.6
我们的方法	**39.5**	**44.3**	**44.2**	**44.7**	**45.0**	**39.2**	**42.6**	**45.0**	0.33M	**149.8**

D. 其他消融研究

D.1. 切比雪夫特征与傅里叶特征在一维函数拟合中的比较

在图14中，我们通过拟合两个一维函数来比较傅里叶特征与切比雪夫特征（图中记作 CF），直观地展示它们各自的优势。在我们的实验设置中，每个坐标都映射为一个包含 32 维的特征向量，随机傅里叶特征尺度设为 5。

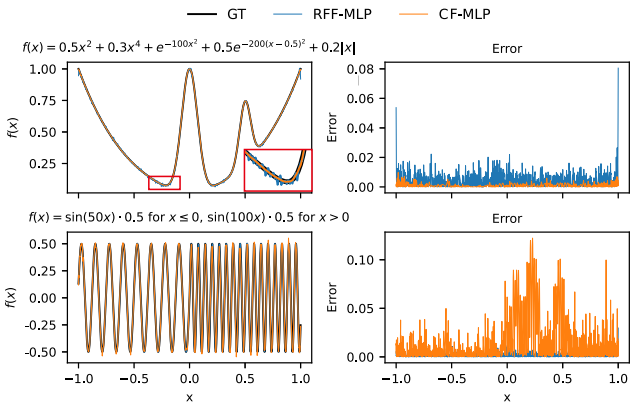
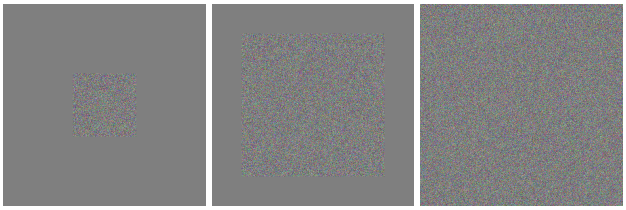


图14. 随机傅里叶特征与切比雪夫特征在函数拟合中的比较。切比雪夫特征擅长捕捉平滑的低频分量，但难以处理高频变化；随机傅里叶特征则能有效表示高频内容，但会在低频函数上引入振荡误差。



(a) 比例=0.1 (b) 比例=0.5 (c) 比例=1.0

图15. 不同噪声比例下构造的噪声图像可视化。

多层感知机架构由一个包含 32 个神经元的隐藏层组成。我们采样 1,000 个点进行训练，共训练 2,000 轮，并在 4,000 个均匀采样的测试点上评估拟合误差。如图所示，切比雪夫特征在对平滑函数区域建模时具有明显优势，而傅里叶特征则容易引入振荡，导致噪声预测。相反，在近似高频函数时，切比雪夫特征会产生显著更大的误差，而傅里叶特征则能保持更高的精度。

D.2. 高频比例对重建的影响

我们引入切比雪夫特征，主要目的是增强对低频信号的表示能力。然而，这自然引出了一个重要问题：当信号包含大量高频分量时，加入切比雪夫特征是否会影响 CAFE 的拟合能力。

为研究这一问题，我们构建了一个专门用于控制高频内容占比的合成数据集。如图15所示，该数据集由高频中心区域和平坦背景组成。令$\mathbf{I}_{\text{noise}}$

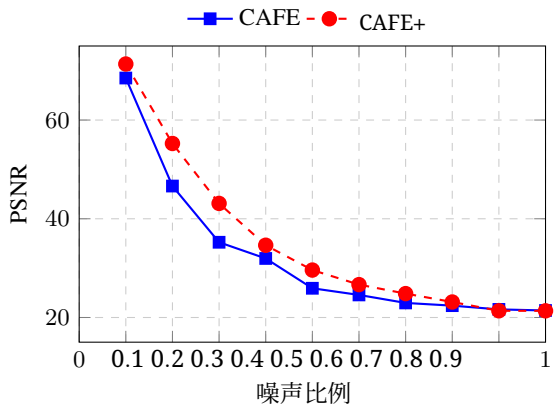


图 16. CAFE 与 CAFE+ 在不同噪声比例下的峰值信噪比对比。

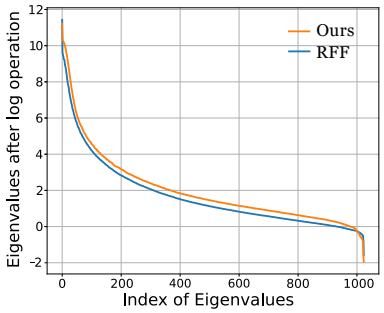


图 17. 神经切线核特征值可视化。

表示高斯噪声图，$\mathbf{I}_{\text{smooth}} = \mathbf{0}$ 表示以零填充的背景。我们定义一个中心二值掩码$\mathbf{O}\rho$，其中参数 $\rho \in (0, 1]$ 决定掩码区域占图像总面积的比例。最终的真实图像$\mathbf{I}$合成为

$$\mathbf{I} = \mathbf{O}\rho \odot \mathbf{I}_{\text{noise}} + (1 - \mathbf{O}\rho) \odot \mathbf{I}_{\text{smooth}},$$

其中 $\odot$ 表示逐元素乘法。在我们的实验中，我们将 ρ 从0.1变化到1.0，以模拟不同比例的高频信息。

如CAFE+ 与CAFE的比较所示，CAFE+ 在广泛的比例范围内始终优于CAFE。当比例超过0.9时，其性能变得与CAFE相当。这表明CAFE+能够有效增强混合频谱分布的表示，同时不损害高频主导场景下的性能，证明了我们方法的实际适用性与稳健性。

D.3. 神经切线核特征值

我们对 CAFE 和 RFF 的神经切线核特征值进行了可视化，如图所示。17。CAFE 的特征值分布更为理想。

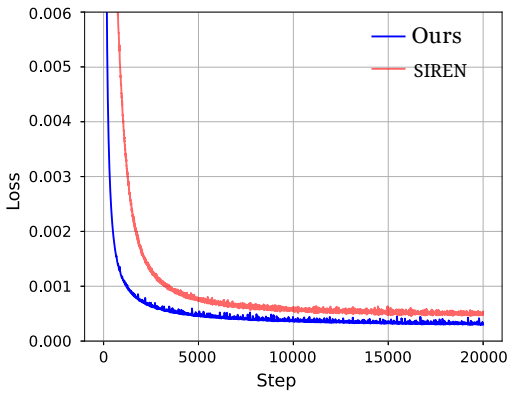


图18. 我们的方法与SIREN的训练损失曲线。我们的方法收敛更快，并达到更低的损失值。

D.4. 与SIREN的损失曲线比较

我们绘制了我们的方法和 SIREN 在图像拟合任务中的训练损失曲线，如图所示。18。一方面，我们的方法收敛更快。另一方面，即使超过预设的训练迭代次数（我们的实验中为 6,000 次），我们的方法仍能持续取得更低的损失值。这些结果表明，我们的框架具有更高的优化效率。

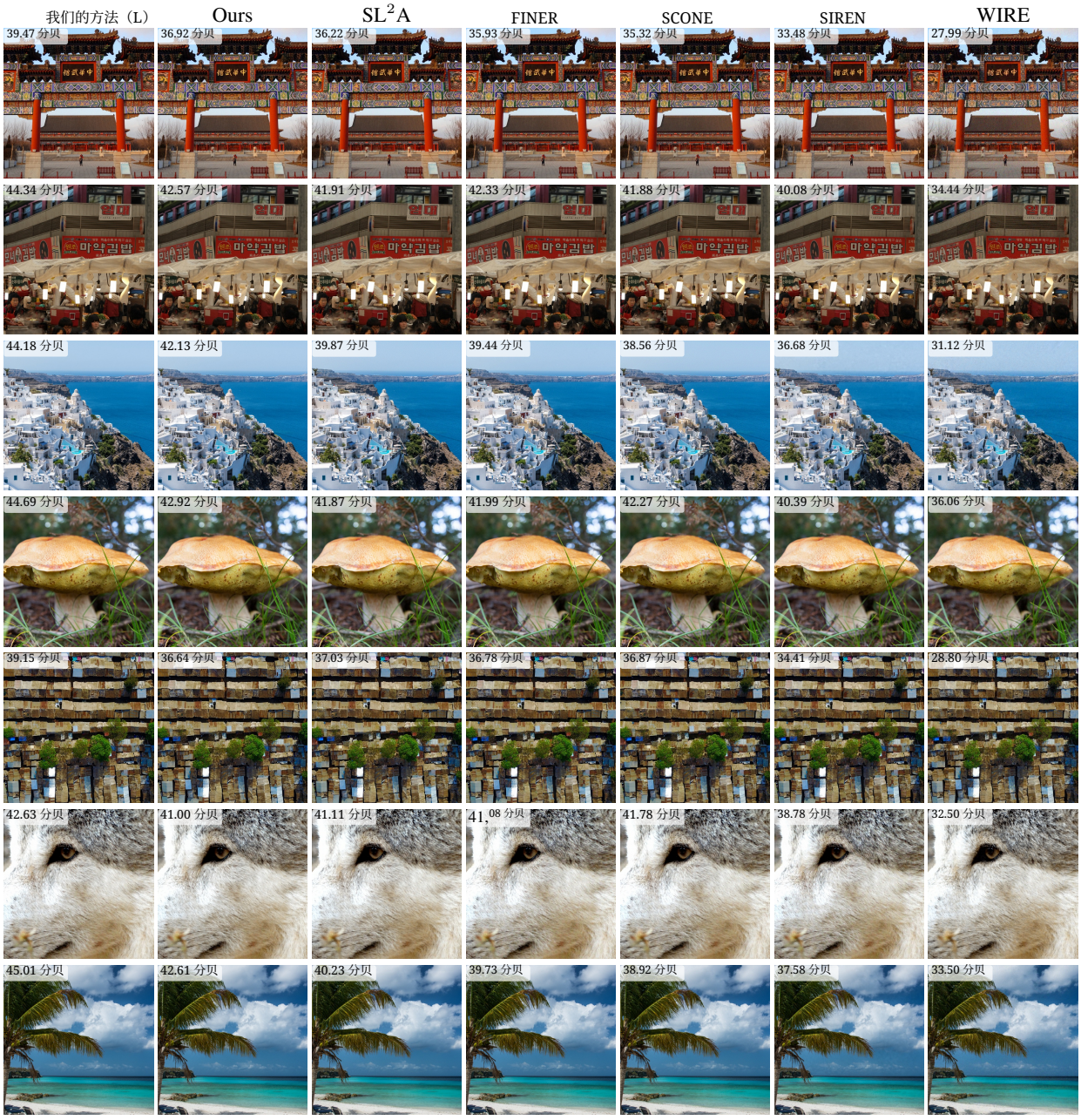


图19。二维图像拟合任务的可视化结果。峰值信噪比数值显示在每张图像的左上角。

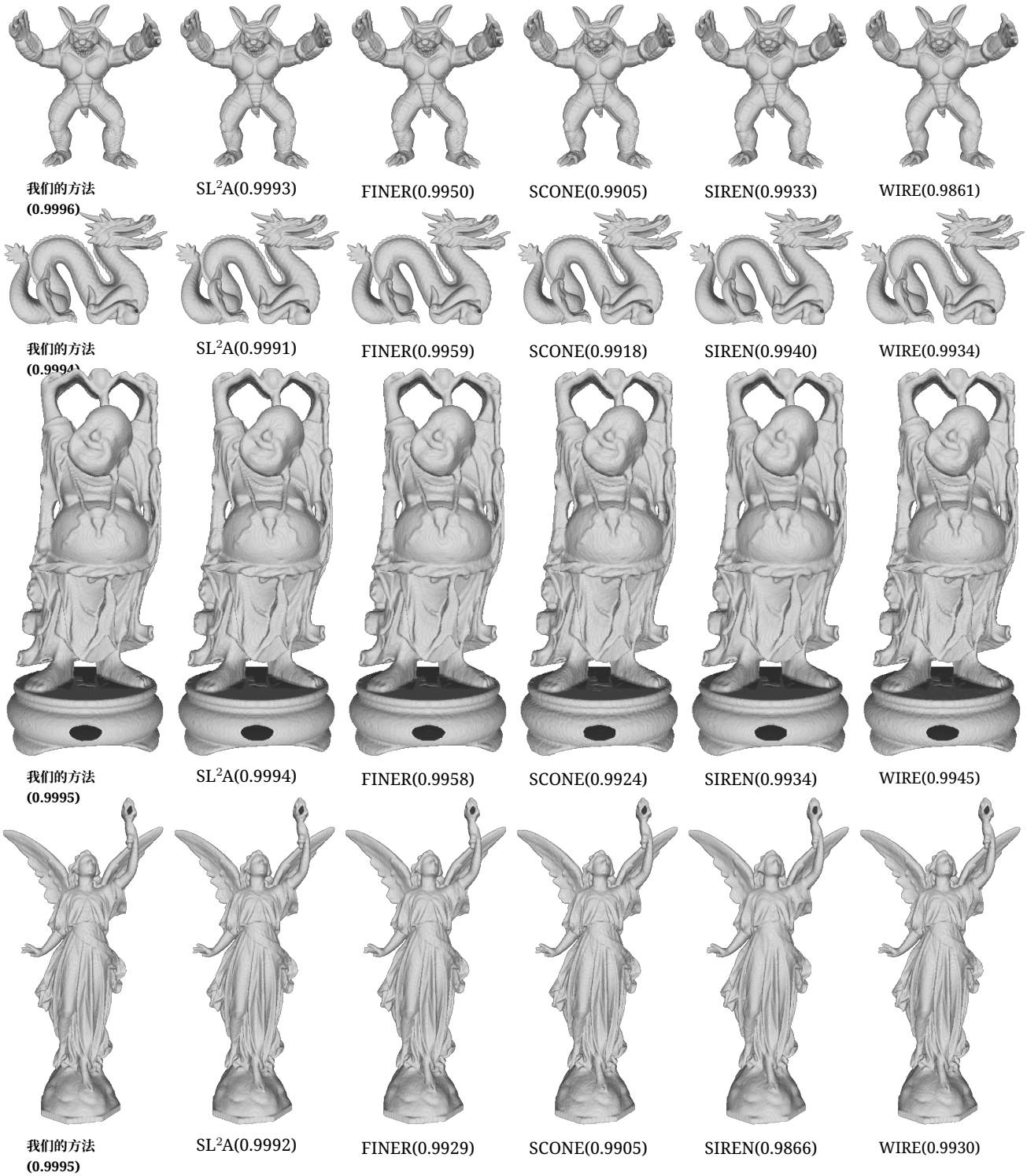


图 20. 三维形状表示任务的可视化。



图 21. 神经辐射场任务的可视化。



我们的方法 SL^{2}A（34.00） FINER (32.66)



SCONE (34.09) SIREN (32.42) WIRE (29.12)



我们的方法 SL^{2}A（26.82） FINER (26.77)



SCONE (27.68) SIREN (27.20) WIRE (23.99)

图22. DIV2K 图像 0878 和 0891 的全分辨率表示结果可视化。