arXiv:2603.01039v1 [math.AP] 1 Mar 2026

分数离散拉普拉斯算子的导数是一种奇异黎斯势

BO LI，QINGZE LIN，HUOXIONG WU*

摘要。设 Δ_N 是 $\mathbb{Z}^N$ (N $\geq$ 1) 上的多维离散拉普拉斯算子。本文证明，当 N = 1 时，$(-\Delta_1)^s$ 在 0 处的右导数是 Stein-Wainger 意义下的一种奇异离散 Riesz 势（即端点情形：阶数为 0）（《数学分析杂志》，2000年）；当 N $\geq$ 2 时，相应的导数也是一种带有额外校正项的奇异离散 Riesz 势。我们还讨论了左导数情形下的类似结论。本文所得的所有结果都将 Chen-Weth 的对数拉普拉斯算子（《偏微分方程通讯》，2019年）推广到了离散情形。

1. 引言

近年来，关于涉及（非）线性积分微分算子的边值问题，大量数学研究致力于拉普拉斯算子的分数幂。对于任意 $0 < s < 1$，分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^s$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的定义通过傅里叶变换给出：

$$\widehat{(-\Delta)^s f}(\xi) = |\xi|^{2s}\widehat{f}(\xi), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

并且可以用如下逐点公式表示

$$(-\Delta)^s f(x) = c_{d,s}\text{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{d+2s}}\mathrm{d}y.$$

众所周知，分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^s$ 具有如下极限性质

$$(-\Delta)^s f(x) \to f(x) \tag{1.1}$$

当 s 趋于零时。一个颇具挑战性的问题是

whether the expansion (1.1) could be extended to the first order or high order.

对此问题的一个肯定答案见于 [9] 其中，对于任意C^2-函数 f 定义在 $\mathbb{R}^d$ 上且具有紧支撑，

$$(-\Delta)^s f(x) = f(x) + sL_\Delta f(x) + o(s), \quad s \to 0^+,$$

其中，算子 L_Δ 形式上定义为对数拉普拉斯算子，并被视为$(-\Delta)^s$ 在 s = 0处的右导数

$$L_\Delta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\Delta)^s\Big|_{s=0^+}.$$

得到 L_Δ 的一些定性性质如下。

定理 A. ([9, 定理 1.1]) 设 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$，其中某个 $\alpha > 0$ 具有紧支撑。那么我们有

$$L_\Delta f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\Delta)^s\Big|_{s=0^+} f(x) = c_d\int_{\mathbb{R}^d}\frac{f(x)\mathbb{I}_{B_1(x)}(y) - f(y)}{|x-y|^d}\mathrm{d}y + \rho_d f(x).$$

2010年数学主题分类. 39A12, 35R11, 39A12. 关键词和短语. 离散调和分析，分数阶拉普拉斯算子，黎斯势。

* 通讯作者。

这里 $c_d = \pi^{-d/2}\Gamma(d/2)$ 和 $\rho_d = \log 4 + \psi(d/2) - \gamma$，其中 $\psi = \Gamma'/\Gamma$ 是双伽马函数， γ 是欧拉–马歇罗尼常数。此外，

(1) 对于 $1 < p \le \infty$，我们有 $L_\Delta f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，并且 $[(-\Delta)^s f - f]/s \to L_\Delta f$ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中当 $s \to 0^+$ 时成立；(2) $\mathrm{d}L_\Delta f(\xi) = (2\log|\xi|)\, \mathrm{bf}(\xi)$ 对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 成立。

分数阶概念的研究已广泛应用于不同领域，例如障碍问题 [2, 5, 19], 共形几何 [7], 迹/延拓问题 [6, 24, 29], 傅里叶变换 [11],椭圆/抛物型方程 [10, 12, 17], Nirenberg问题 [21], Yamabe问题 [1, 22], 微分算子 [13, 23, 26]。

本文研究了 $\mathbb{Z}^N$ ($N \ge 1$) 上定理 A 的离散版本。当 $N = 1$ 时，我们证明分数阶离散拉普拉斯算子在零点处的右导数是零阶离散 Riesz 势（见下文第 2 节）；而当 $N \ge 2$ 时，它是带有校正项的奇异离散Riesz势（见下文第 3 节）。这里我们指出，当 $N = 1$ 时，分数阶离散拉普拉斯算子由伽马函数确定，并且具有显式表示。然而，当 $N \ge 2$ 时，分数阶离散拉普拉斯算子的核并不显式，因此由于底空间 $\mathbb{Z}^N$ 的复杂结构， [9] 中的某些方法和技巧不再适用。最后，本文关于 $(-\Delta_N)^s$ $(0 < s < 1)$ 的所有结果都可以推广到相反情形 $(-\Delta_N)^s$ $(-N/2 < s < 0)$；也就是说，在离散情形 $\mathbb{Z}^N$ 下，黎斯势在零点处的左导数仍然是零阶离散 Riesz 势；更多细节见下文第 4 节。

所有带下标的常数，例如 ρ_N （仅依赖于 N），在不同位置出现时均保持不变。

2. 整数集上分数阶拉普拉斯算子的导数

2.1. 预备知识。本小节中，我们考虑整数集 $\mathbb{R}$ 上步长固定为 $h > 0$ 的网格 $\mathbb{Z}_h = \{hn : n \in \mathbb{Z}\}$。对于函数 $f : \mathbb{Z}_h \to \mathbb{R}$，我们用记号 $f_h(n) = f(hn)$ 表示 f 在网格点 $hn \in \mathbb{Z}_h$ 处的值。整数集 $\mathbb{Z}_h$ 上的离散拉普拉斯算子 Δ_h 定义为

$$-\Delta_h f_h(n) = -\frac{1}{h^2}(f_h(n+1) + f_h(n-1) - 2f_h(n)),$$

及其分数幂 $(-\Delta_h)^s$ $(0 < s < 1)$ 可通过热半群方法 ([16, 29]) 定义

$$(-\Delta_h)^s f_h = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty (e^{t\Delta_h} f_h - f_h) \frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}},$$

其中 $e^{t\Delta_h}$ 是与 $-\Delta_h$ 相关联的热半群，且 $u_h(n,t) = e^{t\Delta_h} f_h(n)$ 是半离散热方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u_h = \Delta_h u_h, & \text{in } \mathbb{Z}_h \times (0,\infty), \\ u_h(\cdot,0) = f_h, & \text{on } \mathbb{Z}_h. \end{cases}$$

对于任意 $0 \le s \le 1$，加权勒贝格空间记作 $l_s(\mathbb{Z})$，定义为所有满足其范数条件的函数 $f : \mathbb{Z}_h \to \mathbb{R}$ 所构成的类

$$\|f_h\|_{\ell_s(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|f_h(n)|}{(1+|n|)^{1+2s}} < \infty.$$

关于 [16] 中分数阶拉普拉斯算子的一个结果告诉我们，如果 $f_h \in l_s(\mathbb{Z})$ 且 $0 < s < 1$，那么

$$(-\Delta_h)^s f_h(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}, m\neq n} \mathcal{K}_s^h(n-m)(f_h(n) - f_h(m)),$$

其中离散核 $\mathcal{K}_s^h(m)$ 由下式给出

$$\mathcal{K}_s^h(m) = \pi^{-1/2} s \left(\frac{2}{h}\right)^{2s} \frac{\Gamma(1/2+s)}{\Gamma(1-s)} \frac{\Gamma(|m|-s)}{\Gamma(|m|+1+s)} \mathbb{I}^{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(m) = C_h(s) \frac{\Gamma(|m|-s)}{\Gamma(|m|+1+s)} \mathbb{I}^{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(m).$$

为简便起见，记 $c_h(s)$ 为商 $C_h(s)/s$。显然，有 $c_h(0) = 1$ and

$$c_h'(0) = \log 4 - \log h^2 + \psi(1/2) + \psi(1) = -2\gamma - \log h^2. \tag{2.1}$$

若 $h = 1$，则我们省略 $\mathcal{K}_s^h(m)$ 的上标和 $\mathbb{Z}_h$ 的下标。

此外，相应的对数拉普拉斯算子 $\log(-\Delta_h)$ 定义为 $(-\Delta_h)^s$ 在 0 处的右导数，即，

$$\log(-\Delta_h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\Delta_h)^s\Big|_{s=0^+}.$$

2.2. 伽马函数的估计。本小节汇集了伽马函数的一些性质。为完整起见，尽管相关论证是标准的，我们仍在此给出证明。

命题 2.1. 设 $s > 0$ 充分小。对于任意整数 $k \geq 1$，以下公式成立。

(1) $\dfrac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(k+1+s)} \leq \dfrac{1}{(k-s)^{1+2s}}.$

(2) $\displaystyle\sum_{|m|\geq k} \frac{\Gamma(|m|-s)}{\Gamma(|m|+1+s)} = \frac{\Gamma(k-s)}{s\Gamma(k+s)}.$

(3) $\dfrac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(k+s)} = 1 - 2s\psi(k) + o(s).$

证明。(1) 它遵 循伽马函数商的恒等式（见 [16, (5.1)]） t

$$\frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(k+1+s)} = \frac{1}{\Gamma(1+2s)} \int_0^\infty e^{-(k-s)t}(1-e^{-t})^{2s}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\Gamma(1+2s)} \int_0^\infty e^{-(k-s)t} t^{2s}\mathrm{d}t = \frac{1}{(k-s)^{1+2s}},$$

其中我们使用了基本不等式 $1 - e^{-t} \leq t$，对任意 $t \geq 0$ 均成立。

(2) 利用伽马函数 $\Gamma(\cdot)$ 与贝塔函数 $B(\cdot,\cdot)$ 之间的关系，可得

$$\begin{aligned}\sum_{|m|\geq k} \frac{\Gamma(|m|-s)}{\Gamma(|m|+1+s)} &= \frac{2}{\Gamma(1+2s)} \sum_{m=k}^\infty B(m-s, 1+2s) \\ &= \frac{1}{s\Gamma(2s)} \int_0^1 \sum_{m=k}^\infty t^{m-s-1}(1-t)^{2s}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(k-s)}{s\Gamma(k+s)}.\end{aligned}$$

(3) 该商的性质可由洛必达法则推出。证明完毕。 □

2.3. 主要结果及其证明。本小节将证明本文的第一个主要结果。

定理 2.2. 设 f 是定义在 $\mathbb{Z}_h$ ($h > 0$) 上且具有有界支撑的实值函数。则有

$$\log(-\Delta_h) f_h(n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\Delta_h)^s\Big|_{s=0^+} f_h(n) = -\sum_{m\in\mathbb{Z}, m\neq n} \frac{f_h(m)}{|n-m|} - (\log h^2) f_h(n). \tag{2.2}$$

此外，我们有对数$(-\Delta_h)$ $f_h \in l^\infty(\mathbb{Z})$，并且

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{(-\Delta_h)^s f_h - f_h}{s} = \log(-\Delta_h) f_h$$

在 L^∞ 意义下。[1]

注 2.3。 在定理 2.2中，我们采用记号“对数”表示分数阶离散拉普拉斯算子在零点处的导数，即:

$$\log(-\Delta_h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\Delta_h)^s\Big|_{s=0^+}.$$

采用这一记号有两个原因。首先，对数函数自然出现在微分运算中（至少形式上如此）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\Delta_h)^s\Big|_{s=0^+} = (-\Delta_h)^s \log(-\Delta_h)\Big|_{s=0^+} = \log(-\Delta_h).$$

另一个原因是，在欧几里得情形下，（弱）奇异积分算子 L_Δ 的傅里叶符号具有 $\xi \mapsto 2$ 对数 $|\xi|$ 的形式; 见定理 A。此外，在离散情形下，算子 对数$(-\Delta_h)$ 是非奇异的（因为 $K_s^h(0) = 0$），并且其傅里叶符号至少在形式上具有 $\xi \mapsto 2$ 对数 $|(2 \sin \pi\xi)/h|$ 的形式。事实上，对于任意 $f_h \in l^1(\mathbb{Z})$，其傅里叶变换为

$$\widehat{f_h}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_h(n)e^{2\pi in\xi}, \quad -1/2 \le \xi \le 1/2;$$

参见 [14, 第 3] 节，了解更多细节。通过常规计算可得

$$\begin{aligned}\widehat{(-\Delta_h f_h)}(\xi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{-1}{h^2}(f_h(n+1) + f_h(n-1) - 2f_h(n))e^{2\pi in\xi} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_h(n)e^{2\pi in\xi}\frac{-1}{h^2}(e^{2\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi} - 2) = \left(\frac{2}{h}\sin\pi\xi\right)^2 \widehat{f_h}(\xi).\end{aligned}$$

由此，只需一步即可将指数 2 替换为一般指数 2s，从而（至少在形式上）定义离散拉普拉斯算子的分数幂:

$$\widehat{(-\Delta_h)^s f_h}(\xi) = \left(\frac{2}{h}\sin\pi\xi\right)^{2s} \widehat{f_h}(\xi).$$

上述傅里叶符号中的正弦函数在欧几里得情形中并未出现。我们认为，这一现象是由热核的傅里叶变换

$$\widehat{G_{t,1}}(\xi) = e^{-4t\sin^2\pi\xi}.$$

然而 ，为简便起见，我们仍采用记号 $\log(-\Delta_h)$，而不写作 $\log\sin(-\Delta_h)$。

注 2.4. 引入离散核函数

$$\begin{aligned}K : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ m &\mapsto |m|^{-1}\mathbb{I}^{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(m).\end{aligned}$$

于是，求和表示（2.2）可改写为

$$\begin{aligned}\log(-\Delta_h)f_h(n) &= -\sum_{m\in\mathbb{Z},m\neq n}\frac{f_h(m)}{|n-m|} - (\log h^2)f_h(n) \\ &= -K * f_h(n) - (\log h^2)f_h(n) = -\mathcal{I}_0 f_h(n) - (\log h^2)f_h(n),\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{I}_0$ 表示一种奇异离散Riesz势（即零阶离散 Riesz 势），其核为 $K(n) = |n|^{-1}$; 参见 [28] 例如。此外，我们指出 $h = 1$ 是一个特殊且重要的

[1]事实上，L^∞ 范数可替换为 L^p 范数，其中 $1 < p \le \infty$，证明留给读者。

情形（2.2）。在这种情况下，分数阶离散拉普拉斯算子的导数确实简化为奇异离散Riesz势。

定理的证明2.2。步骤 1：分解 $(-\Delta_h)^s f_h$。取一个整数 $l \geq 1$ 足够大，使得 $\operatorname{supp} f_h \subset (-l, l)$。对于任意$s > 0$ 足够小的情形，可写为

$$\begin{aligned}(-\Delta_h)^s f_h(n) &= \sum_{0<|m-n|<4\ell} \mathcal{K}_s^h(n-m)(f_h(n)-f_h(m)) + \sum_{|m-n|\geq 4\ell} \mathcal{K}_s^h(n-m)(f_h(n)-f_h(m)) \\ &= \left(\sum_{0<|m-n|<4\ell} \mathcal{K}_s^h(n-m)(f_h(n)-f_h(m)) - \sum_{|m-n|\geq 4\ell} \mathcal{K}_s^h(n-m) f_h(m) \right) + \sum_{|m-n|\geq 4\ell} \mathcal{K}_s^h(n-m) f_h(n) \\ &= A_\ell^h(s,n) + D_\ell^h(s) f_h(n).\end{aligned}$$

步骤 2：$A^h{}_l(s, n)/s$ 在原点附近的渐近行为。当 $|n| < 2l$ 时，由 f_h 的支集可知

$$A_\ell^h(s,n) = \sum_{0<|m-n|<4\ell} \mathcal{K}_s^h(n-m)(f_h(n)-f_h(m)).$$

注意到

$$\frac{\mathcal{K}_s^h(n-m)}{s} = c_h(s)\frac{\Gamma(|n-m|-s)}{\Gamma(|n-m|+1+s)} \to \frac{1}{|n-m|}, \quad s \to 0^+,$$

因此

$$\frac{A_\ell^h(s,n)}{s} \to \sum_{0<|m-n|<4\ell} \frac{f_h(n)-f_h(m)}{|n-m|} = a_\ell^h(n), \quad s \to 0^+.$$

步骤 3：估计 $A^h{}_l(s, n)/s$ 在远离原点处的情况。当 $|n| \geq 2l$ 时，注意到 $f_h(n) = 0$（由 f_h 的支集保证），这意味着

$$A_\ell^h(s,n) = -\sum_{m\in\mathbb{Z}, m\neq n} \mathcal{K}_s^h(n-m) f_h(m)$$

and

$$|n-m| \geq |n| - |m| > |n|/2 \geq \ell$$

每当 $|m| < l$。由此，命题2.1 （1），成立

$$\begin{aligned}\left|\frac{A_\ell^h(s,n)}{s}\right| &\leq \frac{C_h(s)}{s} \sum_{m\in\mathbb{Z}, m\neq n} \frac{\Gamma(|n-m|-s)}{\Gamma(|n-m|+1+s)} |f_h(m)| \\ &\leq c_h(s) \sum_{m\in\mathbb{Z}, m\neq n} \frac{1}{(|n-m|-s)^{1+2s}} |f_h(m)| \leq c_h(s) \|f_h\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} (\ell - s)^{-1}.\end{aligned}$$

第4步：估计远离原点的 $a^h{}_l(n)$。当 $|n| \geq 2l$ 时，仿照第3步的论证，我们有 $f_h(n) = 0$（这由 f_h 的支集所保证），因此

$$|a_\ell^h(n)| \leq \sum_{0<|m-n|<4\ell} \frac{|f_h(m)|}{|n-m|} \leq \|f_h\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \ell^{-1}.$$

步骤 5：$(D^h{}_l(s) - 1)/s$ 在原点附近的渐近行为。可应用命题 2.1 (2) 得出

$$D_\ell^h(s) = C_h(s) \sum_{|m|\geq 4\ell} \frac{\Gamma(|m|-s)}{\Gamma(|m|+1+s)} = \frac{C_h(s)}{s} \frac{\Gamma(4\ell - s)}{\Gamma(4\ell + s)} = c_h(s) \frac{\Gamma(4\ell - s)}{\Gamma(4\ell + s)}$$

因此，由（2.1）和命题2.1 (3)

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{D_\ell^h(s)-1}{s}=-2(\psi(4\ell)+\gamma)-\log h^2=-\sum_{0<|m-n|<4\ell}\frac{1}{|n-m|}-\log h^2=d_\ell^h,$$

其中我们使用了 ψ 的性质，如下所示

$$\psi(4\ell)=\sum_{m=1}^{4\ell-1}\frac{1}{m}-\gamma=\frac{1}{2}\sum_{0<|m-n|<4\ell}\frac{1}{|n-m|}-\gamma.$$

步骤 6：将 $d^h_1 f_h(n)$ 加到 $a^h_1(n)$ 上。考虑 $a^h_1(n)$ 和 $d^h_1 f_h(n)$，我们得到

$$\begin{aligned}a_\ell^h(n)+d_\ell^h f_h(n)&=\sum_{0<|m-n|<4\ell}\frac{f_h(n)-f_h(m)}{|n-m|}-\sum_{0<|m-n|<4\ell}\frac{f_h(n)}{|n-m|}-(\log h^2)f_h(n)\\&=-\sum_{m\in\mathbb{Z},m\neq n}\frac{f_h(m)}{|n-m|}-(\log h^2)f_h(n)+\sum_{|m-n|\geq 4\ell}\frac{f_h(m)}{|n-m|}=\log(-\Delta_h)f_h(n)+g(n).\end{aligned}$$

步骤 7：估计 g。显然，有

$$|g(n)|\leq\|f_h\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\ell^{-1}.$$

步骤 8：L^∞ 意义下的收敛。[2] 根据步骤 1 和步骤 6，我们将所需结果分解为

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(-\Delta_h)^s f_h-f_h}{s}-\log(-\Delta_h)f_h\right\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}&=\left\|\frac{A_\ell^h(s,\cdot)}{s}-a_\ell^h+\frac{D_\ell^h(s)f_h-f_h}{s}-d_\ell^h f_h+g\right\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\\&\leq\left\|\frac{A_\ell^h(s,\cdot)}{s}-a_\ell^h\right\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}\cap(-2\ell,2\ell))}+\left\|\frac{A_\ell^h(s,\cdot)}{s}-a_\ell^h\right\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}\setminus(-2\ell,2\ell))}\\&\quad+\left|\frac{D_\ell^h(s)-1}{s}-d_\ell^h\right|\|f_h\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}+\|g\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}.\end{aligned}$$

因此，利用步骤 2–5 和步骤 7 中的所有估计可得

$$\lim_{s\to 0^+}\left\|\frac{(-\Delta_h)^s f_h-f_h}{s}-\log(-\Delta_h)f_h\right\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\leq 3\|f_h\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\ell^{-1}.$$

由于整数 $l\geq|\operatorname{supp} f|/h$ 是任意的，我们令 $l\to+\infty$，即可得出所需结论。步骤 9：$\log(-\Delta_h)\,f_h$ 属于 $l^\infty(\mathbb{Z})$。注意到

$$\sum_{m\in\mathbb{Z},m\neq n}\frac{|f_h(m)|}{|n-m|}\leq\sum_{m\in\mathbb{Z},m\neq n}|f_h(m)|=\|f_h\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}$$

因此

$$\|\log(-\Delta_h)f_h\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\leq\|f_h\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}+|\log h^2|\,\|f_h\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}<\infty.$$

步骤 10：证明的完成。最后，由步骤 8 和 9 可知，逐点公式（2.2）成立，$\log(-\Delta_h)f_h$ 属于 $l^\infty(\mathbb{Z})$，并且 $[(-\Delta_h)^s f_h-f_h]/s$ 趋近于 $\log(-\Delta_h)f_h$ 在 L^∞意义下收敛，并且当 s 趋近于 0^+时也逐点收敛。至此，证明完成。□

[2]这种 L^∞ 收敛意味着逐点收敛。

3. 分数阶拉普拉斯算子在 $\mathbb{Z}^N$上的导数

3.1. 预备知识。我们本小节的目标是介绍多维离散拉普拉斯算子

$$\Delta_N f(\mathbf{n}) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_{N,k} f(\mathbf{n}) = \sum_{k=1}^{N} [f(\mathbf{n}+\mathbf{e}_k) + f(\mathbf{n}-\mathbf{e}_k) - 2f(\mathbf{n})],$$

其中 $\{e_k\}^N{}_{k=1}$ 是 $\mathbb{Z}^N$ (N $\geq$ 2)中的标准正交基。热半群$W_t = e^{t\Delta_N}$ 是N维半离散热方程的解映射

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_N u, & \text{in } \mathbb{Z}^N \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = f, & \text{on } \mathbb{Z}^N. \end{cases}$$

上述方程的解由下式给出（见第2 节的一维情形）

$$u(\mathbf{n},t) = W_t f(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N} G_{t,N}(\mathbf{n}-\mathbf{m}) f(\mathbf{m}),$$

其中热核$G_{t,N}$(m)由下式构造

$$G_{t,N}(\mathbf{m}) = \prod_{k=1}^{N} (e^{-2t} I_{m_k}(2t)), \quad \mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_N),$$

通过第一类修正贝塞尔函数I_a。由(14)和(30)（见 [14], ）可知，热核$G_{t,N}$(m)具有如下多项式增长

$$0 \leq G_{t,N}(\mathbf{m}) \leq C \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+|\mathbf{m}|}\right)^2 \frac{1}{(\sqrt{t}+|\mathbf{m}|)^N}. \tag{3.1}$$

若 f $\in$ $l_s(\mathbb{Z}^N)$ 且 0 < s < 1，则

$$(-\Delta_N)^s f(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N, \mathbf{m}\neq\mathbf{n}} \mathcal{K}_s(\mathbf{n}-\mathbf{m})(f(\mathbf{n}) - f(\mathbf{m})),$$

其中离散核 $\mathcal{K}_s$(m) 定义为

$$\mathcal{K}_s(\mathbf{m}) = \frac{1}{|\Gamma(-s)|} \int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) \frac{dt}{t^{s+1}} \mathbb{I}^{\mathbb{Z}^N\setminus\{\mathbf{0}\}}(\mathbf{m}); \tag{3.2}$$

参见[14, 第 5] 了解更多详情。记$K(\mathbf{m})$ 为商 $\mathcal{K}_s(\mathbf{m})/s$ 在零点处的值

$$K(\mathbf{m}) = \frac{\mathcal{K}_s(\mathbf{m})}{s}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) \frac{dt}{t^{s+1}} \mathbb{I}^{\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}}(\mathbf{m})\bigg|_{s=0} = \int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) \frac{dt}{t} \mathbb{I}^{\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}}(\mathbf{m}) \tag{3.3}$$

为简洁起见。关于更多离散分析方面的研究，例如 Hardy-Littlewood函数 [3, 25], 、Hardy空间 [4], 、 Calder´on 重构公式 [18], 、 Radon 变换[20], 请读者参阅 [15, 27] 及其中的参考文献。

3.2. 离散核的估计。本小节给出 $\mathcal{K}_s$(m) 和 K(m) 的一些上界。

命题 3.1. (1) 存在常数 $C_N > 0$ ，使得

$$0 \leq \mathcal{K}_s(\mathbf{m}) \leq \frac{C_N}{|\Gamma(-s)|} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{2}{N+2s}\right) \frac{\mathbb{I}^{\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}}(\mathbf{m})}{|\mathbf{m}|^{N+2s}}.$$

(2) $\mathcal{K}_s$(m) = K(m)s +o(s), s $\to 0^+$。

(3) 存在一个常数 $C_N > 0$，与 (1) 中相同，使得

$$0 \le K(\mathbf{m}) \le C_N \left(1 + \frac{2}{N}\right) \frac{\mathbb{I}^{\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}}(\mathbf{m})}{|\mathbf{m}|^N}.$$

证明。 (1) 见 [14, 定理 30] 中的证明。

(2) 可以写成

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathcal{K}_s(\mathbf{m})}{s} - K(\mathbf{m})\right| &\le \left|\frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) \frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} - \int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \\ &\le \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) |t^{-s} - 1| \frac{\mathrm{d}t}{t} + \left|\frac{1}{\Gamma(1-s)} - 1\right| \int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) \frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

另一方面，由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) |t^{-s} - 1| \frac{\mathrm{d}t}{t} &\le C \int_0^1 \frac{t}{|\mathbf{m}|^{N+2}} \left(\frac{1}{t^s} - 1\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} + C \int_1^\infty \frac{1}{t^{N/2}} \left(1 - \frac{1}{t^s}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &\le C \frac{s}{1-s} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{N+2}} + C \frac{s}{1+s} \to 0, \quad s \to 0^+.\end{aligned}$$

另一方面，可得

$$\begin{aligned}|\Gamma(1) - \Gamma(1-s)| &\le \int_0^\infty e^{-t} |t - t^{1-s}| \frac{\mathrm{d}t}{t} \le \int_0^1 \left(\frac{1}{t^s} - 1\right) \mathrm{d}t + 2 \int_1^\infty \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^{2+s}}\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{s}{1-s} + 2 \frac{s}{1+s} \to 0, \quad s \to 0^+,\end{aligned}$$

并由 (3.1) 可得

$$\int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) \frac{\mathrm{d}t}{t} \le C \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} + |\mathbf{m}|}\right)^2 \frac{1}{(\sqrt{t} + |\mathbf{m}|)^N} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{C}{|\mathbf{m}|^N}. \tag{3.4}$$

根据上述论证，我们推导出

$$\mathcal{K}_s(\mathbf{m}) = K(\mathbf{m}) s + o(s), \quad s \to 0^+.$$

(3) 所需结论由 (3.4) 得出。证明至此完成。 □

3.3. 从一维推广到高维。 在本小节中，我们进一步考虑定理 N 维版本，即定理 2.2 ($N \ge 2$)。

为了将定理 2.2 推广到 N 维情形，主要困难在于无法显式表示离散核 $\mathcal{K}_s(\mathbf{m})$。在定理 2.2 中，由 $\mathcal{K}_s^h(\mathbf{m})$ 得出的所有常数，例如 $C_h(s)$、$c'_h(0)$、$D^h{}_1(s)$ 和 d_ℓ，都清晰明确。然而，在 N 维情形下，离散核 $\mathcal{K}_s(\mathbf{m})$ 由

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_s(\mathbf{m}) &= \frac{1}{|\Gamma(-s)|} \int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m}) \frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} \mathbb{I}^{\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}}(\mathbf{m}) \\ &= \frac{1}{|\Gamma(-s)|} \int_0^\infty \prod_{k=1}^N (e^{-2t} I_{m_k}(2t)) \frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} \mathbb{I}^{\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}}(\mathbf{m}), \quad \mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_N).\end{aligned}$$

我们不知道如何准确计算 $I_{m_k}(2t)$ 与 $k = 1, \cdots, N$ 的乘积，不过可以估计为

$$\frac{\Gamma(\frac{m_1 + \cdots + m_N}{N} + 1)^N}{\Gamma(m_1 + 1) \cdots \Gamma(m_N + 1)} \left(I_{\frac{m_1 + \cdots + m_N}{N}}(2t)\right)^N \le I_{m_1}(2t) \cdots I_{m_N}(2t) \le \left(I_{\frac{m_1 + \cdots + m_N}{N}}(2t)\right)^N$$

对每个 $m_1, \cdots m_N > -1$；参见 [14, 命题 1]。有了这个估计，我们可以计算 /的上界和下界$G_{t,\ N}(\mathbf{m})$，进而得到 $\mathcal{K}_s(\mathbf{m})$的上界和下界，但无法得到显式表示。[3] 因此，我们不得不推测一些关键常数，其形式类似于定理$c'_{\ h}(0)$ 和 d_ℓ 中的常数，见定理 2.2。以下段落中，我们使用与定理 2.2证明中相同的记号。

定理证明中的步骤 12.2 告诉我们，在N$_\ell$维情形下，项D(s) 应定义为

$$D_\ell(s) = \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} \mathcal{K}_s(\mathbf{m}).$$

由于离散核 $\mathcal{K}_s(\mathbf{m})$ 没有显式表示，我们甚至无法验证$D_\ell(0)$ 是否等于 1。不过，受定理2.2证明中的步骤 5 启发，我们预期

$$\frac{D_\ell(s)-1}{s} = -\sum_{0<|\mathbf{m}|<4\ell} K(\mathbf{m}) + o(1), \quad s\to 0^+.$$

遗憾的是，D$_\ell$(s) 在零点处的这一性质对 $\mathbb{Z}$ 成立，但对 $\mathbb{Z}^N$ (N $\geq$ 2) 不成立。这里，我们应引入一个校正项，以找到上述恒等式的正确形式。更确切地说，暂且假设

$$\frac{D_\ell(s)-1}{s} = -\sum_{0<|\mathbf{m}|<4\ell} K(\mathbf{m}) + \rho_N + o(1) = d_\ell(s) + o(1), \quad s\to 0^+,$$

其中，校正项 ρ_N 仅依赖于 N，稍后将确定其具体形式。证明上述恒等式的主要困难在于，离散核缺乏显式表示。注意

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N} G_{t,N}(\mathbf{m}) = 1$$

根据热核的守恒性质，等式成立（参见 [14, (21)]）。仔细分析可得

$$\begin{aligned}
\frac{D_\ell(s)-1}{s} &= \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^1 \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} + \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_1^\infty \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} - \frac{1}{s}\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^1 \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} - \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_1^\infty \sum_{|\mathbf{m}|< 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} + \frac{1}{s\Gamma(1-s)} - \frac{1}{s}\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^1 \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} - \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_1^\infty \sum_{|\mathbf{m}|< 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} + J_1\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^1 \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} - \int_0^1 \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_0^1 \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_1^\infty \sum_{|\mathbf{m}|< 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} + \int_1^\infty \sum_{|\mathbf{m}|< 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \sum_{|\mathbf{m}|< 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t} + J_1\\
&= J_2 + \int_0^1 \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t} + J_3 - \int_1^\infty \sum_{|\mathbf{m}|< 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t} + J_1\\
&= J_2 + \int_0^1 \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N,\mathbf{m}\neq\mathbf{0}} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_0^1 \sum_{0<|\mathbf{m}|<4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}$$

[3]感谢 O. Ciaurri 教授提醒我们这一事实。

$$+ J_3 - \int_1^\infty G_{t,N}(\mathbf{0})\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \sum_{0<|\mathbf{m}|<4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t} + J_1$$

$$= - \sum_{0<|\mathbf{m}|<4\ell} K(\mathbf{m}) + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N,\mathbf{m}\neq\mathbf{0}} \int_0^1 G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty G_{t,N}(\mathbf{0})\frac{\mathrm{d}t}{t} + J_1 + J_2 + J_3.$$

另一方面，我们断言最后两项 J_2 和 J_3 当 $s \to 0^+$时趋于零。事实上，由（3.1），可得

$$\sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m}) \leq C \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+|\mathbf{m}|}\right)^2 \frac{1}{(\sqrt{t}+|\mathbf{m}|)^N} \leq C \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} \frac{t}{|\mathbf{m}|^{N+2}} \leq C\frac{t}{\ell^2} \leq Ct$$

从而

$$|J_2| \leq \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^1 \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m}) \left(\frac{1}{t^s} - 1\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \left|\frac{1}{\Gamma(1-s)} - 1\right| \int_0^1 \sum_{|\mathbf{m}|\geq 4\ell} G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leq \frac{C}{\Gamma(1-s)} \int_0^1 \left(\frac{1}{t^s} - 1\right)\mathrm{d}t + C\left|\frac{1}{\Gamma(1-s)} - 1\right| \int_0^1 \mathrm{d}t$$

$$= \frac{C}{\Gamma(1-s)}\frac{s}{1-s} + C\left|\frac{1}{\Gamma(1-s)} - 1\right| \to 0, \quad s \to 0^+.$$

项 J_3 的证明与之类似，留给读者。另一方面，第一项 J_1 可估计为

$$\lim_{s\to 0^+} J_1 = \lim_{s\to 0^+} \frac{1-\Gamma(1-s)}{s\Gamma(1-s)} = \lim_{s\to 0^+} \frac{1-\Gamma(1-s)}{s} = \lim_{s\to 0^+} \Gamma'(1-s) = \Gamma'(1) = -\gamma$$

由洛必达法则得到。因此，校正项 ρ_N 可选取为

$$\rho_N = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N,\mathbf{m}\neq\mathbf{0}} \int_0^1 G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty G_{t,N}(\mathbf{0})\frac{\mathrm{d}t}{t} - \gamma. \tag{3.5}$$

论证的其余部分较为简单，且类似于定理 2.2 中的论证，留给读者。

基于上述论证，我们导出本文的第二个结果。

定理 3.2. 设 f 是定义在 $\mathbb{Z}^N$ 上、具有有界支撑的实值函数。则我们有

$$\log(-\Delta_N)f(\mathbf{n}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\Delta_N)^s\Big|_{s=0^+} f(\mathbf{n}) = - \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N,\mathbf{m}\neq\mathbf{n}} K(\mathbf{n}-\mathbf{m})f(\mathbf{m}) + \rho_N f(\mathbf{n}),$$

其中离散核 $K(\mathbf{m})$ 与校正项 ρ_N 分别如 (3.3) 与 (3.5)所示。此外，我们有 对数$(-\Delta_N)f \in l^\infty(\mathbb{Z}^N)$ 以及

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{(-\Delta_N)^s f - f}{s} = \log(-\Delta_N)f$$

在 L^∞ 意义下。

注记 3.3. 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$中，Chen-Weth [9] 证明了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\Delta)^s\Big|_{s=0^+} f(x) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x)\mathbb{I}_{B_1(x)}(y) - f(y)}{|x-y|^d}\mathrm{d}y + \rho_d f(x); \tag{3.6}$$

见定理 A。细心的读者可能会注意到，这个连续情形中的结果与我们的定理 3.2有些不同。项 $f(x)\mathbb{I}_{B_1(x)}(y)$ 出现在（3.6）中，但我们的结果中没有相应的离散项，因此分数阶离散拉普拉斯算子的导数可视为一种奇异离散 Riesz 势。事实上，一方面，开球 $B_1(\mathbf{n}) = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N : \ |\mathbf{m}-\mathbf{n}| < 1\}$

离散情形中的条件告诉我们 m = n。另一方面，求和中的下标表明 m , n。因此，我们在某种意义上将 log(−Δ$_N$) f (n) 改写为

$$\log(-\Delta_N)f(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N,\mathbf{m}\neq\mathbf{n}} K(\mathbf{n}-\mathbf{m})(f(\mathbf{n})\mathbb{I}_{B_1(\mathbf{n})}(\mathbf{m}) - f(\mathbf{m})) + \rho_N f(\mathbf{n}),$$

它是（3.6）的离散版本。

4. 最后说明：离散 Riesz 势

在第2 节和第3节中，我们考察了离散拉普拉斯算子正次幂的渐近行为

$$(-\Delta_N)^s f(\mathbf{n}) = f(\mathbf{n}) + [-K * f(\mathbf{n}) + \rho_N f(\mathbf{n})]s + o(s), \quad s \to 0^+. \tag{4.1}$$

事实上，我们可以令幂次 s 为负数。离散拉普拉斯算子的负次幂被称为离散 Riesz 势，这是众所周知的。它可以通过热半群定义。

$$(-\Delta_N)^s = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty e^{t\Delta_N}\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}}, \quad -N/2 < s < 0.$$

当 N = 1 时，$(-\Delta_h)^s$ 在 h > 0 时的离散核可表示为

$$\mathcal{K}_s(m) = \pi^{-1/2}(-s)\left(\frac{2}{h}\right)^{2s}\frac{\Gamma(1/2+s)}{\Gamma(1-s)}\frac{\Gamma(|m|-s)}{\Gamma(|m|+1+s)}\mathbb{I}^{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(m)$$

通过伽马函数；详见[16, 定理1。3] 有关更多细节。当$N \geq 2$时，$(-\Delta_N)^s$ 的离散核并不显式，而是由下式给出：

$$\mathcal{K}_s(\mathbf{m}) = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty G_{t,N}(\mathbf{m})\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}}\mathbb{I}^{\mathbb{Z}^N\setminus\{\mathbf{0}\}}(\mathbf{m})$$

类似于(3.2)；详见 [14, 定理 14] 以了解更多细节。

由上述离散 Riesz 势产生了一个基本问题：

- 问题：我们能否像(4.1)那样，推导出离散拉普拉斯算子的负幂的渐近行为?

幸运的是，这个问题的答案是肯定的，并且与正幂情形相同；连续情形详见 [8] 。在此，我们给出 $(-\Delta_N)^s$ 中 $-N/2 < s < 0$ 仅为正数时的相应结果，其证明类似于定理2.2 和3.2中的证明，留给读者。

定理4.1。设 f 是定义在 $\mathbb{Z}^N$ (N ≥ 1) 上且具有有界支撑的实值函数。于是我们有 e

$$\log(-\Delta_N)f(\mathbf{n}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\Delta_N)^s\Big|_{s=0^-} f(\mathbf{n}) = -\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N,\mathbf{m}\neq\mathbf{n}} K(\mathbf{n}-\mathbf{m})f(\mathbf{m}) + \rho_N f(\mathbf{n}),$$

其中离散核 K(**m**) 和校正项 ρ_N 分别如 (3.3) 和 (3.5)所示。此外，我们有 对数$(-\Delta_N)f \in l^\infty(\mathbb{Z}^N)$ 且

$$\lim_{s\to 0^-}\frac{(-\Delta_N)^s f - f}{s} = \log(-\Delta_N)f$$

在 L^∞ 意义下。

致谢。作者感谢匿名审稿人对本文初稿提出的意见。Bo Li 感谢 ´O. Ciaurri 教授和 L. Roncal 在本文撰写过程中就伽马函数问题进行的多次有益讨论。Bo Li 获得了中国国家自然科学基金（12471094、12201250）、浙江省自然科学基金（LQ23A010007）、嘉兴市自然科学基金（2023AY40003）以及嘉兴大学勤慎学者计划的资助。QINGZE LIN 获得了广东省基础与应用基础研究基金（2024A1515110227）和 STU

科学研究启动基金（NTF24015T）。HUOXIONG WU 获得了中国国家自然科学基金（12171399 和 12271041）的资助。

声明

作者贡献 B. Li、Q. Lin 和 H. Wu 共同参与了这项工作。所有作者均审阅了稿件。

利益冲突 作者声明不存在利益冲突。

伦理批准 不适用。

数据和材料的可用性 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] W. Ao, H. Chan, A. DelaTorre, M. Fontelos, M. Gonz´alez, J. Wei，关于分数阶 Yamabe 问题的高维奇异性：非局部 Mazzeo-Pacard 计划。《杜克数学杂志》168（2019），第 17 期，3297-3411。2[2] B. Barrios, A. Figalli, X. Ros-Oton，抛物型分数阶障碍问题中的自由边界正则性。《纯粹与应用数学通讯》71（2018），第 10 期，2129-2159。2[3] J. Bourgain, M. Mirek, E. Stein, B. Wr´obel，关于 $\mathbb{Z}^d$ 中立方体上的离散 Hardy-Littlewood 平均算子的维数无关估计。《美国数学杂志》141（2019），第 4 期，857-905。7[4] T. Bui, X. Duong，图上与离散拉普拉斯算子相关的 Hardy 空间及奇异积分的有界性。《美国数学会汇刊》366（2014），第 7 期，3451-3485。7[5] L. Caffarelli, S. Salsa, L. Silvestre，分数阶拉普拉斯算子障碍问题的解及其自由边界的正则性估计。《数学发明》171（2008），第 2 期，425-461。2[6] L. Caffarelli, L. Silvestre，与分数阶拉普拉斯算子相关的延拓问题。Comm. Partial Differential Equations 32（2007），第 7-9 期，1245-1260。2[7] S. Chang, M. Gonz´alez，共形几何中的分数阶拉普拉斯算子。《数学进展》226（2011），第 2 期，1410-1432。2[8] H. Chen，Riesz 卷积及关于阶数的分数阶拉普拉斯算子的泰勒展开。arXiv:2307.06198。11[9] H. Chen, T. Weth，对数拉普拉斯算子的狄利克雷问题。Comm. Partial Differential Equations 44（2019），第 11 期，1100-1139。1, 2, 10[10] H. Chen, T. Weth，分数阶 Hardy 算子的泊松问题：分布恒等式与奇异解。《美国数学会汇刊》374（2021），第 10 期，6881-6925。2[11] W. Chen, Z. Fu, L. Grafakos, Y. Wu，L^p 上的分数阶傅里叶变换及其应用。《应用与计算谐波分析》55（2021），71-96。2[12] W. Chen, L. Ma，对偶分数阶非线性抛物方程解的定性性质。《泛函分析杂志》285（2023），第 10 期，论文编号 110117，32 页。2[13] Y. Chen, Y. Ding, G. Hong，分数阶微分的交换子及 BMO-Sobolev 空间的新刻画。《偏微分方程分析》9（2016），第 6 期，1497-1522。2[14] O. Ciaurri，多维离散拉普拉斯算子的调和分析。arXiv:2312.16642。4, 7, 8, 9, 11[15] ´O. Ciaurri, T. Gillespie, L. Roncal, J. Torrea, J. Varona，与离散拉普拉斯算子相关的调和分析。J. Anal. Math. 132（2017），109-131。7[16] ´O. Ciaurri, L. Roncal, P. Stinga, J. Torrea, J. Varona，非局部离散扩散方程与分数阶离散拉普拉斯算子：正则性及应用。《数学进展》330（2018），688-738。2, 3, 11[17] B. Dong, Z. Fu, J. Xu，变指数 Lebesgue 空间中的 Riesz-Kolmogorov 定理及其在 Riemann-Liouville 分数阶微分方程中的应用。Sci. China Math. 61（2018），第 10 期，1807-1824。2[18] Y. Han, S. Lu, D. Yang，齐型空间中的非齐次离散 Calder´on 重构公式。《傅里叶分析与应用杂志》7（2001），第 6 期，571-600。7[19] X. Hu, L. Tang，分数阶热算子障碍问题中自由边界的高阶正则性。《泛函分析杂志》286（2024），第 4 期，论文编号 110274。2

[20] A. Ionescu, E. Stein, A. Magyar, S. Wainger，离散 Radon 变换及其在遍历理论中的应用。Acta Math. 198（2007），第 2 期，231-298。7[21] T. Jin, Y. Li, J. Xiong，关于分数阶 Nirenberg 问题，第一部分：爆破解析与解的紧性。J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 16（2014），第 6 期，1111-1171。2[22] T. Jin, J. Xiong，分数阶 Yamabe 流及其若干应用。J. Reine Angew. Math. 696（2014），187-223。2[23] P. Li, R. Hu, Z. Zhai，Besov 空间中的强化分数阶 Sobolev 型不等式。Potential Anal. 59（2023），第 4 期，2105-2121。2[24] B. Li, J. Li, Q. Lin, B. Ma, T. Shen，重访“关于黎曼流形上的 BMO 与 Carleson 测度”。Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A，154（2024），第 4 期，1281–1307。2[25] F. Liu, H. Wu，离散多重次线性分数阶极大函数的正则性。Sci. China Math. 60（2017），第 8 期，1461-1476。7[26] L. Liu, Y. Sun, J. Xiao，带分数阶的拟线性拉普拉斯方程与不等式。Math. Ann. 388（2024），第 1 期，1-60。2[27] A. Magyar, E. Stein, S. Wainger，调和分析中的离散类比：球面平均。Ann. of Math. (2) 155（2002），第 1 期，189–208。7[28] E. Stein, S. Wainger，调和分析中的离散类比。II. 分数阶积分。J. Anal. Math. 80（2000），335-355。4[29] P. Stinga, J. Torrea，某些分数阶算子的延拓问题与 Harnack 不等式，Comm. Partial Differential Equations 35（2010），第 11 期，2092-2122。2 B. Li，数据科学学院，嘉兴大学，嘉兴 314001，中国 电子邮箱：bli@zjxu.edu.cn Q. Lin，数学系，汕头大学，汕头 515063，中国 电子邮箱：gdlqz@e.gzhu.edu.cn H. Wu，数学科学学院，厦门大学，厦门，361005，中国 电子邮箱：huoxwu@xmu.edu.cn