arXiv:2603.01046v1 [math.FA] 1 Mar 2026

算子对称模与尖锐三角不等式

Teng Zhang

摘要。我们比较通常的算子模与两个对称化变体：算术对称模和二次对称模。对于每一种酉不变范数，我们确定了这三个模量之间的尖锐等价常数。我们还为酉不变范数建立了尖锐的三角型不等式，用对称化模量之和控制矩阵之和，其中包括最优的 Schatten p-范数界，以及二次版本中的一种相变现象。我们给出了明确的低维实例，证明这些常数是最优的。特别地，我们回答了 Bourin 和 Lee 在 [4] 中提出的两个问题。

目录

1. 引言 2 1.1. 算子模及其等价性 2 1.2. 算子三角不等式 3 1.3. 酉不变范数的三角不等式 4 1.4. Schatten p-范数上的三角不等式 6 2. Bourin 和 Lee 的两个问题的解答 9 2.1. Bourin 和 Lee 的两个问题 9 2.2. 对所有 $n \geq 3$ 9 解答问题 2.2 2.3. 问题 2.3 的部分解答 11 3. 定理1.1–1.3和命题3.2的证明 11 4. (1.8) 中常数的尖锐性及定理 1.7 的证明 13 4.1. 对所有 $n \geq m$ 14，(1.8) 中常数 $\sqrt{m}$ 的尖锐性 4.2. 定理 1.7 的证明 14 5. 定理 1.8 、 1.9 和 1.13 的证明 16 6. 问题 1.14 的部分结果 18 7. 定理 1.15 和 1.16 的证明 21 8. 问题 1.17 和 1.18 的部分结果 26 利益冲突声明 28 数据可用性 28 致谢 29 参考文献 29

2020 数学主题分类。15A60, 47A30, 15A42。关键词与短语。酉不变范数；算子对称模；三角不等式；Frobenius 范数；Thompson 不等式。

1. 引言

1.1. 算子模及其等价性。 对于一个复数 $z = \Re z + i\,\Im z \in \mathbb{C}$，其模的经典定义为

$$|z| := \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}, \tag{1.1}$$

这立即意味着

$$|z| = (\bar{z}z)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

and

$$|z| = \frac{|z| + |\bar{z}|}{2}. \tag{1.3}$$

设 $\mathbb{M}_{n_1,n_2}$ 表示所有 $n_1 \times n_2$ 复矩阵的集合。当 $n_1 = n_2 = n$时，我们记作$\mathbb{M}_n$。对于 $Z \in \mathbb{M}_n$，与 (1.2) 类似，通常模量定义为

$$|Z| := (Z^*Z)^{\frac{1}{2}},$$

其中 Z^* 表示 Z的共轭转置。

另一方面，写出笛卡尔分解 $Z = \Re Z + i\,\Im Z$，其中

$$\Re Z := \frac{Z + Z^*}{2}, \qquad \Im Z := \frac{Z - Z^*}{2i},$$

（1.1）的一个更具“几何”意味的类比，促使我们定义二次对称模：

$$|Z|_{\mathrm{qsym}} := \sqrt{(\Re Z)^2 + (\Im Z)^2} = \left(\frac{|Z|^2 + |Z^*|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

仿照（1.3），我们还定义算术对称模如下：

$$|Z|_{\mathrm{sym}} := \frac{|Z| + |Z^*|}{2}.$$

范数 $\|\cdot\|$ 在 $\mathbb{M}_n$ 上称为酉不变（或称对称），如果

$$\|UZV\| = \|Z\| \quad \text{for all unitaries } U, V.$$

我们的首要目标是刻画上述三个模量之间的等价关系，即确定最佳常数 C_1，C_2 使得

$$C_1 \big\| |Z|_1 \big\| \;\le\; \big\| |Z|_2 \big\| \;\le\; C_2 \big\| |Z|_1 \big\| \quad \text{for all } Z \in \mathbb{M}_n,$$

其中，$|\cdot|_1$，$|\cdot|_2 \in \{|\cdot|, |\cdot|_{\mathrm{sym}}, |\cdot|_{\mathrm{qsym}}\}$ 是模的两种不同选取 .

我们的主要结果陈述如下。

定理 1.1 (通常与算术对称模)。 对于 $\mathbb{M}_n$ 上的任意酉不变范数$\|\cdot\|$ 以及任意 $Z \in \mathbb{M}_n$，

$$\frac{1}{2}\big\| |Z| \big\| \;\le\; \big\| |Z|_{\mathrm{sym}} \big\| \;\le\; \big\| |Z| \big\|.$$

此外，两个常数1 2 和1都是最佳的。

定理 1.2 (通常与二次对称模)。 对于 $\mathbb{M}_n$ 上的任意酉不变范数$\|\cdot\|$ 以及任意 $Z \in \mathbb{M}_n$，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\big\| |Z| \big\| \;\le\; \big\| |Z|_{\mathrm{qsym}} \big\| \;\le\; \sqrt{2}\big\| |Z| \big\|.$$

此外，常数 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $\sqrt{2}$ 都是最佳的。

定理 1.3 (算术对称模与二次对称模)。 对于 $\mathbb{M}_n$ 上的任意酉不变范数 $\|\cdot\|$ 以及任意 $Z \in \mathbb{M}_n$,

$$\big\||Z|_{\mathrm{sym}}\big\| \;\le\; \big\||Z|_{\mathrm{qsym}}\big\| \;\le\; \sqrt{2}\,\big\||Z|_{\mathrm{sym}}\big\|.$$

此外，常数1和$\sqrt{2}$ 都是最优的。

1.2. 算子三角不等式。 作为标量三角不等式的算子类比

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}),$$

著名的Thompson 不等式 [12] 断言如下。

定理 m 1.4（Thompson）。 设 X、 $Y \in \mathbb{M}_n$。则存在酉矩阵 U、 V，使得

$$|X+Y| \le U|X|U^* + V|Y|V^*.$$

对于二次对称模，作者最近在 [15, 定理 1.12(ii)], 中证明了矩阵情形下一个令人振奋的 Thompson 型不等式，从而回答了 Bourin 和 Lee [3]提出的问题。我们还注意到，此后出现了一个替代证明 [4]。

Th定理 1.5 (Zhang)。 设 $X, Y \in \mathbb{M}_n$。那么存在酉矩阵 U, V使得

$$|X+Y|_{\mathrm{qsym}} \le U|X|_{\mathrm{qsym}}U^* + V|Y|_{\mathrm{qsym}}V^*.$$

相比之下，对于算术对称模，情况要微妙得多。在 [15]中，作者给出了一个 2×2反例，表明即使对于算子范数，三角不等式也可能不成立：存在 $A, B \in \mathbb{M}_2$ 使得

$$\big\||A+B|_{\mathrm{sym}}\big\|_\infty \;>\; \big\||A|_{\mathrm{sym}}\big\|_\infty \;+\; \big\||B|_{\mathrm{sym}}\big\|_\infty.$$

因此，对于 $|\cdot|_{\mathrm{sym}}$ ，Thompson 型控制不可能在一般情形下成立；也就是说，一般而言，不存在酉矩阵 U, V 使得

$$|X+Y|_{\mathrm{sym}} \le U|X|_{\mathrm{sym}}U^* + V|Y|_{\mathrm{sym}}V^*.$$

尽管如此，我们猜想，允许引入一个万有常数后，这种支配关系便成立。

猜想1.6。 设 $X, Y \in \mathbb{M}_n$。那么存在酉矩阵 U, V使得

$$|X+Y|_{\mathrm{sym}} \le \sqrt{2}\,(U|X|_{\mathrm{sym}}U^* + V|Y|_{\mathrm{sym}}V^*)\,,$$

并且常数 $\sqrt{2}$是最优的。

猜想1.6自然地引出一个较弱的问题：是否存在万有常数$C > 0$，使得对每一个 X， $Y \in \mathbb{M}_n$ 都能找到酉矩阵 U， V满足

$$|X+Y|_{\mathrm{sym}} \le C\,(U|X|_{\mathrm{sym}}U^* + V|Y|_{\mathrm{sym}}V^*)? \tag{1.4}$$

即便这一较弱的表述似乎也相当微妙。

一个看似 自然的方法是利用 $t \mapsto t^{\frac{1}{2}}$的算子凹性，由此可得

$$|X+Y|_{\mathrm{sym}} \le |X+Y|_{\mathrm{qsym}}.$$

将此与二次对称模的Thompson 型不等式（定理1.5）相结合，我们得到：存在酉矩阵 U， V 使得

$$|X+Y|_{\mathrm{sym}} \le U|X|_{\mathrm{qsym}}U^* + V|Y|_{\mathrm{qsym}}V^*. \tag{1.5}$$

因此，要从 (1.5) 推出 (1.4)，只需将 $|X|_{\mathrm{qsym}}$ 控制在 $|X|_{\mathrm{sym}}$ 的范围内（相差一个酉共轭）。更确切地说，需要存在一个万有常数 $C > 0$ ，使得对每个 $X \in \mathbb{M}_n$ ，都存在一个酉矩阵 W ，满足

$$|X|_{\mathrm{qsym}} \le C\,W|X|_{\mathrm{sym}}W^*. \tag{1.6}$$

Eq等价地，根据 Weyl单调性，(1.6) 将推出逐特征值界 s

$$\lambda_j(|X|_{\mathrm{qsym}}) \le C\,\lambda_j(|X|_{\mathrm{sym}})\,, \qquad j=1,\dots,n, \tag{1.7}$$

其中 $\lambda_j(\cdot)$ 表示第 j 大特征值。

然而，我们将通过构造一个明确的 2×2 反例证明，式 (1.7) 中不存在这样的万有常数 C；见命题 3.2，因此上述策略无法推出式 (1.4)。

1.3. 酉不变范数的三角不等式。 在本文中，我们始终假设 $m \ge 2, n \ge 2$。Lee [7] 的一项有趣结果给出了任意酉不变范数下矩阵和的如下界，

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\| \;\le\; \sqrt{m}\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|\Big\|, \qquad A_1,\dots,A_m \in \mathbb{M}_n. \tag{1.8}$$

然而，式 (1.8) 中常数 $\sqrt{m}$ 的尖锐性尚不清楚。本文证明，式 (1.8) 中的常数 $\sqrt{m}$ 仅在 $n \ge m$ 时是尖锐的。此外，我们还推导出以下尖锐界，它改进了式 (1.8)。

定理 1.7。 令 $A_1,\dots,A_m \in \mathbb{M}_n$。则

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\| \;\le\; \sqrt{\min\{m,n\}}\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|\Big\|.$$

此外，常数 $\sqrt{\min\{m,n\}}$ 是最佳的。

我们还建立了总和 $\sum_k A_k$ 与对称模量之和之间的直接最佳比较。

定理 1.8. 设 $A_1,\dots,A_m \in \mathbb{M}_n$。则

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\| \;\le\; 2\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}}\Big\|.$$

此外，常数 2 是最佳的。

接下来讨论二次对称模，并给出定理 1.7 和 1.8 的对应结果，说明 $\sum_k A_k$ 可以在范数意义下由 $\sum_k |A_k|_{\mathrm{qsym}}$ 控制，且最佳常数为 $\sqrt{2}$。

定理 1.9. 设 $A_1,\dots,A_m \in \mathbb{M}_n$。则

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\| \;\le\; \sqrt{2}\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|.$$

此外，常数$\sqrt{2}$ 是最优的。

由于每个酉不变范数都仅取决于奇异值，我们有 e

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\| = \Big\|\Big|\sum_{k=1}^m A_k\Big|\Big\|.$$

这一观察表明，可以寻求 Lee 型估计，其中将 (1.8) 两侧的模 $|\cdot|$ 替换为上文引入的对称模 $|\cdot|_{\mathrm{sym}}$ 和 $|\cdot|_{\mathrm{qsym}}$。

最近，Bourin 和 Lee [4] 为算术对称模本身建立了一个真正的三角型不等式，即给出了关于 $|\sum_k A_k|_{\mathrm{sym}}$ 的一个估计，其右端为 $\sum_k |A_k|_{\mathrm{sym}}$，并且 [4,问题 2.6] 曾询问定理 1.10 中的因子 $\sqrt{2}$ 是否可以改进。本文证明，对于所有 $n \ge 3$，$\sqrt{2}$ 都是最优的，即使在算子范数下也是如此。

定理 1.10 (Bourin–Lee)。设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}_n$。则

$$\left\| \left| \sum_{k=1}^{m} A_k \right|_{\mathrm{sym}} \right\| \le \sqrt{2} \left\| \sum_{k=1}^{m} |A_k|_{\mathrm{sym}} \right\|.$$

此外，对于所有 $n \ge 3$，常数 $\sqrt{2}$ 都是最优的。

然而，对于 2×2 矩阵，数值例子表明，定理 1.10 中的最优常数可能严格小于 $\sqrt{2}$。这引出了下面的问题，而这个问题可能颇具挑战性。

问题 1.11。设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}_2$。确定最优常数 $c(m, 2)$ 使得

$$\left\| \left| \sum_{k=1}^{m} A_k \right|_{\mathrm{sym}} \right\| \le c(m,2) \left\| \sum_{k=1}^{m} |A_k|_{\mathrm{sym}} \right\|.$$

接下来，我们给出一个 2×2 例子，它在算子范数下为问题 1.11 提供了一个非平凡下界。

例 1.12. 设

$$A = \begin{pmatrix} -0.773354 - 3.706913\,i & -0.605203 - 0.251180\,i \\ 0.302923 + 1.869626\,i & 0.296552 + 0.139226\,i \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} -0.614194 + 0.304837\,i & -0.919027 + 0.530163\,i \\ 2.687653 + 0.304749\,i & 4.176505 + 0.211368\,i \end{pmatrix}.$$

那么，直接数值计算（例如使用 Matlab）表明，对于算子范数 ，

$$\frac{\left\| |A+B|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty}{\left\| |A|_{\mathrm{sym}} + |B|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty} \approx 1.1789471123.$$

因此，对于每个 $m \ge 2$（取 $A_1 = A$、$A_2 = B$ 和 $A_3 = \cdots = A_m = 0$），问题 1.11 中的最优常数 $c(m,2)$ 满足

$$c(m,2) \ge 1.178.$$

此外，大量数值实验表明，$c(m,2)$ 的最优值可能接近此下界。

最后，我们讨论二次对称模出现在两侧的 Lee 型估计。与上述算术对称模的情形不同，我们可以得到一个维数相关界，其常数取决于 $\min\{m, 2n\}$。

定理 1.13。设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}_n$。则

$$\left\| \left| \sum_{k=1}^{m} A_k \right|_{\mathrm{qsym}} \right\| \le \sqrt{\min\{m, 2n\}} \left\| \sum_{k=1}^{m} |A_k|_{\mathrm{qsym}} \right\|.$$

此外，我们强烈怀疑定理 1.13 中的常数并非最优；尤其是，我们尚未找到任何能使等号成立的例子。这留下了一个开放问题。

1.4. Schatten 上的三角不等式 p-范数。设 $1 \le p \le \infty$。对于 $X \in \mathbb{M}_n$， X 的 Schatten p-范数定义为

$$\|X\|_p := \big(\mathrm{Tr}\,|X|^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

Lee [7] 提出了确定最优常数 c_p 的问题，使得

$$\|A+B\|_p \le c_p\,\||A|+|B|\|_p, \qquad \text{for all } A,B \in \mathbb{M}_n,$$

这现在通常称为*Lee* 问题。特别地，她猜想$c_2 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$。这一猜想最初由 Lin 和 Zhang [9] 证实。随后，作者 [13]给出了替代证明，而 [14] 进一步改进了估计，推导出一个更精确的界，其中常数用 A 和 B的奇异值表示。

受 Lee 问题启发，Tang and Zhang [11] 针对多个矩阵 $A_k \in \mathbb{M}_n$， $1 \le k \le m$提出了如下推广：确定最优常数 $c_p(m)$，该常数仅依赖于 p 和 m ，使得

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_p \;\le\; c_p(m)\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|\Big\|_p. \tag{1.9}$$

对于上述问题，Tang and Zhang [11] 给出了若干尖锐取值和一般界。更确切地说，他们断言

(1) $c_1(m) = 1$; (2) $c_2(m) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{2}}$，并给出了 m 个大小为 $m \times m$ 的矩阵，使得等号在 (1.9) 中成立; (3) $c_\infty(m) = \sqrt{m}$，并给出了 m 个大小为 $m \times m$ 的矩阵，使得等号成立; (4) $c_p(m) \le m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$对所有 $1 \le p \le \infty$均成立。

然而，若要断言 $c_2(m) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{2}}$ 与 $c_\infty(m) = \sqrt{m}$ 与维数无关地成立，就必须在每一个维数 $n \ge 2$ 中给出极值例子，特别是使用m $\mathbb{M}_2$ 中的矩阵（或至少对于任意的 n，使用 $\mathbb{M}_n$ 中的矩阵）。 [11] 中的构造仅表明维数 $n \ge m$ 上的尖锐性：事实上，通过与一个零块取直和，其 $m \times m$极值元可对任意 $n \ge m$ 嵌入 $\mathbb{M}_n$ ，因而所断言的常数在该范围内是尖锐的。事实上，(1.9) 中的常数 $c_p(m)$ 常常依赖于维数。换言之，一般不能指望 (1.9) 中的最优常数可以独立于矩阵阶数 n来选取；相反，最佳常数可能会随 n变化。这促使我们引入维数相关常数 $c_p(m,n)$，并研究上文所述更尖锐的问题。

问题 1.14。 设 $1 \le p \le \infty$，且 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}_n$。确定最优常数$c_p^{\mathrm{abs}}(m,n)$ ，使得

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_p \;\le\; c_p^{\mathrm{abs}}(m,n)\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|\Big\|_p.$$

对于问题 1.14，我们证明了以下依赖于维数的结论：

(1) $c_1^{\mathrm{abs}}(m,n) = 1$;
(2) $c_2^{\mathrm{abs}}(m,n) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\min\{m,n\}}}{2}}$;
(3) $c_\infty^{\mathrm{abs}}(m,n) = \sqrt{\min\{m,n\}}$;
(4) $c_p^{\mathrm{abs}}(m,n) \le \big(\min\{m,n\}\big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ for all $1 \le p \le \infty$.

特别是，这些界与维数有关，并且当 $m > n$ 时，它们严格改进了 Tang and Zhang [11] 中相应的估计。

Bourin 和 Lee [4, 节 6] 提出

对称模对应的(1.9)版本是什么？

这促使我们研究类似的不等式，其中通常模量 $|\cdot|$ 被算术对称模 $|\cdot|_{\mathrm{sym}}$ 或二次对称模 $|\cdot|_{\mathrm{qsym}}$所取代。

下面的结果给出了一个以算术对称模 $|\cdot|_{\mathrm{sym}}$表示的尖锐 Schatten-p 估计。

定理 1.15. 设 $1 \le p \le \infty$ 且令 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}_n$。则

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_p \le 2^{1-\frac{1}{p}} \Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}}\Big\|_p.$$

此外，常数 $2^{1-\frac{1}{p}}$ 是最优的。

接下来我们转向二次对称模。此时其行为明显不同：最优常数与 m 无关，并在 $p = 2$处出现相变。

定理 1.16. 设 $1 \le p \le \infty$，并设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}_n$。则

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_p \le \Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p, \qquad 1 \le p \le 2;$$

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_p \le 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p, \quad 2 \le p \le \infty.$$

此外，常数1与 $2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$是最优的。

在确立了这些“和与和”不等式之后，自然希望寻求真正的三角型估计：将算术对称模（或其二次类似物）作用于左端的总和，并直接与右端各个模量之和进行比较。这引出以下两个优化问题。

问题 1.17. 设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}_n$。求最优常数 $c_p^{\mathrm{sym}}(m,n)$ 使得

$$\Big\||\sum_{k=1}^m A_k|_{\mathrm{sym}}\Big\|_p \le c_p^{\mathrm{sym}}(m,n) \Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}}\Big\|_p.$$

在问题 1.17 中，我们证明

(1) $c_1^{\mathrm{sym}}(m,n) = 1$; (2) $c_\infty^{\mathrm{sym}}(m,n) = \sqrt{2}$ 当 $n \ge 3$ 时；(3) $c_p^{\mathrm{sym}}(m,n) \le \min\{2^{1-\frac{1}{p}}, \sqrt{2}\}$;
(4) $c_p^{\mathrm{sym}}(m,n) \ge \left(\frac{2^p+2^{1-p}}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$; 特别地，右侧从 $p = 2$ 处的 1 增加到 $\sqrt{2}$，当 $p \to \infty$ 时。

问题 1.18。 设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}_n$. 求最优常数 $c_p^{\mathrm{qsym}}(m,n)$ 使得

$$\Big\||\sum_{k=1}^m A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p \le c_p^{\mathrm{qsym}}(m,n) \Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p.$$

对于问题 1.18，我们通过构造适当的分块矩阵 2×2，将问题归结为问题 1.14，从而得到

(1) $c_1^{\mathrm{qsym}}(m,n)=1$;
(2) $c_2^{\mathrm{qsym}}(m,n)\le\sqrt{\frac{1+\sqrt{\min\{m,2n\}}}{2}}$;
(3) $c_\infty^{\mathrm{qsym}}(m,n)\le\sqrt{\min\{m,2n\}}$;
(4) $c_p^{\mathrm{qsym}}(m,n)\le\big(\min\{m,2n\}\big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ for all $1\le p\le\infty$.

本文中的证明技巧。 本文的证明依赖于以下工具，并结合了用于证明尖锐性的明确低维极值例子。

(i) 函数演算、算子凹性/单调性与次可加性。 通过应用平方根映射的算子凹性和单调性，以及酉不变范数的标准范数不等式，可得三个模量之间的等价常数。更确切地说，定理 1.1、1.2 和 1.3 是由基本的序比较（例如 $|Z|\le|Z|+|Z^*|$）、三角不等式以及基于凹性的诸多不等式推出的，例如将 Bourin–Uchiyama 次可加性应用于对称范数，对 $f(t)=t^{\frac{1}{2}}$ 进行估计。这些定理的尖锐性由具体的 2×2 例子（尤其是 E_{12}）和正规矩阵予以验证。

（*ii*）正分块矩阵、压缩算子与 *Ky Fan* 支配。若干三角型界是通过将各项编码到一个正的 2×2 分块矩阵中，然后利用其正性提取范数不等式来证明的。定理 1.7 中 Lee 不等式的依赖维数细化通过以下步骤得到：（1）对标准正分块矩阵$\left(\begin{smallmatrix}|A_k^*| & A_k\\ A_k^* & |A_k|\end{smallmatrix}\right)\ge 0$求和；（2）利用压缩算子分解非对角分块；（3）估计 Ky Fan 范数并调用 Fan 支配定理。“和与和”不等式（定理 1.8 和 1.9）利用等对角分块正性判据，证明对于每个酉不变范数，非对角分块均受对角分块支配。

（*iii*）二次对称模的嵌入技巧。为了将通常模量的估计转移到二次对称模，我们引入一个分块嵌入 $\Phi(A)$，其模满足 $|\Phi(A)|=\mathrm{diag}(|A|_{\mathrm{qsym}},\,0)$。这一化简使我们能够通过在维数 $2n$ 中进行处理，从定理 1.7 推导出定理 1.13。

(iv) Schatten p范数论证：扩张、对偶性与相变。 </style}对于 Schatten 范数，定理 1.15 运用厄米扩张 $H_k=\left(\begin{smallmatrix}0 & A_k\\ A_k^* & 0\end{smallmatrix}\right)$、分块正性、压缩算子分解、Schatten–Hölder 不等式和 McCarthy 迹不等式来比较$\|\sum H_k\|_p$和 $\|\sum|H_k|\,\|_p$。 定理 1.16 则通过 Schatten 对偶性和如下形式的迹支配来推进

$$|\operatorname{Tr}(A^*B)|\le\operatorname{Tr}(|A|_{\mathrm{qsym}}|B|_{\mathrm{qsym}})$$

（由 Lieb 凹性定理推得），从而将问题归结为一个单矩阵常数。计算该常数时会用到 $t\mapsto t^{\frac{q}{2}}$ 的凸性/凹性，并得出在 $p=2$处发生尖锐相变，极值元仍由 E_{12}给出。

(v) 尖锐性与阻碍例子。 常数的尖锐性通过明确的极值构造得到证明： $\mathbb{M}_3$ 中的秩一例子（定理2.5）用于 Bourin–Lee 常数，而具有退化谱的 2×2 族则用于排除任何普适酉支配（命题3.2）。

本文结构。 第 2 节探讨 Bourin 和 Lee 提出的两个问题：我们通过显式的 3×3 构造，证明因子$\sqrt{2}$ 对所有 $n\ge 3$ 都是最优的，并给出与扩张分解问题相关的反例。第 3 节给出三个模量等价性结果（定理1.1–1.3）的证明，并证明不存在普适酉支配常数（命题3.2）。第 4 节证明

Lee 不等式的尖锐维数相关改进（定理 1.7），并阐明原始 $\sqrt{m}$ 因子何时达到最优。第 5 节确立涉及对称模和二次对称模的尖锐“和与和”比较结果（定理 1.8、1.9 和 1.13）。第 6 节探讨 Lee 问题维数敏感版本的部分结果，包括尖锐的 Frobenius 范数常数和一般的 p界。第 7 节证明以算术对称模和二次对称模表示的尖锐 Schatten p范数不等式（定理 1.15 和 1.16）。最后，第 8 节汇总了真正的三角型 Schatten p范数问题的部分结果与界，这些问题涉及 $|\cdot|_{\mathrm{sym}}$ 和 $|\cdot|_{\mathrm{qsym}}$。

2. Bourin 和 Lee 的两个问题的解答

2.1. **Bourin 和 Lee 的两个问题**。Bourin 和 Lee [4] 证明了定理 1.10，并且还得到了以下特征值界。

推论 2.1 ([4, 推论 2.4])。设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}_n$。那么，对于满足 $1+3j \le n$ 的所有整数 $j \ge 0$，

$$\lambda_{1+3j}\left(\left|\sum_{k=1}^m A_k\right|_{\mathrm{sym}}\right) \;\le\; \sqrt{2}\,\lambda_{1+j}\left(\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}}\right),$$

其中，$\lambda_j(\cdot)$表示第 j 大特征值。

他们还提出了以下问题。

问题 2.2 ([4, 问题 2.6])。$\sqrt{2}$ 是定理 *1.10* 和推论 *2.1* 中可能的最佳常数吗？

在本节中，我们对所有 $n \ge 3$ 肯定地回答问题 2.2。

Bourin 和 Lee 还指出（见 [4, 第 6 节），如果 $A_1, \dots\dots, A_m \in \mathbb{M}_7$ 满足$\sum_{k=1}^m A_k$ 是厄米酉矩阵，那么

$$\lambda_4\left(\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}}\right) \;\ge\; 1.$$

因此，将厄米酉矩阵分解为若干项之和，会对各个加项施加相当奇特的约束，这促使我们提出下面的问题。回想一下，$X \in \mathbb{M}_n$ 称为扩张的，如果 $|X| \ge I$。

问题 2.3 ([4, 问题 6.3])。设 $A \in \mathbb{M}_{2n}$ 或 $\mathbb{M}_{2n-1}$ 是扩张的，并假设$A = \sum_{k=1}^m A_k$。那么关于

$$\lambda_n\left(\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}}\right) \qquad and \qquad \lambda_n\left(\sum_{k=1}^m |A_k|\right)?$$

我们将证明，对于通常模量项 $\lambda_n(\sum_k |A_k|)$，不能指望存在等于 1 的统一下界，这为问题 2.3 提供了一个部分答案。

2.2. **对所有 $n \ge 3$，问题 2.2 的解**。我们先进行一个简单的秩一计算。

引理 2.4. 设 $u, v \in \mathbb{C}^n$ 为单位向量，并令 $R := uv^* \in \mathbb{M}_n$。则

$$R^*R = vv^*, \qquad RR^* = uu^*, \qquad |R| = vv^*, \qquad |R^*| = uu^*.$$

因此 $|R|_{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(uu^* + vv^*)$。

证明。直接计算即可。 □

接下来，我们给出定理 1.10 中 $\mathbb{M}_3$ 的一个显式极值对。

定理2.5. 定理 *1.10* 中的常数 $\sqrt{2}^-$ 对所有 $n \geq 3$ 均为最优。事实上，存在 A、$B \in \mathbb{M}_3$ 使得

$$\left\| |A+B|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty = \sqrt{2}\, \left\| |A|_{\mathrm{sym}} + |B|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty .$$

此外，对于每个 $n>3$，令

$$A_n := A \oplus 0_{n-3}, \quad B_n := B \oplus 0_{n-3} \quad \in \mathbb{M}_n,$$

有

$$\left\| |A_n+B_n|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty = \sqrt{2}\, \left\| |A_n|_{\mathrm{sym}} + |B_n|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty .$$

证明。 我们在 $\mathbb{R}^3$ 上进行讨论，考虑单位向量

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

定义 $A := uv^\top$ 和 $B := xy^\top$。根据引理 2.4,

$$|A|_{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(uu^\top + vv^\top), \qquad |B|_{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(xx^\top + yy^\top).$$

直接计算外积（每个元素均为 $\pm 1/3$）可知，非对角项相互抵消，且

$$uu^\top + vv^\top + xx^\top + yy^\top = \frac{4}{3}\, I_3.$$

因此

$$|A|_{\mathrm{sym}} + |B|_{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\, I_3 = \frac{2}{3}\, I_3, \qquad \text{so} \qquad \left\| |A|_{\mathrm{sym}} + |B|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty = \frac{2}{3}. \tag{2.1}$$

接下来，我们显式计算 $S := A+B$：

$$S = A+B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

容易验证

$$S^\top S = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & 0 & -4\\ 0 & 8 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{pmatrix}, \qquad SS^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & 0 & 4\\ 0 & 8 & 0\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

两个矩阵的谱均为 $\{8/9,\, 8/9,\, 0\}$。由于 $S^\top S$ 是其值域上的正交投影的标量倍数,

$$|S| = (S^\top S)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8/9}}\,(S^\top S) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\, S^\top S,$$

类似地，$\left|S^\top\right| = \frac{3\sqrt{2}}{4}\, S\bar{S}^\top$。因此

$$|S|_{\mathrm{sym}} = \frac{|S| + \left|S^\top\right|}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\,(S^\top S + SS^\top) = \operatorname{diag}\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\, \frac{2\sqrt{2}}{3},\, \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

so

$$\left\| |A+B|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty = \left\| |S|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \tag{2.2}$$

结合 (2.1) 和 (2.2) 得到 ld

$$\frac{\left\| |A+B|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty}{\left\| |A|_{\mathrm{sym}} + |B|_{\mathrm{sym}} \right\|_\infty} = \frac{(2\sqrt{2})/3}{2/3} = \sqrt{2}.$$

由于算子范数是对称范数，因此对于所有满足 $n \geq 3$ 的对称范数，在定理 1.10 中没有任何常数 $c < \sqrt{2}$ 可以替代 $\sqrt{2}$。这证明了 $\sqrt{2}$ 的最优性。□

注记2.6. 定理2.5 已经解决了所有 $n \geq 3$ 的问题 2.2，因为推论 2.1 配合 $j = 0$ 正是算子范数估计 $\lambda_1(|A+B|_{\mathrm{sym}}) \leq \sqrt{2}\,\lambda_1(|A|_{\mathrm{sym}} + |B|_{\mathrm{sym}})$。

2.3. **问题 2.3 的部分解答。**

命题2.7. 设 $n = 2$ 和 $X = I_3 \in \mathbb{M}_{2n-1}$。存在 X_1、$X_2 \in \mathbb{M}_3$，使得 $X = X_1 + X_2$

$$\lambda_2(|X_1| + |X_2|) < 1.$$

特别是，在问题 *2.3* 中，不能成立一般形式为 $\lambda_n(\sum_k |X_k|) \geq 1$ 的结论。

证明。令

$$X_1 := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 := I_3 - X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $X_1 + X_2 = I_3$，因此 $X = I_3$ 是扩张的。通过直接计算（例如对 $X_k^* X_k$进行谱分解）可得，半正定矩阵 $|X_1| + |X_2|$ 的特征值为

$$\lambda_1 \approx 5.11522680, \qquad \lambda_2 \approx 0.88353915, \qquad \lambda_3 \approx 0.70372677.$$

因此 $\lambda_2(|X_1| + |X_2|) \approx 0.8835 < 1$，如所声称。 □

3. 定理1.1–1.3和命题3.2的证明

定理 *1.1* 的证明。锐下界。由于 $|Z| \leq |Z| + |Z^*|$，单调性意味着$|||Z||| \leq |||Z| + |Z^*|||$，因此

$$\frac{1}{2}|||Z||| \leq \left\| \frac{|Z| + |Z^*|}{2} \right\| = |||Z|_{\mathrm{sym}}||.$$

下界常数的尖锐性 1 2。令 $Z = E_{12} \in \mathbb{M}_2$。则 $|Z| =$diag(0，1)，且 $|Z^*| =$diag(1，0)，因此 $|Z|_{\mathrm{sym}} = \frac{|Z|+|Z^*|}{2} = \frac{1}{2}I_2$。对于算子范数，$|||Z|_{\mathrm{sym}}||_\infty = \frac{1}{2}$而$|||Z|||_\infty = 1$，所以 $\frac{1}{2}|||Z||| \leq |||Z|_{\mathrm{sym}}||$中等号成立。

一个锐上界。三角不等式和酉不变性给出

$$|||Z|_{\mathrm{sym}}|| = \left\| \frac{|Z| + |Z^*|}{2} \right\| \leq \frac{\|Z\| + \|Z^*\|}{2} = |||Z|||.$$

取 Z 为正规矩阵即可得到尖锐性。 □

在证明定理 1.3 之前，我们回顾 Bourin 和 Uchiyama [2] 提出的以下次可加不等式。

引理 3.1 ([2])**.** 设 A、$B \in \mathbb{M}_n$ 为半正定矩阵，且 f 是定义在 $[0, \infty)$ 上的非负凹函数。那么

$$\|f(A+B)\| \leq \|f(A) + f(B)\|.$$

特别地，对于迹范数，我们有

$$\mathrm{Tr}\, f(A+B) \leq \mathrm{Tr}\,(f(A) + f(B)).$$

定理 *1.3* 的证明。一个锐下界。由于 $t \mapsto t^{\frac{1}{2}}$ 在 $[0,\infty)$上是算子凹的，我们有

$$\frac{|Z|+|Z^*|}{2} \le \left(\frac{|Z|^2+|Z^*|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

即 $|Z|_{\mathrm{sym}} \le |Z|_{\mathrm{qsym}}$。由单调性可得 $\||Z|_{\mathrm{sym}}\| \le \||Z|_{\mathrm{qsym}}\|$。取 Z 为正规矩阵即可得到尖锐性。

一个锐上界。我们利用由 Bourin–Uchiyama 定理（引理 3.1）得到的以下对称范数次可加不等式：若 X，$Y \ge 0$ 且 $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ 为凹函数，则对任意酉不变范数，

$$\|f(X+Y)\| \le \|f(X)+f(Y)\|.$$

将 $X=|Z|^2$、$Y=|Z^*|^2$ 和 $f(t)=\sqrt{t}$ 代入可得

$$\left\|(|Z|^2+|Z^*|^2)^{\frac{1}{2}}\right\| \le \||Z|+|Z^*|\|.$$

利用齐次性，

$$\left\||Z|_{\mathrm{qsym}}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\|(|Z|^2+|Z^*|^2)^{\frac{1}{2}}\right\| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\||Z|+|Z^*|\| = \sqrt{2}\left\||Z|_{\mathrm{sym}}\right\|.$$

取 $Z=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $|Z|_{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}I_2$ 且 $|Z|_{\mathrm{qsym}} = \frac{\sqrt{2}}{2}I_2$。对于算子范数 $\|\cdot\|_\infty$，有 $\left\||Z|_{\mathrm{qsym}}\right\|_\infty = \sqrt{2}\left\||Z|_{\mathrm{sym}}\right\|_\infty$，这表明 $\sqrt{2}$ 是尖锐的。 □

定理 *1.2* 的证明。锐下界。由于 $\frac{|Z|^2}{2} \le \frac{|Z|^2+|Z^*|^2}{2}$，根据函数 $t \mapsto t^{\frac{1}{2}}$ 的算子单调性，我们有

$$\frac{\sqrt{2}}{2}|Z| \le \left(\frac{|Z|^2+|Z^*|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = |Z|_{\mathrm{qsym}}.$$

这表明 $\frac{\sqrt{2}}{2}\|Z\| \le \||Z|_{\mathrm{qsym}}\|$。

对于 $Z=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $|Z|_{\mathrm{qsym}} = \frac{\sqrt{2}}{2}I_2$ 且 $|Z| = \mathrm{diag}(0,1)$。对于算子范数 $\|\cdot\|_\infty$，$\frac{\sqrt{2}}{2}\|Z\|_\infty = \||Z|_{\mathrm{qsym}}\|_\infty$，因此下界常数 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是锐的。

锐上界。将定理 1.3 与定理 1.1 结合：

$$\||Z|_{\mathrm{qsym}}\| \le \sqrt{2}\||Z|_{\mathrm{sym}}\| \le \sqrt{2}\||Z|\|.$$

对于 $Z=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $|Z|_{\mathrm{qsym}} = \frac{\sqrt{2}}{2}I_2$ 且 $|Z| = \mathrm{diag}(0,1)$。对于迹范数 $\|\cdot\|_1$，

$$\||Z|\|_1 = 1, \qquad \||Z|_{\mathrm{qsym}}\|_1 = \sqrt{2},$$

因此 $\||Z|_{\mathrm{qsym}}\|_1 = \sqrt{2}\||Z|\|_1$，这表明上常数 $\sqrt{2}$ 是最佳的。 □

我们现在验证第1.2小节末尾所提出的论断。

命题3.2. 不存在万有常数 $c>0$，使得对于每个 $X \in \mathbb{M}_n$，都存在酉 U 满足

$$|X|_{\mathrm{qsym}} \le c\,U|X|_{\mathrm{sym}}U^*.$$

证明。设 $X_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2$，其中 $\theta \in (0,\ \pi/2)$。现在我们计算 $|X_\theta|$ 和 $|X_\theta^*|$。

$$X_\theta^* X_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: P \quad \Longrightarrow \quad |X_\theta| = (X_\theta^* X_\theta)^{\frac{1}{2}} = P.$$

$$X_\theta X_\theta^* = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} =: Q_\theta, \qquad Q_\theta^2 = Q_\theta \quad \Longrightarrow \quad |X_\theta^*| = (X_\theta X_\theta^*)^{\frac{1}{2}} = Q_\theta.$$

接下来，我们计算 X 的两个对称模:

$$|X_\theta|_{\mathrm{sym}} = \frac{P+Q_\theta}{2}, \qquad |X_\theta|_{\mathrm{qsym}} = \left(\frac{P^2+Q_\theta^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{P+Q_\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \big(|X_\theta|_{\mathrm{sym}}\big)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $S_\theta := P + Q_\theta$。则

$$S_\theta = \begin{pmatrix} 1+\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Tr} S_\theta = 2, \quad \det S_\theta = \sin^2\theta,$$

因此，S_θ 的特征值为

$$\lambda_{1,2}(S_\theta) = 1 \pm \cos\theta.$$

因此

$$\lambda_{1,2}\big(|X_\theta|_{\mathrm{sym}}\big) = \frac{1\pm\cos\theta}{2}, \qquad \lambda_{1,2}\big(|X_\theta|_{\mathrm{qsym}}\big) = \sqrt{\frac{1\pm\cos\theta}{2}}.$$

计算这两个对称模的最小特征值之比,

$$\frac{\lambda_2(|X_\theta|_{\mathrm{qsym}})}{\lambda_2(|X_\theta|_{\mathrm{sym}})} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}} \longrightarrow +\infty \quad (\theta \to 0^+).$$

利用 $1-\cos\theta < \theta^2/2$ 表示 $\theta \neq 0$，我们有

$$\frac{\lambda_2(|X_\theta|_{\mathrm{qsym}})}{\lambda_2(|X_\theta|_{\mathrm{sym}})} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}} > \sqrt{\frac{2}{\theta^2/2}} = \frac{2}{\theta},$$

因此，对于任意 $c>0$，选择 $\theta < 2/c$ 可得

$$\lambda_2(|X_\theta|_{\mathrm{qsym}}) > c\,\lambda_2(|X_\theta|_{\mathrm{sym}}).$$

因此不存在能够满足以下条件的有限常数 c

$$\lambda_j(|X|_{\mathrm{qsym}}) \le c\,\lambda_j(|X|_{\mathrm{sym}}) \quad \text{for all } X \in \mathbb{M}_2 \text{ and all } j.$$

□

4. (1.8) 中常数的尖锐性及定理 1.7 的证明 本节首先验证，对于所有 $n \ge m$，(1.8) 中常数 $\sqrt{m}$ 的尖锐性。 —

4.1. **当所有** $n \geq m$ **时，式** (1.8) **中常数** $\sqrt{m}$ **的尖锐性**。

例 4.1. 设 $n \geq m$。对于 $k = 1, \ldots, m$，定义

$$A_k := E_{1k} \in \mathbb{M}_n,$$

其中，E_{ij} 表示 $\mathbb{M}_n$ 中的矩阵单位。于是

$$A_k^* A_k = E_{k1} E_{1k} = E_{kk}, \qquad \text{so} \qquad |A_k| = (A_k^* A_k)^{\frac{1}{2}} = E_{kk}.$$

因此

$$\sum_{k=1}^m |A_k| = \sum_{k=1}^m E_{kk}, \qquad \Longrightarrow \qquad \Big\| \sum_{k=1}^m |A_k| \Big\|_\infty = \Big\| \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, 0, \ldots, 0) \Big\|_\infty = 1.$$

另一方面，

$$\sum_{k=1}^m A_k = \sum_{k=1}^m E_{1k},$$

这是一个 $n \times n$ 矩阵，其第一行为 (1，……，1，0，……，0)（其中有 m 个 1），其余各行均为零。因此，

$$\left(\sum_{k=1}^m A_k \right) \left(\sum_{k=1}^m A_k \right)^* = \left(\sum_{k=1}^m E_{1k} \right) \left(\sum_{k=1}^m E_{k1} \right) = \sum_{k=1}^m E_{11} = m\, E_{11},$$

因此，$\sum_{k=1}^m A_k$ 的最大奇异值等于 $\sqrt{m}$，即

$$\Big\| \sum_{k=1}^m A_k \Big\|_\infty = \sqrt{m}.$$

因此，(1.8) 中等号成立：

$$\Big\| \sum_{k=1}^m A_k \Big\|_\infty = \sqrt{m} \, \Big\| \sum_{k=1}^m |A_k| \Big\|_\infty,$$

因此，对于每个 $n \geq m$，(1.8) 中的常数 $\sqrt{m}$ 都是最佳的。

4.2. **定理 1.7 的证明**。以下结果是矩阵分析中的标准结论。

引理 4.2 ([6, 第 13 页，命题 1.3。2])。设 A、$B \in \mathbb{M}_n$ 为半正定矩阵，且$X \in \mathbb{M}_n$。则

$$\begin{pmatrix} A & X \\ X^* & B \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{\frac{1}{2}} K B^{\frac{1}{2}} \text{ for some contraction } K.$$

接下来，我们回顾一个关于 Schatten p-范数的基本赫尔德不等式。在特殊情形 $m = 2$ 下，该不等式见 [5, 第 95 页，习题 IV.27]，其中取迹范数 $\|\cdot\|_1$。

引理 4.3。设 $m \geq 2$，设 $1 \leq r \leq \infty$，并设 $1 \leq p_1, \ldots, p_m \leq \infty$ 满足

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}.$$

那么对所有 $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{M}_n$，

$$\big\| A_1 A_2 \cdots A_m \big\|_r \ \leq \ \|A_1\|_{p_1} \|A_2\|_{p_2} \cdots \|A_m\|_{p_m},$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 表示 *Schatten* p-范数。

我们还需要以下引理。

引理 4.4. 设 $A \in \mathbb{M}_n$。则

$$\begin{pmatrix} |A^*| & A \\ A^* & |A| \end{pmatrix} \geq 0.$$

证明。 设 $A = U|A|$为一个极分解。于是 $|A^*| = U|A|U^*$且

$$\begin{pmatrix} |A^*| & A \\ A^* & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U|A|U^* & U|A| \\ |A|U^* & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U|A|^{\frac{1}{2}} \\ |A|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |A|^{\frac{1}{2}}U^* & |A|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \geq 0.$$

□

现在，我们记录 $m \geq n$ 时 Lee 不等式 (1.8) 中的最优常数。

定理 4.5。 设 $m \geq n$ 且 $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{M}_n$。那么

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\| \;\leq\; \sqrt{n}\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|\Big\|. \tag{4.1}$$

此外，常数$\sqrt{n}$ 是锐利的（算子范数的情形已经如此）。

证明。 令

$$S := \sum_{k=1}^m A_k, \qquad X := \sum_{k=1}^m |A_k|, \qquad Y := \sum_{k=1}^m |A_k^*|.$$

根据引理 4.4，对每个 k，我们有

$$\begin{pmatrix} |A_k^*| & A_k \\ A_k^* & |A_k| \end{pmatrix} \geq 0.$$

对 k 求和，得到半正定分块矩阵

$$\begin{pmatrix} Y & S \\ S^* & X \end{pmatrix} \geq 0.$$

根据压缩算子分解（引理 4.2），存在一个压缩算子 K （其中 $\|K\|_\infty \leq 1$），使得

$$S = Y^{\frac{1}{2}} K X^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

固定 $1 \leq r \leq n$，并考虑 Ky Fan r-范数 $\|\cdot\|_{(r)}$。利用变分公式（例如，参见 [5]）

$$\|S\|_{(r)} = \max\Big\{|\operatorname{Tr}(U^*SV)| :\; U, V \in \mathbb{C}^{n\times r},\; U^*U = V^*V = I_r\Big\},$$

利用赫尔德不等式（引理 4.3），对于这样的 U， V，我们有如下估计

$$|\operatorname{Tr}(U^*SV)| = |\operatorname{Tr}(U^*Y^{\frac{1}{2}}KX^{\frac{1}{2}}V)| \leq \|K\|_\infty \|Y^{\frac{1}{2}}U\|_2 \|X^{\frac{1}{2}}V\|_2 \leq \sqrt{\operatorname{Tr}(U^*YU)}\,\sqrt{\operatorname{Tr}(V^*XV)}.$$

取最大值可得

$$\|S\|_{(r)} \;\leq\; \sqrt{\|Y\|_{(r)}\,\|X\|_{(r)}}\,. \tag{4.3}$$

接下来，由于 $Y \geq 0$ 我们有 $\|Y\|_{(r)} \leq \operatorname{Tr}(Y)$，并且

$$\operatorname{Tr}(Y) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Tr}(|A_k^*|) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Tr}(|A_k|) = \operatorname{Tr}(X).$$

另一方面，对于特征值为 $\lambda_1(X) \geq \cdots \geq \lambda_n(X) \geq 0$ 的 $X \geq 0$，

$$\|X\|_{(r)} = \sum_{j=1}^r \lambda_j(X) \;\geq\; r \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j(X)}{n} = \frac{r}{n}\operatorname{Tr}(X),$$

因此 $\mathrm{Tr}(X) \le \frac{n}{r}\|X\|_{(r)}$。结合这些事实可得

$$\|Y\|_{(r)} \le \mathrm{Tr}(Y) = \mathrm{Tr}(X) \le \frac{n}{r}\|X\|_{(r)}. \tag{4.4}$$

将 (4.4) 代入 (4.3)，得到

$$\|S\|_{(r)} \le \sqrt{\frac{n}{r}}\,\|X\|_{(r)} \le \sqrt{n}\,\|X\|_{(r)} \qquad (r = 1, \dots, n).$$

根据 Fan 支配定理（参见例如 [5, 第 93] 页），这一樊畿优化意味着

$$\|S\| \le \sqrt{n}\,\|X\|$$

对每个酉不变范数均成立，从而证明了 (4.1)。

尖锐性。令 $m > n$ 并设 $A_k := E_{1k} \in \mathbb{M}_n$ 对 $k = 1$、.....、n，且 $A_{n+1} = \cdots = A_m := 0$。则对 $k \le n$，$|A_k| = E_{kk}$，因此 $\|\sum_{k=1}^m |A_k|\|_\infty = 1$。此外，$\sum_{k=1}^m A_k = \sum_{k=1}^n E_{1k}$ 的最大奇异值为 $\sqrt{n}$，故 $\|\sum_{k=1}^m A_k\|_\infty = \sqrt{n}$。因此，该比值等于 $\sqrt{n}$，且该常数无法改进。□

定理 *1.7* 的证明。结合 (1.8)、例 4.1 和定理 4.5，即得所需结果。尖锐性。令 $\ell := \min\{m, n\}$，并设 $A_k := E_{1k} \in \mathbb{M}_n$ 对 $k = 1$、.....、ℓ，且 $A_{\ell+1} = \cdots = A_m := 0$。则 $\big\|\sum_{k=1}^m |A_k|\big\|_\infty = 1$ 且 $\big\|\sum_{k=1}^m A_k\big\|_\infty = \sqrt{\ell}$。因此，不等式中的因子 $\sqrt{\min\{m, n\}}$ 无法改进。□

5. 定理1.8、1.9和1.13的证明

我们先给出两个引理。

引理 5.1。设 $P \in \mathbb{M}_n$ 为半正定矩阵，且 $Z \in \mathbb{M}_n$。若 $\begin{pmatrix} P & Z \\ Z^* & P \end{pmatrix} \ge 0$，则

$$\|Z\| \le \|P\|.$$

证明。固定 x，$y \in \mathbb{C}^n$。取 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $e^{i\theta} x^* Z y = -|x^* Z y|$。由正性可得

$$0 \le \begin{pmatrix} x \\ e^{i\theta} y \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} P & Z \\ Z^* & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e^{i\theta} y \end{pmatrix} = x^* P x + y^* P y - 2|x^* Z y|.$$

因此

$$|x^* Z y| \;\le\; \frac{x^* P x + y^* P y}{2} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n). \tag{5.1}$$

令 $\|\cdot\|_{(k)}$ 为 Ky Fan k-范数。利用变分公式

$$\|Z\|_{(k)} = \max\Big\{ |\,\mathrm{Tr}(U^* Z V)| :\; U, V \in \mathbb{C}^{n\times k},\; U^* U = V^* V = I_k \Big\},$$

固定这样的 $U = [u_1, \dots, u_k]$ 和 $V = [v_1, \dots, v_k]$。则由 (5.1),

$$|\,\mathrm{Tr}(U^* Z V)| \le \sum_{j=1}^k |u_j^* Z v_j| \le \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k (u_j^* P u_j + v_j^* P v_j) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Tr}(U^* P U) + \mathrm{Tr}(V^* P V)\big).$$

由 Ky Fan 最大值原理，$\mathrm{Tr}(U^* P U) \le \sum_{j=1}^k \lambda_j(P)$，对于 V 也同样成立。因此，

$$\|Z\|_{(k)} \le \sum_{j=1}^k \lambda_j(P) = \|P\|_{(k)} \qquad (k = 1, \dots, n).$$

最后，Fan 支配定理 [5, p. 93] 表明，对于每个酉不变范数都有 $\|Z\| \le \|P\|$。□

定理 *1.8* 的证明。 对于每个 k，由引理 4.4 可得

$$\begin{pmatrix} 2|A_k|_{\mathrm{sym}} & A_k \\ A_k^* & 2|A_k|_{\mathrm{sym}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A_k^*| & A_k \\ A_k^* & |A_k| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |A_k| & 0 \\ 0 & |A_k^*| \end{pmatrix} \geq 0.$$

对 k 求和得到

$$\begin{pmatrix} 2\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}} & \sum_{k=1}^m A_k \\ (\sum_{k=1}^m A_k)^* & 2\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}} \end{pmatrix} \geq 0.$$

应用引理 5.1 可得

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\| \leq 2\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}}\Big\|.$$

尖锐性。 取 $n = 2$ 与 $A_1 = \cdots = A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 并采用算子范数。于是 $\|\sum_k A_k\|_\infty = m$，而 $\|\sum_k |A_k|_{\mathrm{sym}}\|_\infty = \frac{m}{2}$，故比值等于 2。□

定理 *1.9* 的证明。 对每个 k，利用引理 4.4，我们得到

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}|A_k|_{\mathrm{qsym}} & A_k \\ A_k^* & \sqrt{2}|A_k|_{\mathrm{qsym}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A_k^*| & A_k \\ A_k^* & |A_k| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}|A_k|_{\mathrm{qsym}} - |A_k^*| & 0 \\ 0 & \sqrt{2}|A_k|_{\mathrm{qsym}} - |A_k| \end{pmatrix} \geq 0,$$

其中 $\sqrt{2}|A_k|_{\mathrm{qsym}} \geq |A_k|$ 与 $\sqrt{2}|A_k|_{\mathrm{qsym}} \geq |A_k^*|$ 由 $(|A_k|^2 + |A_k^*|^2)/2 \geq |A_k|^2/2$（对 $|A_k^*|^2$ 类似）根据 $t \mapsto t^{\frac{1}{2}}$ 的算子单调性得到。对 k 求和即得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}} & \sum_{k=1}^m A_k \\ (\sum_{k=1}^m A_k)^* & \sqrt{2}\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}} \end{pmatrix} \geq 0.$$

应用引理 5.1 可得

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\| \leq \sqrt{2}\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|.$$

尖锐性。 取带有算子范数的 $n = 2$ 和 $A_1 = \cdots = A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。由于 $\left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_{\mathrm{qsym}} = \frac{\sqrt{2}}{2} I_2$，我们有 $\|\sum_k A_k\|_\infty = m$ 和 $\|\sum_k |A_k|_{\mathrm{qsym}}\|_\infty = \frac{\sqrt{2}}{2} m$，因此比值等于 $\sqrt{2}$。□

定理 *1.13* 的证明。对于 $A \in \mathbb{M}_n$，定义 $2n \times 2n$ 矩阵

$$\Phi(A) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A & 0 \\ A^* & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算可得

$$|\Phi(A)| = \begin{pmatrix} |A|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

显然， Φ 是可加的，即

$$\Phi(\sum_{k=1}^m A_k) = \sum_{k=1}^m \Phi(A_k). \tag{5.3}$$

将定理 1.7 应用于矩阵 $\Phi(A_1), \ldots, \Phi(A_m) \in \mathbb{M}_{2n}$ 可得

$$\Big\|\sum_{k=1}^m \Phi(A_k)\Big\| \leq \sqrt{\min\{m, 2n\}}\Big\|\sum_{k=1}^m |\Phi(A_k)|\Big\|. \tag{5.4}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{pmatrix} |\sum_{k=1}^m A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| &= \big\||\Phi(\sum_{k=1}^m A_k)|\big\| && \text{(By (5.2))} \\
&= \big\|\Phi(\sum_{k=1}^m A_k)\big\| \\
&= \big\|\sum_{k=1}^m \Phi(A_k)\big\| && \text{(By (5.3))} \\
&\le \sqrt{\min\{m,2n\}}\Big\|\sum_{k=1}^m |\Phi(A_k)|\Big\| && \text{(By (5.4))} \\
&= \sqrt{\min\{m,2n\}}\Big\|\sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} |A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big\| && \text{(By (5.2))} \\
&= \sqrt{\min\{m,2n\}}\left\|\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|.
\end{aligned}$$

最后，对于任意酉不变范数，添加一个零直和项不会改变范数（因为这只会附加零奇异值）。因此，

$$\left\|\begin{pmatrix} |\sum_{k=1}^m A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \big\||\sum_{k=1}^m A_k|_{\mathrm{qsym}}\big\|, \qquad \left\|\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|.$$

合并这些不等式可得

$$\Big\|\Big|\sum_{k=1}^m A_k\Big|_{\mathrm{qsym}}\Big\| \le \sqrt{\min\{m,2n\}}\,\Big\|\sum_{k=1}^m \big|A_k\big|_{\mathrm{qsym}}\Big\|.$$

□

6. 问题 1.14 的部分结果

首先，我们证明一个锐利的 $\|\cdot\|_1\|\cdot\|_\infty$–$\|\cdot\|_2$ 不等式。

引理 6.1。 设 $X \in \mathbb{M}_n$ 为半正定矩阵。则

$$\|X\|_1\,\|X\|_\infty \;\le\; \frac{1+\sqrt{n}}{2}\,\|X\|_2^2. \tag{6.1}$$

此外，常数 $\frac{1+\sqrt{n}}{2}$ 是最优的。

证明。 设 X的特征值为 $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$。则 $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$、 $\|X\|_\infty = \lambda_1$和 $\|X\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$。因此，(6.1) 等价于

$$\lambda_1\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i\Big) \;\le\; \frac{1+\sqrt{n}}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2. \tag{6.2}$$

固定 $\lambda_1 = a \ge 0$ 并设 $s = \sum_{i=2}^n \lambda_i$。根据柯西–施瓦茨不等式， $\sum_{i=2}^n \lambda_i^2 \ge s^2/(n-1)$，因此对于固定的 $(a,\ s)$，比值

$$\frac{a(a+s)}{a^2+\sum_{i=2}^n \lambda_i^2}$$

在 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = b := s/(n-1)$ 时取得最大值。因此，只需对 $0 \le b \le a$ 求最大值，

$$R(a,b) := \frac{a(a+(n-1)b)}{a^2+(n-1)b^2}.$$

由齐次性，我们可以令 $a=1$ 并写作 $r = b/a \in [0,1]$，从而得到

$$R(r) = \frac{1+(n-1)r}{1+(n-1)r^2}.$$

直接求导可得

$$R'(r) = \frac{(n-1)\big(1-2r-(n-1)r^2\big)}{\big(1+(n-1)r^2\big)^2},$$

因此，(0,1) 中唯一的临界点是 $(n-1)r^2+2r-1=0$ 的正根，即 $r = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$。代入此值可得

$$\max_{r\in[0,1]} R(r) = \frac{1+\sqrt{n}}{2}.$$

这证明了 (6.2)，进而证明了 (6.1)。当 $\lambda_1 = a$ 且 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{a}{\sqrt{n+1}}$ 时等号成立，因此该结果是最优的。□

接下来，我们将为问题 1.14 证明一个关于 Frobenius 范数的尖锐不等式。

定理6.2. 设 m、$n \ge 1$ 与 $A_1, \ldots\ldots, A_m \in \mathbb{M}_n$。令 $d := \min\{m,n\}$，该 n

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_2 \le \sqrt{\frac{1+\sqrt{d}}{2}}\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|\Big\|_2.$$

此外，常数 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{d}}{2}}$ 是最佳的。

证明。记 $S := \sum_{k=1}^m A_k$ 与 $X := \sum_{k=1}^m |A_k|$。

步骤 *1*：一个新的上界。取极分解 $A_k = U_k|A_k|$。定义分块矩阵

$$Z := \big[\,|A_1|^{\frac12} \;\; |A_2|^{\frac12} \;\; \cdots \;\; |A_m|^{\frac12}\,\big] \in \mathbb{M}_{n,mn},$$

$$W := \big[\,U_1|A_1|^{\frac12} \;\; \cdots \;\; U_m|A_m|^{\frac12}\,\big] \in \mathbb{M}_{n,mn}.$$

于是 $S = WZ^*$ 与 $ZZ^* = \sum_{k=1}^m |A_k| = X$。对任意 A，$B \in \mathbb{M}_n$ 利用 $\|AB\|_2 \le \|A\|_2\|B\|_\infty$，我们得到

$$\|S\|_2^2 = \|WZ^*\|_2^2 \le \|W\|_2^2\,\|Z\|_\infty^2.$$

注意到 $\|W\|_2^2 = \mathrm{Tr}(WW^*) = \sum_{k=1}^m \mathrm{Tr}(|A_k|) = \mathrm{Tr}(X) = \|X\|_1$，且 $\|Z\|_\infty^2 = \|ZZ^*\|_\infty = \|X\|_\infty$。因此

$$\|S\|_2^2 \le \|X\|_1\,\|X\|_\infty.$$

应用引理 6.1 得到

$$\|S\|_2^2 \le \frac{1+\sqrt{n}}{2}\,\|X\|_2^2, \qquad \text{i.e.} \qquad \|S\|_2 \le \sqrt{\frac{1+\sqrt{n}}{2}}\,\|X\|_2.$$

因此，对于所有 m，$c_2^{\mathrm{abs}}(m,n) \le \sqrt{\frac{1+\sqrt{n}}{2}}$。

步骤 *2*：*Tang-Zhang* 上界。Tang and Zhang [11] 证明了对所有 n，

$$c_2^{\mathrm{abs}}(m,n) \le \sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{2}}.$$

特别地，对于 $n \geq m$, $c_2^{\mathrm{abs}}(m,n) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{2}}$。

结合步骤 1 和步骤 2，可得统一上界

$$c_2^{\mathrm{abs}}(m,n) \;\leq\; \sqrt{\frac{1+\sqrt{\min\{m,n\}}}{2}}.$$

步骤 *3*：尖锐性（下界）。令 $d = \min\{m,n\}$ 并设 $t := \frac{1}{\sqrt{d+1}}$。考虑 $d \times d$ 矩阵 $G := (1-t)I_d + tJ_d$，其中 J_d 是全 1 矩阵。由于 $\sigma(G) = \{\, 1-t$（乘法，$d-1$）$\;\; 1+(d-1)t$（乘法，1）$\,\} \subset (0,\infty)$，我们有 $G \geq 0$。因此，存在一个矩阵 $V \in \mathbb{M}_d$ 满足 $V^*V = G$。令 $v_1, \ldots\ldots, v_d \in \mathbb{C}^d$ 为 V 的列。则 $\|v_k\| = 1$ 且 $\langle v_i, v_j\rangle = t$ 对 $i \neq j$ 成立。

将 $\mathbb{C}^d$ 嵌入到 $\mathbb{C}^n$ 中（若 $d < n$），并通过补零实现；固定一个单位向量 $u \in \mathbb{C}^n$（例如 $u = e_1$）。对 $1 \leq k \leq d$，定义

$$A_k := uv_k^* \in \mathbb{M}_n, \qquad \text{and set} \qquad A_{d+1} = \cdots = A_m := 0.$$

于是 $|A_k| = (A_k^*A_k)^{\frac{1}{2}} = (v_kv_k^*)^{\frac{1}{2}} = v_kv_k^*$，因此 $X = \sum_{k=1}^m |A_k| = \sum_{k=1}^d v_kv_k^*$。此外，$S = \sum_{k=1}^m A_k = u\big(\sum_{k=1}^d v_k\big)^*$，所以

$$\|S\|_2^2 = \Big\|\sum_{k=1}^d v_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^d \|v_k\|^2 + \sum_{i\neq j}\langle v_i, v_j\rangle = d + d(d-1)t = d\big(1+(d-1)t\big).$$

此外，

$$\|X\|_2^2 = \mathrm{Tr}(X^2) = \sum_{k=1}^d \mathrm{Tr}\big((v_kv_k^*)^2\big) + \sum_{i\neq j}\mathrm{Tr}(v_iv_i^*v_jv_j^*) = d + \sum_{i\neq j}|\langle v_i, v_j\rangle|^2 = d + d(d-1)t^2 = d\big(1+(d-1)t^2\big).$$

因此

$$\frac{\|S\|_2^2}{\|X\|_2^2} = \frac{1+(d-1)t}{1+(d-1)t^2}.$$

利用 $t = \frac{1}{\sqrt{d+1}}$，可以验证 $1+(d-1)t = \sqrt{d}$ 以及 $1+(d-1)t^2 = \frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{d+1}}$，因此

$$\frac{\|S\|_2^2}{\|X\|_2^2} = \frac{1+\sqrt{d}}{2}, \qquad \text{so} \qquad \frac{\|S\|_2}{\|X\|_2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{d}}{2}}.$$

这表明 $c_2^{\mathrm{abs}}(m,\, n) \geq \sqrt{\frac{1+\sqrt{d}}{2}}$ 与上界一致。 □

接下来，我们给出问题 1.14 中一般 p 的一个依赖于维数的上界。**命题**

命题 6.3。令 $1 \leq p \leq \infty$ 和 $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{M}_n$。设 $d :=$ 最小值$\{m,n\}$。该 ^{n}

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_p \;\leq\; d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|\Big\|_p.$$

证明。固定 $1 \leq p < \infty$ 并令

$$S = \sum_{k=1}^m A_k, \qquad X = \sum_{k=1}^m |A_k|, \qquad Y = \sum_{k=1}^m |A_k^*|.$$

由引理 4.4，对于每个 k,

$$\begin{pmatrix} |A_k^*| & A_k \\ A_k^* & |A_k| \end{pmatrix} \geq 0.$$

对 k 求和，得到

$$\begin{pmatrix} Y & S \\ S^* & X \end{pmatrix} \geq 0.$$

由引理 4.2，存在一个压缩算子 K 使得

$$S = Y^{\frac{1}{2}} K X^{\frac{1}{2}}.$$

利用 Schatten 范数的霍尔德不等式（引理 4.3），

$$\|S\|_p = \|Y^{\frac{1}{2}} K X^{\frac{1}{2}}\|_p \leq \|Y^{\frac{1}{2}}\|_{2p} \|K\|_\infty \|X^{\frac{1}{2}}\|_{2p} \leq \|Y^{\frac{1}{2}}\|_{2p} \|X^{\frac{1}{2}}\|_{2p}.$$

由于 $X, Y \geq 0$，我们有 $\|Y^{\frac{1}{2}}\|_{2p}^2 = \|Y\|_p$ 和 $\|X^{\frac{1}{2}}\|_{2p}^2 = \|X\|_p$，因此

$$\|S\|_p^2 \leq \|X\|_p \|Y\|_p.$$

接下来，$\|Y\|_p \leq \|Y\|_1 = \mathrm{Tr}(Y) = \mathrm{Tr}(X) = \|X\|_1$ 和 $\|X\|_1 \leq n^{1-\frac{1}{p}} \|X\|_p$。因此

$$\|S\|_p^2 \leq n^{1-\frac{1}{p}} \|X\|_p^2, \qquad \text{i.e.} \qquad \|S\|_p \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \|X\|_p.$$

将此与来自 [11] 的 Tang-Zhang 界 $c_p^{\mathrm{abs}}(m,n) \leq m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ 结合，得

$$c_p^{\mathrm{abs}}(m,n) \leq (\min\{m,n\})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}.$$

令 $p \to \infty$ 即可得到 $p = \infty$ 的情形，或者直接由算子范数情形得到。 □

7. Proofs of Theorems 1.15 and 1.16

经典的 McCarthy 不等式 [10] 表明

引理 7.1。设 A、$B \in \mathbb{M}_n$ 为半正定矩阵。则对所有 $p \geq 1$,

$$\mathrm{Tr}(A^p + B^p) \leq \mathrm{Tr}(A+B)^p.$$

定理 *1.15* 的证明。设 $1 \leq p \leq \infty$ 和 A_1、…、$A_m \in \mathbb{M}_n$。令

$$S := \sum_{k=1}^m A_k, \qquad X := \sum_{k=1}^m |A_k|, \qquad Y := \sum_{k=1}^m |A_k^*|.$$

因此,

$$\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}} = \frac{X+Y}{2}.$$

对于每个 k，定义埃尔米特膨胀

$$H_k := \begin{pmatrix} 0 & A_k \\ A_k^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2n}, \qquad H := \sum_{k=1}^m H_k = \begin{pmatrix} 0 & S \\ S^* & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算可得

$$|H_k| = \begin{pmatrix} |A_k^*| & 0 \\ 0 & |A_k| \end{pmatrix}, \qquad D := \sum_{k=1}^m |H_k| = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}.$$

对于每个埃尔米特矩阵 H_k，由引理 4.4 可知

$$\begin{pmatrix} |H_k| & H_k \\ H_k & |H_k| \end{pmatrix} \geq 0.$$

对 k 求和可得

$$\begin{pmatrix} D & H \\ H & D \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} |H_k| & H_k \\ H_k & |H_k| \end{pmatrix} \geq 0.$$

因此，由引理 4.2，$H = D^{\frac{1}{2}} K D^{\frac{1}{2}}$ 对某个压缩算子 K 成立。利用赫尔德不等式（引理 4.3），

$$\|H\|_p = \|D^{\frac{1}{2}} K D^{\frac{1}{2}}\|_p \le \|D^{\frac{1}{2}}\|_{2p} \|K\|_\infty \|D^{\frac{1}{2}}\|_{2p} \le \|D^{\frac{1}{2}}\|_{2p}^2 = \|D\|_p. \tag{7.1}$$

直接计算可得 $|H| = \begin{pmatrix} |S^*| & 0 \\ 0 & |S| \end{pmatrix}$，因此

$$\|H\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|S\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|\sum_{k=1}^m A_k\|_p. \tag{7.2}$$

由 McCarthy 不等式（引理 7.1）可得

$$\begin{aligned} \|D\|_p &= (\operatorname{Tr} X^p + \operatorname{Tr} Y^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\le (\operatorname{Tr}(X+Y)^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|X+Y\|_p \\ &= \left\| \sum_{k=1}^m |A_k| + \sum_{k=1}^m |A_k^*| \right\|_p \\ &= 2 \left\| \sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}} \right\|_p . \end{aligned} \tag{7.3}$$

结合 (7.1)、(7.2) 和 (7.3) 得

$$\Big\| \sum_{k=1}^m A_k \Big\|_p \le 2^{1-\frac{1}{p}} \Big\| \sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}} \Big\|_p .$$

这就证明了该断言。

尖锐性。设 $n = 2$ 且令 $E_{12} \in \mathbb{M}_2$ 为矩阵单位。对每个 $m \ge 1$，令 $A_1 = \cdots = A_m := E_{12}$。那么对每个 $1 \le p \le \infty$，都有 $\big\|\sum_{k=1}^m A_k\big\|_p = \|mE_{12}\|_p = m$。

此外，$|E_{12}| = \mathrm{diag}(0,1)$ 和 $|E_{12}^*| = \mathrm{diag}(1,0)$，因此 $|E_{12}|_{\mathrm{sym}} = (|E_{12}| + |E_{12}^*|)/2 = I_2/2$。因此

$$\Big\| \sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}} \Big\|_p = \Big\| \frac{m}{2} I_2 \Big\|_p = \begin{cases} m\, 2^{\frac{1}{p}-1}, & 1 \le p < \infty, \\ \frac{m}{2}, & p = \infty. \end{cases}$$

因此，

$$\frac{\big\|\sum_{k=1}^m A_k\big\|_p}{\big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}}\big\|_p} = 2^{1-\frac{1}{p}},$$

因此，定理 1.15 中等号成立，且常数 $2^{1-\frac{1}{p}}$ 是锐的。 □

引理 7.2。对所有 $A, B \in \mathbb{M}_n$，

$$|\operatorname{Tr}(A^*B)|^2 \le \operatorname{Tr}(|A|\,|B|)\, \operatorname{Tr}(|A^*|\,|B^*|). \tag{7.4}$$

因此，

$$|\operatorname{Tr}(A^*B)| \le \frac{\operatorname{Tr}(|A|\,|B|) + \operatorname{Tr}(|A^*|\,|B^*|)}{2}. \tag{7.5}$$

证明。 设 $A=U|A|$ 和 $B=V|B|$ 为极分解。则

$$\begin{aligned}|\operatorname{Tr}(A^*B)| &= |\operatorname{Tr}(|A|U^*V|B|)| \\ &= |\operatorname{Tr}\left((|A|^{\frac{1}{2}}U^*V|B|^{\frac{1}{2}})(|B|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}})\right)| \\ &\le \left\||A|^{\frac{1}{2}}U^*V|B|^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \left\||B|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \text{ (By Cauchy-Schwarz inequality)} \\ &= (\operatorname{Tr}(|A^*|\,|B^*|))^{\frac{1}{2}}(\operatorname{Tr}(|A|\,|B|))^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

这等价于 (7.4)。

由标量算术-几何平均不等式可从 (7.4) 推出界 (7.5)。 □

Lieb 定理 [8, 定理 1] 断言，映射 $(X,Y)\mapsto \operatorname{Tr}(X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}})$ 在 $\mathbb{M}_n^+\times\mathbb{M}_n^+$ 上联合凹，其中 $\mathbb{M}_n^+$ 是 $\mathbb{M}_n$ 上的正锥。也就是说，

引理 7.3。 设 X_1、X_2、Y_1、$Y_2\in\mathbb{M}_n$ 均为半正定的。那么

$$\operatorname{Tr}\left(\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{Y_1+Y_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ge \frac{\operatorname{Tr}(X_1^{\frac{1}{2}}Y_1^{\frac{1}{2}})+\operatorname{Tr}(X_2^{\frac{1}{2}}Y_2^{\frac{1}{2}})}{2}.$$

接下来，我们给出一个关于 Frobenius 范数的尖锐不等式。尽管它是定理 1.16 的推论，但这个特殊情形的证明尤其简短而优雅。

定理 7.4. 设 $A_1,\dots,A_m\in\mathbb{M}_n$。则

$$\left\|\sum_{k=1}^m A_k\right\|_2 \le \left\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\right\|_2, \tag{7.6}$$

此外，常数1是最佳的。

证明。 显然，

$$\|\,|A_k|_{\mathrm{qsym}}\,\|_2^2 = \|A_k\|_2^2. \tag{7.7}$$

对于任意 $i\neq j$，利用引理 7.2 和引理 7.3，取 $X_1=|A_i|^2$、$X_2=|A_i^*|^2$、$Y_1=|A_j|^2$ 和 $Y_2=\left|A_j^*\right|^2$，可得

$$\begin{aligned}|\operatorname{Tr}(A_i^*A_j)| &\le \frac{\operatorname{Tr}(|A_i|\,|A_j|)+\operatorname{Tr}(|A_i^*|\,|A_j^*|)}{2} \\ &\le \operatorname{Tr}\left(\left(\frac{|A_i|^2+|A_i^*|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|A_j|^2+|A_j^*|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(|A_i|_{\mathrm{qsym}}\,|A_j|_{\mathrm{qsym}}\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=1}^m A_k\|_2^2 &= \sum_{k=1}^m \|A_k\|_2^2 + 2\sum_{i<j}\Re\,\operatorname{Tr}(A_i^*A_j) \\ &\le \sum_{k=1}^m \|A_k\|_2^2 + 2\sum_{i<j}|\operatorname{Tr}(A_i^*A_j)| \\ &\le \sum_{k=1}^m \|\,|A_k|_{\mathrm{qsym}}\,\|_2^2 + 2\sum_{i<j}\operatorname{Tr}\left(|A_i|_{\mathrm{qsym}}\,|A_j|_{\mathrm{qsym}}\right)\end{aligned}$$

$$= \Big\| \sum_{k=1}^{m} |A_k|_{\mathrm{qsym}} \Big\|_2^2,$$

其中用到了（7.7）。开平方后即得（7.6）。

□

注 7.5. 上述论证得出以下优美的迹不等式:

$$|\operatorname{Tr}(A^*B)| \;\le\; \operatorname{Tr}\big(|A|_{\mathrm{qsym}}\,|B|_{\mathrm{qsym}}\big), \qquad \text{for all } A,B\in\mathbb{M}_n. \tag{7.8}$$

Aujla 和 Silva [1]证明了以下适用于与凸函数相关的酉不变范数的不等式。

引理 7.6 ([1, 推论 2.6])**.** 设 $A, B \in \mathbb{M}_n$ 为半正定矩阵， f 是定义在 $[0,\infty)$上的非负凸函数。则对所有 $\alpha \in [0,1]$,

$$\|f(\alpha A + (1-\alpha)B)\| \le \|\alpha f(A) + (1-\alpha)f(B)\|.$$

特别地，对于迹范数，我们有

$$\operatorname{Tr} f(\alpha A + (1-\alpha)B) \le \operatorname{Tr}\left(\alpha f(A) + (1-\alpha)f(B)\right).$$

定理 *1.16* 的证明。令

$$S := \sum_{k=1}^{m} A_k, \qquad Q := \sum_{k=1}^{m} |A_k|_{\mathrm{qsym}}.$$

令 q 为 p的共轭指标，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。我们使用 Schatten$p$-范数的对偶公式:

$$\|S\|_p = \sup\Big\{\, |\operatorname{Tr}(S^*X)| :\; X\in\mathbb{M}_n,\ \|X\|_q \le 1 \Big\}. \tag{7.9}$$

步骤 *1*：化归为单矩阵常数。固定 X 满足 $\|X\|_q \le 1$。则有

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Tr}(S^*X)| &= |\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Tr}(A_k^*X)| \\
&\le \sum_{k=1}^{m} |\operatorname{Tr}(A_k^*X)| \\
&\le \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Tr}\left(|A_k|_{\mathrm{qsym}}\,|X|_{\mathrm{qsym}}\right) \text{ (By (7.8))} \\
&= \operatorname{Tr}\left(Q\,|X|_{\mathrm{qsym}}\right) \\
&\le \|Q\|_p\, \||X|_{\mathrm{qsym}}\|_q \text{ (By Hölder inequality).}
\end{aligned}$$

对 $\|X\|_q \le 1$ 取上确界并使用（7.9），得到

$$\|S\|_p \;\le\; d_q\,\|Q\|_p, \qquad d_q := \sup_{X\neq 0} \frac{\||X|_{\mathrm{qsym}}\|_q}{\|X\|_q}. \tag{7.10}$$

剩下的工作是计算 d_q。

步骤 *2*：计算 d_q （ $q=2$处的相变）。写出

$$|X|_{\mathrm{qsym}}^2 = \frac{|X|^2+|X^*|^2}{2} = \frac{B+C}{2}, \qquad B := |X|^2,\quad C := |X^*|^2.$$

Then

$$\||X|_{\mathrm{qsym}}\|_q^q = \mathrm{Tr}\left(\left(\frac{B+C}{2}\right)^{\frac{q}{2}}\right). \tag{7.11}$$

情形*1*: $q \geq 2$。由于函数 $t \mapsto t^{\frac{q}{2}}$在 $[\theta, \infty$上是凸的，引理 7.6 得出

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{B+C}{2}\right)^{\frac{q}{2}} \leq \mathrm{Tr}\,\frac{B^{\frac{q}{2}}+C^{\frac{q}{2}}}{2} = \|X\|_q^q. \tag{7.12}$$

结合 (7.11) 和 (7.12) 得到

$$\||X|_{\mathrm{qsym}}\|_q^q \leq \|X\|_q^q,$$

这意味着 $d_q \leq 1$ 对 $q \geq 2$成立。

令 X 为正规，则 $|X|_{\mathrm{qsym}} = |X|$，这意味着在 (7.10) 中

$$d_q = 1, \qquad 2 \leq q \leq \infty.$$

因此

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_p \;\leq\; \Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p, \qquad 1 \leq p \leq 2.$$

尖锐性。对于 $1 \leq p \leq 2$，令每个 A_k 均为半正定，则 $|A_k|_{\mathrm{qsym}} = A_k$，从而等号成立。

情形*2*: $1 \leq q \leq 2$。由于 $t \mapsto t^{\frac{q}{2}}$在 $[0, \infty$ 上是凹函数，通过引理 3.1，我们有

$$\mathrm{Tr}\left((B+C)^{\frac{q}{2}}\right) \;\leq\; \mathrm{Tr}(B^{\frac{q}{2}}) + \mathrm{Tr}(C^{\frac{q}{2}}) = 2\|X\|_q^q. \tag{7.13}$$

结合 (7.11) 和 (7.13) 得

$$\||X|_{\mathrm{qsym}}\|_q \leq 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|X\|_q, \qquad 1 \leq q \leq 2.$$

因此，对于 $1 \leq q \leq 2$，有 $d_q \leq 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$。取 $X = E_{12} \in \mathbb{M}_2$。则 $|E_{12}|_{\mathrm{qsym}} = \frac{\sqrt{2}}{2} I_2$且 $\|E_{12}\|_q = 1$，所以

$$\frac{\||E_{12}|_{\mathrm{qsym}}\|_q}{\|E_{12}\|_q} = \left(2\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^q\right)^{1/q} = 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

因此，在 (7.10) 中，

$$d_q = 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, \qquad 1 \leq q \leq 2.$$

因此，

$$\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_p \;\leq\; 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p, \quad 2 \leq p \leq \infty.$$

尖锐性。对于 $2 \leq p \leq \infty$，取 $n = 2$和 $A_1 = \cdots = A_m = E_{12}$。则 $\left\|\sum_k A_k\right\|_p = m$，而 $|E_{12}|_{\mathrm{qsym}} = \frac{\sqrt{2}}{2} I_2$，所以

$$\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p = \left\|\frac{m\sqrt{2}}{2} I_2\right\|_p = m\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^p\right)^{1/p} = m\,2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},$$

1 1表明常数 $2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$无法改进。 □

8. 关于问题 1.17 和 1.18 的部分结果

首先，我们给出问题 1.17 中 $c_p^{\mathrm{sym}}(m,n)$ 的一些端点值和一般界。

定理8.1。设 $A_1,\dots,A_m\in\mathbb{M}_n$，且设 $1\le p\le\infty$。令 $c_p^{\mathrm{sym}}(m,n)$ 为满足以下条件的最小常数：

$$\Big\|\Big|\sum_{k=1}^m A_k\Big|_{\mathrm{sym}}\Big\|_p \le c_p^{\mathrm{sym}}(m,n)\,\Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{sym}}\Big\|_p.$$

则以下结论成立：

(1) $c_1^{\mathrm{sym}}(m,n)=1$;
(2) $c_\infty^{\mathrm{sym}}(m,n)=\sqrt{2}$ *for* $n\ge 3$;
(3) $c_p^{\mathrm{sym}}(m,n)\le\min\{2^{1-\frac{1}{p}},\sqrt{2}\}$;
(4) $c_p^{\mathrm{sym}}(m,n)\ge\left(\frac{2^{\frac{p}{2}}+2^{1-\frac{p}{2}}}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$; *in particular, the right-hand side increases from* 1 *at* $p=2$ *to* $\sqrt{2}$ *as* $p\to\infty$.

证明。步骤 *1*：$c_1^{\mathrm{sym}}(m,n)=1$。对于每个 k，我们有

$$\||A_k|_{\mathrm{sym}}\|_1=\|A_k\|_1.$$

因此

$$\Big\|\Big|\sum_{k=1}^m A_k\Big|_{\mathrm{sym}}\Big\|_1=\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_1\le\sum_{k=1}^m\|A_k\|_1=\sum_{k=1}^m\||A_k|_{\mathrm{sym}}\|_1=\Big\|\sum_{k=1}^m|A_k|_{\mathrm{sym}}\Big\|_1.$$

因此 $c_1^{\mathrm{sym}}(m,n)\le 1$。取 $A_1\ne 0$ 和 $A_2=\cdots=A_m=0$ 即得尖锐性。

步骤 *2*：$c_\infty^{\mathrm{sym}}(m,n)=\sqrt{2}$ 对于 $n\ge 3$。界 $c_\infty^{\mathrm{sym}}(m,n)\le\sqrt{2}$ 是定理 1.10 的一个特例。尖锐性由定理2.5得到。

步骤 *3*。通用上界。注意到

$$\begin{aligned}\Big\|\Big|\sum_{k=1}^m A_k\Big|_{\mathrm{sym}}\Big\|_p&=\frac{1}{2}\Big\|\Big|\sum_{k=1}^m A_k\Big|+\Big|(\sum_{k=1}^m A_k)^*\Big|\Big\|_p\\&\le\Big\|\sum_{k=1}^m A_k\Big\|_p\ (\text{By triangle inequality for }\|\cdot\|_p)\\&\le 2^{1-\frac{1}{p}}\Big\|\sum_{k=1}^m|A_k|_{\mathrm{sym}}\Big\|_p\ (\text{By Theorem 1.15}).\end{aligned}$$

由此得到 $c_p^{\mathrm{sym}}(m,n)\le 2^{1-\frac{1}{p}}$。将其与定理 1.10 结合即得该结论

步骤 *4*：$c_p^{\mathrm{sym}}(m,n)$ 在 $n\ge 3$ 下的下界，通过一个显式 3×3 构造。设 $n=3$并考虑单位向量

$$u=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad v=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad x=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

并定义秩一矩阵 $A:=uv^\top$ 和 $B:=xy^\top$（实矩阵）。直接计算可得

$$|A|_{\mathrm{sym}}+|B|_{\mathrm{sym}}=\frac{2}{3}I_3,$$

而 $|A+B|_{\mathrm{sym}}$ 的特征值为

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2},\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因此，对每一个 $p\geq 1$,

$$\frac{\big\|\,|A+B|_{\mathrm{sym}}\,\big\|_p}{\big\|\,|A|_{\mathrm{sym}}+|B|_{\mathrm{sym}}\,\big\|_p}=\frac{\frac{2}{3}\left(2^{\frac{p}{2}}+2^{1-\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}}{\frac{2}{3}\,3^{\frac{1}{p}}}=\left(\frac{2^{\frac{p}{2}}+2^{1-\frac{p}{2}}}{3}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

为完整起见，我们记录一个具体的 2×2 反例，表明弗罗贝尼乌斯范数不等式

$$\|\,|A+B|_{\mathrm{sym}}\|_2\leq\|\,|A|_{\mathrm{sym}}+|B|_{\mathrm{sym}}\|_2$$

在一般情况下不成立。

特别地，这给出了一个显式 2×2见证，表明问题 1.17 中的最优常数满足 $c_2^{\mathrm{sym}}(m,n)>1$ 对每一个 $n\geq 2$ （通过将 2×2 例子嵌入 $\mathbb{M}_n$ 作为直和项）。

例 8.2。设

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-16&-7\\9&4\end{pmatrix}.$$

于是，通过直接数值计算可得

$$\frac{\big\|\,|A+B|_{\mathrm{sym}}\big\|_2}{\big\|\,|A|_{\mathrm{sym}}+|B|_{\mathrm{sym}}\big\|_2}\approx 1.0144\;>\;1.$$

因此 $c_2^{\mathrm{sym}}(m,\,2)>1$，从而对每个 $n\geq 2$，都有 $c_2^{\mathrm{sym}}(m,\,n)>1$ （方法是将 2×2 矩阵嵌入 $\mathbb{M}_n$，使其成为一个直和项）。

接下来，我们陈述问题 1.18 中 $c_p^{\mathrm{qsym}}(m,\,n)$ 的一些端点值和一般界。

定理 8.3。设 $A_1,\ldots,A_m\in\mathbb{M}_n$，且设 $1\leq p\leq\infty$。令 $c_p^{\mathrm{qsym}}(m,n)$ 为满足下列条件的最小常数

$$\Big\|\Big|\sum_{k=1}^m A_k\Big|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p\;\leq\;c_p^{\mathrm{qsym}}(m,n)\,\Big\|\sum_{k=1}^m|A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p.$$

那么以下结论成立：

(1) $c_1^{\mathrm{qsym}}(m,n)=1$;
(2) $c_2^{\mathrm{qsym}}(m,n)\leq\sqrt{\frac{1+\sqrt{\min\{m,2n\}}}{2}}$;
(3) $c_\infty^{\mathrm{qsym}}(m,n)\leq\sqrt{\min\{m,2n\}}$;
(4) $c_p^{\mathrm{qsym}}(m,n)\leq\big(\min\{m,2n\}\big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ *for all* $1\leq p\leq\infty$.

证明。对于 $A\in\mathbb{M}_n$，定义 $2n\times 2n$ 矩阵

$$\Phi(A):=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}A&0\\A^*&0\end{pmatrix}.$$

直接计算可得

$$|\Phi(A)|=\begin{pmatrix}|A|_{\mathrm{qsym}}&0\\0&0\end{pmatrix}.\tag{8.1}$$

显然， Φ 是可加的，即

$$\Phi(\sum_{k=1}^m A_k) = \sum_{k=1}^m \Phi(A_k). \tag{8.2}$$

设 $c_p^{\mathrm{abs}}(m,n)$ 为问题 1.14 中的最优常数。将其应用于矩阵$\Phi(A_1),\dots,\Phi(A_m) \in \mathbb{M}_{2n}$可得

$$\Big\|\sum_{k=1}^m \Phi(A_k)\Big\|_p \le c_p^{\mathrm{abs}}(m,2n)\Big\|\sum_{k=1}^m |\Phi(A_k)|\Big\|_p. \tag{8.3}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{pmatrix} |\sum_{k=1}^m A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_p &= \big\||\Phi(\sum_{k=1}^m A_k)|\big\|_p && \text{(By (8.1))}\\
&= \big\|\Phi(\sum_{k=1}^m A_k)\big\|_p \\
&= \Big\|\sum_{k=1}^m \Phi(A_k)\Big\|_p && \text{(By (8.2))}\\
&\le c_p^{\mathrm{abs}}(m,2n)\Big\|\sum_{k=1}^m |\Phi(A_k)|\Big\|_p && \text{(By (8.3))}\\
&= c_p^{\mathrm{abs}}(m,2n)\Big\|\sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} |A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big\|_p && \text{(By (8.1))}\\
&= c_p^{\mathrm{abs}}(m,2n)\left\|\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_p.
\end{aligned}$$

最后，对于任意酉不变范数，添加一个零直和项不会改变范数（因为这只会附加零奇异值）。因此，

$$\left\|\begin{pmatrix} |\sum_{k=1}^m A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_p = \big\||\sum_{k=1}^m A_k|_{\mathrm{qsym}}\big\|_p, \qquad \left\|\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_p = \Big\|\sum_{k=1}^m |A_k|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p.$$

结合这些不等式可得

$$\Big\|\Big|\sum_{k=1}^m A_k\Big|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p \le c_p^{\mathrm{abs}}(m,2n)\,\Big\|\sum_{k=1}^m \big|A_k\big|_{\mathrm{qsym}}\Big\|_p.$$

因此，$c_p^{\mathrm{qsym}}(m,n) \le c_p^{\mathrm{abs}}(m,2n)$。利用问题 1.14 的部分结果即可得到所需结果。□

Declaration of competing interest

作者声明不存在任何利益冲突。

Data availability

本文所述研究未使用任何数据。

致谢

Teng Zhang 获得中国国家留学基金管理委员会、青年人才托举工程博士生项目（中国科学技术协会）以及西安交通大学中央高校基本科研业务费的资助（项目编号：xzy022024045）。

参考文献

[1] J. S. Aujla 和 F. C. Silva，弱主序不等式与凸函数，Linear Algebra Appl. **369** 2003 217 233 10 1016 0024 3795 02 00720 6 ( )，– 。doi: 。/S - ( ) - J.-C. Bourin 和 M. Uchiyama，关于 $f(A+B)$ 和 $f(A)+f(B)$ 的矩阵次可加不等式，Linear Algebra Appl. **423** 2007 2 3, 512 518 10 1016 2007 02 019 ( )，no. – – 。doi: 。/j.laa. . . J.-C. Bourin 和 E.-Y. Lee，矩阵平行四边形定律与对称模，Internat. J. Math. **31** (2026)，no. 6, 2650018 10 1142 0129167 26500187 。doi: 。/S X J.-C. Bourin 和 E.-Y. Lee，算子对称模的三角不等式，预印本，2026。arXiv:2602.19607。[5] R. Bhatia，矩阵分析，Graduate Texts in Mathematics，第169卷，Springer，纽约，1997。[6] R. Bhatia，正定矩阵，Princeton Series in Applied Mathematics，Princeton University Press，普林斯顿和牛津，2007。[7] E.-Y. Lee，如何比较算子和的绝对值与绝对值之和？，Oper. Matrices **6** 2012 3, 613 619 10 7153 06 42 ( )，no. – 。doi: 。/oam- - E. H. Lieb，凸迹函数与 *Wigner–Yanase–Dyson* 猜想，Adv. Math. **11** (1973)，267–288。doi:10.1016/0001-8708(73)90011-X [9] J. Lin 和 Y. Zhang，*Lee* 关于矩阵绝对值之和的猜想的证明，J. Math. Anal. Appl. **516** 2022 2, 126542, 6 10 1016 2022 126542 ( )，no. Paper No. pp. doi: 。/j.jmaa. . C. A. McCarthy，c_p Israel J. Math. **5** 1967 249 271 10 1007 ( )，– 。doi: 。/BF 02771613 Q. Tang 和 S. Zhang，*Lee* 关于矩阵绝对值之和的猜想的推广，Linear Algebra Appl. **731** 2026 196 204 10 1016 2025 11 015 ( )，– 。doi: 。/j.laa. . . R. C. Thompson，矩阵和的奇异值的凸函数与凹函数，Pacific J. Math. **66** (1976 1, 285 290 10 2140 1976 66 285)，no. – 。doi: 。/pjm. . . T. Zhang，通过矩阵柯西–施瓦茨不等式给出 *Lee* 猜想的 *Frobenius* 范数证明，Linear Algebra Appl. **725** 2025 355 358 10 1016 2025 07 017 ( )，– 。doi: 。/j.laa. . . T. Zhang，次酉矩阵与正极分解因子的 *Frobenius* 范数的锐扰动界，预印本，2025。arXiv:2507.14940。[15] T. Zhang，关于 *Bourin* 和 *Lee* 提出的五个问题：对称模与欧拉算子恒等式，预印本，2026。arXiv:2602.01463。

数学与统计学院，西安交通大学，西安710049，中华人民共和国电子邮箱：teng.zhang@stu.xjtu.edu.cn