arXiv:2603.01056v1 [cs.LO] 1 Mar 2026

A CL为等价谱构造分类托普斯

KENAN OGGAD

巴黎萨克雷大学电子邮箱地址：
kenan.oggad@universite-paris-saclay.fr

摘要。是什么使两个计算系统等价？拓扑斯理论以分类拓扑斯作答：系统的语义内容编码在其所分类的几何理论中；当两个表示的分类拓扑斯相同时，它们便是等价的。进程代数则以 van Glabbeek 的线性时—分支时谱作答：从迹等价到互模拟等价的一系列行为等价关系，每一种都由哪些观察能够区分过程来确定。我们表明，这两种答案是同一结构的不同侧面，并建立语义等价的拓扑斯几何理论基础，其中行为抽象就是局部化。

每个标记迁移系统 $\mathscr{M}$ 都对应一个几何理论 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$，其分类托普斯 $\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}]$ 决定了该理论的可证明几何序列。我们确立了一个严格层级：相互模拟严格弱于双模拟，而双模拟又严格弱于拓扑斯等价，并明确了界限：仅含菱形模态的 Hennessy–Milner 逻辑刻画了几何逻辑的双模拟不变片段。我们通过有界树展开，以完全一般的形式证明了这一范本特姆定理的几何类比。显式的格罗滕迪克拓扑给出了一个严格链 $J_{\mathrm{bisim}} \subsetneq J_{\mathrm{sim}} \subsetneq J_{\mathrm{trace}}$，并对迹等价和双模拟等价构造性地建立了这一结果；一个构造性反例证明，朴素的基于存在性的观察类方法无法胜任模拟问题，从而说明 Caramello 的商理论对偶是自然的替代方案；能量—拓扑框架则将这一嵌入扩展到谱中的全部 13 种命名等价关系。

在格运算下对命名等价关系取闭包，恰好得到 30 个元素，其中包括 17 个未出现在经典谱中的未命名混合等价，这是因为能量博弈框架能够计算但不取闭包。格 L_{30} 是直不可分解的；其海廷蕴涵 $S \to F = \mathrm{IF}$ 将不可能未来识别为模拟—失败分界的代数中介。一条几何闭包定理通过在单个自由扩张上检验来计算预层 Heyting 蕴涵。该层级的全部三个层次、L_{30}双 Heyting 结构以及几何闭包定理均被构造性地证明，这是托扑斯内部的一个结果，且没有已知的过程代数证明。从分类托普斯来看，该谱是无限余框架的一个有限子偏序集，其代数运算（交、蕴涵、差）产生了从进程代数内部无法达到的结构。所有构造均在 Lean 4 中借助 Mathlib 形式化。

1. 引言

拓扑斯理论和进程代数提供了彼此独立的框架，用来判断两个计算系统何时应被视为等价：前者通过分类托普斯及其子拓扑斯格，后者则通过行为观察层级，最终汇聚于 van Glabbeek 的谱。我们表明，这两种视角可以纳入同一结构——谱嵌入分类托普斯的子拓扑斯余框架，成为一个有限子偏序集——具体做法是为迹等价和双模拟等价构造显式的格罗滕迪克拓扑，作用于

带标签迁移系统的分类托普斯，并通过 Caramello 的商理论对偶补全严格链 $J_{\mathrm{bisim}} \subsetneq J_{\mathrm{sim}} \subsetneq J_{\mathrm{trace}}$。模拟需要采用这条间接路径：迹和双模拟的覆盖作用于筛层级（0-截断），而模拟只需要同态存在性（(-1)-截断），这种截断层级不匹配已被证明会阻止基于存在性的朴素观察类扩张（定理 6.5）。

能量—拓扑框架将这一三点嵌入扩展到 van Glabbeek 谱中的全部 13 种具名过程等价。赋值 $E \mapsto J_E$ 是反单调的；对于 $|L| \geq 2$，所诱导的余框架映射是单射，并揭示了原始谱中不可见的代数结构：两个具名等价子托普斯的余框架交可能产生没有进程代数名称的元素（定理 6.10）。它通过如下链条将 Bisping 的能量博弈层级与 Lawvere–Tierney 拓扑联系起来：能量预算 $\to$ 观察类$\to$ 覆盖谓词 $\to$ 格罗滕迪克拓扑 $\to$ 子托普斯，这是 Caramello 桥接技术 [12]的一个实例：

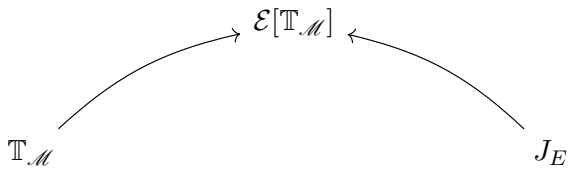


图 1：几何理论 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 对标记迁移系统结构进行分类；每个拓扑 J_E 都将分类托普斯局部化为强制满足相应等价关系的子托普斯。中间拓扑 J_{sim} 是首个需要 Caramello 商理论工具的拓扑；Energy–LT 桥接中的 10 种中间等价关系也依赖于它（§6.2）。

我们的托普斯论框架并非只是重新推导已知的进程代数结果；它还提供了一个代数背景，使新的问题得以自然提出。进程代数是图灵完备的；原则上无需拓扑斯理论也能计算出这些结果，这一点并不值得特别说明。拓扑斯理论所提供的是概念视角：余框架分配律、海廷蕴涵 $S \to F$ =IF，以及 17 个未命名谱元素，都是提出“所有行为抽象的格是什么？”这一问题的结果，而要表述该问题，就需要子拓扑斯余框架。分类托普斯的每个子托扑都对应于保留哪些几何性质的选择；谱结构则从所有此类选择构成的余框架中显现出来。这与最接近的层论先例形成对比：Eberhart、Hirschowitz 和 Seiller [16] 构造了一个单一的格罗滕迪克拓扑，在 π-演算的交互树上强制施加双模拟；而我们的方法固定位点（f.p.LTS$_L$），并让拓扑遍历整个谱，从而产生一个子拓扑斯格，而非单一商。

这座桥梁有两个特征在本质上属于托普斯论。其子托普斯格具有余框架结构：交对并满足分配律，从而为谱提供其本身并不具备的语义格运算；虽然可以在乘积框架中对谱取交、并来进行闭包，但余框架律是分类托普斯的不变量，而非能量博弈表示的不变量（事实上，格闭包本身取决于坐标化：注 5.3）。此外，两个命名等价关系的余框架交可以产生无法由任何单个能量博弈生成的元素：格闭包中的 17 个未命名元素虽有具体的能量六元组，却不对应任何命名过程等价。

我们的构造分为三个阶段。首先，为每个系统 $\mathscr{M}$ 赋予一个几何理论 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$，其分类托普斯 $\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}]$ 决定了该理论可证明的几何序列；明确的区分对——分叉 $\mathscr{F}$ 与路径 $\mathscr{P}$、中心辐条 $\mathscr{H}$与二循环 $\mathscr{C}$——确立了从相互模拟、经由双模拟到托普斯等价的严格三级层次结构（定理 3.10–3.12；§3）。中心辐条的 5 元林登鲍姆代数和 8 个格罗滕迪克拓扑，为完整的谱分层提供了一个具体实例（§3）。其次，几何 van Benthem 定理将几何逻辑的双模拟不变片段刻画为仅含菱形模态的 Hennessy–Milner 逻辑：正向部分以构造性方法证明（定理 4.2），逆命题则通过有界树展开确立（定理 4.12），并在深度 ≤ 2处得到独立验证（定理 4.7–4.10；§4）。第三，能量预算决定格罗滕迪克拓扑：J_{bisim}和 J_{trace} 具有构造性的覆盖谓词；一个构造性反例表明，观察类方法可证明无法用于模拟（定理 6.5）；而 J_{sim} 则通过 Caramello 对偶补全了这条链（推论 6.6）。Energy–LT 将此方法扩展至全部 13 个命名等价关系（定理 6.10），格闭包则得出含 30 个元素的谱格 L_{30}，其双 Heyting 结构详述于 §5–§6.2。在预层层次上，几何闭包定理将海廷蕴涵的判定化约为在单个典范自由扩张上进行检验（定理 6.16；§6.5），从而使余帧运算能够具体计算。

2. 几何理论与分类拓扑斯

几何逻辑是一阶逻辑中对 $\wedge$、$\vee$（包括无穷元）$\exists$和 $\top$封闭的片段；本文中的所有理论都是有限的。这个片段对于托扑斯而言十分自然，因为几何态射恰好保持这些逻辑联结词 [25]。

一个关于语言 $\mathcal{L}$ 的几何理论 $\mathbb{T}$ 由以下形式的公理组成：几何序列 $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$，其中 ϕ 和 ψ 是几何公式。托扑斯 $\mathcal{E}$ 中的模型 $\mathbb{T}$ 将 $\mathcal{L}$ 的类型、函数符号和关系符号解释为 $\mathcal{E}$中的对象和态射，并满足 $\mathbb{T}$的所有公理。

分类托普斯 $\mathcal{E}[\mathbb{T}]$ 是表示 $\mathbb{T}$的泛托扑斯：对于任意格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{E}$，几何态射 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}[\mathbb{T}]$ 与 $\mathcal{E}$中的 $\mathbb{T}$ 的模型之间存在一个等价关系，因此，在任意托扑斯中研究模型都可以归结为研究几何态射。它构造为句法范畴的层拓扑斯$\mathbf{C}_{\mathbb{T}}$——其对象是带语境的公式，态射是可证明为函数的关系——并赋予由 $\mathbb{T}$ [29]的公理生成的句法拓扑。同一语言上的两个几何理论具有等价的分类拓扑斯，当且仅当它们证明相同的几何序列：$\mathcal{E}[\mathbb{T}]$ 中的泛模型恰好验证 $\mathbb{T}$ [25, 的几何推论D1.4.3]。这就是我们的不变量：可证明的序列式能够区分分类拓扑斯。

几何理论 $\mathbb{T}$ 与 $\mathbb{T}'$ 之间的双重解释由一个解释I：$\mathbb{T} \to \mathbb{T}'$和一个解释 J：$\mathbb{T}' \to \mathbb{T}$组成，并且往返复合映射 JI和 IJ可定义地同构于各自的恒等映射。若 $\mathbb{T} \rightleftarrows \mathbb{T}'$，比较引理 [25,定理 C2.2.3] 蕴含 $\mathcal{E}[\mathbb{T}] \simeq \mathcal{E}[\mathbb{T}']$。其逆命题不成立：双重解释严格强于 Morita 等价 [12]。在第 3 节中，我们将把这一理论层面的概念专门应用于有根迁移系统，在那里它将成为关于模拟的条件。

定义 2.1（双模拟不变序列）。关系签名上的一个几何序列 $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ 若满足以下条件，则称为双模拟不变：对于系统 M 与 N 之间的任意关系双模拟 R（精确定义见定义 3.5），若 $M \models \phi \vdash_{\vec{x}} \psi$，则 $N \models \phi \vdash_{\vec{x}} \psi$。

3. 有根迁移系统与三级层次结构

一个有根迁移系统 $\mathscr{M}$ 由状态集合 $S_{\mathscr{M}}$、$S_{\mathscr{M}}$上的转移关系以及初始状态 $\star_{\mathscr{M}} \in S_{\mathscr{M}}$组成。一个模拟 $f\colon \mathscr{M} \to \mathscr{N}$是一个函数 $f\colon S_{\mathscr{M}} \to S_{\mathscr{N}}$，它保持转移（若 $s \to s'$ 属于 $\mathscr{M}$，则 $f(s) \to f(s')$ 属于 $\mathscr{N}$），并保持初始状态（$f(\star_{\mathscr{M}}) = \star_{\mathscr{N}}$）。模拟可以复合且包含恒等映射，因此有根迁移系统构成一个范畴。

对每个有根迁移系统 $\mathscr{M}$，我们都关联一个有根迁移语言 $\mathcal{L}_{\mathscr{M}}$ 上的几何理论 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$，该语言包含类型 S、每个状态 $s \in S_{\mathscr{M}}$ 对应的常量 c_s（包括代表初始状态的特定常量 init），以及二元谓词 Δ（转移）、Γ（可达性）、Θ（路径等价）。该理论 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 由两个部分组成：

(1) 结构公理（6 个序列式）：$\Delta(x,y) \vdash \Gamma(x,y)$、$\top \vdash \Gamma(x,x)$、传递性、$\Theta$ 定义、Θ 对称性，以及 $\Theta \vdash \Gamma$。(2) 系统特定公理：对 $\mathscr{M}$ 中的每个转移 $s \to t$，存在公理 $\top \vdash \Delta(c_s, c_t)$；对每个状态 s，完备性公理 $\Delta(c_s,x) \vdash x = c_{t_1} \vee \cdots \vee x = c_{t_n}$，其中$\{t_1,\dots,t_n\}$是 s 的后继状态集合（当 s 没有后继状态时，析取为空，从而得到 $\Delta(c_s,x) \vdash \bot$）；对每一对不可达状态，添加否定公理 $\Gamma(c_s,c_t) \vdash \bot$；对每一对不具路径等价关系的状态，添加否定公理 $\Theta(c_s,c_t) \vdash \bot$（从上方和下方共同确定上述三个谓词，而非仅从下方确定）；以及论域闭包公理 $\top \vdash x = c_{s_1} \vee \cdots \vee x = c_{s_k}$，其中 $\{s_1,\dots,s_k\} = S_{\mathscr{M}}$。

这些都是几何序列式。理论 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 记录了 $\mathscr{M}$中可用几何逻辑表达的结构性质，包括分支度、局部确定性和合流模式。分类托普斯 $\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}]$ 是 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$的分类托普斯。对于有限状态系统，$\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 是有限的；该构造是可计算的。

引理 3.1 (可靠性与完备性)。从 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 出发的几何可证性与语义有效性一致。

(1) 可靠性。若几何序列式 s 可由几何理论 $\mathbb{T}$推出，则 $\mathbb{T}$的每个模型都满足 s。(2) 完备性。几何序列式 s 可由 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 推出，当且仅当典范模型满足 s。

证明。可靠性由对推导作结构归纳得出：公理依据假设成立，切规则实现复合，而几何联结词（$\wedge$、$\vee$、$\exists$）保持满足关系。对于完备性，$\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}]$ 中的泛模型恰好验证所有可证明的几何序列式 [12, 定理 2.1.12]。系统特定公理将 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 的任意集合范畴模型唯一确定到同构：论域闭包迫使每个元素都等于某个 c_s；存在性公理和完备性公理确定了 Δ；而否定公理确定了 Γ和 Θ。由于 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 是相干的（对于有限状态系统，所有析取都是有限的），依据德利涅定理 [25, D3.3.13]，其分类托普斯有足够多的集合范畴点。因此：典范模型满足 $s \Rightarrow$ 每个集合范畴模型都满足 s（唯一性）$\Rightarrow$ 泛模型满足 s（足够多的点）$\Rightarrow$ s 可证。逆命题由将可靠性应用于典范模型得出。 □

§§3.2–3.3 和 §4.3 中的分离证明依赖四个语义桥接引理，它们刻画了分离序列式成立的条件：σ_{tot} 成立当且仅当每个状态都有一个后继状态；σ_{det} 成立当且仅当转移关系是函数性的；σ_{conf} 成立当且仅当每一对后继状态都有一个共同后继；σ_{loop} 成立当且仅当每个状态都有一个自环。

备注 3.2（理论的规模）。对于一个有 $|S_{\mathscr{M}}|$ 个状态的有限系统，$\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 是有限的：6 条结构公理、至多 $|S_{\mathscr{M}}|^2$ 条存在公理、$|S_{\mathscr{M}}|$ 条完备性公理、O 条关于 Γ 和 Θ 的否定公理（$|S_{\mathscr{M}}|^2$），以及一条论域闭包公理，总计 O 条（$|S_{\mathscr{M}}|^2$）序列式。对于无限系统，完备性公理和论域闭包公理可能涉及无限析取（仍是几何的，但不再相干）；无论 [25,D1.4] 如何，分类托普斯都存在。本文中的所有见证系统都是有限的。

定义 3.3 (路径等价)。两个状态 $s,t \in S_{\mathscr{M}}$ 是路径等价的，记作 $s \sim t$，如果它们恰好能到达相同的状态，且恰好能从相同的状态到达：$s \sim t$ 当且仅当对所有 $u \in S_{\mathscr{M}}$，$s \to^* u \Leftrightarrow t \to^* u$ 且 $u \to^* s \Leftrightarrow u \to^* t$。

路径等价是一种等价关系。其关键性质是，它可由相互可达性推出。

引理 3.4 (提升引理)。在任意有根迁移系统 $\mathscr{M}$ 中：

$$\boxed{s \to^* t \text{ 和 } t \to^* s \quad \Longrightarrow \quad s \sim t}$$

证明。假设 $s \to^* t$ 和 $t \to^* s$。我们必须证明，s 和 t 恰好能到达相同的状态，且恰好能从相同的状态到达。如果 $s \to^* u$，那么 $t \to^* s \to^* u$，所以 $t \to^* u$。如果$t \to^* u$，那么 $s \to^* t \to^* u$，所以 $s \to^* u$。如果 $u \to^* s$，那么 $u \to^* s \to^* t$，所以 $u \to^* t$。如果 $u \to^* t$，那么$u \to^* t \to^* s$，所以 $u \to^* s$。因此 $s \sim t$。 □

定义 3.5（关系双模拟）。有根迁移系统 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$之间的关系双模拟，是满足往返提升性质的关系 $R \subseteq S_{\mathscr{M}} \times S_{\mathscr{N}}$：若 $(s,t) \in R$ 且 $s \to s'$ 属于 $\mathscr{M}$，则存在 t'，使得 $t \to t'$ 属于 $\mathscr{N}$ 且 $(s',t') \in R$（前向条件）；若 $(s,t) \in R$ 且 $t \to t'$ 属于 $\mathscr{N}$，则存在 s'，使得 $s \to s'$ 属于 $\mathscr{M}$ 且 $(s',t') \in R$（后向条件）。若存在关系双模拟 R，使得 $(\star_{\mathscr{M}}, \star_{\mathscr{N}}) \in R$，则称系统 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$双模拟等价，记作 $\mathscr{M} \approx \mathscr{N}$。

We 此外，我们还引入一种更强的函子性概念，它与双重解释相关联。

定义 3.6（函数双模拟）。有根迁移系统 $\mathscr{M}$和 $\mathscr{N}$之间的函数双模拟 是一对模拟 $f\colon \mathscr{M} \to \mathscr{N}$, $g\colon \mathscr{N} \to \mathscr{M}$，满足对所有 $s \in S_{\mathscr{M}}$，$gf(s) \sim_{\mathscr{M}} s$，且对所有 $t \in S_{\mathscr{N}}$，$fg(t) \sim_{\mathscr{N}} t$。

在余代数文献中，“函数双模拟”有时表示其图为关系双模拟的单个函数，即余代数同态 [36]。我们的用法有所不同：我们要求一对 具有往返路径等价一致性的模拟，以刻画双重解释，而非单侧的函数见证。

每一个函数双模拟都蕴含关系互模拟等价。其逆命题并不成立：关系互模拟等价一般并不蕴含函数双模拟的存在（见注释 3.7）。在本文中，除非明确限定为“函数”，“双模拟”均指 Park 和 Milner [33, 31]（定义 3.5）意义上的关系概念。

注释 3.7（函数双模拟与关系双模拟）. 即使对于像有限系统，函数双模拟也严格强于关系双模拟。关系双模拟可以将 $\mathscr{M}$ 中的一个状态关联到 $\mathscr{N}$中的多个状态，而无需任何函数相干性。例如，具有单个自环状态的系统可通过全关系与任意全系统（每个状态都有一个后继）关系双模拟等价，因为当一方总能以其自环作出回应时，往返条件平凡地成立。然而，若此类系统的路径等价商不同，则它们之间不必存在函数双模拟。

自环系统 $\mathscr{L}$ 具有单个状态 a 、转移 $a \to a$ 以及初始状态 a。二循环 $\mathscr{C}$ 具有状态 $\{x, y\}$ 、迁移 $x \to y$、 $y \to x$ 以及初始状态 x （完整定义见§3.3）。

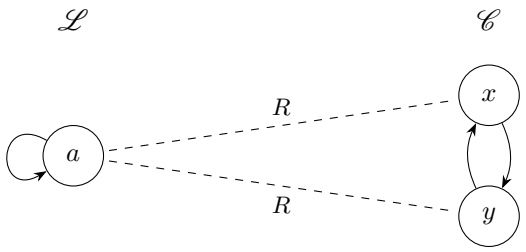


图 2：自环 $\mathscr{L}$和二循环 $\mathscr{C}$。虚线表示关系双模拟$R = \{(a,\ x),\ (a,\ y)\}$。不存在模拟 $\mathscr{L} \to \mathscr{C}$：$\mathscr{C}$没有自环。

命题 3.8 (函数与关系的区分**)**。 函数双模拟严格强于关系双模拟。系统 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{C}$ 关系双模拟等价（通过$R = \{(a, x)、(a, y)\}$） ， 但不函数双模拟等价。

证明。关系双模拟。 关系 $R = \{(a,\ x),\ (a,\ y)\}$ 满足往返条件。在 $(a,\ x)$处： $\mathscr{L}$中的转移 $a \to a$ 由 $\mathscr{C}$ 中的 $x \to y$匹配，且 $(a,\ y) \in R$。在 $(a,\ y)$处：转移 $a \to a$ 由 $y \to x$ 匹配，且 $(a,\ x) \in R$。后向条件是对称的。

不存在函数双模拟。 函数双模拟需要一个模拟 f: $\mathscr{L} \to \mathscr{C}$。自环 $a \to a$必须映射到 $\mathscr{C}$中的 $f(a) \to f(a)$。但是， $\mathscr{C}$没有自环： x有唯一后继 $y \neq x$，而 y 有唯一后继 $x \neq y$。不存在模拟 $\mathscr{L} \to \mathscr{C}$，因此也不存在函数双模拟。 □

这是对三级层次结构的细化：加上下面的第一分离定理和第二分离定理，可得四个严格层级：

相互模拟 $\supsetneq$ 关系双模拟 $\supsetneq$ 函数双模拟 $\supsetneq$ 拓扑斯等价。

主要叙述将“bisimulation”视为关系概念（遵循上述约定），由此得到三个主要层级；函数与关系之间的区别则是次要的。

3.1. **系统的双解释**。 有根迁移系统 $\mathscr{M}$和 $\mathscr{N}$的双解释，记作 $\mathscr{M} \rightleftarrows \mathscr{N}$，是由两个模拟 f: $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$、 g: $\mathscr{N} \to \mathscr{M}$组成的一对，它们满足较弱的相干条件：对于所有 $s \in S_{\mathscr{M}}$， $gf(s)$和 s都彼此可达 （$gf(s) \to^* s$和$s \to^* gf(s)$），并且对于所有 $t \in S_{\mathscr{N}}$， $fg(t)$ 和 t彼此可达。

尽管名称相同，系统的双解释并不会诱导相关几何理论的双重解释。模拟 f: $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$保持双模拟不变片段中的所有几何序列（即对应于$HML$的树形无等式公式），但未必保持 $\mathbb{T}_{\mathscr{M}}$ 的任意几何序列；例如， f 可以将确定性系统映射为非确定性系统，从而失去序列式 σ_{det}。系统层面的双解释与理论层面的双重解释之间的差距，正是第二分离（定理 3.12）的内容：双模拟等价（因而根据定理 3.9 可相互双重解释）的系统可以具有不等价的分类拓扑斯。

定理 3.9（函数双模拟–双重解释对应）。 对所有有根迁移系统 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{N}$， $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{N}$ 之间存在函数双模拟，当且仅当它们之间存在双重解释：

$$\boxed{\mathscr{M} \text{ and } \mathscr{N} \text{ are functionally bisimilar} \iff \mathscr{M} \rightleftarrows \mathscr{N}}$$

证明。 正向地，路径等价蕴含相互可达性，因为如果 $s \sim t$，那么特别有 $s \to^* t$ 和 $t \to^* s$（分别在路径等价的定义中取 $u = t$ 和 $u = s$；更准确地说， $s \to^* s$ 平凡成立，而 $s \sim t$ 给出 $t \to^* s$，对称地还有 $s \to^* t$）。因此，任何函数双模拟都是双重解释。

反之，提升引理适用。设 $(f,\ g)$：$\mathscr{M} \rightleftarrows \mathscr{N}$ 是一个双重解释，因此对所有 $s \in S_{\mathscr{M}}$， $gf(s) \to^* s$ 且 $s \to^* gf(s)$，并且对所有 $t \in S_{\mathscr{N}}$， $fg(t) \to^* t$ 且 $t \to^* fg(t)$。根据引理 3.4，相互可达性蕴含路径等价：对所有 s， $gf(s) \sim_{\mathscr{M}} s$，以及对所有 t， $fg(t) \sim_{\mathscr{N}} t$。因此，$(f,\ g)$ 是一个函数双模拟。

□

在建立好框架后，我们通过为每个分离展示见证，并证明一个关联两个较精细层次的桥接定理，确立严格的三级层次结构。

3.2. 第一分离：相互模拟 $\supsetneq$ 双模拟。 这个分叉 $\mathscr{F}$ 包含状态$\{a, b, c\}$、迁移 $a \to b$、$a \to c$和 $b \to b$，以及初始状态 a。初始状态 a 有多个分支：一个分支通向停机 状态 c（没有出迁移），另一个则通向自环状态 b。路径 $\mathscr{P}$ 包含状态 $\{x, y\}$、迁移 $x \to y$ 和 $y \to y$，以及初始状态 x。它先经过一步转移，随后进入一个自环。

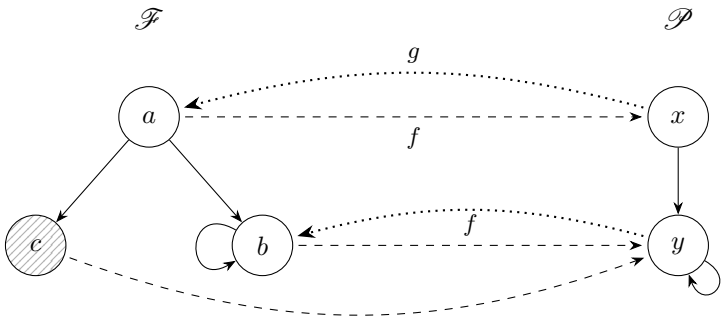


图 3：具有相互模拟关系的分叉 $\mathscr{F}$ 和路径 $\mathscr{P}$。虚线箭头： $f(a) = x$， $f(b) = f(c) = y$。点状箭头： $g(x) = a$， $g(y) = b$。停机状态 c（带阴影线）在 g下没有原像。

定理 3.10 (第一分离**)。** 系统 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{P}$ 相互模拟。它们并非双模拟等价，其分类拓扑斯也不等价：

$$\boxed{\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{P}) \neq \varnothing,\ \mathrm{Hom}(\mathscr{P}, \mathscr{F}) \neq \varnothing, \quad \mathscr{F} \not\simeq \mathscr{P}, \quad \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{F}}] \not\simeq \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{P}}]}$$

证明。相互模拟。模拟 f：$\mathscr{F} \to \mathscr{P}$ 定义为 $f(a) = x,\ f(b) = y, f(c) = y$。这保持了迁移： $a \to b$ 映射到 $x \to y$, $a \to c$ 映射到 $x \to y$，并且$b \to b$ 映射到 $y \to y$。停机状态 c 没有出迁移，因此无需验证。它保持了初始状态： $f(a) = x$。模拟 g：$\mathscr{P} \to \mathscr{F}$定义为

$g(x) = a$, $g(y) = b$。这保持了迁移：$x \to y$ 映射到 $a \to b$，而 $y \to y$ 映射到$b \to b$。它保持了初始状态：$g(x) = a$。

非双模拟。反设 R 是一个关系双模拟，且 $(a, x) \in R$。将前向条件应用于 $\mathscr{F}$ 中的迁移 $a \to c$，可得一个状态 t'，使得$x \to t'$ 属于 $\mathscr{P}$，且 $(c, t') \in R$。由于 x 有唯一的后继 y，因此有 $t' = y$，进而 $(c, y) \in R$。现在在 (c, y) 处应用后向条件：$\mathscr{P}$中的迁移 $y \to y$要求存在一个状态 s'，使得 $c \to s'$ 属于 $\mathscr{F}$，且 $(s', y) \in R$。但是 c 没有出迁移；它是一个停机状态。这就产生了矛盾。

托普斯分离。全性序列式 $\sigma_{\mathrm{tot}} := \top \vdash_x \exists y.\, \Delta(x, y)$ 表示每个状态都有一个后继。该序列式在 $\mathbb{T}_{\mathscr{P}}$中可证：状态 x 有后继 y，状态 y 有后继 y。而它在 $\mathbb{T}_{\mathscr{F}}$中不可证：状态 c 没有后继。由于 σ_{tot} 是在 $\mathbb{T}_{\mathscr{P}}$ 中可证、但在 $\mathbb{T}_{\mathscr{F}}$中不可证的几何序列，因此这两个理论的演绎闭包不同。几何序列的可证性在分类托普斯的等价下保持不变——它可由泛模型的内部逻辑 [25, D1.4.3]检测——因此 $\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{F}}] \not\simeq \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{P}}]$。 □

注释 3.11（停机直觉）。第一分离有一种自然的计算解释。分叉 $\mathscr{F}$ 可以停机（通过到达状态 c），而路径 $\mathscr{P}$ 则不能。然而，它们可以相互模拟：从 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{F}$ 的每个模拟都会映射到不会停机的分支，而从 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{P}$ 的模拟则会折叠停机分支。然而，双模拟要求后向条件在每一对相关状态上都成立，而 $\mathscr{P}$ 中没有任何状态能够匹配 c的停机行为。

3.3. 第二分离：双模拟 $\supsetneq$ 拓扑斯等价。中心辐条系统 $\mathscr{H}$有状态 $\{a, b, c\}$、迁移 $a \to b$, $a \to c$, $b \to a$, $c \to a$，以及初始状态 a。中心 a 连接到两条辐条 b 和 c，每条辐条又都连接回中心。二循环 $\mathscr{C}$ 有状态 $\{x, y\}$、迁移 $x \to y$, $y \to x$，以及初始状态 x。它是一个简单交替环。

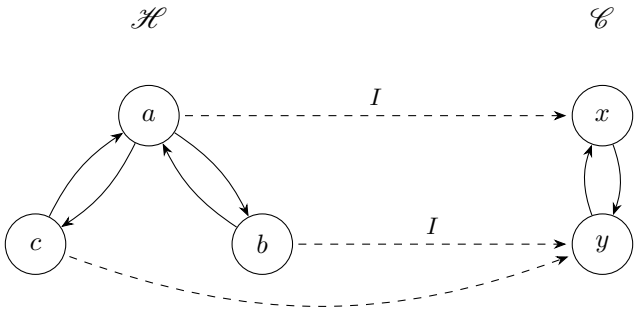


图 4：中心辐条 $\mathscr{H}$和二循环 $\mathscr{C}$。虚线箭头表示模拟 I：$\mathscr{H} \to \mathscr{C}$ 满足 $I(a) = x$, $I(b) = I(c) = y$；反向模拟为 $K(x) = a$, $K(y) = b$。非单射性 $I(b) = I(c)$ 抹去了 σ_{det} 检测到的分支。

定理 3.12（第二分离）。系统 $\mathscr{H}$ 与 $\mathscr{C}$ 是双模拟等价的，然而它们的分类托扑斯并不等价：

$$\boxed{\mathscr{H} \approx \mathscr{C} \qquad yet \qquad \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{H}}] \not\simeq \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{C}}]}$$

证明。函数双模拟。定义 $I\colon\ \mathscr{H}\to\mathscr{C}$，由 $I(a)=x$、$I(b)=y$、$I(c)=y$ 给出。这保持迁移：$a\to b$ 映到 $x\to y$，$a\to c$ 映到 $x\to y$，$b\to a$ 映到 $y\to x$，$c\to a$ 映到 $y\to x$。定义 $K\colon\ \mathscr{C}\to\mathscr{H}$，由 $K(x)=a$、$K(y)=b$ 给出。这保持迁移：$x\to y$ 映到 $a\to b$，$y\to x$ 映到 $b\to a$。

相干性。$\mathscr{H}$ 上的往返映射为：$KI(a)=a$、$KI(b)=b$以及 $KI(c)=b$。前两个是恒等映射。对于第三个，$b\sim_{\mathscr{H}} c$ 因为 $b\to a\to c$ 和 $c\to a\to b$ 见证了相互可达性（引理 3.4）。$\mathscr{C}$ 上的往返映射为：$IK(x)=x$ 和 $IK(y)=y$，二者都是恒等映射。因此，(I,K) 是一个函数双模拟。

关系互模拟等价。关系 $R=\{(a,x)$、(b,y)、$(c,y)\}$ 直接构成一个关系双模拟：在(a,x)处，迁移 $a\to b$和 $a\to c$由 $x\to y$与(b,y)、$(c,y)\in R$匹配；在(b,y)处，$b\to a$由 $y\to x$与$(a,x)\in R$匹配；在(c,y)处，$c\to a$由$y\to x$与$(a,x)\in R$匹配；后向条件是对称的。因此 $\mathscr{H}\approx\mathscr{C}$。

托普斯分离。确定性序列式 $\sigma_{\det}:=\Delta(x,\ y)\wedge\Delta(x,\ z)\vdash y=z$在 $\mathbb{T}_{\mathscr{C}}$中可证：状态 x 恰有一个后继 y，状态 y 恰有一个后继 x。该序列式在 $\mathbb{T}_{\mathscr{H}}$中不可证：状态 a 有两个不同的后继 b 和 c，且 $b\neq c$。由于 $\sigma_{\det}$ 是一个在 $\mathbb{T}_{\mathscr{C}}$ 中可证、但在 $\mathbb{T}_{\mathscr{H}}$中不可证的几何序列，因此这两个理论的演绎闭包不同。几何序列的可证性在分类托普斯的等价 [25, D1.4.3], 下保持不变，因此 $\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{H}}]\not\simeq\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{C}}]$。 □

注 3.13（多个见证）。第二分离并不限于确定性序列式。在第 4.3 节中，另外两组双模拟等价对分别证明了分类托普斯并不等价：菱形图与合流树（由弱合流序列式区分），以及自环系统与二循环（由全称自环序列式区分）。

推论 3.14（双重解释不蕴含拓扑斯等价）。系统层面的双重解释不蕴含拓扑斯等价：$\mathscr{H}$和 $\mathscr{C}$ 满足 $\mathscr{H}\rightleftarrows\mathscr{C}$（根据定理 *3.9*，具有双重解释）以及 $\mathscr{H}\approx\mathscr{C}$（关系互模拟等价），但 $\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{H}}]\not\simeq\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{C}}]$。

3.4. 商桥。对于有根迁移系统 $\mathscr{M}$，其路径等价商$\mathscr{M}/\!\sim$的状态为 $S_{\mathscr{M}}/\!\sim$；当某些代表元满足 $s_1'\to s_2'$，且 $s_1'\sim s_1$ 和 $s_2'\sim s_2$时，$[s_1]\to[s_2]$ 中存在相应的转移；初始状态为 $[\star_{\mathscr{M}}]$。该商将路径等价状态合并为单个等价类。

定理 3.15（商桥接定理）。对于所有有根迁移系统 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$，如果 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$之间存在函数双模拟，那么它们的路径等价商具有等价的分类托普斯：

$$\boxed{\mathscr{M}\ \textit{and}\ \mathscr{N}\ \textit{are functionally bisimilar}\implies\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}/\sim}]\simeq\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{N}/\sim}]}$$

证明。令 $(f,\ g)$ 为 $\mathscr{M}$ and $\mathscr{N}$ 之间的函数双模拟。论证分为两步：先下降到商，再取互逆。

良定义性。我们证明 f保留路径等价：若 $s_1\sim_{\mathscr{M}} s_2$，则 $f(s_1)\sim_{\mathscr{N}} f(s_2)$。对于前向可达性，假设 $f(s_1)\to^* v$属于 $\mathscr{N}$；我们必须证明 $f(s_2)\to^* v$。由于g是一个模拟，$gf(s_1)\to^* g(v)$属于 $\mathscr{M}$。相干条件 $gf(s_1)\sim_{\mathscr{M}} s_1$给出$s_1\to^* g(v)$，继而由 $s_1\sim_{\mathscr{M}} s_2$可得 $s_2\to^* g(v)$。由于 f是一个模拟，$f(s_2)\to^* fg(v)$。相干条件 $fg(v)\sim_{\mathscr{N}} v$ 意味着 $fg(v)\to^* v$（路径等价意味着相互可达性），因此 $f(s_2)\to^* fg(v)\to^* v$。反向可达性情形对称。因此，f诱导出

$\bar{f}\colon\ \mathscr{M}/\!\sim\to\mathscr{N}/\!\sim$由 $f([s])=[f(s)]$给出；类似地，g 诱导出 $\bar{g}$。

互逆。复合映射 $\bar{g}f([s]) = [gf(s)]$。相干条件 $gf(s) \sim_{\mathscr{M}} s$给出 $[gf(s)] = [s]$，因此 $\bar{g}f =$为恒等映射。对称地， $f\bar{g} =$为恒等映射。由于 f同时保留迁移和路径等价关系， f 是商系统的一个模拟； $\bar{g}$也同样如此。因此， f 和 $\bar{g}$ 是互逆模拟，从而 $\mathscr{M}/{\sim} \cong \mathscr{N}/{\sim}$ 作为有根迁移系统成立。系统同构具有相同的几何理论，因此其分类拓扑斯等价。 □

根据商桥，函数双模拟保持商的分类托普斯，尽管关系双模拟未必保持原系统的分类托普斯。商恰好坍缩确定性序列式所检测的分支结构：在 $\mathscr{H}/{\sim}$中，状态 b 与 c 合并为 $[b] = [c]$，从而使得 $\mathscr{H}/{\sim} \cong \mathscr{C}/{\sim}$。

注 3.16 （函子结构）。 赋值 $\mathscr{M} \mapsto \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}]$ 延拓为一个反变2-函子 $\mathcal{E}[-]\colon \mathbf{Mwy}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{BTop}$，其中**Mwy** 是由有根迁移系统、模拟与路径等价同伦构成的2-范畴，而**BTop** 是由格罗滕迪克拓扑斯、几何态射与几何变换构成的2-范畴。模拟$f\colon\ \mathscr{M} \to \mathscr{N}$通过沿 f拉回模型诱导几何态射 $f^*\colon\ \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{N}}] \to \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}]$；2-胞腔 $\alpha\colon\ f \Rightarrow g$诱导几何变换 $g^* \Rightarrow f^*$。在此语言中，三级层次结构编码三个纤维条件：相互模拟意味着几何态射双向存在；函数双模拟意味着它们在路径等价商上复合为等价关系（定理 3.15）；拓扑斯等价意味着几何理论的森田等价。每个这样的几何态射都分解为先超连通（添加公理）、后局部化（扩充语言）；第二分离是纯超连通的，因为确定性序列式是同一语言上的一条公理。2-函子性源于如下标准事实：沿模拟对模型作拉回保持几何态射的复合，并且路径等价同伦经由句法范畴的泛性质提升为几何变换。综上所述：

$$\mathscr{M} \xrightarrow{\ f\ } \mathscr{N} \qquad\longmapsto\qquad \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{N}}] \xrightarrow{\ f^*\ } \mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}]$$

4. 双模拟不变片段

第 3 节的层级表明，几何逻辑能够揭示双模拟无法呈现的结构，却没有解释原因。本节将明确界限：几何逻辑的双模拟不变片段恰好就是仅含菱形模态的 Hennessy–Milner 逻辑，而三种句法机制则解释了几何逻辑突破这一界限的所有方式。

4.1. 仅含菱形模态的 Hennessy–Milner 逻辑。

定义 4.1 (HML)。 仅含菱形模态的 *Hennessy–Milner* 逻辑 *HML*由以下内容生成：

$$\varphi \ ::=\ \top \mid \bot \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \Diamond\varphi$$

在有根迁移系统 $\mathscr{M}$ 的状态 s 处，其语义是标准的： $\mathscr{M},\ s \models \top$ 永远为真； $\mathscr{M},\ s \models \bot$ 永远为假； $\mathscr{M},\ s \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ 当且仅当两个合取项都成立； $\mathscr{M},\ s \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ 当且仅当至少一个析取项成立； $\mathscr{M},\ s \models \Diamond\varphi$ 当且仅当存在 t，使得 $s \to t$ 且 $\mathscr{M}。\ t \models \varphi$

标准翻译 将HML 嵌入到基于有根迁移语言的一阶逻辑的正存在片段中：

$$\mathrm{ST}_x(\top) = \top \qquad \mathrm{ST}_x(\bot) = \bot$$
$$\mathrm{ST}_x(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathrm{ST}_x(\varphi_1) \wedge \mathrm{ST}_x(\varphi_2) \qquad \mathrm{ST}_x(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathrm{ST}_x(\varphi_1) \vee \mathrm{ST}_x(\varphi_2)$$
$$\mathrm{ST}_x(\Diamond\varphi) = \exists y.\, (\Delta(x,y) \wedge \mathrm{ST}_y(\varphi))$$

标准翻译的像具有三个显著性质。首先，它是无相等符号的：其中不出现相等符号。其次，它具有线性变量：每个存在量化变量 y 恰好在一个以其为目标的 Δ-原子中出现，且不出现在其他原子位置。第三，它具有树形依赖：变量依赖图（其中 $x \to y$ 表示 y 在 x下的一个 $\Diamond$ 中引入）是一片森林。用数据库理论 [42], 的术语来说，标准翻译恰好生成二元关系 Δ上的无环合取查询。

4.2. **正向：HML 具有双模拟不变性**。

定理 4.2（HML 双模拟不变性）。 设 R 是有根迁移系统 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{N}$ 之间的一个关系双模拟，并令（s， t）$\in R$。对于任意 *HML* 公式 φ：

$$\boxed{\mathscr{M}, s \models \varphi \iff \mathscr{N}, t \models \varphi}$$

证明。 我们对 φ作结构归纳，同时证明两个方向。$\varphi = \top$ 的情形显然，因为 $\top$ 处处成立。 $\varphi = \bot$ 的情形显然，因为 $\bot$ 处处不成立。对于 $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$：由于（$s$， t）$\in R$，归纳假设给出：对于 $i = 1$，2， $\mathscr{M}$， $s \models \varphi_i$当且仅当$\mathscr{N}$， $t \models \varphi_i$，因此合取得以保持。 $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$的情形类似。

对于 $\varphi = \Diamond\psi$：假设 $\mathscr{M}, s \models \Diamond\psi$，那么存在 s'使得 $s \to s'$属于 $\mathscr{M}$且 $\mathscr{M}, s' \models \psi$。由于 $(s,t) \in R$ 且 R 是一个双模拟，前向条件给出 t'，使得 $t \to t'$ 属于 $\mathscr{N}$且 $(s',t') \in R$。对 ψ和配对 (s',t') 应用归纳假设，我们得到 $\mathscr{N}, t' \models \psi$，因此 $\mathscr{N}, t \models \Diamond\psi$。反向方向对称地使用后向条件：给定 t'，使得 $t \to t'$ 属于 $\mathscr{N}$且 $\mathscr{N}, t' \models \psi$，后向条件给出 s'，使得 $s \to s'$ 属于 $\mathscr{M}$ 且 $(s',t') \in R$；归纳假设给出 $\mathscr{M}, s' \models \psi$，因此 $\mathscr{M}, s \models \Diamond\psi$。 □

备注 4.3（Hennessy–Milner 逆命题）。 定理 4.2 的逆命题（对于像有限系统，HML等价蕴含双模拟等价）即为 Hennessy–Milner 定理 [19]。我们的定理 4.5 讨论的是另一个问题：双模拟不变性是否在几何逻辑中刻画了 HML，而非 HML 是否刻画双模拟。

4.3. **三种分离机制**。 每种机制都展现一种几何性质 P，可用几何序列表示；一个互模拟对（M， N），其中 $M \models P$和 $N \not\models P$；以及对为何 P 不属于HML的句法解释。

4.3.1. 机制 *1*：后件相等（σ_{det}）。 确定性序列式 $\sigma_{\mathrm{det}} := \Delta(x,\ y) \wedge \Delta(x,\ z) \vdash y = z$ 断言，每个状态至多有一个后继。

见证对是枢纽辐条系统 $\mathscr{H}$和二循环 $\mathscr{C}$，其双模拟已在定理 3.12 中确立。二循环是确定性的： x 只有唯一后继 y，且 y 只有唯一后继 x，因此 $\mathscr{C} \models \sigma_{\mathrm{det}}$。 枢纽辐条系统不是确定性的： a 有两个不同的后继 b 和 c，因此 $\mathscr{H} \not\models \sigma_{\mathrm{det}}$。 所以 σ_{det} 不是双模拟不变的。

句法解释是，结论包含 $y = z$，即全称约束变量之间的相等关系。*HML* 的标准翻译绝不会产生相等关系：每个◇ 都会引入一个新变量，且翻译中任何地方都不会出现相等符号。

4.3.2. 机制二：循环变量共享 (σ_{conf})。弱合流序列式 $\sigma_{\text{conf}} :=\Delta(x,\ y) \wedge \Delta(x,\ z) \vdash \exists w.(\Delta(y,\ w) \wedge \Delta(z,\ w))$ 断言，状态的任意两个后继都有一个共同后继。

菱形图 $\mathscr{G}$包含状态 $\{a, b, c, d\}$、迁移 $a \to b$, $a \to c$, $b \to d$, $c \to d$,$d \to d$，以及初始状态 a。从 a 出发的两条路径在 d处汇合，形成菱形。合流树 $\mathscr{T}$包含状态 $\{a, b, c, d_1, d_2\}$、迁移 $a \to b$, $a \to c$, $b \to d_1$, $c \to d_2$,$d_1 \to d_1$, $d_2 \to d_2$，以及初始状态 a。从 a 出发的两条路径分叉，分别通向不同的自环汇点。（终止状态带有自环，因此这些状态上的步关系是全定义的，使弱合流的定义有意义。）

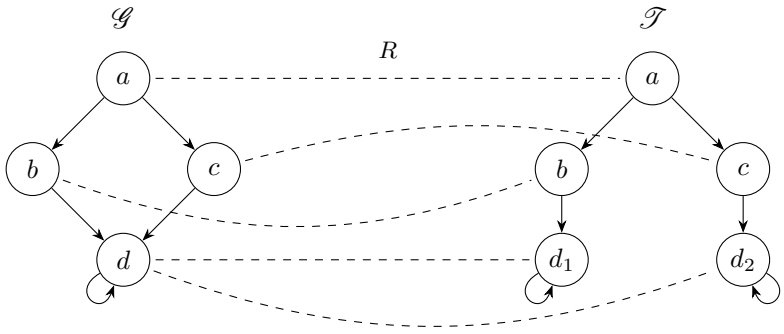


图5：菱形图 $\mathscr{G}$ 和合流树 $\mathscr{T}$ 之间的双模拟 R ={(a, a), (b, b), (c, c), (d, d_1), (d, d_2)}。$\mathscr{G}$中的合并点 d 分裂成 $\mathscr{T}$中的不同汇点 d_1、d_2；它们都有自环，但没有共同后继。

关系 $R = \{(a,\ a), (b,\ b), (c,\ c), (d,\ d_1), (d,\ d_2)\}$ 是 $\mathscr{G}$与 $\mathscr{T}$之间的关系双模拟。我们检查全部五组前向／后向配对；关键的一对是 $(d,\ d_1)$，其中菱形图中的合并对应树中的分叉。

前向条件。在 (a, a) 处： $a \to b$ 由 $a \to b$ 匹配，且 $(b, b) \in R$； $a \to c$ 由 $a \to c$ 匹配，且 $(c, c) \in R$。在 (b, b) 处： $b \to d$ 由 $b \to d_1$ 匹配，且 $(d, d_1) \in R$。在 (c, c) 处： $c \to d$ 由 $c \to d_2$ 匹配，且 $(d, d_2) \in R$。在 (d, d_1) 处： $d \to d$ 由 $d_1 \to d_1$ 匹配，且 $(d, d_1) \in R$。在 (d, d_2) 处： $d \to d$ 由 $d_2 \to d_2$ 匹配，且 $(d, d_2) \in R$。后向条件。对称地验证： $\mathscr{T}$ 中从相关状态出发的每个转移，在 $\mathscr{G}$中都有匹配的转移。

菱形图满足弱合流：在状态 a，后继状态 b 和 c 都能到达 d（分别经过 $b \to d$ 和 $c \to d$），因此 $w = d$ 是所需的共同后继。合流树不满足弱合流：在状态 a，后继状态 b 和 c 分别到达 d_1 和 d_2，而 d_1 和 d_2 都只有一个自环，因此它们没有共同后继。因此，σ_{conf} 不是双模拟不变的。

句法解释是，变量 w 作为来自两个不同源 y 和 z的 Δ目标出现，从而形成一个合流约束，即变量依赖图中的一个环。在*HML*的标准翻译中，每个存在量词绑定的变量在依赖图中恰好有一个父节点。

4.3.3. 机制 *3*：重复变量（σ_{loop}）。该全称自环序列式 $\sigma_{\text{loop}} := \top \vdash_x \Delta$（$x$、 x）断言每个状态都有一个自环。

这个自环系统 $\mathscr{L}$只有一个状态 a，带有转移 $a \to a$ 和初始状态 a。这是可能存在的最简单系统：一个带有自环的状态。二循环 $\mathscr{C}$ 在第 3.3 节中定义。

关系 $R = \{(a,x),(a,y)\}$ 是 $\mathscr{L}$与 $\mathscr{C}$之间的关系双模拟。前向条件：在 (a,x)处， $a \to a$ 由 $x \to y$ 匹配，且 $(a,y) \in R$；在 (a,y)处， $a \to a$ 由 $y \to x$ 匹配，且 $(a,x) \in R$。后向条件：在 (a,x)处， $x \to y$ 由 $a \to a$ 匹配，且 $(a,y) \in R$；在 (a,y)处， $y \to x$ 由 $a \to a$ 匹配，且 $(a,x) \in R$。

自环系统满足 σ_{loop}：唯一的状态 a 具有自环 $a \to a$。二循环则不满足： x 和 y 都没有自环（转移为 $x \to y$ 和 $y \to x$，其中有 $x \neq y$）。因此，σ_{loop} 不是双模拟不变的。

句法解释是，变量 x 出现在 Δ 的两个论元位置中，这隐含了源与目标之间相等。在标准翻译中， $\Diamond\varphi$ 会生成$\exists y.\,(\Delta(x,\ y) \wedge \cdots)$，其中 x和 y始终是不同的变量。

4.3.4. 统一观察。

定理 4.4（三种机制的区分）。存在三组在关系意义上双模拟等价的有限系统，每组都由一种几何性质区分，该性质见证了 *HML* 之外一种不同的句法机制：

(1) 后件相等： $\mathscr{H} \approx \mathscr{C}$和 $\mathscr{C} \models \sigma_{\text{det}}$， $\mathscr{H} \not\models \sigma_{\text{det}}$；(2) 循环变量共享： $\mathscr{G} \approx \mathscr{T}$和 $\mathscr{G} \models \sigma_{\text{conf}}$， $\mathscr{T} \not\models \sigma_{\text{conf}}$；(3) 重复变量： $\mathscr{L} \approx \mathscr{C}$和 $\mathscr{L} \models \sigma_{\text{loop}}$， $\mathscr{C} \not\models \sigma_{\text{loop}}$。

这三种机制都断言两个结构位置由同一个状态填充。后件相等断言 $y = z$（两个目标重合）。循环共享断言两条路径相交（两个源共享一个目标）。重复变量断言 $x = y$（源等于目标）。双模拟总是可以将一个状态复制成不同的副本，从而打破任何此类同一化约束。仅含菱形模态的*HML* 避免了这三种情况：每个 $\Diamond$ 都会引入一个新变量，该变量恰好与一个父原子相连，不存在相等、共享或重复。

4.4. 几何 van Benthem 定理。

定理 4.5 (几何 van Benthem)。 关系签名上的几何序列 $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ 是双模拟不变的，当且仅当 ψ 等价于（在 ϕ的模型上）仅含菱形算子的 *HML* 的标准翻译像中的公式的析取：

$$\boxed{\phi \vdash_{\vec{x}} \psi \textit{ is bisim-invariant} \quad\Longleftrightarrow\quad \psi \equiv \bigvee_i \mathrm{ST}_x(\varphi_i)}$$

正向（定理 4.2）通过构造性方法证明。后向条件——即每个双模拟不变几何公式都等价于*HML*像中的一个公式——通过有界树展开（第 4.7 节）得以确立。特征公式方法将传递分解为三种情况，并以构造性方法逐一解决：树展开的特征*HML* 公式 $\chi_{T,v}$ 通过几何树分解，将几何满足归约为 *HML* 满足；而正 *HML* 的模拟不变性则解决了在树上为真的情况。剩余的情况，即 ϕ 在图和树上均为假，则由传递的逆否命题得出，无需额外的几何内容。

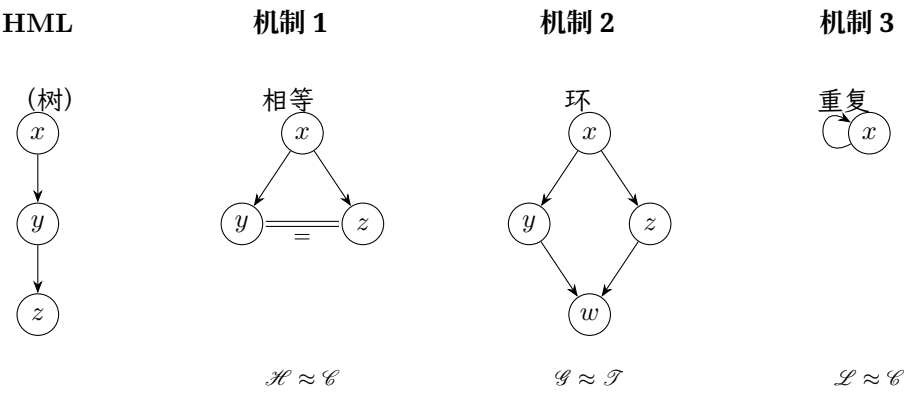


图 6：三种分离机制的变量依赖图。HML 产生树形依赖（左图）；每种机制都以不同方式打破树形结构。边表示 Δ 原子；机制 1 中的双线表示 $y = z$。各机制下方展示了见证对（参见图 2–4 及上方的 DG/CT图）。

该定理旨在填补保守定理图景中的一个开放单元。Van Benthem 的原始定理 [38] 指出，模态逻辑是一阶逻辑中双模拟不变的片段；Rosen [34] 将这一结果推广到有限结构。Celani–Jansana [14]证明，正模态逻辑（◇、 □，无否定）是一阶正逻辑中双模拟不变的片段；Rossman [35] 则证明，存在正逻辑是在有限结构上的同态保守片段。几何类比——即仅含菱形模态的 *HML*是几何逻辑中双模拟不变的片段——正是定理 4.5 的内容。

这一刻画与合取查询理论 [42]相关：树形片段对应于无环合取查询，其中无环性保证了多项式时间求值。这三种机制恰好对应于合取查询相对于二元关系而言可能不满足无环性的三种方式。

从结构上看，机制恰好有三种且没有其他机制，这并非偶然。关于二元关系 Δ 且只有一个自由变量 x 的每个几何公式，都由原子Δ(t_1, t_2)和等式 $t_1 = t_2$构成，其中 t_1, t_2 表示变量。若此类公式不属于标准翻译的像，就必须至少违反刻画该像的三种性质之一：无等号性、变量线性性或树形依赖。违反无等号性意味着公式中含有 $t_1 = t_2$；当两个变量都被全称量化绑定时，这就是机制 1（后件相等）；当 $t_1 = t_2$将某个步原子的源与目标认作同一变量时，这就是机制 3（重复变量）。违反树形依赖条件意味着变量依赖图中含有一个环，这就是机制 2（循环变量共享）。违反线性性（某个变量在两个步原子中均作为目标出现）会导致一个环（归结为机制 2）或一个等式（归结为机制 1 或 3）。这一句法观察与完整证明之间的差距在于公式层面的分解：必须证明复杂公式的双模拟不变性会迫使它等价于某个*HML* 公式，而不仅仅是证明单个非*HML* 原子可以被分离。

推论 4.6 (机制完备性)。 这三种机制（后件相等、循环变量共享和重复变量）穷尽了每个量词深度下的所有非 *HML* 几何原子

：对于每个深度 d，每个关于一个自由变量和一个二元关系的、深度为 d 且非双模拟不变的几何原子，都可以由一个运用这三种机制之一的见证对加以区分。

这由定理 4.5 得出：若每一个双模拟不变几何公式都可分解为 HML，则每一个非 HML 原子必定不是双模拟不变的。逆命题并不成立；该推论断言的是单个原子的分离，而非任意公式的分解。通过深度 2 的独立验证（定理 4.7–4.10）提供了构造性见证。

4.5. **证实性深度有界实例**。 以下深度有界实例通过在较低深度上的穷尽验证证实了定理 4.5，从而为一般结果提供了独立证据。将HML 公式的菱形深度 定义为：深度(⊤) =深度(⊥) $= 0$，对 $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ 有深度($\varphi_1 \circ \varphi_2$) = max(深度($\varphi_1$),深度($\varphi_2$))，以及深度($\Diamond\varphi$) =深度($\varphi$) $+ 1$。

在每个深度上，关于一个自由变量 x 和二元关系 Δ的几何原子都可以有限枚举。我们证明，在深度 0 和 1 时，每个非HML 原子都不是双模拟不变的，而每个HML 原子都是双模拟不变的，从而验证了定理在这些深度上的成立。

4.5.1. 深度 *0*。

定理 4.7（深度 0 的 Van Benthem 定理）。每个深度为0 的 ***HML*** 公式都是常值的（在任何系统的每个状态上都为 $\top$ 或 $\bot$），而 $\Delta(x, x)$ 不是双模拟不变的。

证明。我们通过对公式进行结构归纳来证明其为常值。公式 $\top$ 在任何系统的每个状态上都恒为真。公式 $\bot$ 恒为假。如果 φ 和ψ 都为常值，那么它们的合取 $\varphi \wedge \psi$ 也是常值：如果二者都恒为真，则合取恒为真；如果其中一个恒为假，则合取恒为假。析取的情形类似。菱形模态的情形是空泛成立的：深度为 0 的公式不能以菱形模态作为最外层逻辑联结词，因为 depth($\Diamond\varphi$) $=$ depth(φ) $+ 1 \geq 1$。

对于这一分离，自环系统 $\mathscr{L}$和二循环 $\mathscr{C}$ 提供了见证。第 4.3 节（机制 3）中已验证双模拟 $R = \{(a,\ x),\ (a,\ y)\}$。在 $\mathscr{L}$中，状态 a满足 $\Delta(a,\ a)$。在 $\mathscr{C}$中，状态 x 不满足 $\Delta(x,\ x)$，因为 x唯一的转移是 $x \to y$，且带有 $y \neq x$。由于 $(a,\ x) \in R$，自环性质 $\Delta(x,\ x)$并非双模拟不变。□

由于 $\Delta(x,\ x)$ 是单个自由变量上的唯一非平凡深度 0 几何原子，而二元关系 Δ （除空合取 $\top$外，$\{\Delta(x,\ x)\}$ 中的原子所构成的唯一合取）也是如此；又由于每个深度 0 的 HML 公式都是常量，因此双模拟不变的深度 0 几何公式恰好是常量 $\top$ 和 $\bot$，而它们也恰好就是深度 0 的HML 公式。

4.5.2. 深度 1。在深度 1 时，除常量外，唯一的 HML 原子是 $\Diamond\top = \exists y.\, \Delta(x, y)$，它断言 x 有一个后继。关于 $\{x\}$ 和 Δ 的深度 1 几何原子包括所有形如 $\exists y.\, \alpha(x, y)$ 的性质，其中 α 是由 $\{\Delta(x, y)$ $\Delta(y, x)$、$\Delta(x, x)$ $\Delta(y, y)$ $x = y\}$ 中的原子构成的合取。除 $\Diamond\top = \exists y.\, \Delta(x, y)$ 外，每个这样的原子都涉及以下情形之一：自环（$\Delta(x, x)$ 或 $\Delta(y, y)$）、回边（$\Delta(y, x)$）或相等（$x = y$）。

为区分涉及回边的原子，我们将第 3.2 节中的路径 $\mathscr{P}$（状态$\{x, y\}$、迁移 $x \to y$ 和 $y \to y$）与一个新系统配对。回边图 $\mathscr{R}$ 具有以下状态

{rt,lp}，迁移 rt $\to$ lp、lp $\to$ lp 和 lp $\to$ rt，以及初始状态 rt：这是一条添加了一条回边的路径。

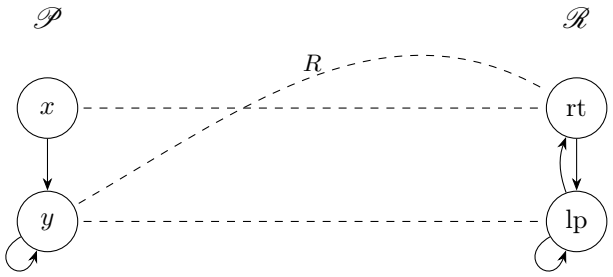


图 7：路径 $\mathscr{P}$和回边图 $\mathscr{R}$之间的双模拟 $R = \{(x,\ \text{rt}),\ (y,\ \text{lp}),\ (y,\ \text{rt})\}$。$\mathscr{R}$ 中的回边 lp $\to$ rt 被 $\mathscr{P}$中的自环 $y \to y$ 吸收。

关系 $R = \{(x,\ \text{rt}),\ (y,\ \text{lp}),\ (y,\ \text{rt})\}$ 是 $\mathscr{P}$与 $\mathscr{R}$之间的关系双模拟。关键点对是 $(y,\ \text{lp})$，其中回边 lp $\to$ rt 必须由自环 $y \to y$吸收。前向条件。在 $(x,\ \text{rt})$ 处：$x \to y$由 rt $\to$lp 与 $(y,\ \text{lp}) \in R$匹配。在 $(y,\ \text{lp})$ 处：$y \to y$由 lp $\to$lp 与 $(y,\ \text{lp}) \in R$匹配。在 $(y,\ \text{rt})$ 处：$y \to y$由 rt $\to$ lp 与 $(y,\ \text{lp}) \in R$匹配。
后向条件。在 $(x,\ \text{rt})$ 处：rt $\to$lp 由 $x \to y$与 $(y,\ \text{lp}) \in R$匹配。在 $(y,\ \text{lp})$ 处：lp $\to$lp 由 $y \to y$与 $(y,\ \text{lp}) \in R$匹配；lp $\to$rt 由 $y \to y$与 $(y,\ \text{rt}) \in R$匹配。在 $(y,\ \text{rt})$ 处：rt $\to$lp 由 $y \to y$与 $(y,\ \text{lp}) \in R$匹配。

定理 *4.8*（深度 *1* 范本特姆）。在深度 *1* 几何原子中，唯一具有双模拟不变性的原子是 $\Diamond\top$。具体而言，$\exists y.\, \Delta(x, y)$ 具有双模拟不变性，而以下五种性质不具有双模拟不变性：自环性质 $\Delta(x, x)$、存在前驱性质 $\exists y.\, \Delta(y, x)$、存在自环性质 $\exists y.\, \Delta(y, y)$、互为邻居性质$\exists y.\, (\Delta(x, y) \wedge \Delta(y, x))$，以及后继自环性质 $\exists y.\, (\Delta(x, y) \wedge \Delta(y, y))$。

证明。存在后继性质 $\exists y.\, \Delta(x, y)$ 是 $\Diamond\top$ 的标准翻译，因此根据定理 4.2，它具有双模拟不变性。具体而言：若 $(s, t) \in R$ 对于一个关系双模拟 R成立，且 s 有一个后继 s'，则前向条件给出 t'，使得 $t \to t'$ 且 $(s', t') \in R$成立，因此 t 有一个后继。后向条件给出反向结论。

自环性质 $\Delta(x,\ x)$ 不是双模拟不变的：双模拟 $R = \{(a,\ x),\ (a,\ y)\}$ 在 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{C}$ 之间（已在第 4.3 节验证）将 a 与 x 联系起来，而 $\mathscr{L} \models \Delta(a,\ a)$ 成立，$\mathscr{C} \not\models \Delta(x,\ x)$ 则不成立。

存在前驱性质 $\exists y.\, \Delta(y,\ x)$ 不是双模拟不变的：$\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{R}$ 之间的双模拟将 x 与 rt 联系起来。在 $\mathscr{P}$ 中，状态 x 没有前驱（没有转移以 x 为目标：唯一的转移是 $x \to y$ 和 $y \to y$）。在 $\mathscr{R}$ 中，状态 rt 有前驱 lp（通过转移 lp $\to$rt）。

存在自环性质 $\exists y.\, \Delta(y,\ y)$ 不是双模拟不变的：$\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{C}$ 之间的双模拟将 a 与 x 联系起来。在 $\mathscr{L}$ 中，见证 $y = a$ 满足 $\Delta(a,\ a)$。在 $\mathscr{C}$ 中，x 和 y 都没有自环，因此不存在见证。

互为邻居性质 $\exists y.(\Delta(x, y) \wedge \Delta(y, x))$ 并非双模拟不变：$\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{R}$ 之间的双模拟将 x 与 rt 联系起来。在 $\mathscr{R}$ 中，状态 rt 有互为邻居 lp：rt $\to$ lp 且 lp $\to$ rt。在 $\mathscr{P}$ 中，状态 x 只有一个后继 y，而 y 不会转移回 x（它唯一的转移是自环 $y \to y$）。

后继自环性质 $\exists y.(\Delta(x,y) \wedge \Delta(y,y))$ 并非双模拟不变：$\mathscr{L}$ 与 $\mathscr{C}$ 之间的双模拟将 a 与 x联系起来。在 $\mathscr{L}$中，见证 $y = a$ 满足$\Delta(a,a) \wedge \Delta(a,a)$。在 $\mathscr{C}$中，状态 x 有唯一后继 y，而 y没有自环（它唯一的转移是 $y \to x$）。 □

特别地，$\Diamond\top$ 是唯一的双模拟不变深度 1 原子：每个深度 1 几何原子都是双模拟不变的，当且仅当它等价于 $\Diamond\top$。

注 4.9（深度 1 覆盖）。覆盖论证如下。每个深度 1 几何原子 $\exists y.\alpha(x,y)$，若其中 α 并非只是 $\Delta(x,y)$，则必须至少包含一个来自 $\{\Delta(x,x)\ \Delta(y,y)\ \Delta(y,x)\ x = y\}$ 的额外合取项。涉及 $\Delta(x,x)$、$\Delta(y,y)$ 或 $x = y$ 的原子，都可由自环／二环见证对区分（因为 $x = y$ 将$\exists y.(\Delta(x,y) \wedge x = y)$化简为 $\Delta(x,x)$，而后者已被覆盖）。涉及 $\Delta(y,x)$ 的原子，则可由路径／回边见证对区分。因此，上述五个原子涵盖了所有非 HML 深度 1 现象。

4.5.3. 深度 *2*。 在深度 2 时，一个自由变量 x 和二元关系 Δ 上的几何原子形式为 $\exists y.\exists z.\alpha(x,\ y,\ z)$ 或 $\Delta(x,\ x) \wedge \exists y.\beta(x,\ y)$，其中 α 和 β 是步原子与等式的合取。除常量和 $\Diamond\top$ 外，唯一的深度 2 *HML* 公式（在等价意义下）是 $\Diamond\Diamond\top = \exists y.(\Delta(x,\ y) \wedge \exists z.\Delta(y,\ z))$，它断言 x 有一个后继，而该后继本身还有一个后继。

定理 4.10（深度 2 范本特姆定理）。 在深度 *2* 的几何原子中，唯一双模拟不变的原子是 $\Diamond\Diamond\top$。具体而言，有七个非 *HML* 原子不是双模拟不变的：

(1) $\exists y.(\Delta(x,y) \wedge \Delta(y,y))$ （后继有自环）
(2) $\exists y.\exists z.(\Delta(x,y) \wedge \Delta(y,z) \wedge \Delta(z,y))$ （后继在二环上）
(3) $\exists y.\exists z.(\Delta(x,y) \wedge \Delta(y,z) \wedge \Delta(z,z))$ （后继到达自环）
(4) $\exists y.\exists z.(\Delta(x,y) \wedge \Delta(y,z) \wedge \Delta(x,z))$ （后继有共同后继）
(5) $\Delta(x,\ x) \wedge \exists y.\Delta(x,\ y)$ （自环且有后继）
(6) $\Delta(x,x) \wedge \exists y.(\Delta(x,y) \wedge \exists z.\Delta(y,z))$ （自环且后继有后继）
(7) $\exists y.\exists z.(\Delta(x,y) \wedge \Delta(y,z) \wedge \Delta(z,x))$ （后继可到达后向条件）

证明。 具有后继的后继性质 $\Diamond\Diamond\top$ 是 $\Diamond\Diamond\top$在*HML*中的标准翻译，因此根据定理 4.2，它是双模拟不变的。

对于区分，只需两个见证对。自环 $\mathscr{L}$与二循环 $\mathscr{C}$ 见证对（来自第 4.3 节）可以区分原子 (1) 和 (3)–(7)：自环具有 $\Delta(a,\ a)$，而二循环没有自环；此外，自环的分支结构（a 只能到达 a）与二循环的分支结构（x 可以到达 y 和 x）不同。

原子 (2) 需要一个新的见证对。循环入口系统 $\mathscr{C}_e$的状态为 $\{a,b,c\}$，转移为 $a \to b$、$b \to c$、$c \to b$，初始状态为 a：状态 a 通向二环 $b \leftrightarrow c$。延展入口系统 $\mathscr{E}$的状态为 $\{a,b,c,d\}$，转移为 $a \to b$、$b \to c$、$c \to d$、$d \to c$，初始状态为 a：状态 a 经过一条中间路径通向二环 $c \leftrightarrow d$。

关系 $R = \{(a,a)\} \cup (\{b,c\} \times \{b,c,d\})$ 是 $\mathscr{C}_e$与 $\mathscr{E}$之间的关系双模拟。前向条件：在 (a,a) 处：$a \to b$由 $a \to b$ 匹配，并满足 $(b,b) \in R$。对于任意满足 $s \in \{b,c\}$ 且$t \in \{b,c,d\}$的 (s,t)：来自 s的唯一转移（$b \to c$或 $c \to b$）由来自 t的一个转移匹配——即 $b \to c$、$c \to d$或 $d \to c$——且目标对属于 $\{b,c\} \times \{b,c,d\}$。后向条件：在 (a,a) 处：$\mathscr{E}$ 中的 $a \to b$ 由 $a \to b$ 匹配，并满足 $(b,b) \in R$。对于任意满足 $s \in \{b,c\}$ 且

$t \in \{b, c, d\}$：来自 t 的唯一转移（ $b \to c$、 $c \to d$或 $d \to c$）由来自 s的$b \to c$ 或 $c \to b$ 匹配，且目标对仍属于 $\{b, c\} \times \{b, c, d\}$。

在 $\mathscr{C}_e$ 中，从 a 出发，后继 b 具有带 $c \to b$ 的后继 c，因此原子 (2) 成立。在 $\mathscr{E}$ 中，从 a 出发，后继 b 具有唯一后继 c，但 c 的唯一后继是 $d \neq b$，因此原子 (2) 不成立。□

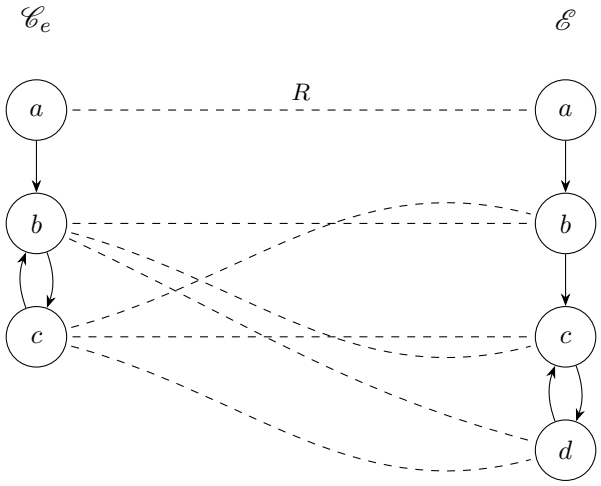


图 8：循环入口系统 $\mathscr{C}_e$ 与延展入口系统 $\mathscr{E}$，其双模拟为 $R = \{(a, a)\} \cup (\{b, c\} \times \{b, c, d\})$。两个系统双模拟等价，但原子 (2) $\exists y.\,(\Delta(x, y) \wedge \exists z.\,(\Delta(y, z) \wedge \Delta(z, y)))$ 在 $\mathscr{C}_e$ 中成立，而在 $\mathscr{E}$ 中不成立。

Lean 形式化枚举了所有结构上互异的深度 2 原子（在合并可分解为深度 0/1 性质或被其他原子平凡蕴含的原子之后，共八个），并逐一验证；我们在上文列出了七个非 *HML* 情形。特别地， $\Diamond\Diamond\top$ 是唯一的双模拟不变的深度 2 原子。

注 4.11（深度 2 机制）。 深度 2 分析证实，机制 2 和机制 3 在此深度均会发挥作用（机制 1——显式后件相等——不会出现在深度 2 步原子中）。自环/二循环对体现了机制 3（重复变量，通过原子 (1)、(3) 和 (5)–(6)：每个原子都包含 $\Delta(y,\ y)$、 $\Delta(z,\ z)$ 或 $\Delta(x,\ x)$，即一个在步原子两个位置上重复出现的变量）。循环入口/延展入口对体现了机制 2（循环变量共享，通过原子 (2) 中的后向条件 $z \to y$ ）。原子 (7) 由后向条件 $z \to x$ 隔开，这也是机制 2 的一个实例。原子 (4) 涉及菱形模式 $x \to y \to z$，其中带有 $x \to z$，在源与一个深度 2 后代之间形成变量共享。

4.6. 作为内涵噪声的三种机制。 这三种区分机制除了作为区分见证之外，还有计算解释。

回想一下，对于二元关系 Δ 和自由变量 x 上的几何公式，当且仅当它至少违反以下三个条件之一时，它才不属于仅含菱形模态的 *HML* 的标准翻译的像：无等号性、树形变量依赖和变量线性。这些机制正是违反这些条件的三种方式。

第 4.3 节的统一性观察——这三种机制都断言两个结构位置重合——具有精确的范畴论含义：每种机制都对应于句法范畴中的一个等化子条件。双模拟可以始终将状态复制成彼此不同的副本（前向条件），因而系统性地破坏等化子约束。仅含菱形模态的 HML 在每个 $\Diamond$ 处引入一个新变量，因而系统性地避开这些约束。定理 4.12 确立了其语义内容（d-双模拟不变性）；几何范本特姆定理（定理 4.5）则确认了这一句法刻画：这三种机制穷尽了内涵噪声，也就是说，每个未被 HML 捕获的几何性质都经由其中一种机制分解。复杂度图景也值得关注：对于 $n = 2$，判定模 n-嵌套模拟下的特征公式是 coNP完全问题；对于 $n \geq 3$ [6]，则是 PSPACE完全问题。这表明，要扩展有界验证，必须依靠结构性论证，而非蛮力穷举。

HML 刻画及其三种机制为该谱提供了几何语言。

4.7. 通过树展开进行证明。 第4.5节中对有界深度的验证通过穷尽式分类讨论，在深度 0–2 处提供了独立的确认。一般性证明采用了不同的方法。我们将介绍基于有界树展开 的形式化证明策略，该策略可在任意深度证明定理 4.5。

有界树展开。对于一个带指定状态的有限标记转移系统 (G, v) 和深度界 d，其有界树展开 $\mathcal{T}_d(G, v)$ 的顶点是从 v 出发、长度为 $\leq d$ 的计算路径：有限序列 $[(a_1, w_1) \ldots, (a_k, w_k)]$，其中每条 G.边(a_i, w_{i-1}, w_i) 都成立。当 G.边$(a,$ endpoint(p) $w)$ 成立时，就存在一条标记为 a、从路径 p 指向路径 $p +\!\!+ [(a, w)]$ 的边。投影π: $\mathcal{T}_d(G, v) \to G$ 将每条路径映射到其终点，是一个标记转移系统同态，并在非最大深度处满足后向条件：对于每条满足 $|p| < d$ 的路径 p，以及从 G 中的 endpoint(p) 出发的每条 a- 边，树中都存在一条匹配的边。

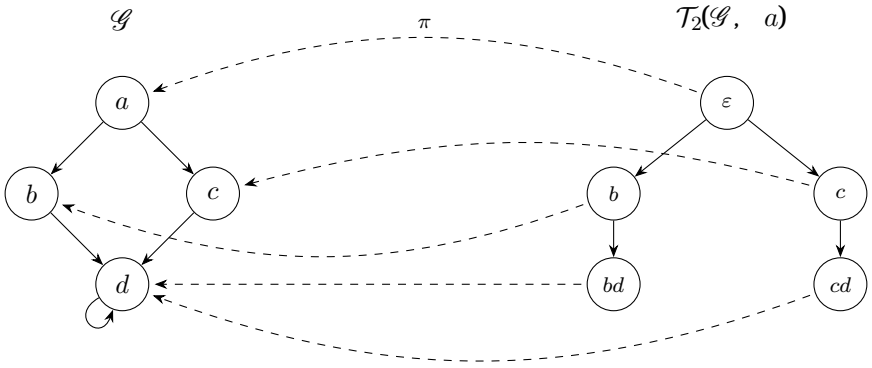


图9：有界树展开 $\mathcal{T}_2(\mathscr{G},\ a)$。顶点是来自 a、长度为 ≤ 2 的计算路径；边表示路径延伸一步。投影 π 将每条路径映射到其终点。合流点 d 被解析为不同的树顶点 bd 和 cd，从而得到合流树 $\mathscr{T}$（参见机制 2）。深度为 2 的顶点没有出边：深度界在 d 处截断了自环。

深度保持。该投影的同态性质和后向条件性质带来双向 HML 传递：对于每个深度为 $\leq d$ 的 *HML* 公式 ψ，

$$\psi \text{ holds at } (G, v) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \text{ holds at } (\mathcal{T}_d(G, v), \mathsf{root}).$$

正向使用投影同态；反向则通过对 ψ 进行结构归纳来证明，并在每个菱形步中使用后向条件，同时保持路径长度与公式深度之和不超过界限这一不变量。

树上的等式消去。 在有根树上，超出*HML*表达能力的几何公式原子会退化。自环不可能存在（边会严格增加路径长度）；步的源与目标相等也不可能（结合自环不可能存在这一点即可得出）；而合流模式（两条边到达同一个顶点）会迫使它们的源相同。这些正是三种分离机制在树上的体现：在类树结构上，这三种机制都变得不可满足。

主定理。 定义两个带指点的有限标记转移系统为 d-双模拟等价，若它们满足相同的深度为 $\leq d$ 的*HML* 公式：

$$(G, v) \approx_d (H, w) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, \psi : \mathit{HML},\ \mathrm{depth}(\psi) \leq d \implies (\psi \text{ at } G, v \iff \psi \text{ at } H, w).$$

根据深度保持， $\mathcal{T}_d(G, v)$ 与 (G, v) 是 d-双模拟等价的。因此，几何范本特姆定理指出：

定理 4.12 （几何 van Benthem，形式化）。 设 ϕ 是标记转移系统签名上存在深度为 $\leq d$ 的双模拟不变几何公式。则 ϕ 是 d-双模拟不变的：对所有 $(G, v) \approx_d (H, w)$，

$$\boxed{\phi(G, v) \iff \phi(H, w)}$$

这形式化了几何范本特姆定理（定理 4.5）的反向：每一个存在深度为 $\leq d$ 的双模拟不变几何公式都是 d-双模拟不变的。正向（定理 4.2）是完全构造性的。反向传递——即 $\phi(G, v)$ 蕴含 $\phi(\mathcal{T}_d(G, v), \text{根})$——通过对有限树使用判定程序进行分情形证明。对于任意具体公式、标记迁移系统和顶点，satisfies_decidable 计算 ϕ 是否在树根处成立；肯定情形是直接且完全构造性的。否定情形由逆否命题得出：双模拟不变性确保树上的失败会传递到图上，因此不需要额外的几何内容。

引理 4.13 (特征公式对应)。 对于深度为 d 的有限树 T 中的每个状态 v，特征公式 $\chi_{T,\,v}$ 满足 $w \models \chi_{T,\,v}$ 当且仅当 $(T, v) \approx_d (G, w)$ （构造性，零条公理）。

借助该引理，几何树分解 将任意图上的几何满足问题化为其树展开上的 *HML* 满足问题。随后，传递定理按真值进行分类讨论：树上为真的情形由特征公式以及正向 *HML* 的模拟不变性推出；所有情形均告完结。

从有根迁移系统到带标签谱。 第 2–4 节中的层级结构和 van Ben- them 结果以无标签有根迁移系统及其几何理论为研究对象；这是分离定理的自然背景，在此背景下，显式序列式（σ_{tot}, σ_{det},σ_{conf}）能够区分分类拓扑斯。计算谱则需要带标签 迁移系统：van Glabbeek 谱是为带标签过程定义的，而 Bisping 的能量博弈框架以标签字母表为参数，对等价关系进行参数化。对于单标签系统，这一转换不会丢失信息：有根迁移系统上的关系双模拟可提升为其 FinLTS(1) 像上的带标签双模拟，反之亦然（构造性地，无需任何公理）。因此，本文余下部分将转向 FinLTS(L)。有根迁移框架将在第 6 节重新出现；届时，预层拓扑斯 集合范畴$[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}]$ 将作为研究格罗滕迪克拓扑的背景空间，连接各系统的几何理论（第 2–3 节）与全局谱结构（本节）。

5. 谱格

谱通过两种彼此独立的构造嵌入子托扑的余框架中：一种是代数支柱（林登鲍姆代数上的核算子，本节），另一种是几何支柱（预层拓扑斯上的格罗滕迪克拓扑，§6）。Energy–LT 桥接（定理 6.10）将二者联系起来。

van Glabbeek 谱中的 13 个命名等价关系由 Bisping 的 6 维能量向量 [9], 参数化，形成集合 $\mathcal{S} \subset (\mathbb{N}\cup\{\infty\})^6$；其在逐分量最小值／最大值下的子格闭包 $L_{30} := \langle \mathcal{S} \rangle$含有 30 个元素。我们首先建立商过滤框架，接着从代数角度分析此格（闭包、Birkhoff 表示、双 Heyting 结构），最后通过带标签迁移系统和具体分离实例化。

前几节刻画了谱的上边界：几何逻辑如何通过一阶量化、三种分离机制（相等、循环变量共享、变量重复）以及 van Benthem 定理，超越 Hennessy– Milner 逻辑。现在我们转向*HML* 本身的下层结构：按能量预算参数化的内部子语言分层。这是一个命题问题（林登鲍姆代数 $L_{\bar{e}}$ 是命题几何理论），第 3–4 节的分离机制在此并不起作用。

5.1. 能量预算与谱。 van Glabbeek 的线性时—分支时谱 [39] 确定了具体、顺序、有限分支进程的典型行为等价关系。Bisping 的能量博弈框架 [9] 通过 6 维能量坐标刻画其中 13 种，以不可能未来、复兴和可启用性取代完成迹、完成模拟和可能世界等价关系。我们始终采用 Bisping 的这 13 种。Caramello 对偶定理 [12, 定理 3.6] 将其转化为子 topos 过滤：添加公理会限制模型，进而确定一个子拓扑斯。

对于有根迁移系统 $\mathscr{M}$，定义谱层级 ℓ 上的商理论为 $\mathbb{T}^{(\ell)}_{\mathscr{M}} \supseteq \mathbb{T}_{\mathscr{M}}$，它是通过添加在 $\mathscr{M}$ 中有效且在层级 ℓ 的等价关系下保持不变的所有几何序列式得到的。对偶定理给出如下链：

$$\boxed{\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}] \supseteq \mathcal{E}[\mathbb{T}^{(\mathrm{trace})}_{\mathscr{M}}] \supseteq \mathcal{E}[\mathbb{T}^{(\mathrm{sim})}_{\mathscr{M}}] \supseteq \mathcal{E}[\mathbb{T}^{(\mathrm{bisim})}_{\mathscr{M}}]}$$

当相应层级能够区分 M 中真正不同的分支结构时，每个包含关系都是严格的：第一分离见证了迹与模拟间隙（分叉 $\mathscr{F}$ 和

路径 $\mathscr{P}$ 在迹上相同，但在模拟公式 $\Diamond\top$ 上不同）；第二分离则见证了双模拟与托扑斯差距（中心辐条 $\mathscr{H}$ 和二循环 $\mathscr{C}$ 双模拟等价，但可由 $\sigma_{\det}$ 区分）。

定义 5.1（负等价关系的莫利化）。13 种命名等价关系（从迹到模拟）中，有七种原生地属于几何的：用于区分它们的 HML 片段只使用 $\top$、 $\wedge$、 $\bigvee$ 和 $\Diamond$。其余六种（失败、失败迹、就绪度、就绪迹、不可能未来、就绪模拟）需要不可执行原子 $\neg\langle a\rangle\top$，而它们并非几何公式。

遵循 Johnstone [25, D1.5.13], ，我们通过莫利化来处理这些情况：每个谓词 P都替换为一对互补谓词（P, P^c），并附加公理 $P \vee P^c = \top$。具体而言，unable$_a$(s) : $= \neg\langle a\rangle\top$ 变为一个新的原子谓词 unable$_a$，并满足 able$_a \vee$unable$_a = \top$，从而使理论成为几何理论。§§5.1–5 中的所有代数结果都统一适用于莫利化后的理论。

就绪模拟与双模拟分离的见证公式为 $[a]\langle c\rangle\top$，它区分了 van Glabbeek 的一对状态 $a.b + a.(b{+}c)$ 和 $a.(b{+}c)$ [39]: 该公式在后一状态成立（唯一的 a-后继可以执行 c），但在前一状态不成立（$a.b$ 到达一个没有 c-边的状态）。该公式属于完整 HML，但不属于就绪模拟片段（其中嵌套的否定 $\neg\langle a\rangle\neg\langle c\rangle\top$ 不是不可执行原子），由此完成了四级标记分离。

定义 5.2（能量索引林登鲍姆族）。对于 van Glabbeek 谱中的每种命名等价关系 $\bar{e}$，能量预算决定哪些命题原子是“可见的”：基础迁移原子（始终可见）、分支原子（当 $e_2 \geq 2$ 时可见），以及不可执行原子 unable$_a$(s)，用于编码 $\neg\langle a\rangle\top$（当 $e_5 \geq 1$ 且 $e_6 \geq 1$ 时）。受限原子集 $A_{\bar{e}}$ 确定了一个命题几何理论 $\mathbb{T}^{\bar{e}}_{\mathscr{M}}$，其林登鲍姆代数 $L_{\bar{e}}$ 恰好刻画了能量预算 $\bar{e}$下可见的状态区分。族 $\{L_{\bar{e}}\}$ 具有单调性：$\bar{e}_1 \leq \bar{e}_2$ 蕴含 $|L_{\bar{e}_1}| \leq |L_{\bar{e}_2}|$（能量越多，区分越精细，代数越大）。

注 5.3（坐标化依赖性）。格 $L_{30} = \langle\mathcal{S}\rangle$ 依赖于 Bisping 的六维能量坐标化，而不仅仅依赖于 $\mathcal{S}$的偏序。Birkhoff 表示给出 $|J(L_{30})| = 10$（4 个已命名，6 个未命名），但 13 元 van Glabbeek 偏序集 P [39] 上的自由有界分配格是下集格 $\mathcal{O}(P)$，其中有 $|J(\mathcal{O}(P))| = |P| = 13$ 个并不可约元。由于 $10 \neq 13$，Bisping 嵌入引入了偶然的并关系：13 个已命名等价关系中有 9 个在 L_{30} 中是并可约的，这是由特定的维度分解（观察深度、合取宽度、正／负子句深度、否定嵌套）造成的。标准 Birkhoff 嵌入$p \mapsto (\mathbf{1}_{q\leq p})_{q\in P}$到 $\{0,1\}^{13}$ 中保持序反射性，并在逐分量最小值／最大值下产生 $\mathcal{O}(P) \ncong L_{30}$。因此 L_{30} 是能量博弈维度结构的不变量，而非偏序集本身的不变量。托普斯论路径提供了另一种无坐标化刻画：L_{30} 嵌入子拓扑斯余框架 Sub(Set$[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}]$)中，而后者是分类托普斯的不变量。

具体的林登鲍姆代数大小展示了这一框架。分支系统$a.b + a.c$ 具有 $|L_{\mathrm{trace}}| = 5$，但 $|L_{\mathrm{sim}}| = 7$：模拟能检测到迹所遗漏的分支。相比之下，顺序系统 $a.(b{+}c)$ 具有 $|L_{\mathrm{trace}}| = |L_{\mathrm{sim}}| = 5$；没有分支，因此也没有迹→模拟跃迁。这与§5.4中的深度1分离相吻合，证实能量指标族将分次塔统一为一个一维切片。失败（∞，2，0，0，1，1）和模拟（∞， ∞， ∞， ∞，0，0）通过

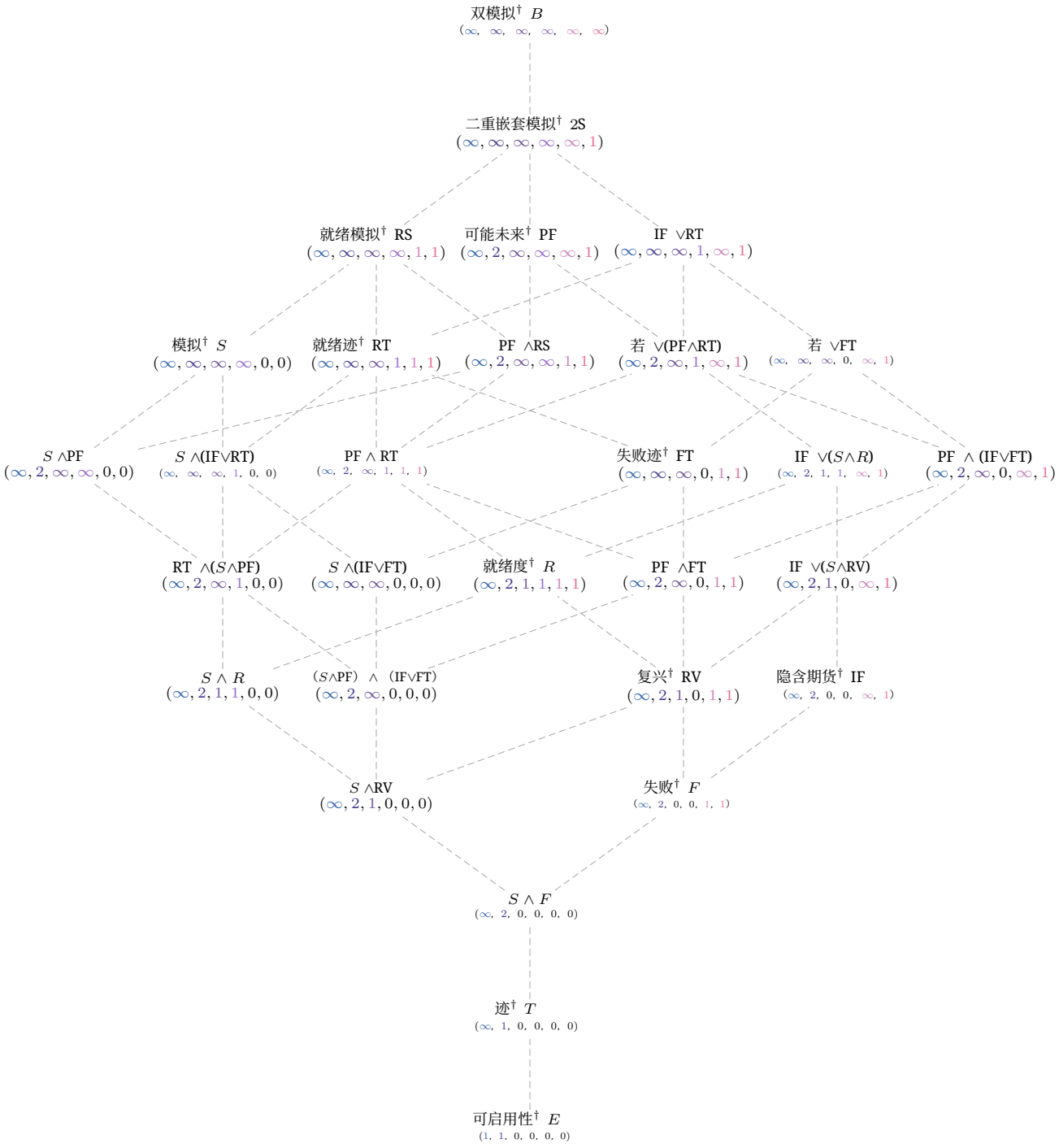


图10：谱格 $L_{30} = \langle \mathcal{S} \rangle$：13 个具名能量向量的子格闭包（†） [9]，按分量计算最小值 /最大值，包含 17 个未命名混合等价。能量坐标(e_1， e_2， e_3， e_4， e_5， e_6) 依次表示观察深度、合取嵌套、最深正子句深度、其他正子句深度、负子句深度和否定嵌套。越高表示等价关系越细；边表示覆盖关系。

独立能量格中的路径：失败通过否定来检测拒绝，而模拟通过深合取来检测分支。

这 13 个能量向量在环境框架 $(\mathbb{N}\cup\{\infty\})^6$ 中确定了 13 个点。现在我们证明，对这些点取逐分量最小值／最大值闭包后，会得到一个具有丰富代数结构的 30 元格。

5.2. **30 元格闭包**。

定义 5.4（能量到核的映射）。 框架 L 上的一个核是膨胀的、幂等的且保持 $\wedge$ 的自同态 $j\colon L\to L$。Johnstone [24, II.2] 证明，$\mathbf{Sh}(L)$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑与 L 上的核一一对应。对于每个命名的等价关系 $\bar{e}$，过程等价 $\sim_{\bar{e}}$ 扩展为完整林登鲍姆代数 L_∞上的同余，从而导出一个不动点集为 $\mathrm{Fix}(j_{\bar{e}})\cong L_{\bar{e}}$ 的核 $j_{\bar{e}}$。所得映射

$$\bar{e}\ \longmapsto\ j_{\bar{e}}\qquad \text{is } \textit{order-reversing}\colon\qquad \bar{e}_1\le\bar{e}_2\ \Longrightarrow\ j_{\bar{e}_2}\le j_{\bar{e}_1}.$$

更大的能量预算允许更精细的区分，因而闭包更少，因而核更小（更接近恒等）。双模拟（最精细的命名等价）映射到恒等核 $j_{\mathrm{bisim}}=\mathrm{id}$，而较粗等价关系映射到更大的核算子。

此处 $L_\infty:=\varinjlim_d L_d$ 是无界模态深度处的余极限 Lindenbaum 代数（对于一个 n 状态系统，它在深度 $n-1$ 处稳定，因而是一个有限分配格；见 §5.4）。从过程等价到框架同余的扩张依赖于逻辑刻画定理 [39]：两个状态是 $\bar{e}$-等价的，当且仅当它们满足相同的能量为 $\le\bar{e}$ 的公式（Bisping [9, 命题 1]），因此这些等价类是林登鲍姆等价类的并，从而与格运算相容。对于有限分配格，每一个格同余都自动是框架同余（Funayama–Nakayama [17]）。

定理 5.5 (谱的格闭包**)**。 令 $\mathcal{S}\subset(\mathbb{N}\cup\{\infty\})^6$ 为 *van Glabbeek* 谱中 *13* 个有名称的能量向量。那么 $\mathcal{S}$ 不是子格，而它在逐分量最小值 / 最大值 运算下生成的子格是

$$\boxed{\,L_{30}\ :=\ \langle\mathcal{S}\rangle,\qquad |L_{30}|\ =\ 30.\,}$$

闭包增加了17 个无名称元素，每个元素都有具体的能量刻画，但没有经典的进程代数名称；经过三轮迭代的两两交与并后，闭包达到稳定（已在 *Lean* 形式化中通过计算验证）。

非子格性质的证明。 三个见证表明，逐分量运算会超出 $\mathcal{S}$：

(1) $\mathrm{PF}\wedge\mathrm{FT}=(\infty,\ 2,\ \infty,\ 0,\ 1,\ 1)$ 无名称（交）；(2) $S\wedge F=(\infty,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ 无名称（交）；(3) $\mathrm{IF}\vee\mathrm{FT}=(\infty,\ \infty,\ \infty,\ 0,\ \infty,\ 1)$ 无名称（并）。

相反，某些运算确实会得到命名等价关系：$\mathrm{IF}\wedge\mathrm{FT}=F$ 和 $S\vee F=\mathrm{RS}$。每种情况都通过与 $\mathcal{S}$ 的所有元素进行穷举比较来判定。经过三轮迭代的两两交与并后，闭包趋于稳定，总共新增了 17 个元素。 □

任意格罗滕迪克拓扑斯的子拓扑斯格都是一个余框架 [25, A4.5]：核框架的对偶序带有余 Heyting 减法 $A\setminus B$，最大的子拓扑斯 C with$C\sqcup B\ge A$。

5.3. **代数结构**。

注 5.6（Birkhoff 表示与双 Heyting 结构）。 Birkhoff 表示$L_{30} \cong \mathcal{O}(J)$ 将 $|J(L_{30})| = |M(L_{30})| = 10$交不可约元与交不可约元对应起来。作为有限分配格， L_{30} 同时具有 Heyting 代数结构（其中蕴涵 $a \to b$ 是满足 $z \wedge a \leq b$的最大 z）和余 Heyting 代数结构（减法如上所述），因此构成一个双 *Heyting* 代数。这个双 Heyting 代数的否定结构**退化到极致**：对于任意 $x \neq \bot$，Heyting 伪补都满足 $\neg x = \bot$；而对于任意 $x \neq \top$，余 Heyting 否定都满足 $\sim x = \top$。全部 30 个 Heyting 边界 $\partial x = x \wedge \neg x$ 都平凡地等于零。其根本原因在于拓扑性质： $J(L_{30})$ 是一个连通 偏序集（迹低于每个并不可约元），因此任何非零元素的伪补都必然等于 $\bot$。因此，布尔核 $\{x : \neg\neg x = x\}$ 缩减为 $\{\bot, \top\}$：只有可启用性（$\bot$）和双模拟（$\top$）是正则元，这证实了L_{30} 是极端非布尔的。

定理 5.7（谱的代数不可约性）。 谱格 L_{30} 是直不可分解的：它不能表示为分配格的非平凡积 $L_1 \times L_2$，其中涉及 $|L_1|$、 $|L_2| > 1$。等价地，其并不可约偏序集 J（L_{30}） 是连通的。

证明。 迹等价位于 $J(L_{30})$ 中每个并不可约元之下，因此 J 是连通的。根据有限分配格的 Birkhoff 分解定理， L_{30} 是直不可分解的。

□

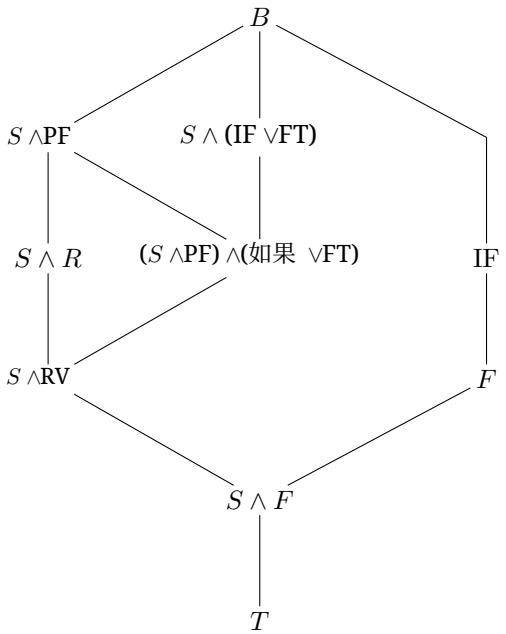


图 11：并不可约偏序集 $J(L_{30})$：4 个具名元素（T、 F、IF、 B）和 6 个未命名的交，由 12 个覆盖关系连接。迹 (T) 位于每个并不可约元素之下，证实了连通性。

迹（T）位于每个并不可约元之下，证实了连通性（图 11）。左侧链 T–$S\wedge F$–$S\wedge$RV–$S\wedge R$–$S\wedge$PF–B承载正向观察层级；右侧

链 T–$S\wedge F$–F–IF–B 承载否定层级。它们通过两条交叉连接（经由（$S\wedge$PF）$\wedge$（IF$\vee$FT））相互作用，使得 J 连通且 L_{30} 不可分解。

注 5.8（操作性释义）。 J（L_{30}）的六个未命名元素可以用简洁的操作性语言来解读：

（1） $S \wedge F$：模拟-失败，过程在正分支（模拟的合取深度）和单步拒绝（失败的否定）两方面都一致。（2） $S \wedge$RV：模拟-复苏，过程在分支结构以及拒绝后的复苏模式两方面都匹配。（3） $S \wedge R$：模拟-就绪，过程在分支和就绪集方面都匹配。（4） $S \wedge$PF：模拟-未来，过程在分支和可能未来枚举方面都匹配。（5）（$S \wedge$PF）$\wedge$（IF $\vee$FT）：交叉链接，在正、负层级之间起调节作用的唯一元素。（6） $S \wedge$（IF $\vee$ FT）：模拟与不可能未来/失败迹的并，过程在分支和有界负观察方面都匹配。

Bisping框架的六个能量维在代数上并不独立：它们生成的谱格是不可分解的，无法分解为彼此独立的子系统。这或许令人意外，因为 Bisping框架将这些维度视为独立参数，而 van Glabbeek 最初将其组织为线性时间与分支时间两类，这似乎暗示存在一种实际上并不存在的代数分解。

定理 5.9 (谱格的海廷蕴涵**)**。 尽管否定已最大程度地坍缩（$\neg x = \bot$ 对所有 $x \neq \bot$），L_{30} 上的海廷蕴涵仍具有信息量：在命名等价关系的 *32* 个不可比有序对中，每个蕴涵 $a \to b$ 都非平凡。具体而言，

$$\boxed{S \to F \;=\; \mathrm{IF}}$$

模拟对失败的海廷蕴涵给出不可能未来。*32* 个不可比蕴涵中，有六个会产生未命名元素。

具体来说， $S \to F =$IF 表示模拟（纯正观察：可任意嵌套合取，但否定为零）与失败（有界合取加单次否定）之间的信息差距，恰好是不可能未来（有界合取、无限制否定）。否定维度调节着测试-模拟分界。Heyting 代数结构系统地预测出经典谱中不可见的过程等价。

注记 5.10（逐系统与全局视角）. 本节的代数结果（L_{30}、其双 Heyting 结构及其不可分解性）是在抽象格上构造性地证明的。它们与分类托普斯上余帧运算的等同，构成 Energy–LT 桥接（定理 6.10）的内容，而这需要§8中所讨论的公理。$S \to F =$IF 计算是一个抽象的格论结果；§6.5 的几何闭包定理通过自由扩张计算预层拓扑斯中的海廷蕴涵。它们在具体例子上的一致为子格嵌入猜想（§8）提供了证据。

定理 5.11（谱的余海廷分解）。 通过伯克霍夫公式 $x \setminus y = \bigvee\{j \in J \text{ 计算得到 } L_{30}\text{中的六个余海廷差 } j \le x \ j \not\le y\}$:

$$\begin{cases} S \setminus T = S & \text{（迹未捕获模拟的任何分支内容）（迹未捕获失败的任何否定内容）RS（就绪模拟未捕获双模拟} \\ F \setminus T = F & \\ B \setminus \quad = B & \\ \quad \setminus S = F & \\ 2 \setminus \quad = & \\ \quad \setminus & \end{cases}$$

的任何深度）RS（就绪模拟在模拟之上增加了失败测试）S RS IF（二重嵌套模拟增加了不可能未来测试）PF IF $= S \wedge$PF（未命名：无经典名称）

乘积框架（$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$）中的朴素余海廷减法[6] 按分量计算：若 $a\,(i) > b\,(i)$，则 $(a \setminus b)\ (i) = a\,(i)$，否则为 0。每个朴素结果都具有 $e_1 = 0$，因此位于可启用性（L_{30}的 $\perp$）之下，所以朴素差与精确差（伯克霍夫差）作为能量向量从不重合。在具名等价层面，$S \setminus T$和 $F \setminus T$恰好一致（都返回被减项），但其余四个则完全不同：朴素 $B \setminus$ RS 得到 (0, 0, 0, 0, ∞, ∞)，而不是 B；朴素 RS $\setminus S$得到 (0, 0, 0, 0, 1, 1)，而不是 F；朴素 2S $\setminus$ RS 得到 (0, 0, 0, 0, ∞, 0)，而不是 IF；朴素 PF $\setminus$ IF 得到 (0, 0, ∞, ∞, 0, 0)，而不是 $S \wedge$ PF。乘积框架计算得到的元素落在 L_{30} 之外，或落到了错误的具名元素上；而伯克霍夫公式则正确识别了谱格中的差异内容。

后面三种分解在操作层面颇具启发性。RS $\setminus S = F$ 揭示了拒绝检测差距：模拟以正向方式匹配分支（一个过程的每种选择都能由另一个过程匹配），而就绪模拟还会检测一个过程拒绝了哪些动作；这种拒绝检测能力正是失败等价所衡量的。2S$\setminus$RS $=$ IF揭示了否定深度差距：就绪模拟能检测单步拒绝，而二重嵌套模拟还会检测到，在接受某个动作之后，某些后续序列会受到排除；这种更深层的否定正是不可能未来所刻画的。PF $\setminus$ IF $= S \wedge$ PF则落在一个未命名元素上，它结合了模拟的分支匹配与可能未来对后续序列的枚举；这一元素没有经典名称，正说明具名谱并不完备。

命题 5.12 (未命名子拓扑斯的存在性**)**。 生成集 $\mathcal{S}$ 并未充满林登鲍姆代数的核格：$|\mathcal{S}| = 13$。当 $|J(L)| \ge 4$时，$2^{|J(L)|} \ge 16 > 13$，从而保证存在一些 *Lawvere–Tierney* 拓扑，它们不对应任何经典过程等价。

对于一个有 $|J$ 个L不可约元的有限分配格 $L|$，结合 Funayama–Nakayama [17],所保证的分配性，伯克霍夫表示定理恰好给出 $2^{|J(L)|}$ 个核算子（构成一个布尔代数）。5 元辐辏格上的 8 个核算子验证了这一框架：$2^{|J(L)|} = 2^3 = 8$ 与 8 个格罗滕迪克拓扑相吻合。$2^{|J(L)|}$ 这一计数适用于某个特定系统的系统级林登鲍姆代数 L_∞；L_{30} 的 17 个未命名元素则是同一现象的另一种体现：谱序中有些位置未被 13 个命名等价关系占据。

5.4. **带标签迁移系统**。 无标签系统存在一项根本局限：单一模态 $\Diamond\varphi$ 无法区分分支结构，导致上谱坍缩：模拟、就绪模拟和双模拟彼此重合。van Glabbeek 完整的

线性时—分支时谱 [39] 需要具有不同动作的带标签迁移a， b， c，……，从而为每个动作提供不同的菱形算子 $\langle a\rangle\varphi$。

定义 5.13（带标签几何理论）。 对于一个状态集为 S、动作字母表为 Σ的标记迁移系统（S， Σ， $\to$），我们定义一个命题几何理论 $\mathbb{T}^{\Sigma}_{\mathscr{M}}$，其原子为$\Delta_a(s,\ t)$，每个 s， $t \in S$和 $a \in \Sigma$对应一个原子，断言“状态 s执行动作 a并到达状态 t”。公理由排斥公理（当 $s \overset{a}{\not\to} t$ 时，$\Delta_a(s,\ t) \vdash \bot$）和全性公理[1]（对于每个至少有一个出迁移的状态 s，$\top \vdash \bigvee_{a,\ t:\ s\overset{a}{\to}t} \Delta_a(s,\ t)$，断言这类状态必须发生转移）组成。林登鲍姆代数 Lind($\mathbb{T}^{\Sigma}_{\mathscr{M}}$) 是由这些带标签原子生成的自由框架对公理所诱导关系取商所得的代数。

Van Glabbeek 的区分性示例。我们将三个标准 CCS 进程 [39]形式化，它们使用三字母表 $\Sigma = \{a, b, c\}$。过程 $a.b + a.c$有 5 个状态： $p_0 \overset{a}{\to} p_1$,$p_0 \overset{a}{\to} p_2$, $p_1 \overset{b}{\to} p_3$, $p_2 \overset{c}{\to} p_4$；初始状态分支为两个 a后继状态，一个提供 b，另一个提供 c。过程 $a.(b + c)$有 4 个状态：$q_0 \overset{a}{\to} q_1$, $q_1 \overset{b}{\to} q_2$, $q_1 \overset{c}{\to} q_3$，只有一个a后继状态，同时提供 b和 c。过程 $a.b + a.(b+c)$有 6 个状态： $r_0 \overset{a}{\to} r_1$, $r_0 \overset{a}{\to} r_2$,$r_1 \overset{b}{\to} r_3$, $r_2 \overset{b}{\to} r_4$, $r_2 \overset{c}{\to} r_5$；有两个 a后继状态，一个只提供 b，另一个提供 b和 c。

定义 5.14（HML 子语言层级）。 字母表为 Σ 的带标签 Hennessy–Milner 逻辑（HML）由 $\top$、 $\bot$、合取、析取、否定，以及每个 $a \in \Sigma$ 对应的带标签菱形模态$\langle a\rangle\varphi$ 构成。四种子语言分别刻画四个谱层级：

- 轨迹公式 ($\mathcal{O}$)：菱形模态和析取的顺序组合（不含合取）；
- 正公式 (HML_{pos})：不含否定（刻画模拟）；
- 就绪模拟公式 (HML_{ready})：正公式加上不可执行原子 $\neg\langle a\rangle\top$（刻画就绪模拟）；
- 完整 HML（刻画双模拟）。

这些语言构成严格的包含链 $\mathcal{O} \subsetneq HML_{\text{pos}} \subsetneq HML_{\text{ready}} \subsetneq HML$，每个间隙均有具体公式作为见证。

定理 5.15 (四层标记谱分离**)**。 在包含$|\Sigma| \geq 3$的标签字母表上，四个谱层级由具体的 *HML* 公式严格区分：

(1) 迹 $\neq$ 模拟。正公式 $\langle a\rangle(\langle b\rangle\top \wedge \langle c\rangle\top)$ 在 $a.(b+c)$ 中成立，但在$a.b + a.c$中不成立：菱形模态下的合取要求同时具备 b和 c能力， q_1 具备这两种能力，而 p_1 和 p_2 都不具备。*(2)* 模拟 $\neq$ 就绪模拟。就绪模拟公式 $\langle a\rangle(\langle b\rangle\top \wedge \neg\langle c\rangle\top)$ 在 $a.b + a.(b+c)$ 中成立，但在 $a.(b+c)$ 中不成立： r_1 可以执行 b，但不能执行 c，而 q_1 两者都可以执行。*(3)* 就绪模拟 $\neq$ 双模拟。公式 $[a]\langle c\rangle\top$ 将 $a.b + a.(b+c)$ 与$a.(b+c)$区分开来（定义 *5.1*）。

注 5.16（林登鲍姆代数与子托普斯链）。 分离例子的带标签林登鲍姆代数的基数分别为 $|\text{Lind}(\mathbb{T}^{\Sigma}_{a.b+a.c})| = |\text{Lind}(\mathbb{T}^{\Sigma}_{a.(b+c)})| = 5$ 和 $|\text{Lind}(\mathbb{T}^{\Sigma}_{a.b+a.(b+c)})| = 25$。因此，基底林登鲍姆代数是必要但

[1]这个全性公理编码了 van Glabbeek 谱 [39]中标准的无死锁约定。将框架扩展到死锁敏感等价关系（例如 De Nicola–Hennessy 测试），需要去掉全性公理并添加显式的终止谓词；这很容易实现，但超出了我们当前的讨论范围。

不足以用于谱分类的不变量：不同的基数保证非双模拟等价（$25 \neq 5$），但基数相同并不意味着哪怕是模拟等价（$5 = 5$甚至迹 $\neq$ 模拟）。这种代数刻画了哪些转移是必然发生或被排除的，却无法反映分支结构：选择究竟是提前确定还是延后决定。

每个 HML 子语言都会在状态上诱导一个等价关系（即谱集合胚），而更细的子语言会给出更细的等价关系。每个谱级别的集合胚都对应于林登鲍姆框架上的一个格罗滕迪克拓扑，从而形成一条子托扑链：

$$\mathbf{Sh}(\mathrm{Lind}, J_{\mathrm{trace}}) \supseteq \mathbf{Sh}(\mathrm{Lind}, J_{\mathrm{sim}}) \supseteq \mathbf{Sh}(\mathrm{Lind}, J_{\mathrm{readysim}}) \supseteq \mathbf{Sh}(\mathrm{Lind}, J_{\mathrm{bisim}})$$

四层分离证明了前两个包含关系是严格的；第三个包含关系由 $[a]\langle c\rangle\top$ （定义 5.1）见证。这是对 van Glabbeek 谱的托普斯论重述：每一步都会加入一类模态观测（合取、不可执行原子、完全否定），从而细化子托扑斯。

注 5.17（标签打破对称性）。 带标签自同构群——保持 $s \xrightarrow{a} t \iff \sigma(s) \xrightarrow{a} \sigma(t)$（对所有动作 a）的状态置换σ ——是无标签自同构群的子群。对于全部三个 van Glabbeek 示例，$|\mathrm{Aut}_\Sigma| = 1$：标签彻底打破了所有对称性。例如，在 $a.b + a.c$ 中，a-后继 p_1 和 p_2 具有不同的出边标签集（$\{b\}$ 与 $\{c\}$），因此无法进行在无标签投影中原本可行的分支互换。

带标签核二分性进一步扩展：对于连通可达系统，$\ker(\varphi_\Sigma)$要么是平凡的，要么是极大的。对于 $|\mathrm{Aut}_\Sigma| = 1$，核自动是平凡的，因此这三个系统都处于对齐态或创造态。谱层级与对称性破缺是标签的双重效应：标签丰富了模态语言（使谱分离成为可能），同时限制了自同构（使对称群缩减）。

命题原子 $\Delta_a(s,\ t)$ 能表示是否 存在转移，却不能表示转移如何 分布于各分支。深度有界观测树原子解决了这一问题：深度一分级林登鲍姆代数能够区分迹等价系统与模拟不等价系统（$|\mathrm{Lind}_1(a.b+a.c)| = 7 \neq 5 = |\mathrm{Lind}_1(a.(b+c))|$）。Bisping 的六维能量预算（$e_1$, ……, e_6） [10] 将每个谱层级嵌入为特定的能量剖面。完整的论述，包括分次塔的稳定化和能量维度示意图，见形式化仓库。

5.5. **分离与对称性**。林登鲍姆自同构群 Lind 的自同构群呈现出一种对称三分法，其关键结构性后果是存在一个从图自同构到……的群同态：

备注 5.18（对称同态）。 对称三分法提升为一个自然的群同态 φ：Aut(graph) $\to$ Aut(Lind)，由原子置换定义：$\mathrm{step}(s,t) \mapsto \mathrm{step}(\sigma(s)\ \sigma(t))$，并下降到林登鲍姆商。公式级置换 permuteFormula 通过对命题公式进行结构归纳证明（6 个引理，具有构造性）；下降到商则以公理化方式给出。核 $\ker(\varphi) = \{\sigma \in \mathrm{Aut(graph)} \mid \varphi(\sigma) = \mathrm{id}\}$ 将三分法细化为一个结构性陈述：中心辐条的 ker 为 $= 1$ (φ 单射)，二循环的 ker 为 $= \mathbb{Z}/2$ (φ 平凡)，非对称菱形的 $\ker = 1$ （因源平凡而平凡）。

定理 5.19（核二分律）。对于任意连通可达有根转换系统，对称同态 φ：图的自同构群 $\to$ Lind 的自同构群 的核满足

$$\ker(\varphi) \;=\; 1 \quad or \quad \ker(\varphi) \;= \text{图的自同构群}, \qquad \text{没有中间核}$$

存在任何非确定性状态时，核为平凡；所有状态均为确定性状态时，核最大。

证明。非确定性情形 ($\ker(\varphi) = 1$)。若边$v \to w$ 存在且 v 有 ≥ 2 个后继状态，则原子 $\Delta(v,\ w)$是非极端的 。原子单例引理 表明，非极端原子在林登鲍姆代数中具有单元素等价类：给定不同的、 p 非极端的原子$p \neq q$ ，分离模型通过恰当安排非确定性选择，将 $\top$ 赋给 p ，将 $\bot$ 赋给 q ，因此 p 和 q 表示不同的林登鲍姆类。

由此可得两个闭包性质。首先，核元素固定非确定性状态：若 $\sigma \in \ker(\varphi)$且 v 有 ≥ 2 个后继状态 $w_1 \neq w_2$，则 $\varphi(\sigma) = \mathrm{id}$迫使 $\Delta(\sigma(v)\ \sigma(w_i)) = \Delta(v, w_i)$对每个 i都成立，而单元素性质将 $\sigma(v) = v$确定下来。其次，不动点集前向闭合：若 $\sigma(u) = u$ 且 $u \to v$ 是一条边，则 $\Delta(u, \sigma(v)) = \Delta(\sigma(u)\ \sigma(v)) = \Delta(u, v)$，从而迫使 $\sigma(v) = v$成立。

现在固定 $\sigma \in \ker(\varphi)$，并取任意状态 v。通过最近公共祖先论证， v 位于某个非确定性状态 n的下游：存在 n 和 w ，使得 $n \to w$ 是一条边， n是非确定性的，并且 $w \to^* v$。核的固定性给出 $\sigma(n) = n$；向前闭包给出 $\sigma(w) = w$；沿路径 $w \to^* v$ 归纳得到 $\sigma(v) = v$。

确定性情形 ($\ker(\varphi) = \mathrm{Aut}(\text{graph})$)。当每个状态都有 ≤ 1 后继时，每个转换原子都被强制确定：如果 w是 v的唯一后继，则 $\Delta(v,\ w) = \top$；否则为 $\Delta(v,\ w) = \bot$。不再存在自由生成元，因此 Lind $\cong$ Bool。由于 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Bool}) = \{\mathrm{id}\}$，每个图自同构在 Lind 上都映射为 id，从而 $\ker(\varphi) = \mathrm{Aut}(\text{graph})$。 □

推论 5.20（三态分类）。 像$\mathrm{im}(\varphi) \cong \mathrm{Aut}(\mathrm{graph})/\ker(\varphi)$和余核$\mathrm{coker}(\varphi) \cong \mathrm{Aut}(\mathrm{Lind})/\mathrm{im}(\varphi)$（这是一个群商，因为$\mathrm{im}(\varphi)$ 在每个锚定系统中的指标为 ≤ 2），该二分法给出三态分类：枢纽辐条系统的核是平凡的，像为 $\mathbb{Z}/2$，余核是平凡的（对齐态）；二循环的核为 $\mathbb{Z}/2$，像是平凡的，余核是平凡的（确定性态）；非对称菱形的核是平凡的，像是平凡的，余核为 $\mathbb{Z}/2$（创造态）。第四种情形——非平凡$\ker$ 且非平凡coker——对于连通可达系统是不可能的。

最接近的先前研究是 Hora 将桥接技术应用于自动机和正则语言。

对三个小型系统（G_1、 G_2、中心辐条）进行的具体林登鲍姆代数计算证实了这种分层：通过基数实现两两分离、在不同谱层级之间传递不变量，以及桥接技术的实际应用。

注 5.21（余极限框架与莫里田分离）。 对于一个具有 n 个状态的标记迁移系统，深度有界的林登鲍姆塔 $L_0 \hookrightarrow L_1 \hookrightarrow \cdots$ 在深度 $n-1$ 处稳定，从而得到一个余极限框架$L_\infty \cong L_{n-1}$。这是 Hennessy–Milner 定理的框架论对偶：互模拟等价 $= \bigcap_d \sim_d$ 对偶化为 $L_\infty = \bigcup_d L_d$。Funayama–Nakayama 定理 [17] 给出 $2^{|J(L_\infty)|}$ 个作用于 L_∞ 的核算子，远超 13 个具名谱层级：在 $a.b + a.c$ 上，16 个子拓扑斯中有 14 个未具名；在 $a.(b+c)$ 上，8 个中有 7 个。

Joyal–Nielsen–Winskel 分支范畴 Bran_L [26] 嵌入有限呈现 LTS 的范畴；根据比较引理 [25, C2.2.3], ，当 Bran_L 稠密时（即满足同步树条件），JNW 预层拓扑斯是 $\mathbf{Set}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}]$ 的一个局部化。

对形式化中的所有 $\binom{9}{2} = 36$ 对具体 LTS 进行 Morita 检验，结果发现**不存在 Morita 等价**：每一对都可由 Lindenbaum基数、自同构数或能量类数加以区分。这项穷尽性验证（零条公理，所有区分均通过计算判定）确立了分类托普斯是锚定系统的完备不变量。

注 5.22（能量–拓扑三角形）。 这一构造建立了三者之间的联系：

$$\text{Energy vectors (Bisping)} \xrightarrow{\bar{e} \mapsto j_{\bar{e}}} \text{Nuclei on } L \xleftarrow{\text{Johnstone}} \text{LT topologies on } \mathbf{Sh}(L).$$

复合映射将每种命名过程等价对应到分类托普斯的一个子托扑；顺序反转确保较粗的等价关系（识别更多状态）对应较大的 子托扑（更多层条件）。

桥公理 $|L_{\bar{e}}| = |\mathrm{Fix}(j_{\bar{e}})|$ 结合了过程代数文献中的两个独立结果。首先，van Glabbeek 的逻辑刻画定理 [39, 40] 证明，谱中的每个层级都由 Hennessy–Milner 逻辑的一个子语言刻画：两个状态是 $\bar{e}$等价的，当且仅当它们满足相应 HML 片段中的相同公式。其次，Bisping [9]（命题 1）表明，子语言的边界由能量向量统一参数化，因此，等价关系 $\bar{e}$对应的片段恰好是能量为 $\leq \bar{e}$的公式。该公理所编码的内容源自 van Glabbeek 和 Bisping；我们的贡献是将其重新表述为一个核恒等式，从而纳入托普斯论框架。对于双模拟（根据一个一般定理： $j_{\mathrm{bisim}} = \mathrm{id}$ 蕴含 $\mathrm{Fix}(j_{\mathrm{bisim}}) = L$，且该证明是构造性的）和 $a.b + a.c$ 上的迹（通过显式计算不动点：在 7 元代数上有 5 个不动点），桥恒等式均得到验证。对于 $a.(b+c)$，常能量族（对所有 $\bar{e}$均为 $|L_{\bar{e}}| = 5$ ）在全部 13 个层级上给出了完整的桥接。对于所有命名等价关系（特别是逻辑刻画定理依赖于经典 König 引理论证），是否都能构造性地完成整条推理链，仍是一个开放问题。

与有效拓扑斯上的 Kihara 的 LT 拓扑在结构上相似之处，以及四个显著的不同之处，将在 §7 中讨论。

谱格 L_{30} 是通过代数方法计算得出的，并通过带标签迁移加以实例化。现在，我们从拓扑斯的角度确认这些结果：考察内部逻辑和显式的格罗滕迪克拓扑。

6. 拓扑斯桥

谱格的代数结构（§5）是通过组合方法计算得出的。现在，我们将该格与分类托普斯集合范畴$[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}]$连接起来，建立能够实现行为等价关系的显式格罗滕迪克拓扑，通过能量预算将其扩展到完整的 van Glabbeek 谱，并借助预层的内部逻辑进行独立验证。

6.1. **标记迁移系统预层拓扑斯**。

注记 6.1（LTS预层拓扑斯）。 §§2–5的逐系统分类拓扑斯 $\mathcal{E}[\mathbb{T}_{\mathscr{M}}]$ 现被单一的环境工作空间所取代：预层拓扑斯集合范畴$[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}] = [\mathbf{f.p.}\text{标记迁移系统}_L^{\mathrm{op}}, \text{集合范畴}]$，，其对象是有限可表现标记转移系统范畴上的集值函子。逐系统拓扑斯刻画的是各个理论，而

预层拓扑斯承载着内部逻辑与格罗滕迪克拓扑，用以编码系统之间的关系。

我们计算了 $\mathbf{Set}[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}]$ 对于 $|L| = 1$的基础性质：它是德摩根的（右奥尔条件通过始对象 $\varnothing$平凡地成立）、非布尔的、非二值的、连通且局部连通。对于基范畴具有始对象的任何预层拓扑斯，德摩根性质都成立：给定一个余扇 $A \to C \leftarrow B$，空对象便可补全这个方块。这是建立在全称霍恩理论（有限图、偏序集、关系结构）的模型范畴上的预层拓扑斯所共有的性质； $\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}$ 特有的性质则从子对象分类器和模态联系开始。子对象分类器 $\Omega(G)$ 对每个对象 G都有唯一的原子 $\{!_G\}$ ，从而产生最简单的 $\neg\neg$-拓扑。该理论的几何片段恰好对应 HML 的正存在片段：菱形公式 $\langle a\rangle\varphi$是几何的，而方框公式 $[a]\varphi$ 和否定则不是。

$\Omega(G)$ 的否定结构与 §5 的格代数结果呈现出显著的平行关系。唯一原子定理表明，对于每个非空筛 S，都有 $\neg S = \varnothing$ ，这与 L_{30} 的退化伪补 $\neg x = \bot$ （对所有 $x \neq \bot$ 均成立）如出一辙。两者都是同一机制的体现：当每个非平凡元素都有一个共同下界（Ω 中的始态射 $!_G$ ； $J(L_{30})$ 中的迹）时，补运算便会退化。然而，尽管否定是退化的，$\Omega(G)$ 上的 Heyting 蕴涵仍然非平凡，其定义为 $(S_1 \to S_2)(f) \Leftrightarrow \forall g,\quad f \circ g \in S_1 \Rightarrow f \circ g \in S_2$：我们给出环路顶点 $\bullet_1$ 上的筛 S_1， S_2，使得 $S_1 \to S_2$ 严格处于中间（包含 $!_G$ ，但不包含 id_G）。这正是格代数发现 $S \to F = \mathrm{IF}$ 的预层托扑类比：在这两种情形中，否定所携带的信息为零，而蕴涵则保留了完整的逻辑结构。这两个独立计算所得结果之间的平行关系——一个是组合性的（格 L_{30}，§5），另一个是范畴论的（预层拓扑斯，本节）——有力地支持了 L_{30} 嵌入猜想：两种独立构造中都出现了相同的代数模式（否定退化，蕴涵非平凡），这表明它们可能有共同的余框架论起源。

6.2. **显式格罗滕迪克拓扑**。 §5 的格代数结果（Birkhoff 表示、双 Heyting 结构、余海廷分解）通过组合计算作用于有限谱格 L_{30} 。现在我们建立反向的首批结果：在过程代数范畴上构造显式格罗滕迪克拓扑，其层条件能够强制实现指定的行为等价关系。我们的主要结果是谱括号定理（见下文），其主要实例是三拓扑严格链，而部分 L_{30} 嵌入（定理 6.8）则是其结构性推论。

备注 6.2 （迹与双模拟拓扑）。 我们在 $\mathbf{f.p.LTS}_1$ 上构造第一个格罗滕迪克拓扑，其层条件强制某种已命名的行为等价关系。定义路径有向图 P_n（顶点为 $n+1$，边为 $i \to i{+}1$），以及 G上的筛 S；当且仅当 S包含所有针对每个 n的图同态 $P_n \to G$ 时，该筛是 J_{trace}-覆盖 。它满足三条格罗滕迪克公理（极大性、拉回稳定性、传递性）。其中，传递性的关键在于 id_{P_n} 本身就是一个路径态射。迹分离定理表明：两个有根有向图迹等价（即可达路径长度的集合相同），当且仅当它们具有相同的 J_{trace}-茎。路径有向图在 J_{trace}下构成一个稠密子范畴，因此比较引理 [25, C2.2.3] 适用：**层范畴**$(\mathbf{f.p.LTS}_1, J_{\mathrm{trace}}) \simeq$ **层范畴**$(\mathbf{Path}_{J_{\mathrm{trace}}|\mathrm{Path}})$。拓扑 J_{trace} 严格细于 $\neg\neg$-拓扑（=原子拓扑：基范畴满足右奥尔条件，因此预层拓扑斯是德摩根的，且这两种拓扑

重合）：环路顶点上的初始筛 $\{!_{\bullet_1}\}$ 非空，但不是 J_{trace}-覆盖，因为它遗漏了 $P_1 \to \bullet_1$。

将路径有向图 P_n 替换为有限有根树（图12）后，得到双模拟拓扑 J_{bisim}：在 G 上的筛 S 是 J_{bisim}-覆盖的，当且仅当 S 包含每棵有根树 T的每个图同态$T \to G$。由于每个路径有向图都是有根树，每个 J_{bisim}-覆盖筛都会自动成为 J_{trace}-覆盖筛： $J_{\mathrm{bisim}} \subseteq J_{\mathrm{trace}}$ 作为格罗滕迪克拓扑。三个格罗滕迪克公理通过相同的自探测论证对 J_{bisim} 成立：对于传递性，由于 T_0 是一棵树，id_{T_0} 本身就是一个树态射。包含关系是严格的：扇形有向图 fan(2)（根节点有 2 个叶子子节点）是一棵有根树，但其恒等式不在路径生成筛中（不存在保根路径态射 $P_n \to$fan(2)能够同时命中两个叶子，因为一条路径至多访问根的一个子节点），因此 fan(2)上的路径生成筛是 J_{trace}-覆盖的，但不是 J_{bisim}-覆盖的。

这两种拓扑由参数化的观察类 框架统一起来：对于任意一类 $\mathcal{C}$ 有根树，筛是 $J_{\mathcal{C}}$-覆盖的，当且仅当它包含所有 $\mathcal{C}$-态射。

定理6.3 (谱括号)。 对于任意一类 $\mathcal{C}$ 具有路径 $\subseteq\mathcal{C}$ $\subseteq$树的有根树，观察类拓扑满足

$$\boxed{J_{\mathrm{bisim}} \;\subseteq\; J_{\mathcal{C}} \;\subseteq\; J_{\mathrm{trace}}}$$

van Glabbeek 谱是固定位点上的一组 *Grothendieck* 拓扑所构成的区间，并由观察类加以参数化。

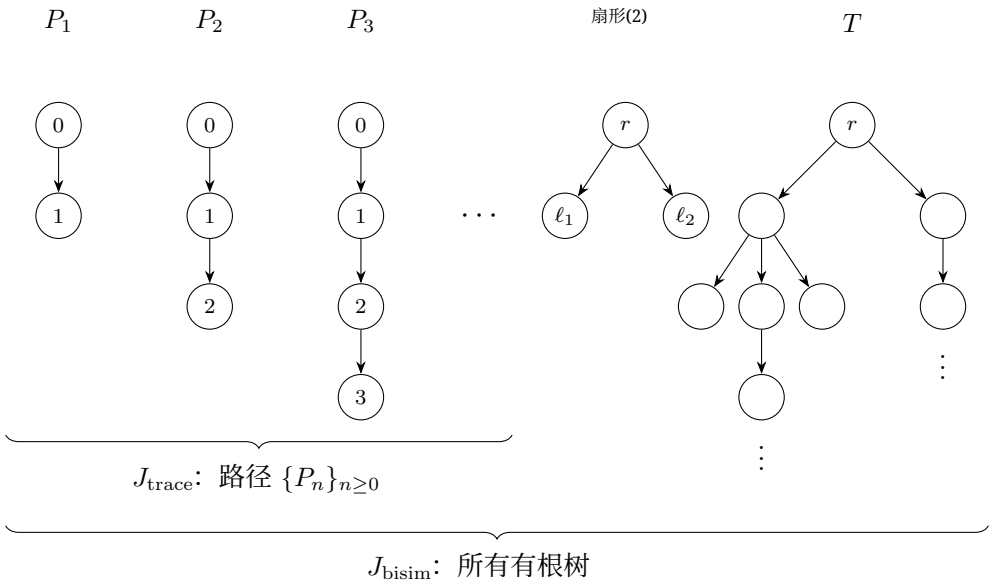


图12：迹与双模拟拓扑的测试对象。路径有向图 P_n 生成 J_{trace}；所有有限有根树（例如一般树 T）生成 J_{bisim}。由于每条路径都是一棵树， $J_{\mathrm{bisim}} \subseteq J_{\mathrm{trace}}$。这种包含是严格的：$\mathrm{id}_{\mathrm{fan}(2)}$ 不属于路径生成筛（没有保根路径态射 $P_n \to$ fan(2)能同时到达两个叶子，因为一条路径至多经过根的一个子节点），因此fan(2)上的路径生成筛是 J_{trace}-覆盖的，但不是 J_{bisim}-覆盖的。

一个关键的不类比由此显现：树同态存在性 并不能刻画双模拟（同态可以合并分支），这与迹的情形不同；在迹的情形中，路径同态存在性确实刻画迹等价。筛条件（所有树态射都必须存在）是必不可少的。一条正向双模拟—树传递定理（Hennessy–Milner 正向）表明，双模拟等价关系蕴含相匹配的保根树同态存在性，但其逆命题不成立。对于 $|L| = 1$，该谱至多坍缩为两个具名拓扑层级： J_{trace} 与 J_{bisim}，因为对无标签系统而言，模拟等价与迹等价重合（正向模拟归结为匹配路径长度集，而这些集合是向下封闭的）。

注 6.4（标记推广与模拟拓扑）。 单标签情形可推广到带标签迁移系统 FinLTS(L)，其中边带有来自有限字母表 L 的标签。带标签同态保持标签；迹拓扑与双模拟拓扑可直接传递：带标签迹词 $w \in L^*$ 和带标签根树分别作为 J_{trace} 与 J_{bisim} 的测试对象，而括号定理也相应成立。

对于 $|L| \geq 2$，第三种拓扑显现出来。树同态的存在性 刻画了模拟等价（不同于双模拟，在双模拟中完整的筛结构至关重要）。然而，对 J_{sim} 采用朴素的观察类方法行不通。

定理 *6.5*（朴素模拟覆盖不稳定性）。覆盖谓词“在 S中存在树同态”满足格罗滕迪克拓扑的极大性公理和传递性公理，但不满足稳定性公理。令 f_R: ***traceLTS***$[a] \to$ ***fanLTS***$[a, a]$ 为右分支包含（将非根顶点映射到顶点 *2*），并令 S 为 ***fanLTS***$[a, a]$ 上由 f_R生成的筛。那么 S 是朴素模拟覆盖：对于任意有根树 T，只要存在一个同态 f映入 ***fanLTS***$[a, a]$，将 f 的两条分支折叠到 ***traceLTS***$[a]$唯一的非根顶点上，就得到一个态射 k，且 $f_R \circ k \in S$。现在沿左分支包含f_L （将非根顶点映射到顶点 *1*）拉回 S。***traceLTS***$[a]$ 上的恒等态射属于 f_L^**(S)* 当且仅当$f_L = f_R \circ k$对某个 k成立；但在非根顶点处计算可得 f_L*(1)* $= 1$，而 f_R*(k(1))* $\in \{0, 2\}$，矛盾。因此， f_L^**(S)*不是朴素模拟覆盖。

正确性 J_{sim} 实际上由 Caramello 的商理论对偶 [12]保证：编码正 HML（Hennessy–Milner 逻辑的模拟片段）的几何序列式通过标准饱和构造生成一个格罗滕迪克拓扑。与 J_{trace}和 J_{bisim}不同，后两者的覆盖谓词有明确定义，且三个格罗滕迪克公理均已在 Lean 中构造性地证明；模拟拓扑则由 Caramello 的商理论对偶 [12, 定理 3.6]建立：几何公理通过标准饱和构造在句法位点上生成覆盖条件，从而得到一个子拓扑斯。该证明在标准格罗滕迪克拓扑斯理论中是构造性的；由于 Mathlib 尚未涵盖句法范畴或层化，因此 Lean 形式化将其公理化。由此，模拟拓扑是三者中唯一需要 Caramello 的商理论工具的拓扑；定理 6.5 表明，对于朴素的观察类方法而言，这种间接处理已被证明是必要的。这是模拟的（-1）截断层级所具有的结构性特征，而非证明技巧的局限。

推论 6.6 (三拓扑严格链)。 对于 $|L| \geq 2$，迹拓扑、模拟拓扑和双模拟拓扑构成 f.p.标记迁移系统L 上格罗滕迪克拓扑的严格链：

$$J_{\mathrm{bisim}} \subsetneq J_{\mathrm{sim}} \subsetneq J_{\mathrm{trace}}.$$

这些标准反例表明： $a.b + a.c$ 和 $a.(b + c)$ 迹等价，但并非模拟等价； $a.(b + c)$ 和 $a.b + a.c + a.(b + c)$ 模拟等价，但并非双模拟等价。

注 6.7 （截断层级与观测类边界）。 这种三分划分——迹采用构造性方法，双模拟采用构造性方法，模拟则通过公理化刻画——反映了观测类框架中的截断层级边界。

观察类拓扑 $J_{\mathcal{C}}$ 检测 $\mathrm{Hom}_*(T, –)$ 的 Hom预层同构，其中 $T \in \mathcal{C}$。它所诱导的等价关系作用于筛层级 （0-截断：必须匹配全部态射的集合）。相比之下，迹等价是 (-1)-截断的：它只要求相同的 Hom集非空 （命题性存在）。

对于路径有向图，筛层级条件与存在层级条件恰好在对象上诱导相同的等价关系，因为迹分离定理证明，两个有根有向图迹等价，当且仅当它们具有相同的布尔支撑 $\{\, n : \mathrm{Hom}_*(P_n, G) \neq \varnothing \,\}$ 路径 Hom 预层。筛携带额外的重数信息（每种长度的不同路径数量），但拓扑的覆盖条件（要求所有 路径Hom）意味着这些额外信息不会影响所诱导的等价关系。

对于有根树，存在性层面的条件（相互模拟：具有相同的树Hom存在模式）严格粗于筛层面的条件（双模拟：匹配树Hom筛）。观测类框架在筛层面运作，因此能够原生地刻画双模拟；而模拟在非刚性测试对象上确实是 -1 截断的，需要通过商理论构造来实现。

我们注意到，迹分离定理通过路径Hom预层的布尔支撑刻画了迹等价关系。第6.6节中的识别 $\mathbf{Sh}(\text{有限标记转移系统}(L),\ J_{\mathrm{trace}}) \simeq \mathbf{PSh}(L^*,\ \leq_{\mathrm{prefix}})$ 表明，层拓扑斯捕获的等价关系严格细于迹等价关系：在 Cattani–Winskel模型中，$\mathbf{PSh}(L^*,\ \leq_{\mathrm{prefix}})$ 里的开映射双模拟还原了强双模拟，这暗示迹托邦记住了路径重数。至于 J_{trace}-层论等价关系的精确刻画——Cattani–Winskel对应表明它很可能严格细于迹等价关系——仍有待解决。

定理 6.8 （部分 L_{30} 嵌入）。 将每种具名过程等价关系 E映射到 f.p.标记迁移系统$_L$ 上的格罗滕迪克拓扑 J_E 的映射，是从三元素子偏序集 $\{$迹、模拟、双模拟$\} \subset L_{30}$ 到 集合范畴$[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}]$的子拓扑斯格的序嵌入。具体而言：严格链 $J_{\mathrm{bisim}} \subsetneq J_{\mathrm{sim}} \subsetneq J_{\mathrm{trace}}$ 反映了 L_{30}中的谱序 双模拟 $>$模拟 $>$迹，其反向关系源于细等价关系与更粗拓扑之间标准的反单调对应（更多覆盖筛 $=$ 意味着更多识别=，也意味着更细的等价关系）。

证明。 序保持性遵循一般原理：若等价关系 E_1 比 E_2更细，则 $J_{E_1} \subseteq J_{E_2}$ （每个 E_1-覆盖筛都是 E_2-覆盖筛）。序反射性（单射性）由严格分离性得出： $J_{\mathrm{bisim}} \neq J_{\mathrm{sim}}$ 和 $J_{\mathrm{sim}} \neq J_{\mathrm{trace}}$，分别由 fan$[a, a]$ 上的具体筛和 van Glabbeek反例作为见证。 □

这一构造具体体现了一个一般性叙述：预层拓扑斯（无拓扑）只能看到同态所保持的内容：前向可达性。每一个格罗滕迪克拓扑都会增加一个层条件，迫使预层在某种程度上遵守后向提升。van Glabbeek 谱是后向提升要求的谱，由固定站点上的格罗滕迪克拓扑逐级刻画。迹等价施加最弱的后向约束（路径长度一致性）；双模拟施加完整的之字形；中间的命名

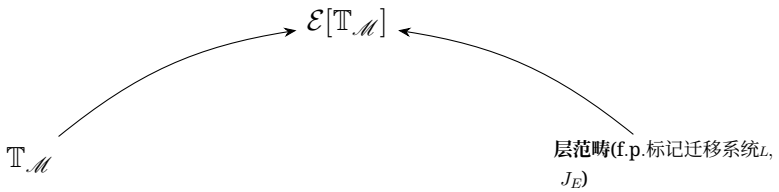
等价关系对应于中间的拓扑。Joyal、Nielsen 与 Winskel [26] 改变路径范畴（以线性路径 L^* 表示迹，以分支树 Bran_L 表示双模拟）；我们的方法则固定位点并改变拓扑，其精神与 Caramello 桥接技术 [12]一致。尽管并发的层预模型已有 30 年、Caramello 纲领已有 15 年，J_{trace} 与 J_{bisim} 似乎是过程代数范畴上首批显式的格罗滕迪克拓扑，其层拓扑斯将过程分类至命名等价关系，这一空白类似于 Hora [20] 为自动机与正则语言所填补的空白。J_{sim} 经由 Caramello 的构造性对偶确立（在 Lean 中公理化，尚待 Mathlib 的托扑理论覆盖）；构造显式覆盖筛仍是核心未决问题。完整的格 L_{30} 被猜想嵌入集合范畴 $[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}$]的子拓扑斯格，每个元素对应于有限呈现 LTS 范畴上的一个格罗滕迪克拓扑。定理 6.8 确立了对三元素子偏序集 $\{T, S, B\}$的限制。为其余 10 种命名等价关系（失败、就绪模拟等）构造拓扑并验证完整嵌入，是拓扑斯几何反向流的核心未决问题。

另一个尚未解决的问题涉及非像有限过程。每个深度界 d 都会给出集合范畴$[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}]$ 的一个子拓扑斯，其点对应于模深度-d-等价的过程。这个有向系统的余极限是一个局部化托扑斯，其开元的 locale 是完整有限 HML 的林登鲍姆代数。对于像有限过程，这个 locale 是空间的（Hennessy–Milner 定理）。对于非像有限过程，这个 locale 在操作意义上可能不是空间的：相容理论无法由任何过程实现。若能从托扑斯理论角度刻画这一差距，就能得到一个全新的过程论定理，而表述该定理需要用到托扑斯框架。

6.3. 能量–Lawvere–Tierney 桥。 §6.2 中的三个拓扑——迹、模拟、双模拟——将 van Glabbeek 谱的一个三元素子偏序集嵌入子拓扑斯格中。现在，我们将构建一个框架，通过能量参数化构造把这条三点链扩展到完整的 13 点谱，并将 Bisping 的六维能量预算 [9] 与 f.p.标记迁移系统$_L$上的格罗滕迪克拓扑联系起来。赋值$E \mapsto J_E$ 是反单调的；对于 $|L| \geq 2$，相应的余框架映射是单射的，且其像落在一个分配结构本质上属于托扑斯论范畴的余框架中。该构造遵循以下流程：

$$E \longmapsto \mathcal{C}(E) \longmapsto J_E \longmapsto \mathbf{Sh}(\mathrm{f.p.LTS}_L, J_E)$$

一个能量预算确定测试对象，这些对象生成一个格罗滕迪克拓扑，其层范畴是一个子拓扑斯。借助 Caramello 桥接技术 [12], ，这一流程提升到分类托普斯：



左支柱对标记迁移系统结构进行分类；右支柱则局部化到由能量预算 E 确定的子拓扑斯。每个命名等价都在由此形成的子托扑余框架中占据一个独特位置。

定义 6.9（能量格罗滕迪克拓扑）。 Bisping 的光谱学框架通过能量预算 $E = (e_1, \ldots, e_6) \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^6$, 来参数化过程等价关系，这些预算控制观察深度 e_1、合取宽度 e_2、正向深度 e_3、其他正向深度 e_4、负向深度 e_5以及否定嵌套 e_6。van Glabbeek 谱中的 13 种命名等价关系（从迹到双模拟）对应于典范能量向量（§5）。

每个能量预算 E 确定一个观察类 $\mathcal{C}(E)$：由有限的根L标记树组成的类，其深度满足 $\mathrm{depth}(T) \le e_1$，最大分支数满足 $\mathrm{branch}(T) \le e_2$（其余四个坐标约束极性和否定结构）。观察类具有单调性： $E_1 \le E_2$ 蕴含 $\mathcal{C}(E_1) \subseteq \mathcal{C}(E_2)$（更多能量可揭示更多测试）。

命名观察类可还原熟悉的测试对象： $\mathcal{C}$（迹） = {路径有向图}（深度无界、分支数为 ≤ 1）， $\mathcal{C}$（双模拟） = {所有有根树}（所有界限均为 ∞），以及$\mathcal{C}$（模拟） = {树}（正片段、无否定： $e_5 = e_6 = 0$）。正片段分类将 13 个命名等价关系划分为 7 个正向等价关系（包括迹、模拟、就绪模拟）和 6 个负向等价关系（包括失败、就绪度、失败迹）。

对于每个能量预算 E，在 f.p.标记迁移系统L上定义一个覆盖谓词：若筛 S 在 G上包含从 $\mathcal{C}(E)$测试对象到 G的所有同态，则称其为 E-覆盖。对于每个 E，三个格罗滕迪克公理均得到验证：极大性显然成立（极大筛包含所有态射）；稳定性源于拉回保持 $\mathcal{C}(E)$测试态射；传递性则利用能量有界观察的复合结构。

对于能量预算 $E \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^6$,，能量拓扑 J_E是 f.p.标记迁移系统L 上的格罗滕迪克拓扑，其覆盖筛恰好是 E-覆盖筛。

赋值 $E \mapsto J_E$ 是反单调的：观察越精细（$E_1 \le E_2$），测试对象越多（$\mathcal{C}(E_1) \subseteq \mathcal{C}(E_2)$），因此覆盖条件越强，拓扑也越精细（$J_{E_2} \subseteq J_{E_1}$，顺序相反）。与现有拓扑的对应关系是精确的： $J_{\mathrm{traces}} = J_{\mathrm{trace}}$ 和$J_{\mathrm{bisimulation}} = J_{\mathrm{bisim}}$ （来自 §6.2），这使谱括号定理成为一个特例：对于每个具名 E，都有$J_{\mathrm{bisim}} \subseteq J_E \subseteq J_{\mathrm{trace}}$。定理 6.8 中的链 $J_{\mathrm{bisim}} \subsetneq J_{\mathrm{sim}} \subsetneq J_{\mathrm{trace}}$ 包含在这个参数化族中。

定理 6.10 (Energy–LT 桥接)。 能量拓扑（定义 *6.9*）位于预层侧（f.p.标记迁移系统L）；*§5* 中的核算子位于代数侧（林登鲍姆代数）。能量–Lawvere–Tierney 桥 通过框架上的核与其关联薄范畴上的格罗滕迪克拓扑之间的标准对应关系，将二者联系起来 [24, §II.2]。

记 $\mathcal{V}$ 为由能量预算包含关系排序的 *13* 元 *van Glabbeek* 命名过程等价偏序集（$\bar{e}_1 \le \bar{e}_2$ 当且仅当每个 $\bar{e}_1$公式都是一个 $\bar{e}_2$公式），并定义谱–核算子嵌入 $\nu(\bar{e}) = j_{\bar{e}}$:

$$\boxed{\nu : \mathcal{V} \xhookrightarrow{\text{antitone}} \mathrm{Sub}(\mathrm{Set}[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}])^{\mathrm{op}}}$$

映射 ν 是单调的（更细的过程等价关系 $\mapsto$ 在余框架序中对应更小的子拓扑斯），并且对于非退化标签字母表是单射（$|L| \ge 2$）。陪域具有<*STYLE_PLACEHOLDER*>余框架</*STYLE_PLACEHOLDER*>结构：其对偶是一个框架，并继承核格的框架结构。对于任意有限标签字母表 L，若有 $|L| \ge 2$:

(1)子拓扑斯序 $\mathrm{Sub}(\mathrm{Set}[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}])$ 具有余框架结构，并满足分配律$A \sqcup (B_1 \sqcap B_2) = (A \sqcup B_1) \sqcap (A \sqcup B_2)$。(2) $J_{\mathrm{bisim}} \subsetneq J_{\mathrm{trace}}$：两点子偏序集 {迹、双模拟} 嵌入此余框架，且严格分离是构造性的。

(3) 严格链 $J_{\mathrm{bisim}} \subsetneq J_{\mathrm{sim}} \subsetneq J_{\mathrm{trace}}$ 将三点子偏序集 {迹、模拟、双模拟}嵌入此余框架（定理 *6.8*、推论 *6.6*）。(4)可能未来与失败迹的余框架交不属于谱的像： $\nu(\mathrm{PF}) \sqcap \nu(\mathrm{FT}) \notin \mathrm{im}(\nu)$。(5)嵌入 ν 可扩展到 *van Glabbeek* 谱的全部 *13* 种命名等价关系，并与能量序单调且相容： $E_1 \leq E_2 \Longrightarrow \nu(E_2) \leq \nu(E_1)$。

第 1–2 项构成本文的构造性核心：余框架结构、构造性的 $J_{\mathrm{trace}} \neq J_{\mathrm{bisim}}$严格分离，以及分配律。第 3 项借助 Caramello 对偶，通过添加 J_{sim} 将两点嵌入扩展为三点链；第 4 项建立 PF ⊓FT 逃逸见证。第 5 项则借助能量—拓扑框架（备注 6.11），将范围从 3 个扩展到全部 13 个命名等价关系。

备注 6.11（公理边界）。 第 5 项中的公理标示了本文的构造与 Caramello、van Glabbeek 和 Bisping 已发表结果之间的接口。其数学内容属于标准的格罗滕迪克托扑理论；公理化反映的是 Mathlib 对托普斯论覆盖的支持现状，而非数学上的缺失。§5 中的 L_{30} 格运算在有限的 30 元格上完成判定。覆盖筛的完整显式构造在 J_{sim} 层面仍未解决；参见 §8。

推论 6.12 (余框架计算**)。** 定理 *6.10* 的余框架结构使我们能够进行超出具名谱范围的显式计算：

(1) 单标签坍缩。 对于 $|L| = 1$，*13* 个具名等价关系至多诱导出 f.p.标记迁移系统[1] 上的 *2* 种不同格罗滕迪克拓扑： J_{trace} 和 J_{bisim}，因为对于无标签系统，模拟与迹等价关系一致 [39]。（逐系统林登鲍姆代数仍可能区分可启用性与迹等价关系，但这是系统层级的区别，而非位点层级的区别。）**(2)** 双标签忠实性。 对于 $|L| \geq 2$，全部 *13* 个具名等价关系都会产生不同的子拓扑斯。证明使用序反射： $\nu(E_2) \leq \nu(E_1) \Rightarrow E_1 \leq E_2$，并结合 *van Glabbeek* 谱中已知的不可比较对。**(3)** 不可比较性传递。 *PF* 和 *FT* 在 子托普斯格(集合范畴$[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}]$)中仍不可比较。它们的余框架交 $\mathrm{PF} \sqcap \mathrm{FT}$ 是一个未命名的余框架元素，证明子拓扑斯格严格大于该谱。**(4)** 格闭包传递。 *§5* 中的 *30* 元素格闭包（*13* 个具名 $+$ *17* 未命名，通过三轮 $\{\sqcap, \sqcup\}$-稳定化计算）传递到余框架层级，得到 *17* 个未命名余框架元素。

6.4. **托普斯论路径的不可约性**。定理 6.10 的三个特征本质上是托普斯论的。

余框架结构。第 1 项中的分配律源于林登鲍姆代数上核算子的框架结构（Isbell 1972, Simmons 1978），而这取决于子对象分类器的 Heyting 代数结构。van Glabbeek 谱是一个有限偏序集，目前尚无已知的格结构；余框架律是真正全新的代数信息，无法仅从能量向量推导出来。

未命名子拓扑斯。定理第 4 项中的元素 PF ⊓ FT 没有过程代数名称，而格闭包中 17 个未命名元素对应于几何公理（确定性、像有限性、混合约束）；这些公理横跨 HML 层级，无法通过任何能量预算体现出来。只有通过核构造才能证明这些元素的存在。

分配律见证。这个未命名的交 PF ⊓FT 满足余框架分配律，尽管无法用进程代数来描述；它的存在及其代数性质都必须通过托普斯才能确定。

综合来看，定理 6.10 首次将 van Glabbeek 谱整体 视为一个托普斯论对象：它是无限余框架中的一个有限子偏序集，是分类托普斯的内在不变量，无法从进程代数内部获得。

6.5. **几何闭包定理**。泛模型的底集函子 U_T 所对应的 Sub(U_T) 的内部逻辑 提供了独立的佐证。几何子对象（由正存在 HML 公式定义的子函子）构成一个海廷子代数，其蕴涵运算可通过自由扩张得到具体的进程代数刻画。

定义 6.13（正存在 HML）。将正存在 HML（以下简称HML^{+}）定义为由 $\top$、合取 $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ 和菱形模态 $\langle a\rangle\varphi$ 生成的片段。HML^{+} 中的每个公式都通过 $S_\varphi(G,v) \Leftrightarrow \varphi$.满足($G,v$)，定义底集预层的一个子函子 S_φ。正存在片段对所有正运算封闭，并且可满足性是单调的：若 $h\colon G \to H$ 是一个同态，且 $S_\varphi(G,v)$ 成立，则$S_\varphi(H,h(v))$ 成立；这正是子函子性质。

引理 6.14 (自由扩张)。对于 (G,v) 中的每个元素 有限标记转移系统(L) 以及每个 $\varphi \in HML^{+}$，存在一个标记转移系统 扩张(G,v,φ) 和一个保根同态$\iota\colon\ G \hookrightarrow$ 扩张(G,v,φ)，使得 φ.满足(扩张(G,v,φ) $\iota(v)$)。该构造向 G添加一棵由见证顶点 组成的树：每个菱形子公式对应一个新的后继，并添加满足条件所需的最少迁移。

该构造完全是显式的：Ext($G,\ v,\ \varphi$)的顶点是余积 $G \oplus W_\varphi$，其中W_φ 是一个递归索引类型（ φ中的每个菱形对应一个见证），迁移由连接 $\iota(v)$与第一个见证的根边、见证树内部的边以及 G的所有原有边组成。证明对 φ进行结构归纳，并且完全是构造性的。

命题 6.15 (否定塌缩)。在预层拓扑斯中，子函子 S 的内部否定是

$$(\neg S)(G,v) \;=\; \forall\, H,\ \forall\, h\colon G \to H,\ \neg S(H,h(v)).$$

对所有扩张进行这种全称量化的要求极为严格：它要求不存在任何 v 的同态像能够满足 S。对于每个可满足的 $\varphi \in HML^{+}$，我们都有 $\neg S_\varphi = \bot$ 和 $\neg\neg S_\varphi = \top$。

该证明直接由自由扩张引理（引理 6.14）得出：给定任意 ($G,\ v$)，扩张 Ext($G,\ v,\ \varphi$) 提供了一个满足 φ 的 v 的同态像，因此 ($\neg S_\varphi$)($G,\ v$) 不成立。由于这对所有 ($G,\ v$) 都成立，否定即为底子函子。双重否定稠密性 $\neg\neg S_\varphi = \top$ 随即得到。这与 §5 中观察到的唯一原子和

Ω(G) 上的坍缩否定现象相关：该预层拓扑斯距离布尔性甚远，以至于每个非平凡的几何子函子的否定都是平凡的。

本小节的核心结果给出了几何子函子的海廷蕴涵。

定理 6.16 （几何闭包）。 对于 $\varphi,\ \psi \in HML^{+}$,

$$\boxed{(S_\varphi \to_\Omega S_\psi)(G,v) \iff \psi.\mathsf{satisfies}(\mathrm{Ext}(G,v,\varphi),\, \iota(v))}$$

海廷蕴涵 $S_\varphi \to_\Omega S_\psi$ 按点定义为 $(S_\varphi \to_\Omega S_\psi)(G,\ v) = \forall H,\ \forall h\colon G \to H,\ S_\varphi(H,\ h(v)) \Rightarrow S_\psi(H,\ h(v))$，而该定理将这一全称量化简化为对自由扩张进行一次检验 。

证明。（⇒）若（G, v）满足该蕴涵，则将其应用于 $H = \mathrm{Ext}(G, v, \varphi)$，其中 $h = \iota$：由于该扩张在 $\iota(v)$ 处满足 φ ，该蕴涵便推出其在 $\iota(v)$ 处满足 ψ 。（⇐）假设 ψ 在扩张中的 $\iota(v)$ 处成立。对于任意 H 和 $h\colon\ G \to H$，若满足 $S_\varphi(H, h(v))$，则满足关系的见证 $S_\varphi(H, h(v))$ 给出一个中介同态 $m\colon \mathrm{Ext}(G, v, \varphi) \to H$，其中 $m \circ \iota = h$，并将每个见证顶点映射到 H 中对应的存在见证。由于 ψ 是正存在的（因此在同态下保持），故可推出 $S_\psi(H, h(v))$。 □

几何闭包定理表明，几何子对象构成一个海廷子代数：两个由HML^{+}定义的子函子的蕴涵，仍可通过对单个典范扩张进行测试来计算。这是一个本质上属于托普斯论的 结果：它既需要预层海廷蕴涵公式（托扑斯内部的公式），也需要典范测试扩张构造。目前尚无纯粹的过程代数证明。

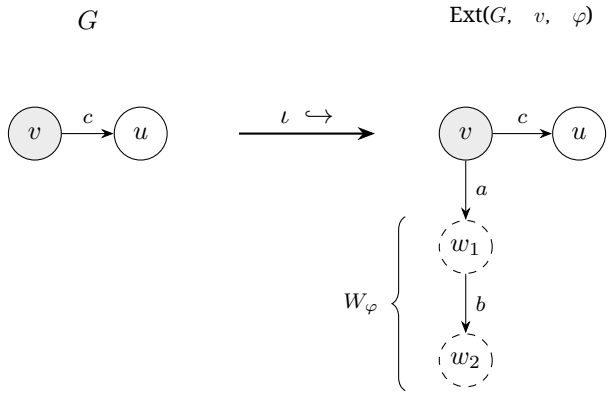


图 13：自由扩张构造（引理 6.14）。给定一个带有标记顶点 v 的标记迁移系统 G 和一个正存在公式 $\varphi = \langle a\rangle\langle b\rangle\top$，扩张 $\mathrm{Ext}(G, v, \varphi)$ 通过单射 ι 将一棵见证树 W_φ （虚线节点）添加到 G 。每个菱形子公式都会贡献一个新的顶点（w_1 对应 $\langle a\rangle$，w_2 对应 $\langle b\rangle$），并通过满足 ι（v）所需的最少边与之连通。G 的原有边予以保留。

推论 6.17 (子函子海廷伴随)。 对于 C_{fp} 上可表示预层 $\mathbf{y}(-)$ 的子函子 S_1、S_2、T，海廷蕴涵满足标准伴随关系：

$$S_1 \wedge T \ \le\ S_2 \quad\Longleftrightarrow\quad T \ \le\ (S_1 \to_\Omega S_2),$$

其中，偏序为逐点包含。

注 6.18（显式计算：四种情形）。 在字母表 $L = \{a, b\}$ 上，几何闭包定理给出了深度为 ≤ 2 时菱形公式蕴涵的四种性质迥异的情形：

(1) 独立： $\langle a\rangle\top \to \langle b\rangle\top = \langle b\rangle\top$。通过一个 a-后继进行扩张不会增加任何 b-迁移；该蕴涵化简为 ψ 自身。**(2) 非平凡残余：** $\langle b\rangle\top \to (\langle a\rangle\top \wedge \langle b\rangle\top) = \langle a\rangle\top$。扩张会自动满足 $\langle b\rangle\top$（前提）；残余会剥离自由提供的部分，留下 $\langle a\rangle\top$。**(3)深度递增：** $\langle a\rangle\top \to \langle a\rangle\langle b\rangle\top = \langle a\rangle\langle b\rangle\top$。浅层扩张（单个 a-后继）无法满足更深层的公式；该蕴涵等于 ψ。**(4) 蕴涵：** $\langle a\rangle\langle b\rangle\top \to \langle a\rangle\top = \top$。较强的前提会自动提供较弱的结论；该蕴涵在每个标记迁移系统的每个顶点处均为 $\top$。

这四种情形穷尽了深度 ≤ 2 处菱形公式蕴涵的全部逻辑可能性，并说明托扑斯如何计算“强制部分”，即在剥离可自由延拓的结构之后所剩余的残余。每一次计算都是对ψ.
satisfies(Ext(G, v, φ) $\iota(v)$)的一次单独求值。

6.6. **迹比较引理**。 有限标记转移系统(L)上的迹拓扑允许限制到满子范畴TraceLTS，其对象为线性链标记迁移系统，每个词 $w \in L^*$对应一个对象traceLTS(w)。稠密性条件（有限标记转移系统(L)中的每个对象都被迹对象覆盖）可构造性地证明：对每个 G：有限标记转移系统(L)，由经由迹对象分解的态射所生成的筛是 J_{trace}-覆盖的（构造性）。一般比较引理 [25, C2.2.3]由此得出：

$$\mathbf{Sh}(\mathrm{FinLTS}(L),\, J_{\mathrm{trace}}) \;\simeq\; \mathbf{Sh}(\mathrm{TraceLTS},\, J_{\mathrm{trace}}|_{\mathrm{TraceLTS}}).$$

迹对象之间的保持根同态对应于前缀嵌入：traceLTS(w_1) $\to$ traceLTS(w_2)存在当且仅当 $w_1 \leq_{\mathrm{prefix}} w_2$，且若存在则唯一。因此，TraceLTS上的限制拓扑就是前缀偏序集($L^*, \leq_{\mathrm{prefix}}$)上的典范拓扑，而带典范拓扑的偏序集上的层就是预层。于是迹托邦等价于PSh($L^*, \leq_{\mathrm{prefix}}$)，正是标记事件结构 [13]的Cattani–Winskel预层模型。

这一对应关系将 30 年来用于并发的预层模型（Joyal–Nielsen– Winskel [26], Cattani–Winskel [13], Eberhart–Hirschowitz–Seiller [16]）与本文的托扑几何框架联系起来：从有限标记转移系统(L)上的格罗滕迪克拓扑构造出的抽象层拓扑斯，经由比较引理，限制为组合偏序集上的具体预层范畴。（形式化内容：comparison_lemma_synthesis；一般的比较引理、前缀-同态对应以及 Cattani–Winskel 联系均已公理化。）

7. 相关工作

保真定理。范本特姆定理 [38] 将一阶逻辑的双模拟不变片段刻画为模态逻辑。Otto [32]给出了一种避免使用紧致性的初等证明。Rosen [34]表明，该刻画在有限结构上仍然成立。Rossman [35] 证明，同态保真定理在限制到有限结构时依然成立。Celani 和 Jansana [14] 将正一阶逻辑的正双模拟不变片段刻画为正模态逻辑。我们的定理 4.5 为带标记点的有限结构建立了几何的（正存在）情形。Wałęga 和 Cuenca Grau 最近的独立工作

证明，在受有界展开不变的有限带标记点克里普克模型上，同态保真等价于用存在正模态逻辑进行定义；这实质上是几何情形在标准翻译下的模态理论实质。他们的框架通过标准翻译（从模态逻辑到一阶逻辑）展开，而我们的定理 4.5 则在分类拓扑斯上的几何逻辑中直接进行；这两个结果相辅相成。

双模拟与模态逻辑。 Hennessy 与 Milner [19]引入了 HML，并证明了像有限系统的刻画定理：两个状态双模拟等价，当且仅当它们满足相同的 HML公式。Park [33]与 Milner [31]发展了双模拟的关系理论。van Glabbeek [39] 综述了具体顺序进程的线性时—分支时谱。Bisping [10, 9] 将该谱重构为涵盖 13 种等价关系的能量博弈层级（以不可能未来、复兴和可启用性取代完成迹、完成模拟和可能世界）；§5.1 将此层级提升为林登鲍姆代数上的核算子。

范畴论与余代数方法。Joyal、Nielsen 和 Winskel [26]通过预层范畴中的开映射刻画了双模拟，其设定与我们的不同（预层拓扑斯是环境范畴，而非逐系统理论的分类托普斯）。Abramsky [1]表明，在域论情境中，命题几何逻辑（即可观测性质）刻画了双模拟：两个过程双模拟等价，当且仅当它们满足相同的可观测几何性质。我们的工作关注逐系统理论上的一阶几何逻辑，这是一个技术上不同的框架，但概念关系是精确的。在命题层面上，几何逻辑与双模拟所见相同；Abramsky 的结果提供了基准。在一阶层面上，量词结构引入了双模拟可以打破的等同约束：前件中的全称变量可以在后件中被等同（机制 1），存在变量可以跨分支共享目标（机制 2），变量也可以与其源等同（机制 3）。因此，我们的三机制分类法正是对一阶量化如何超出命题情形的分类。Abramsky 和 Shah [2] 引入了博弈余单子，Abramsky 和 Reggio [3]借助树状范畴对它们进行了公理化，并导出了等资源保持定理 [4]。我们的能量到核的映射在结构上与之平行：他们将资源有界等价关系编码为泛预层范畴上的余单子伴随；我们将它们编码为逐系统林登鲍姆代数上的核算子（$=$ 分类拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑）。一个更深层的差异涉及截断：树状余 Kleisli 态射在 0 级运作（完整的函数数据），我们对 J_{trace} 和J_{bisim} 的观测类拓扑亦然。真正按 (-1) 截断的模拟需要商理论构造（注 6.7 ），这是树状框架通过不区分模拟与双模拟而回避的一个障碍。树状范畴目前覆盖 13 种命名等价关系中的 ~ 4 [5]；我们的框架以全部 13 种为目标。Bezhanishvili、de Groot 和 Venema [8] 研究余代数几何逻辑。Ghilardi 和 Zawadowski [18] 将层、博弈与模型完备化联系起来。Eberhart、Hirschowitz 和 Seiller [16]为使用格罗滕迪克拓扑编码行为等价关系提供了最接近的先例。他们在项范畴上的层预范畴中工作（ π-演算的交互树），构造了一个层条件强制双模拟的格罗滕迪克拓扑：两个项具有同构的层化，当且仅当它们双模拟等价。他们的构造直接从单一拓扑得到双模拟，即最细进程等价关系。我们的方法对整个谱进行分层：多个拓扑 J_E

位于一个固定站点上，每种等价关系对应一个，且拓扑格反映谱序（定理 6.8）。技术上的差异在于，Eberhart–Hirschowitz–Seiller 改变项（不同深度的交互树），同时将拓扑固定为双模拟；我们则固定位点（f.p.标记迁移系统L），并在整个谱上改变拓扑。

拓扑斯理论。 Caramello [12] 系统地发展了将分类拓扑斯用作不同数学理论之间“桥梁”的方法。Johnstone [25]提供了关于分类拓扑斯和比较引理的基础性参考。Makkai 和 Reyes [29] 确立了几何理论与其句法范畴之间的联系。

可实现性与有效拓扑斯。 Hyland [22] 构造了有效拓扑斯，其内部逻辑验证了丘奇论题。Hyland、Johnstone 和 Pitts [23]引入了三元托普斯，作为一个统一框架，涵盖可证性托普斯和可实现性托普斯。Van Oosten [37] 全面阐述了可实现性范畴及其范畴论性质。Longley [28] 指出了一个根本性障碍：即使部分组合代数计算出相同的一阶函数，也会产生不等价的可实现性托普斯；这正是我们第二分离在高类型层面的类似现象。Bauer [7] 在有效拓扑斯内部发展了合成可计算性理论，无需参照特定的机器模型，便从公理（数选择、可枚举性、马尔可夫原理）推导出赖斯定理和递归定理。

先行工作：Kihara 的 LT 拓扑。在结构上最为接近的是 Kihara [27], ，他将图灵可约性的双层不完全信息博弈与有效拓扑斯 Eff 上的 Lawvere–Tierney 拓扑联系起来。两种构造都使用从博弈预算到子对象分类器上闭包算子的反序映射：Kihara 将图灵度预算映射到 Ω_{Eff} 上的 LT 拓扑；我们则将能量向量映射到有限林登鲍姆框架 L_d 上的核算子。两者的一个关键差异在于代数结构：Kihara 在带有丰富否定的不可数 Ω 上实现了双射（$x \wedge \neg x \neq \bot$ 对许多 x）；我们则将其嵌入一个有限且否定坍缩的格中（$\neg x = \bot$ 对所有 $x \neq \bot$），其中非布尔性完全源自海廷蕴涵。两者都通过格罗滕迪克拓扑展示非布尔性，但采用了互补的代数机制。

分次单子与过程谱。Dorsch、Milius 和 Schröder [15] 证明，完整的 van Glabbeek 谱可由分次单子导出：Set 上的一个分次单子 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$以参数化前瞻深度，且每种分级都成立一个一般性的 Hennessy–Milner 定理。我们的第 5.1 节通过 Caramello 对偶定理将此谱嵌入为子拓扑斯格，从而将余代数视角扩展到托普斯论不变量。§5.1 中的能量到核的映射明确给出了分级：每个能量向量 $\bar{e}$ 都会诱导一个 Lawvere–Tierney 拓扑 $j_{\bar{e}}$，将分次谱转化为子拓扑斯格。

自动机托扑。 Hora [20, 21]利用 Caramello 桥接技术为正则语言构造了四个托扑，这是在方法上最接近的平行工作。从结构上看，自动机没有分支，因此接受性本质上是 (-1)-截断的，且这四种拓扑均源自观察类，无需绕道商理论。我们的迁移系统设定中，路径重数（树同态与树同态存在性）至关重要，因此引入了截断层级划分，对谱进行非平凡的分层。

数据库理论。 Yannakakis [42] 为合取查询引入了无环超图。刻画双模拟不变几何公式的树形片段，对应于二元步关系上的无环合取查询。

8. 结论

本文为拓扑斯理论与进程代数的统一奠定了基础。在这一框架中，“何时应当认为两个计算系统等价？”这一问题有了统一的结构性答案：相对于某种观察选择，当两个有限可表现系统的层化约内达像在由该选择确定的子拓扑斯中同构时，它们便是等价的。传统上，van Glabbeek 谱是一个行为等价关系的层级体系，其中每种关系都有各自的操作性或逻辑直觉作为依据。本文揭示，该谱实际上是分类托扑斯的子托扑之余框架中的一个有限子偏序集，而从一种等价关系转向另一种，则对应于局部化。

证据来自三个方面。几何的方面，在有限可表现标记转移系统的位点上构造了明确的格罗滕迪克拓扑 J_{trace}、 J_{sim} 和 J_{bisim} ，并通过 Energy–LT 桥接（定理 6.10）将一条严格链 $J_{\mathrm{bisim}} \subsetneq J_{\mathrm{sim}} \subsetneq J_{\mathrm{trace}}$ 扩展到全部 13 种命名等价关系。迹与双模拟拓扑通过观察类明确给出；模拟拓扑则借助 Caramello 的商理论对偶 [12], 得到，而一个构造性反例（定理 6.5）证明，这条间接路径在结构上不可或缺：模拟的命题内容与筛所承载的集合层级数据之间存在截断层级不匹配。代数的方面，将 13 种命名等价关系在格运算下闭合，得到含 30 个元素的等价谱格 L_{30} （本文将此记号用于表示 van Glabbeek 谱在交与并运算下的格闭包）。该谱格具有双 Heyting 结构，包含恒等式 $S \to F =$ IF、17 种未命名混合等价以及直接不可分解性，所有这些结果均在不引入任何自定义公理的情况下得到证明。逻辑的方面，本文界定了拓扑斯层面与进程层面表达能力之间的边界：几何 van Benthem 定理刻画出，仅含菱形模态的 Hennessy–Milner 逻辑正是几何逻辑的双模拟不变片段；几何闭包定理则将预层 Heyting 蕴涵的判断简化为在单个自由扩张处进行检验。这一简化专属于 LTS 位点的组合结构；在此，典范一步扩张充当一般见证，取代了 Kripke–Joyal 对所有扩张进行的全称量化。

概念上的收获在于，分类托普斯为计算对称性提供了统一的框架。每一种行为等价都是一个格罗滕迪克拓扑；所有这类等价关系构成的空间是一个余框架；而这个余框架的代数运算——交、海廷蕴涵和余海廷减法——产生了进程代数无法在内部触及的结构。 L_{30} 中的 17 个未命名元素是最具体的体现：它们是通过余框架结构发现的过程等价，任何单一的能量预算都无法揭示它们；它们对应于几何公理（确定性、像有限性、混合约束），这些公理横跨经典谱。嵌入 $\nu\colon \mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Sub}(\text{集合范畴}[\mathbb{T}_{\mathrm{LTS}}])^{\mathrm{op}}$是将一个 13 元偏序集嵌入无限余框架的序嵌入；它能否扩展为 L_{30} 的子格嵌入，并使交与并和环境余框架运算一致，仍是核心的结构猜想。

这一框架并非专用于 van Glabbeek 谱。任何一族其模型为计算系统的几何理论，以及任何一族对应于观测抽象的商公理，都会生成一个子拓扑斯格，在其中可以提出同样的问题：格运算是什么？会出现哪些未命名的等价关系

？嵌入是否为子格？本文针对带标签迁移系统和能量博弈层级回答了这些问题；所用技术、林登鲍姆代数、核映射、观测类拓扑以及 Caramello 对偶 [12], 都具有普遍性。对于其他计算模型（自动机、事件结构、Petri 网），若其等价关系可表示为几何商，则将这些模型纳入研究是自然的下一步；而涉及定量推理的模型（概率系统或量子系统）则需要在几何序列之外丰富逻辑框架。

模拟拓扑通过 Caramello 对偶以抽象方式建立；Caramello–Lafforgue 最近提出的生成公式 [11]为显式构造覆盖筛提供了一条路径，从而可以消除 J_{sim}的公理。完整的 30 元素闭包能否作为子托扑余框架的一个子格 嵌入其中，并且交与并保持一致，仍是核心结构性问题；若答案为是，便可得到 L_{30} 的无坐标化刻画，从而解决注 5.3 中指出的对 Bisping 的能量博弈参数化的依赖。更广泛地说，介于 J_{bisim} 与 J_{trace} 之间的每个格罗滕迪克拓扑是否都源自某个观察类？若是，便可在行为等价关系与子托扑之间建立双射对应，这将为本文所连接的两种传统构造一种结构性嵌入。

形式化。本文附有一个使用 Mathlib [30] 的 Lean 4 形式化项目，包含 RuleSys 库中的 118 个文件。主要结果——HML 双模拟不变性（定理 4.2）、几何闭包定理 6.16、 L_{30} 双 Heyting 结构（定理 5.9–5.11 ）、两个格罗滕迪克拓扑 J_{trace} 和 J_{bisim} （定理 6.3 ）、朴素模拟不稳定性（定理 6.5）、特征公式（引理 4.13），以及深度 0–2 的 van Benthem 实例（定理 4.7–4.10）——均在不使用任何自定义公理的情况下得到证明。公理化组件标示出与已发表结果的接口：Caramello 的商理论对偶 [12], 、van Glabbeek 的逻辑刻画定理 [39], ，以及 Bisping 的能量博弈框架 [9], ；其 Lean 形式化尚待 Mathlib 的托扑论基础设施发展完善。完整代码库见 K-NANOG/spectrum-topos。

参考文献

[1] S. Abramsky。《逻辑形式的域论》。纯粹与应用逻辑年刊，51，1991。[2] S. Abramsky 和 N. S hah。关联结构与能力：计算资源的余单子语义。逻辑与计算杂志，31(6)，2021。[3] S. Abramsky 和 L. Reggio。树状范畴：资源的公理化理论。计算机科学中的逻辑方法，19(3:14)，2023。[4] S. Abramsky 和 L. Reggio。树状范畴与等资源同态保持定理。纯粹与应用逻辑年刊，175(6):103423，2024。[5] S. Abramsky、Y. Montacute 和 N. Shah。线性树状范畴。*arXiv:2301.10088*，2023。[6] L. Aceto、A. Achilleos、A. Chalki 和 A. Ingólfsdóttir。关于嵌套模拟下特征公式判定问题的复杂度。*arXiv:2505.22277*，2025。[7] A. Bauer。合成可计算性理论初探。理论计算机科学电子札记，155，2006。[8] N. Bezhanishvili、J. de Groot 和 Y. Venema。余代数几何逻辑：基础理论。计算机科学中的逻辑方法，18(4:10)，2022。[9] B. Bisping。作为能量博弈的过程等价问题。载于*CAV 2023*会议论文集，LNCS **13964**，Springer，2023。[10] B. Bisping。并发程序的广义等价性检验。博士论文，柏林工业大学，2025。[11] O. Caramello 和 L. Lafforgue。格罗滕迪克拓扑的生成、可证性以及对子拓扑斯的运算。*arXiv:2508.21134*，2025。[12] O. Caramello。《理论、位点与托扑斯》。牛津大学出版社，2018。

[13] G. L. Cattani 和 G. Winskel。预函子、开映射与双模拟。计算机科学中的数学结构，15(3)，2005。[14] S. Celani 和 R. Jansana。正模态逻辑的 Priestley对偶、Sahlqvist定理与 Goldblatt–Thomason定理。IGPL 逻辑杂志，7(6)，1999。[15] U. Dorsch、S. Milius 和 L. Schröder。线性时—分支时谱的分次单子与分次逻辑。载于 CONCUR 2019会议论文集，LIPIcs 140，2019。[16] C. Eberhart、T. Hirschowitz 和 T. Seiller。针对 π 的内涵式完全抽象层模型（扩展版）。计算机科学中的逻辑方法，13(4:9)，2017。[17] N. Funayama 和 T. Nakayama。关于格同余之格的分配性。帝国学士院纪要，18(9)，1942。[18] S. Ghilardi 和 M. Zawadowski。《层、博弈与模型完备化》。Kluwer学术出版社，2002。[19] M. Hennessy 和 R. Milner。非确定性与并发的代数定律。ACM期刊，32(1)，1985。[20] R. Hora。自动机拓扑斯 I：自动机与正则语言的四种拓扑斯。arXiv:2411.06358，2024。[21] R. Hora。自动机拓扑斯。在 CT2025 上宣讲，布尔诺，2025。[22] J. M. E. Hyland。有效拓扑斯。载于《L.E.J. Brouwer百年纪念研讨会》，《逻辑与数学基础研究》110，North-Holland，1982。[23] J. M. E. Hyland、P. T. Johnstone 和 A. M. Pitts。Tripos理论。剑桥哲学会数学学报，88(2)，1980。[24] P. T. Johnstone。《Stone空间》。剑桥大学出版社，1982。[25] P. T. Johnstone。《大象素描：拓扑斯理论纲要》。牛津大学出版社，2002。[26] A. Joyal、M. Nielsen 和 G. Winskel。由开映射刻画的双模拟。信息与计算，127(2)，1996。[27] T. Kihara。面向可计算性理论研究者的 Lawvere–Tierney 拓扑。美国数学会会刊 B辑，10，2023。[28] J. Longley。高阶类型上的可计算性概念 I。载于《逻辑讨论会 2000》，《逻辑讲义》19，符号逻辑协会，2005。[29] M. Makkai 和 G. E. Reyes。《一阶范畴逻辑》。Springer，1977。[30] mathlib社区。Lean数学库。载于 CPP 2020会议论文集，ACM，2020。[31] R. Milner。《通信与并发》。Prentice Hall，1989。[32] M. Otto。van Benthem–Rosen刻画定理的初等证明。技术报告 2342，达姆施塔特工业大学，2004。[33] D. Park。无穷序列上的并发与自动机。载于《理论计算机科学》，LNCS 104，Springer，1981。[34] E. Rosen。有限结构上的模态逻辑。逻辑、语言与信息杂志，6(4)，1997。[35] B. Rossman。同态保持定理。ACM期刊，55(3)，2008。[36] J. J. M. M. Rutten。泛余代数：系统理论。理论计算机科学，249(1)，2000。[37] J. van Oosten。《可实现性：范畴论视角导论》。逻辑与数学基础研究 152，Elsevier，2008。[38] J. van Benthem。模态对应理论。博士论文，阿姆斯特丹大学，1976。[39] R. van Glabbeek。线性时—分支时谱 I。载于《进程代数手册》，Elsevier，2001。[40] R. van Glabbeek。线性时—分支时谱 II。载于 CONCUR 1993会议论文集，LNCS 715，Springer，1993。[41] P. A. Wałęga 和 B. Cuenca Grau。展开不变类的保真定理：模态逻辑与图神经网络的统一方法。arXiv:2602.01856，2026。[42] M. Yannakakis。无环数据库模式的算法。载于 VLDB会议论文集，1981。