arXiv:2603.01065v1 [math.AG] 1 Mar 2026

平面的二初等有理覆盖

CIRO CILIBERTO

Abstract. 本文对伽罗瓦群为 $\mathbb{Z}_2^r$ 形式的平面伽罗瓦覆盖进行分类，分类考虑到克雷莫纳变换。

Contents

引言 1
1. 预备知识 3 1.1. 一般性讨论 3 1.2. 德尔佩佐情形与不变圆锥丛情形 3 1.3. 有理双平面的分类 4 2. Blanc 分类 5 2.1. 不变圆锥丛情形的预备知识 5 2.2. 不变圆锥丛结构情形下的 Blanc 分类 6 2.3. 德尔佩佐情形下的 Blanc 分类 7 3. $\mathbb{Z}_2^r$ 平面的覆盖 8 3.1. 一般性讨论 8 3.2. 构造数据 9 3.3. $2 \leqslant r \leqslant 4$ 的构造数据 10 3.4. 正规化 11 3.5. 正规奇点 12 3.6. 不变量 12 4. 不变圆锥丛情形下的分类 12 4.1. $r = 2$ 情形 13 4.2. $r = 3$ 情形 18 4.3. $r = 4$ 情形 22 5. 德尔佩佐情形下的分类 24 5.1. $r = 2$ 情形下的分类 25 5.2. $r = 3$ 情形下的分类 28 5.3. $r = 4$ 情形下的分类 31 参考文献 31

Introduction

有限正规多重平面覆盖的研究是代数几何中的经典课题。尤其是，至今仍未完全解决的一个问题是：在平面的克雷莫纳变换下，对上述满足 S 为有理的多重覆盖 $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 进行分类。该领域的首项重要成果可追溯到 G. Castelnuovo 和 F. Enriques 于 1900 年发表的论文 [5] 。在那篇论文中，作者声称

给出了平面有理二重覆盖在克雷莫纳变换下的完整分类。那篇论文中的论证并不完整，直到最近，L. Bayle 和 A. Beauville 于 2000 年 [1]，以及 A. Calabri 在其 2006 年发表的博士论文中（见 [3]），才对这一课题作了完整处理；后者的研究方式更接近 Castenuovo–Enriques 最初采用的方法。该结果陈述于定理1.2。Calabri 的博士论文还完整分类了平面的有理循环三重覆盖。

除了这些结果之外，关于这一课题基本上还一无所知；例如，有理非伽罗瓦三重平面在平面的克雷莫纳变换意义下的分类至今仍未知。一般说来，对平面的有理多重覆盖进行分类这一问题似乎极其困难，大概超出了我们目前的能力范围。因此，将注意力限制在某些有趣的特殊情形上似乎是合理的。例如，我建议重点研究伽罗瓦群为有限阿贝尔群的平面伽罗瓦覆盖。考察这些情形的理由如下。一方面，J. Blanc在其论文 [2]（2006年）中，提出了平面的克雷莫纳群的有限阿贝尔子群在共轭意义下的分类。因此，原则上，对于所有阿贝尔伽罗瓦覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 且 S 为有理的情形，我们知道可能的伽罗瓦群是什么，以及它们在共轭意义下如何作用于 S。另一方面，还有R. Pardini于1991年的论文 [8]，其中详细描述了代数簇的有限阿贝尔覆盖的结构，特别是其分支曲线。其想法是：将Blanc与Pardini的结果结合起来，原则上应当能够对平面的有理阿贝尔覆盖的分支曲线在克雷莫纳变换意义下进行分类。

尽管原则上上述计划看起来可行，但实际上实施起来相当困难，这是由于 Blanc 分类所呈现的若干情形，以及进入讨论的伽罗瓦群种类繁多，这使得 Pardini 式的分析相当复杂而繁琐。不过，我认为这是一项值得推进的计划。

本文是朝这一方向迈出的第一步。事实上，本文给出了 $\mathbb{P}^2$的所有具有二元初等伽罗瓦群（即伽罗瓦群为$\mathbb{Z}_2^r$型）的有理阿贝尔覆盖的分支曲线在克雷莫纳变换意义下的分类。由 Blanc 分类可知，$1 \leqslant r \leqslant 4$。如前所述，情形$r = 2$ 是经典且众所周知的，因此我们可以集中讨论情形 $2 \leqslant r \leqslant 4$。

根据我在第1.2节中回顾的 Blanc 分析（尤其参见命题 1.1），该分类自然分为两种主要情形：存在一条被群作用固定的有理曲线铅笔的情形（不变圆锥丛情形），以及皮卡群在群作用下的不变部分秩为1、由典范丛生成的情形（德尔佩佐情形）。

不变圆锥丛情形下的分类见于 $r = 2$ 的命题4.2、4.4、4.6，$r = 3$ 的命题4.8、4.10，以及 $r = 4$ 的命题 4.12。

德尔佩佐情形下的分类见于 $r = 2$ 的命题5.1、5.3，$r = 3$ 的命题5.4、5.6，以及 $r = 4$ 的命题 5.7。

本文安排如下。第1节介绍一些一般性内容和预备知识，特别是有理双平面的分类，以及 Blanc 在不变圆锥丛情形和德尔佩佐情形中的细分。第2节回顾 Blanc 关于平面克雷莫纳群的 $\mathbb{Z}_2^r$ 子群在共轭意义下的分类。特别是，正如我所说，有 $1 \leqslant r \leqslant 4$。第3节沿用 Pardini 的

论文 [8], 回顾平面 $\mathbb{Z}_2^r$ 覆盖的理论，尤其关注$2 \leqslant r \leqslant 4$这些情形，因为它们正是 Blanc 分类中我们感兴趣的情形。第4节专门讨论不变圆锥丛情形下的分类，而第5节则包含德尔佩佐情形下的分类。

致谢： 作者是意大利国家高等数学研究所 GNSAGA 的成员。

1. Preliminaries

1.1. 一般性。 设 S 是一个不可约、复、正规、射影曲面， G 是 S 的一个有限自同构群（本文中通常假设其为阿贝尔群），且有一个有限态射 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，满足：若 $x \in \mathbb{P}^2$ 是一般点，则 $f^{-1}(x)$ 是 G 作用下的一个完整轨道。在这种情况下，我称 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，或称这一对 $(S,\ G)$，为 $\mathbb{P}^2$ 的一个 G– 覆盖，当然 $\deg(f) = |G|$。

给定如上所述的一对 $(S,\ G)$，也称为一个 G–曲面，再给定一个双有理态射 $\phi\colon S \longrightarrow S'$，其中 S' 是一个不可约、正规、射影曲面，若由 ϕ 在 S' 上诱导的 G 作用是双正则的，则称 ϕ 是 G–等变的。若任何 G–等变态射 $\phi : S \longrightarrow S'$ 都是同构，则称这一对 $(S,\ G)$ 是极小的。通过对 (-1)–曲线作一系列收缩，总能使 $(S,\ G)$ 成为极小的，因此本文始终假设所讨论的都是极小对。

给定一个不可约、光滑的射影曲面 S，以及一个态射 $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$，称 $(S,\ \phi)$ 为圆锥丛结构，若满足：

- ϕ 的一般纤维 F 光滑、不可约且有理，因此 $|F|$ 是一个有理曲线铅笔；
- ϕ 的所有奇异纤维都具有 $F_1 + F_2$ 的形式，其中 $F_1,\ F_2$ 光滑、不可约且有理，并且 $F_1^2 = F_2^2 = -F_1 \cdot F_2 = -1$（特别是 $F_1,\ F_2$ 是 (-1) 曲线）。

我常称铅笔 $|F|$ 为圆锥丛。

1.2. 德尔佩佐情形与不变圆锥丛情形。 给定一个德尔佩佐–曲面 $(S,\ G)$，且 S 光滑，群 G 作用于 $\mathrm{Pic}(S)$，我将 $\mathrm{Pic}(S)^G$ 记为 $\mathrm{Pic}(S)$ 中在该 G–作用下的不变部分。回顾 [2, Prop. 2.3.1] 中的以下命题：

命题 1.1. 设(S, G) 是一个极小的 G–曲面，且 S 光滑且有理。那么以下两种情形必有一种：

(i) $\mathrm{Pic}(S)^G$ 的秩为 *1*，且在 $\mathbb{Q}$ 上由典范系生成；或 *(ii)* $\mathrm{Pic}(S)^G$ 的秩为 *2*， S 上存在圆锥丛结构(S, ϕ)，使得$\mathrm{Pic}(S)^G$ 在 $\mathbb{Q}$ 上由典范系和 ϕ 的一般纤维 F 生成。

在情形 (i) 中， S 是德尔佩佐曲面（见 [2, 引理 4.1.5]），即 S 是一个有理曲面，其反典范除子 $-K_S$ 丰沛。具体而言， S 或者同构于 $\mathbb{P}^2$，或者同构于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，或者是将 $\mathbb{P}^2$ 中处于充分一般位置的 $r \leqslant 8$ 个点 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 爆破所得的曲面。在这种情形下，我称之为德尔佩佐情形。

在情形 (ii) 中，存在一个铅笔 $\phi\colon\ S \longrightarrow \mathbb{P}^1$，其一般纤维 F 光滑、有理且不可约。群 G保留这个铅笔。若 F 是 ϕ 的一般纤维，则 G嵌入到

$$\mathrm{Aut}(F) \rtimes \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}(t)) \rtimes \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

其中 t 是一个变量。在这种情况下，我将称 $(S,\ g)$ 为 G 的不变圆锥曲线丛结构，并称我们处于不变圆锥丛 情形。

注意，若 $(S,\ G)$ 是一个极小的 G–曲面，且 S 有理且正规，但并非光滑，则 G 也作用于 S 的最小解奇点化 S' 上，并且 $(S',\ G)$ 是极小的，因此可以将命题 1.1 应用于 $(S',\ G)$。此时称 $(S,\ G)$ 具有德尔佩佐结构或不变圆锥丛结构，当且仅当 $(S',\ G)$ 具有相应结构。注意，若 $(S,\ G)$ 具有不变圆锥丛结构，则存在一条铅笔 $|F|$，其成员为有理曲线，且通常是 S 上的魏尔除子。

给定平面克雷莫纳群的有限子群 G，存在一个（在同构意义下唯一的）光滑有理曲面 S 以及一个双有理映射 $\varphi:\ \mathbb{P}^2\ \dashrightarrow\ S$，使得 $\varphi\circ G\circ\varphi^{-1}\simeq G$ 在 S 上双正则作用，且$(S,\ G)$是极小的（见 [2, 命题 2.2。3]，[7, 定理 1。4]）。如果 G 给出德尔佩佐结构或不变圆锥丛结构，我就称其为相应结构；对于$(S,\ G)$也如此。

1.3. **有理双平面的分类**。本文旨在对 G– $\mathbb{P}^2$ 的有理覆盖在克雷莫纳变换下进行分类，其中 G 具有 $\mathbb{Z}_2^r$的形式。 $r=2$ 的情形是经典的，可追溯至 G. Castelnuovo 和 F. Enriques [5]。近来，L. Bayle 和 A. Beauville 在 [1], 中重新研究了这一情形；而 A. Calabri 在其博士论文 [3]中，也从更接近 Castelnuovo–Enriques 及本文观点的角度研究了这一情形。分类定理如下：

定理1.2。设 $f:\ \ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 是平面的一个有限双覆盖，其对应的曲面不可约、射影且正规。那么，当且仅当分支曲线在克雷莫纳等价意义下属于以下类型之一时，S 才是有理的：

(i) 约化圆锥曲线；*(ii)* 光滑四次曲线；*(iii)* 具有两个无穷近三重点的不可约约化六次曲线；*(iv)* 次数为 $2d>2$ 的不可约约化曲线，具有一个重数为 $2d-2$ 的普通奇点，且除此之外光滑或仅有一个节点。

注意，在情形(i)中，若圆锥曲线是奇异的，以及在情形(iv)中，我们处于不变圆锥丛情形（在 S的最小解奇点化上）；而在情形(ii)和(iii)中，我们处于德尔佩佐情形。在情形(i)中，若圆锥曲线不可约，则我们处于德尔佩佐情形，因为 $S\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 且双平面映射诱导了对合$(x,\ y)\in\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\longrightarrow(y,\ x)\in\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$。在情形(ii)中，$S$是一个光滑德尔佩佐曲面，且$K_S^2=2$，即在7个充分一般位置的点处吹起的平面；双平面映射在 S 上诱导一个称为贝尔蒂尼对合的对合。在情形(iii)中，S 的最小解奇点化是一个光滑德尔佩佐曲面，且 $K_S^2=1$，即在8个充分一般位置的点处吹起的平面；双平面映射在S 上诱导一个称为*Geiser*对合的对合。在此情形下，曲面 S 也可视为二次锥面 Q在 $\mathbb{P}^3$ 中的双覆盖，其分支曲线是由一个三次超曲面与 Q相交所得的光滑曲线，并包含锥的顶点。

鉴于定理1.2，本文将不考虑情形 $G\simeq\mathbb{Z}_2$，而专注于情形 $G\simeq\mathbb{Z}_2^r$，其中 $r\geqslant 2$。我将基于两项主要的基本结果进行分析：(a) J. Blanc 论文 [2]中对平面克雷莫纳群的有限阿贝尔子群的分类；(b) R. Pardini 的论文 [8]，其中对代数簇的阿贝尔覆盖作了详尽分析，我将把该分析应用于 $\mathbb{Z}_2^r$ 平面的有理覆盖。

2. 布朗的分类

在本节中，我回顾 Blanc 对 $\mathbb{Z}_2^r$–有理曲面（其中 $r>1$）在共轭意义下的分类。我首先考虑平面克雷莫纳群中呈现不变圆锥丛情形的子群 $G\simeq\mathbb{Z}_2^r$（其中 $r>1$）。

2.1. 不变圆锥丛情形的预备知识。 若我们有一个 G–曲面（S，G），且 S上存在一个不变圆锥丛，那么（在 S的极小解奇异化 S' 上）存在一个由 S 上的有理曲线组成的无基点铅笔 $|F|$，它受 G保持，因此 G 作用于参数化铅笔 $|F|$的 $\mathbb{P}^1$ 上，从而得到一个同态 π： $G\longrightarrow$ PGL(2，$\mathbb{C}$)。于是我们有一个正合列

$$0\longrightarrow G'\longrightarrow G\xrightarrow{\pi}\pi(G)\longrightarrow 0. \tag{1}$$

显然， G' 是一般纤维 $F\in|F|$的自同构群的子群，而 $F\in|F|$是一个 $\mathbb{P}^1$，所以 G' 也是PGL(2，$\mathbb{C}$)的子群。在所考虑的情形中， $G\simeq\mathbb{Z}_2^r$，且 $r>1$，于是 G' 和 π（G）都具有 $\mathbb{Z}_2^s$的形式，其中 $0\leqslant s\leqslant r$。此外，根据PGL(2，$\mathbb{C}$)的有限阿贝尔子群分类，有 $s\leqslant 2$，因此 $r\leqslant 4$。最后，正合列（1）分裂，因为 G 也是 $\mathbb{Z}_2$上的有限维向量空间。

仍在不变圆锥丛情形下，给定 $g\in G\setminus\{0\}$ 使得 $\pi(g)=0$， g 作用于圆锥丛 $|F|$ 的每个奇异纤维上（仍将其视为定义在 S的最小解奇点化 S' 上）。若 F_1+F_2 是这样的一个纤维，且 $g(F_1)=F_2$（因而 $g(F_2)=F_1$），我称 g 扭转 奇异纤维 F_1+F_2。这里需要提及以下结果（[2,引理 7.1.3]）：

引理 2.1. 设 (S,G) 是一个 G–曲面，且 S 光滑，呈现不变圆锥丛情形。考虑一个至少扭转一个圆锥丛结构的奇异纤维的 $g\in G\setminus\{0\}$。则以下条件等价：

(i) g 是一个对合；*(ii)* π $(g)=0$；

(iii) S 中被 g 固定的点集是一条亏格为 $k-1>0$的光滑超椭圆曲线，此外可能还有有限多个孤立点，它们是 g未扭转的 $|F|$ 奇异纤维的奇点；

(iv) g 固定一条正亏格曲线。

此外，若满足上述条件，则被 g 扭曲的圆锥丛奇异纤维的数量为 $2k$。

在引理 2.1 的情形下，若 $g\in G$ 扭曲圆锥丛结构的至少一个奇异纤维，且引理 2.1 的某一项（因而也包括所有项）条件成立，则称 g 为扭曲 *De Jonqui`ère* 对合。

在所考虑的情形中，给定非零元素 $g\in G$，对于 $G\simeq\mathbb{Z}_2^r$ 和 $r>1$，它要么不扭曲圆锥丛结构的任何奇异纤维（因此会交换奇异纤维），要么由于它是对合，满足 $\pi(g)=0$。换言之， G' 的非零元素恰好是 G 中的扭曲 De Jonqui`ère 对合。

如果（S，G）是一个呈现不变圆锥丛情形的 G–曲面，且 S 正规但不光滑，则可以将引理 2.1 应用于 S的最小解奇点化 S'，后者仍然是一个呈现不变圆锥丛情形的 G–曲面。然后，我可以将上述关于（S，G）的定义和术语应用于此。

2.2. **不变圆锥丛结构情形下的 Blanc 分类**。这里陈述该定理（参见 [2, 第 10 章，定理 B]）：

定理 2.2。克雷莫纳群的一个子群 $G \simeq \mathbb{Z}_2^r$，满足 $r > 1$，且属于不变圆锥丛情形，在克雷莫纳群中共轭于以下对象之一（且仅一个）[1]：

(0.22) $r = 2$，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的自同构，保持由第一投影给出的铅笔p_1：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$，由$(x, y) \mapsto (-x, y)$ 以及$(x, y) \mapsto (x, -y)$生成，其中 $G' \simeq \mathbb{Z}_2$;

(P1.221) $r = 2$，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的自同构，保持由第一投影给出的铅笔 p_1：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$，由$(x, y) \mapsto (x^{-1}, y)$ 以及$(x, y) \mapsto (-x, -y)$生成，其中 $G' = 0$;

(P1.22.1) $r = 2$，保持由第一投影 $p_1 \colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ 给出的铅笔的 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的自同构，由 $(x, y) \mapsto (\pm x^{\pm 1}, y)$ 生成，其中 $G' = 0$;

(P1.2221) $r = 3$，保持由第一投影 $p_1 \colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ 给出的铅笔的 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的自同构，由 $(x, y) \mapsto (\pm x^{\pm 1}, y)$ 和 $(x, y) \mapsto (x, -y)$ 生成，其中 $G' \simeq \mathbb{Z}_2$；

(P1.222) $r = 3$，保持由第一投影 $p_1 \colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ 给出的铅笔的 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的自同构，由 $(x, y) \mapsto (\pm x, \pm y)$ 和 $(x, y) \mapsto (x^{-1}, y)$ 生成，其中 $G' \simeq \mathbb{Z}_2$；

(P1s.222) $r = 3$ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的自同构，保持由第一投影给出的铅笔 p_1：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$，由$(x, y) \mapsto (x^{-1}, y^{-1})$、$(x, y) \mapsto (x, -y)$ 以及$(x, y) \mapsto (x, x/y)$生成，其中 $G' \simeq \mathbb{Z}_2^2$;

(P1.2222) $r = 4$，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的自同构，保持由第一投影给出的铅笔 p_1：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$，由$(x, y) \mapsto (\pm x^{\pm 1}, \pm y^{\pm 1})$生成，其中 $G' \simeq \mathbb{Z}_2^2$;

(C.2,21) $r = 2$，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 到自身的双有理映射，保持由第一投影给出的铅笔 p_1：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$，由

$$((x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \dashrightarrow ((x_1 : x_2), (y_2 \prod_{i=1}^{k} (x_1 - b_i x_2) : y_1 \prod_{i=1}^{k} (x_1 - a_i x_2))),$$
$$((x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \mapsto ((x_1 : -x_2), (y_1 : y_2))$$

其中 k 为偶数，a_1、.....、a_k、b_1、.....、$b_k \in \mathbb{C}^*$ 互不相同，且集合 $\{a_1, \ldots, a_k\}$ 和 $\{b_1, \ldots, b_k\}$ 都在乘以 -1 的作用下保持不变；此处 $G' \simeq \mathbb{Z}_2$ 恰好包含一个扭曲的 ***de Jonquières*** 对合，它固定一条亏格为 $k - 1$ 的超椭圆曲线；**(C.2,22)** $r = 3$，保持由第一投影给出的铅笔 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的双有理映射，由.....生成

$$((x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \dashrightarrow ((x_1 : x_2), (y_2 \prod_{i=1}^{k/4} P(b_i) : y_1 \prod_{i=1}^{k/4} P(a_i))),$$
$$((x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \mapsto ((x_1 : -x_2), (y_1 : y_2))$$
$$((x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \mapsto ((x_2 : x_1), (y_1 : y_2))$$

其中 k 可被 ***4*** 整除，$P(z) = (x_1^2 - z^2 x_2^2)(x_1^2 - z^{-2} x_2^2)$、$a_1$、.....、$a_{k/4}$、$b_1$、.....、$b_{k/4} \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ 均互不相同；此处 $G' \simeq \mathbb{Z}_2$ 恰好包含一个扭曲 ***de Jonquières***

[1]表示各种情形的符号取自 Blanc 的博士论文。

对合，它固定一条亏格为 $k-1$ 的超椭圆曲线；

(C.22) $r=2$, $G=G'$ 由保持第一投影所给铅笔的 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 到其自身的双有理映射构成 $p_1:\ \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\longrightarrow\mathbb{P}^1$，由两个扭曲的德容基耶尔对合生成

$$(x,y)\dashrightarrow\Big(x,\frac{g(x)}{y}\Big),$$
$$(x,y)\dashrightarrow\Big(x,\frac{h(x)y-g(x)}{y-h(x)}\Big)$$

对于某个 $g(x)\ h(x)\in\mathbb{C}(x)\setminus\{0\}$，且这两个对合各自固定一条正亏格的超椭圆曲线；

(C.221) $r=3$，保持第一投影所给铅笔的$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 到其自身的双有理映射 $p_1:\ \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\longrightarrow\mathbb{P}^1$，由以下映射生成

$$(x,y)\dashrightarrow\Big(x,\frac{g(x)}{y}\Big),$$
$$(x,y)\dashrightarrow\Big(x,\frac{h(x)y-g(x)}{y-h(x)}\Big)$$
$$(x,y)\mapsto(-x,y)$$

对于某个 $g(x)\ h(x)\in\mathbb{C}(x)\setminus\{0\}$，其在对合 $x\mapsto -x$下不变；此处 $G'\simeq\mathbb{Z}_2^2$，且 G' 的任意非平凡对合所固定的超椭圆曲线的亏格为奇数；**(C.22,22)** $r=4$，保持第一投影所给铅笔的 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 到其自身的双有理映射 $p_1:\ \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\longrightarrow\mathbb{P}^1$，由以下映射生成

$$(x,y)\dashrightarrow\Big(x,\frac{g(x)}{y}\Big),$$
$$(x,y)\dashrightarrow\Big(x,\frac{h(x)y-g(x)}{y-h(x)}\Big)$$
$$(x,y)\mapsto(\pm x^{\pm1},y)$$

对于某个 $g(x)\ h(x)\in\mathbb{C}(x)\setminus\{0\}$ 在 $x\mapsto\pm x^{\pm1}$ 下不变；这里 $G'\simeq\mathbb{Z}_2^2$，且由 G' 的任意非平凡对合固定的超椭圆曲线的亏格模 *4* 等于 *3*。

2.3. **德尔佩佐情形下的 Blanc 分类**。这里给出结果（另见 [2,第 10 章，定理 B]）：

定理 2.3。德尔佩佐情形中的平面克雷莫纳群的一个子群 $G\simeq\mathbb{Z}_2^r$，满足 $r>1$，在克雷莫纳群中共轭于以下对象之一（且仅有一个）：

(4.222) – **(4.2222)**德尔佩佐*4* 次曲面的两组自同构，在 $\mathbb{P}^4$中通过对平面在四个坐标点以及该点处吹起而得到

$(a:\ \ b:\ \ c)$，即在 $\mathbb{P}^4$ 中由两个二次方程定义

$$cx_1^2 - ax_3^2 - (a-c)x_4^2 - ac(a-c)x_5^2 = 0$$
$$cx_2^2 - bx_3^2 - (c-b)x_4^2 - bc(c-b)x_5^2 = 0. \tag{2}$$

这两个群具有 $r=3$ （情形*(4.222)*），并且

$$G = \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \mapsto (\pm x_1 : \pm x_2 : \pm x_3 : x_4 : x_5)\}, \tag{3}$$

以及 $r=4$ （情形*(4.2222)*），并且

$$G = \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \mapsto (\pm x_1 : \pm x_2 : \pm x_3 : \pm x_4 : x_5)\}; \tag{4}$$

(2.G2) – (2.G22)两个*2* 次德尔佩佐曲面的自同构群，这些曲面是作为沿光滑四次曲线 Γ 分歧的平面双覆盖而得到的，该曲线的方程为 $f(x,y,z)=0$。这两个群包含贝尔蒂尼对合 σ，并且形如 $G=\langle\sigma\rangle\times H$，其中 $H\subset \mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ 是四次曲线 Γ的一个自同构群。

我们有情形 $r=2$ （情形*(2.G2)*），其中 Γ 的方程具有如下形式

$$f_4(x,y) + f_2(x,y)z^2 + z^4 = 0$$

其中 $f_i(x,y)$ 是次数为 $i\in\{2,4\}$ 的齐次多项式，并且 $H\simeq\mathbb{Z}_2$ 由对合$(x:\ y:z)\ \mapsto (x:\ y:\ -z)$ 生成。

我们讨论 $r=3$ （情形 *(2.G22)*），其中 Γ 的方程具有如下形式

$$f_2(x^2,y^2,z^2)=0$$

其中 f_2（x、y、z）是次数为 *2* 的齐次多项式，且 $H\simeq\mathbb{Z}_2^2$ 由以下对合生成：（$x:\ \ y:\ \ z$）$\mapsto$（$x:\ \ -y:\ \ z$）和（$x:\ \ y:\ \ z$）$\mapsto$（$x:\ \ y:\ \ -z$）；

（1.B2.1） $r=2$ 次数为 *1* 的德尔佩佐曲面的一群自同构，即二次锥面 Q 的双覆盖，其中 $\mathbb{P}^3$ 沿着由三次超曲面在 Q上截出的光滑曲线 Γ 以及锥的顶点处发生分歧。该群 G 包含 *Geiser* 对合 τ 和 $G=\langle\tau\rangle\times H$，其中 $H\simeq\mathbb{Z}_2$ 由保持曲线 Γ 不变的锥的射影对合 Q生成。

3. $\mathbb{Z}_2^r$ COVERS OF THE PLANE

本节将遵循 Pardini 的论文 [8], ，回顾平面的 $\mathbb{Z}_2^r$ 覆盖理论。鉴于上文提到的 Blanc 的分类，我将特别关注情形 $2\leqslant r\leqslant 4$。

3.1. 一般性讨论。 我将考虑有限 $\mathbb{Z}_2^r$ 覆盖 $f: S\longrightarrow S'$ 的情形，其中 S， S' 为射影不可约曲面， S' 为光滑曲面（在大多数情况下，对我们而言 S' 将是 $\mathbb{P}^2$）。若 $G\simeq\mathbb{Z}_2^r$, 我将用 $G^*\simeq\mathbb{Z}_2^r$ 表示 G 的特征群。于是， $f_*(\mathcal{O}_S)$ 可分解为线丛之和，如下所示

$$f_*(\mathcal{O}_S) = \oplus_{\chi\in G^*} L_\chi^{-1}, \tag{5}$$

其中 $L_0\simeq\mathcal{O}_{S'}$。实际上， G 通过特征 χ作用于代数层 $f_*(\mathcal{O}_S)$，而 G 通过特征 χ作用于 L_χ^{-1}。 $f_*(\mathcal{O}_S)$上的代数结构与G的作用相容，因此乘法由线性映射确定

$$\mu_{\chi,\chi'}: L_\chi^{-1}\otimes L_{\chi'}^{-1}\longrightarrow L_{\chi\chi'}^{-1} \quad \text{for} \quad \chi,\chi'\in G^*.$$

我们将 S 上的分歧曲线记为 R ，将 f 在S'上的分支曲线记为 D 。设 T 是 R的一个不可约分支。那么， T 的惯性群 H_T 定义为

$$H_T = \{g \in G : gx = x,\ \forall x \in T\}.$$

已知 H_T 是 G 的循环子群（见 [8, 引理 1.1]），特别地，存在唯一的非零 $g_T \in G$ 使得 $H_T = \langle g_T \rangle$。若 D' 是 D 的任一不可约分支，则 $f^{-1}(D')$ 的所有不可约分支都具有相同的惯性群，其生成元为 $g_{D'}$。特别地，若 D' 也既约，对于一般点 $p \in D'$， $f^{-1}(p)$ 由 t 个 $= 2^{r-1}$ 个互不相同的点 $p_1, \ldots\ldots, p_t$ 组成，这些点处存在简单分歧；具体而言，对于 $1 \leqslant i \leqslant t$，有 $g_{D'}(p_i) = p_i$。因此， D' 在 f 的分支轨迹概形中的重数为 t。

因此，我们可以为 D 的每个不可约约化分支 D' 关联一个非零元素 $g_{D'} \in G$ 。反过来，对于任意非零 $g \in G$，我们可以用 D_g 表示分支曲线上所有关联的循环非零元素为 $g \in G$ 的分支之并。我将 D_g 称为分支曲线的 g–分支。注意，给定 g 时， D_g 可以为零。总之，我们可以将分支曲线写作

$$D = \sum_{g \in G \setminus \{0\}} D_g.$$

$\mathbb{Z}_2^r$ 覆盖 $f: S \longrightarrow S'$ 称为全分歧，若 $\mathbb{Z}_2^r$ 由所有满足 D_g 非零的元素 g 生成。若 S' 不可约，则 S 不可约当且仅当 $f: S \longrightarrow S'$ 全分歧。本文只考虑全分歧$\mathbb{Z}_2^r$ 覆盖。

3.2. 构造数据。在 [8, 定义 2.1], 中，Pardini 将线丛集合 $\{L_\chi\}_{\chi \in G^*}$和除子集合 $\{D_g\}_{g \in G \setminus \{0\}}$ 定义为 $\mathbb{Z}_2^r$覆盖 $f: S \longrightarrow S'$的构造数据。我将除子集合 $\{D_g\}_{g \in G \setminus \{0\}}$ 称为 $\mathbb{Z}_2^r$覆盖的分支数据。

对于每个特征 $\chi \in G^*$ 以及每个非零 $g \in G$，可能有 $\chi(g) = 0$，也可能有 $\chi(g) \neq 0$。在前一种情况下，我记$\epsilon_\chi(g) = 0$；在后一种情况下，我记$\epsilon_\chi(g) = 1$。给定两个特征 χ， $\chi' \in G^*$ 以及任意非零 $g \in G$，我记

$$\epsilon_{\chi,\chi'}(g) = \begin{cases} 1, \text{ if } \epsilon_\chi(g) + \epsilon_{\chi'}(g) = 2 \\ 0, \text{ if } \epsilon_\chi(g) + \epsilon_{\chi'}(g) < 2 \end{cases}$$

Pardini证明

$$L_\chi \otimes L_{\chi'} \sim L_{\chi\chi'} + \sum_{g \in G \setminus \{0\}} \epsilon_{\chi,\chi'}(g) D_g, \quad \text{for} \quad \chi, \chi' \in G^*. \tag{6}$$

（其中 $\sim$ 表示线性等价）。

[8] 中的主要结果之一是该文的定理 2.1，其大意为：一组满足(6)的构造数据在同构意义下唯一确定一个 $\mathbb{Z}_2^r$ 覆盖 $f: S \longrightarrow S'$ 。

事实上，所有构造数据对于恢复覆盖来说都是冗余的。确实，Pardini 在 [8, 定义 2.3] 中如下定义约化构造数据集。我们知道 $G^* \simeq \mathbb{Z}_2^r$，因此可以确定 $\chi_1, \ldots, \chi_r$ 的极小生成元集，并记为 $L_i = L_{\chi_i}$，其中$1 \leqslant i \leqslant r$。于是，线丛集合 $\{L_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ 和除子集合 $\{D_g\}_{g \in G \setminus \{0\}}$ 构成该 $\mathbb{Z}_2^r$–覆盖 f 的约化构造数据集： $S \longrightarrow S'$。由 (6) 可知，一个约化构造数据集

就足以恢复完整的构造数据集。更确切地说，可以证明

$$2L_i \sim \sum_{g\in G\setminus\{0\}} \epsilon_{\chi_i}(g)D_g,\ 1\leqslant i\leqslant r \tag{7}$$

一组验证（7）的约化构造数据唯一确定一个 $\mathbb{Z}_2^r$ 覆盖 $f\colon\ S\longrightarrow S'$ 在同构意义下（见 [8, 命题 2.1]）。

注意，如果 S' 没有 2-挠，那么分支数据通过（7）确定线丛 L_i（其中 $1\leqslant i\leqslant r$），从而通过（6）确定所有线丛 L_χ（其中 $\chi\in G^*$）。

3.3. 的构造数据 $2\leqslant r\leqslant 4$。本节汇总 $\mathbb{Z}_2^r$ 覆盖（其中 $2\leqslant r\leqslant 4$）的构造数据的显式形式及其关系（6）；鉴于 Blanc 分类，后文将需要这些内容。

对于所有 $g\in\mathbb{Z}_2^r$，我将使用显然的记号 $g=(\gamma_1,\ \ldots\ldots,\ \gamma_r)$，其中 $\gamma_i\in\{0,1\}$。如果我把 g 用作类似a_g的指标，就简单地写作 $a_{\gamma_1\ldots\gamma_r}$。

3.3.1. 的构造数据 $r=2$。$\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 f 的构造数据 $S\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 为：**(i)** 三条平面曲线 D_{10}、D_{01}、D_{11}，其次数分别为 d_{10}、d_{01}、d_{11}；**(ii)** 三个线丛 $L_{10}\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a_{10})$、$L_{01}\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a_{01})$和 $L_{11}\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a_{11})$；**(iii)** 关系式(6)可写为

$$\begin{gathered}
2L_{10}\sim D_{10}+D_{11}\\
2L_{01}\sim D_{01}+D_{11}\\
2L_{11}\sim D_{01}+D_{10}\\
L_{10}\otimes L_{01}\sim L_{11}+D_{11}\\
L_{10}\otimes L_{11}\sim L_{01}+D_{01}\\
L_{01}\otimes L_{11}\sim L_{10}+D_{10}
\end{gathered}$$

这意味着

$$\begin{gathered}
2a_{10}=d_{10}+d_{11}\\
2a_{01}=d_{01}+d_{11}\\
2a_{11}=d_{10}+d_{01}
\end{gathered}$$

因此 d_{10}、d_{01}、d_{11} 具有相同的奇偶性。

3.3.2. 的构造数据 $r=3$。$\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 f 的构造数据 $S\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 为：**(i)** 七条次数为 d_g的平面曲线 D_g，对所有 $g\in\mathbb{Z}_2^3\setminus\{0\}$；**(ii)** 七个线丛 L_g，对所有 $g\in\mathbb{Z}_2^3\setminus\{0\}$；**(iii)** 关系式 (6) 写作

$$\begin{gathered}
2L_{100}\sim D_{100}+D_{110}+D_{101}+D_{111}\\
2L_{010}\sim D_{010}+D_{110}+D_{011}+D_{111}\\
2L_{001}\sim D_{001}+D_{101}+D_{011}+D_{111}\\
L_{110}\sim L_{100}\otimes L_{010}-D_{110}-D_{111}\\
L_{101}\sim L_{100}\otimes L_{001}-D_{101}-D_{111}\\
L_{011}\sim L_{010}\otimes L_{001}-D_{011}-D_{111}\\
L_{111}\sim L_{110}\otimes L_{001}-D_{011}-D_{101}.
\end{gathered}$$

3.3.3. 的构造数据 $r=4$。 $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖 f 的构造数据 $S\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 为：(i) 15 条次数为 d_g的平面曲线 D_g，对所有 $g\in\mathbb{Z}_2^3\setminus\{0\}$；(ii) 15 个线丛 L_g，对所有 $g\in\mathbb{Z}_2^3\setminus\{0\}$；(iii) 关系式 (6) 写作

$$
\begin{aligned}
2L_{1000}&\sim D_{1000}+D_{1100}+D_{1010}+D_{1001}+D_{1110}+D_{1101}+D_{1011}+D_{1111}\\
2L_{0100}&\sim D_{0100}+D_{1100}+D_{0110}+D_{0101}+D_{1110}+D_{1101}+D_{0111}+D_{1111}\\
2L_{0010}&\sim D_{0010}+D_{1010}+D_{0110}+D_{0011}+D_{1110}+D_{1011}+D_{0111}+D_{1111}\\
2L_{0001}&\sim D_{0001}+D_{1001}+D_{0101}+D_{0011}+D_{1101}+D_{1011}+D_{0111}+D_{1111}\\
L_{1100}&\sim L_{1000}\otimes L_{0100}-D_{1100}-D_{1110}-D_{1101}-D_{1111}\\
L_{1010}&\sim L_{1000}\otimes L_{0010}-D_{1010}-D_{1110}-D_{1011}-D_{1111}\\
L_{1001}&\sim L_{1000}\otimes L_{0001}-D_{1001}-D_{1101}-D_{1010}-D_{1111}\\
L_{0110}&\sim L_{0100}\otimes L_{0010}-D_{0110}-D_{1110}-D_{0111}-D_{1111}\\
L_{0101}&\sim L_{0100}\otimes L_{0001}-D_{0101}-D_{1101}-D_{0111}-D_{1111}\\
L_{0011}&\sim L_{0010}\otimes L_{0001}-D_{0011}-D_{1011}-D_{0111}-D_{1111}\\
L_{1110}&\sim L_{1000}\otimes L_{0110}-D_{1010}-D_{1100}-D_{1101}-D_{1010}\\
L_{1011}&\sim L_{1000}\otimes L_{0011}-D_{1010}-D_{1001}-D_{1110}-D_{1101}\\
L_{0111}&\sim L_{0110}\otimes L_{0001}-D_{0101}-D_{0011}-D_{1011}-D_{1101}\\
L_{1101}&\sim L_{1100}\otimes L_{0001}-D_{1001}-D_{0101}-D_{0111}-D_{1011}\\
L_{1111}&\sim L_{1100}\otimes L_{0011}-D_{1010}-D_{1001}-D_{0110}-D_{0101}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

3.4. **正规化**。给定一个 $\mathbb{Z}_2^r$–覆盖 $f:S\longrightarrow S'$，其构造数据为 $\{L_\chi\}_{\chi\in G^*}$，分支数据为 $\{D_g\}_{g\in G\setminus\{0\}}$，$S$ 是正规的，当且仅当非零除子 $\{D_g\}_{g\in G\setminus\{0\}}$ 中某一个的每个不可约分支都出现在分支曲线 $D=\sum_{g\in G\setminus\{0\}}D_g$ 中，且重数为 1（见 [8, 推论 3.1]）。Pardini 在 [8, 第 203] 页描述了将上述非正规 S 进行正规化的过程。在我们的情形中，该过程可归结为以下两个步骤。

步骤 1： 假设有一条不可约曲线 Δ，它在分支曲线 D 中的重数大于 1。首先考虑一个非零元素 $g\in G$，使得某个 $^-$ $^-$具有 $D_g=k_g\Delta+D_g$，其中 $k_g\geqslant 2$ 和 D_g 不以 Δ 为分支。写作 $k_g=2q_g+r_g$，其中 $0\leqslant r_g\leqslant 1$。然后我们定义 $D'_g=D_g-2q_g\Delta$，并对所有 $\chi\in G^*\setminus\{0\}$ 定义

$$
L'_\chi=\begin{cases} L_\chi, \text{ if } \chi(g)=0\\ L_\chi(-q_g\Delta), \text{ if } \chi(g)\neq 0.\end{cases}
$$

$^-$对每一个使得 $D_g=k_g\Delta+D_g$成立的非零元素 $g\in G$ 重复此过程，其中$k_g\geqslant 2$；而对于其他非零的 $g\in G$，我们令 $D'_g=D_g$，且不改变这些 L_χ。然后，对分支曲线 D 中以大于1的重数出现的每一条不可约曲线 Δ 重复此过程。这样便构造出一组新数据，它们可视为 S'的一个新的 $\mathbb{Z}_2^r$–覆盖的构造数据。对于这些新数据——我仍滥用记号将其记为 $\{L_\chi\}_{\chi\in G^*\setminus\{0\}}$ 和 $\{D_g\}_{g\in G\setminus\{0\}}$——对任意非零的 $g\in G$，D_g 是既约的。

步骤 2： 接下来，假设存在一个除子 Δ，使得存在两个不同的非零g，$h\in G$，满足 Δ 包含于 D_g和 D_h中。于是，对所有不同于 g，h，k的 $j\in G$，我们令 $k=g+h$ 和 $D'_g=D_g-\Delta$、$D'_h=D_h-\Delta$、$D'_k=D_k+\Delta$以及 $D'_j=D_j$。此外，若 $\chi(g)=\chi(h)=1$，则令 $L'_\chi=L_\chi(-\Delta)$；否则令 $L'_\chi=L_\chi$。只要在两条曲线 D_g，D_h中出现一条非零不可约曲线，就重复这一过程。可以看出，该过程会终止（见命题 3.2），并且最终有

一组新的构造数据，对应于一个 $\mathbb{Z}_2^r$覆盖 $f : S \longrightarrow S'$，其中 S正规。

每当我们有一个 $\mathbb{Z}_2^r$–覆盖 $f : S \longrightarrow S'$，且 S' 光滑时，应用这一过程，我们可以（并且将会）假设 S 是正规的。

3.5. **正规奇点**。接下来，假设我们有一个 $\mathbb{Z}_2^r$–覆盖 $f : S \longrightarrow S'$，其中 S' 光滑且 S 正规。以下结果是 [8,命题 3.1]:

命题 3.1。假设我们有一个 $\mathbb{Z}_2^r$–覆盖 $f : S \longrightarrow S'$，其中 S' 光滑且 S正规，分支曲线为 $D = \sum_{g\in G\setminus\{0\}} D_g$。那么，$S$ 在点 $x \in S$ 上是奇异的，当且仅当 $x \in B$，此外 $x \in D_{g_i}$，其中 $1 \leqslant i \leqslant r$，且 $g_i \in G$ 两两不同，并且显然的映射要么

$$\oplus_{i=1}^r \langle g_i\rangle \longrightarrow G$$

不是单射；或者，如果 $b_i = 0$ 是 D_{g_i} 在 x 附近的局部方程，对于 $1 \leqslant i \leqslant r$，那么 db_1、.....、db_r 在 S 和 x 的扎里斯基切空间的对偶空间中不是线性无关的。

特别地，若对所有非零的 $g \in G$，除子 D_g 都是光滑的，且 D 具有正规交叉，则 S 是光滑的。

若 S 是正规且奇异的，可以按以下方式消解 S 的奇点。设 $x \in S'$ 是 S 奇异处上方的一个点。令 $\pi : S' \longrightarrow S'$ 为 S' 在 x 处的爆破。考虑笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\pi'} & S \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \tilde{S}' & \xrightarrow[\pi]{} & S' \end{array}$$

使得 $f' : S \longrightarrow S'$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^r$ 覆盖，其构造数据正是通过 π 将 $f : S \longrightarrow S'$ 的构造数据拉回到 S' 后得到的。然后按上述方法将 S 正规化，并继续进行。

3.6. **不变量**。有（见 [8, 命题 4.2]）：

命题 3.2。考虑一个 G 覆盖 $f : S \longrightarrow S'$，其中 $G \simeq \mathbb{Z}_2^r$ 和 S、S' 均光滑。则有

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 2^r\chi(\mathcal{O}_{S'}) + \frac{1}{2}\sum_{\chi\in G^*\setminus\{0\}} L_\chi \cdot (L_\chi + K_{S'}), \tag{9}$$

and

$$K_S^2 = 2^r\Big(K_{S'} + \sum_{g\in G\setminus\{0\}} \frac{1}{2}D_g\Big)^2. \tag{10}$$

4. The classification in the invariant conic bundle case

在本节中，我考虑一个 $\mathbb{Z}_2^r$–覆盖 $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中 S 为有理且正规（且 $r >$**1**），此外我将考虑不变圆锥丛情形。正如我们在定理 2.2中所见，我们有 $2 \leqslant r \leqslant 4$。我将考虑最小解奇点化 $\phi : S' \longrightarrow S$。我将在本节中假设对（$S'$，$\mathbb{Z}_2^r$）是一个极小 $\mathbb{Z}_2^r$–曲面，并且Pic(S')$^{\mathbb{Z}_2^r}$

的秩为2，在 $\mathbb{Q}$ 上由 $K_{S'}$ 的类以及有理曲线的铅笔 $|F|$ 的一条一般纤维 F 的类生成，该铅笔被 $\mathbb{Z}_2^r$ 作用所固定（见命题 1.1）。

主要的观察是， $|F|$ 通过复合映射 $f\circ\phi$到平面的像是一个有理曲线铅笔。于是，经过平面的克雷莫纳变换后，可以假设这个铅笔是 $\mathcal{F}$ 经过给定点 $p\in\mathbb{P}^2$的直线铅笔。从现在起，我将假设情况如此。

4.1. 情形 $r=2$。 这里我有 $G=\mathbb{Z}_2^2$。

4.1.1. 三个中间二重覆盖。 给定一个 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f\colon\ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$，我们有三个非零元素**(1，0)，(0，1)，(1，1)**，属于 $\mathbb{Z}_2^2$。将 S除以这些元素后，我们得到三个双覆盖

$$f_{10}:S\longrightarrow S_{10},\ f_{01}:S\longrightarrow S_{01},\ f_{11}:S\longrightarrow S_{11}.$$

映射 $f\colon\ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 经过这三个双覆盖中的每一个分解，也就是说，我们有三个双覆盖

$$g_{10}:S_{10}\longrightarrow\mathbb{P}^2,\ g_{01}:S_{01}\longrightarrow\mathbb{P}^2,\ g_{11}:S_{11}\longrightarrow\mathbb{P}^2 \tag{11}$$

因此 $f=g_{10}\circ f_{10}=g_{01}\circ f_{01}=g_{11}\circ f_{11}$。双覆盖$g_{10}\colon\ S_{10}\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 的分支曲线是曲线 $D_{01}+D_{11}$，双覆盖 $g_{01}\colon\ S_{01}\longrightarrow\mathbb{P}^2$和 $g_{11}\colon\ S_{11}\longrightarrow\mathbb{P}^2$的分支曲线也类似。由此可知，除子 D_{10},D_{01},D_{11}中至多只有一个为零，否则 S 将不可约。等价地，若D_{10},D_{01},D_{11} 中至少有两个为零，则该覆盖不是全分歧的。

4.1.2. 的行为，适用于 $r=2$。 记住正合列 **(1)**。考察定理 2.2，我们需要处理五种情况：

(i) $G'=0$ 的情况，对应于定理 2.2 中的 **(P1.221)** 和 **(P1.22.1)**；**(ii)** $G'\simeq\mathbb{Z}_2$ 的情况，对应于定理 2.2 中的 **(0.22)** 和 **(C.2,21)**；**(iii)** $G'=G=\mathbb{Z}_2^2$ 的情况，对应于定理 2.2 中的 **(C.22)**。

我假设由 $\mathbb{Z}_2^2$ 作用不变的铅笔 $|F|$ 被映射到由点 $p\in\mathbb{P}^2$上的直线构成的铅笔 $\mathcal{F}$。设 $\ell\in\mathcal{F}$ 为该铅笔中的一般直线。于是，根据上述关于 G'的三种情形，我们有以下可能性：**(i)** 通过 f 拉回 ℓ 后，在 $|F|$中由四条互异曲线组成；此时 $G'=0$，并且 ℓ上没有分歧点（见情形**(P1.221)** 和**(P1.22.1)**）；**(ii)** 通过 f 拉回 ℓ 后，在 $|F|$中由两条互异曲线组成；此时 $G'\simeq\mathbb{Z}_2$，并且（根据黎曼–赫尔维茨公式） ℓ上有 2 个分歧点，每个分歧点都必须按重数 2 计数（见情形 **(0.22)**和**(C.2,21)**）；**(iii)** 通过 f 拉回 ℓ 后，在 $|F|$中由唯一一条曲线组成；此时 $G'=G\simeq\mathbb{Z}_2^2$，并且（根据黎曼–赫尔维茨公式） ℓ 上有 3 个分歧点，每个分歧点都必须按重数 2 计数（见情形 **(C.22)**）。

4.1.3. $r=2$的 $G'=0$ 情形下的分类。

例 4.1。 考虑希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_1$ （在一点 p 处对 $\mathbb{P}^2$ 进行爆破所得），其结构映射 μ：$\mathbb{F}_1\longrightarrow\mathbb{P}^1$ 由铅笔 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{F}_1$ 上的拉回给出。存在一个全分歧的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $g\colon\mathbb{P}^1\longrightarrow\mathbb{P}^1$，其分支数据由三个互不相同的

$\mathbb{P}^1$ 点给出。于是有一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{P}^1 \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{F}_1 & \xrightarrow[\mu]{} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

带有 $f'\colon\ Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 一个光滑的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖和 $\nu\colon\ Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$ 一个圆锥丛结构，因此 Y 是有理的。$\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f'\colon\ Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 沿着 ν 的三个不同纤维分歧。

如果 E 是 $\mathbb{F}_1$ 上的 (-1)–曲线，那么 E 在 Y 上的拉回是一条不可约有理曲线 Δ，且 $\Delta^2 = -4$。将这条曲线收缩为一个点后，我们得到一个双有理映射 $\pi'\colon$ $Y \longrightarrow S$（其中 S 有一个类型为 $\frac{1}{4}(1,1)$ 的唯一奇异四重点），并有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\pi'} & S \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{F}_1 & \xrightarrow[\pi]{} & \mathbb{P}^2 \end{array} \tag{12}$$

其中 $f\colon\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖，其分支曲线由经过点 p的三条不同直线构成。总之，$Y \simeq \mathbb{F}_4$（这一点可由 $K_Y^2 = 8$得到证实，正如应用 **(10)** 所得）并且 S 同构于一个以 4 次有理正规曲线为底的锥。

命题 4.2。考虑一个 G–覆盖 $f\colon\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中 $G \simeq \mathbb{Z}_2^2$，S 正规，且 $G' = 0$，给出不变圆锥丛结构。那么，经过克雷莫纳变换后，$f\colon\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 与例 ***4.1*** 中考虑的覆盖重合，即不变铅笔的像是由平面上一点 p 出发的直线铅笔 $\mathcal{F}$，而分支曲线由 $\mathcal{F}$中的三条不同直线组成。更准确地说，采用第 ***3.3.1*** 节中的记号，D_{10}, D_{01}, D_{11} 是 $\mathcal{F}$中的三条不同直线。

反过来，若一个 G–覆盖 $f\colon\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$具有由铅笔中的三条不同直线组成的分支曲线，则 S 是有理的，且与例 ***4.1*** 中的情形相同。

证明。正如我们所见，在这种情况下，$\mathcal{F}$ 中的一般直线不包含 p以外的分支点，这意味着次数分别为 d_{10}，d_{01}，d_{11} 的曲线 D_{10}，D_{01}，D_{11}，要么为 0（其中至多一条为 0），要么分别在 p中具有重数为 d_{10}，d_{01}，d_{11} 的点，因此它们由经过点 p的不同直线组成。

考虑 **(11)** 中的三个中间二重覆盖。每个曲面 S_{01}，S_{10}，S_{11}都是有理曲面，且是 $\mathbb{P}^2$ 的双覆盖，其分支为一组经过点 p的直线。具体而言，$g_{10}\colon\ S_{10} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 沿着 $D_{01}+D_{11}$的 $d_{01}+d_{11}$ 条直线分歧；$g_{01}\colon\ S_{01} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 和 $g_{11}\colon\ S_{11} \longrightarrow \mathbb{P}^2$的情形也类似。由 S_{01}，S_{10}，S_{11}的有理性，我们推得 $d_{10} = d_{01} = d_{11} = 1$，正如所需。

该陈述的最后一部分可由例 4.1 中的论证得出。 □

注 4.3. 注意，在定理 2.2 的两种情形 **(P1.221)** 和**(P1.22.1)**中，$\mathbb{Z}_2^2$作用于光滑二次曲面 $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，并确定 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f\colon\ Q \longrightarrow Q$ 在同一族的三条直线上分歧。从 Q 的一般点向平面投影 Q，便得到例 4.1 中的覆盖。

4.1.4. $r=2$ 的 $G'=\mathbb{Z}_2$ 情形下的分类。

命题 4.4。考虑一个 G覆盖 $f:\ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$，其中 $G\simeq\mathbb{Z}_2^2$，且 S 正规、$G'=\mathbb{Z}_2$，对应不变圆锥丛情形。那么，经过一次克雷莫纳变换后，不变铅笔的像是由平面上一点 p 引出的直线铅笔 $\mathcal{F}$，而分支曲线由 $\mathcal{F}$ 中的两条不同直线以及一条奇数次曲线 d 组成，该曲线在 p处有一个重数为 $d-2$ 的点。更确切地说，采用第 *3.3.1* 节中的记号，D_{10}、D_{01} 是 $\mathcal{F}$ 中的两条不同直线，而 D_{11} 要么是一条不经过 p 的直线，要么是一条奇数次曲线 $d\geqslant 2$，既不包含 D_{10}，也不包含 D_{01}，且在 p处有一个重数为 $d-2$ 的点。

反过来，任何具有上述分支数据且满足 $G'=\mathbb{Z}_2$ 的 $\mathbb{Z}_2^2$覆盖 $f:\ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$，都使得 S 有理且正规，对应不变圆锥丛结构情形。

证明。我们可以假设 G' 中的非零元素为 (1,1)。考虑双覆盖 $f_{11}:\ S\longrightarrow S_{11}$。不变铅笔在 f_{11} 下的像是由有理曲线组成的有理铅笔 $\mathcal{F}'$。一般曲线在 f_{11} 下的拉回是该不变铅笔中的唯一一条曲线。

接下来考虑双覆盖 $g_{11}:\ S_{11}\longrightarrow\mathbb{P}^2$，它将 $\mathcal{F}'$映射到 $\mathcal{F}$。这诱导出一个双覆盖 $\mathcal{F}'\longrightarrow\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{F}$中的一般直线 ℓ的拉回是两条有理曲线之并，它们同构地映射到 ℓ。这意味着 $g_{11}:\ S_{11}\longrightarrow\mathbb{P}^2$沿着经过 p的两条不同直线分歧，从而推出 D_{10}，D_{01} 是 $\mathcal{F}$中的两条不同直线。于是 D_{11} 是次数为 d 的奇数次曲线，在 p中有一个重数为 c 的点。由于正如我们所见，$\mathcal{F}$ 中的一般直线 ℓ上有两个分支点，因此有$d-2\leqslant c\leqslant d-1$。具体而言，若 $c=d-2$，则 p不是 $\mathcal{F}$的一般直线上的分支点；而若 $c=d-1$，则 p是 $\mathcal{F}$的一般直线上的分支点。

我们来证明：若 $c=d-1$，则在相差一个平面的克雷莫纳变换的意义下，可以假定 $d=1$ 且 D_{11} 不含 p。我将仿照 [3, 命题 8.2.3] 中的证明，因此从简。事实上，假设 $c=d-1$。于是我可以写成

$$D_{11}=C+R_1+\cdots+R_{d-e}$$

其中 C是次数为 e 的不可约曲线，在 p处有一个重数为 $e-1$ 的常点，并且R_1，……，R_{d-e}是通过 p的不同直线。

首先，我用归纳法证明：在相差若干克雷莫纳变换的意义下，可以假定$e=1$（即 C是一条不经过 p的直线）。事实上，若 $d>1$，选取一个一般点 $q\in C$，以及 C上无穷接近 p a 的点 r。然后作以 p，q，r为基点的二次变换。这使 C 的次数降低 1，并向 R_1，……，R_{d-e}再添加一条通过 p 的直线。重复这一过程，我们可以化归到如下情形：

$$D_{11}=R+R_1+\cdots+R_{d-1}$$

其中 R是一条不经过 p和 R_1的直线，……，R_{d-1}是经过 p的直线。

接下来，我用归纳法证明我们可以消去直线 R_1，……，R_{d-1}。事实上，若$d>1$，选取 R 与 R_{d-1} 的交点 q，以及沿 R_{d-2}无限邻近于p 的点 r。然后作以 p，q，r为基点的二次变换。这样就消去了直线 R_{d-2}，$\underline{R_{d-1}}$。由于 d是奇数，经过 $\frac{d-1}{2}$ 步之后，我们便消去了直线 R_1，……，R_{d-1}，正如所需。

为了完成证明，我必须证明命题的最后一部分，即任何具有上述分支数据且满足 $G'=\mathbb{Z}_2$ 的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f:\ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$，其 S 都是有理的。显然，S 有一簇 $\mathcal{G}$ 有理曲线，它是经 f 对直线铅笔作拉回所得的

在 $\mathcal{F}$中。为了完成证明，我必须证明 $\mathcal{G}$ 是有理的。再次考虑双覆盖 $f_{11}: S \longrightarrow S_{11}$。不变铅笔经 f_{11} 映出的像，是一簇 $\mathcal{F}'$ 有理曲线。具有分支曲线 $D_{10}+D_{01}$的双覆盖 $g_{11}: S_{11} \longrightarrow \mathbb{P}^2$，将铅笔 $\mathcal{F}'$二对一映射到 $\mathcal{F}$，且分歧恰好发生在分别对应于 D_{10} 和 D_{01}的两个点上。这说明 $\mathcal{F}'$ 是有理的。此外，由于$G'=\mathbb{Z}_2$，一般曲线在 $\mathcal{F}'$ 中的经 f_{11} 拉回是该不变铅笔中的唯一一条曲线。这证明 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{F}'$都是有理的，也由此完成了证明。□

注 4.5. (i) 我沿用命题 4.4 证明中的记号。在一些一般性假设下，我将展示另一种完成证明的方法。事实上，假设我们处于一般情形，即 D_{11} 不可约，除 p 外均光滑，在 p 处有一个普通奇点，并且 D_{10}, D_{01} 在 p 之外均不与 D_{11} 相切。正如我们在命题 4.4 最后一部分的证明中所见，我们知道 S 有一个由有理曲线组成的铅笔 $\mathcal{G}$，因此 S 的 Kodaira 维数为 $-\infty$。要完成证明，只需验证 S 是正则的。

在 p 处爆破平面，得到 $\pi: \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中 $\mathbb{F}_1$ 的（-1）曲线 E 被压缩到 p。考虑笛卡尔图 (12)，其中 $f': Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^2$ 重覆盖，其构造数据是经由 π 对 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的构造数据作拉回所得。我们将 D_{10}, D_{01}, D_{11} 经由 π 的严格变换记为 $D'_{10}, D'_{01}, D'_{11}$。那么 $f': Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 的分支数据为

$$\bar{D}_{10} = D'_{10} + E,\ \bar{D}_{01} = D'_{01} + E,\ \bar{D}_{11} = D'_{11} + (d-2)E.$$

因此，Y 不是正规对象，我们必须对其进行正规化。由于 d 为奇数，$d-2$也为奇数。于是，按照第 3.4 节所述的正规化过程，需要将分支数据改为

$$\bar{D}'_{10} = D'_{10},\ \bar{D}'_{01} = D'_{01},\ \bar{D}'_{11} = D'_{11}. \tag{13}$$

在上述一般情形下，正规化之后，我们实际上得到了 S 的消奇点$\bar{S}$，也就是 $\mathbb{F}_1$ 的 $\mathbb{Z}_2^2$覆盖，其分支数据由 (13) 给出。于是我可以应用命题 3.2 来计算 $\chi(\mathcal{O}_{\bar{S}})$。记 $\mathbb{F}_1$ 的纤维化为 $|P|$。于是有

$$2L_{10} \sim 2L_{01} \sim (d+1)P + 2E,\ 2L_{11} \sim 2P$$

以及 $K_{\mathbb{F}_1} = -2E - 3P$。因此应用 (9)，我们很容易得到 $\chi(\mathcal{O}_{\bar{S}}) = 1$，正如所要求的那样。

如果不处于上述一般情形，论证虽然稍微复杂一些，但仍然类似；不过我不在此详述，将其留给读者。

（ii）我猜想可能存在一个比命题 4.4 更强的结果，即如果 $d \geqslant 3$，则经过平面的克雷莫纳变换，可以假设 D_{11} 是不可约的，在 p 处有一个重数为 $d-2$ 的常点，并且除了 p 处的奇点之外至多还有一个节点。证明这一点的论证应当与 [3, 命题 8.2.4] 中的论证类似。不过我不在此展开讨论。

(iii) 在 $d=1, c=0$ 命题 4.4 的情形中，$\mathbb{Z}_2^2$–覆盖$f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的分支数据由平面上三条不共点的不同直线给出。在这种情况下，S 是光滑的，直接应用 (10) 可得 $K_S^2 = 9$，因此 $S = \mathbb{P}^2$。在射影变换下，这就是由映射给出的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖

$$(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \longrightarrow (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2) \in \mathbb{P}^2$$

而且很容易看出，这对应于定理 2.2 中的情形 **(0.22)**。

命题 4.4 中的其他情形对应于定理 2.2 中的情形**(C.2,21)**。回到命题 4.6 的证明，通过双覆盖 $g: S_{11} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 将 S_{11} 拉回到 Δ D_{11} （正如我在上文 (ii) 中猜想的，它应当是不可约的），所得曲线就是双覆盖 $f_{11}: S \longrightarrow S_{11}$ 的分支曲线。在 S_{11} 上，我们有由有理曲线组成的有理铅笔 $\mathcal{F}'$；它在 S 上的拉回是不变有理曲线铅笔，而且 $\mathcal{F}'$ 中一般曲线经 f_{11} 拉回，恰好是该不变铅笔中的唯一一条曲线。这意味着 $\mathcal{F}'$ 中的曲线与 Δ 各交于两点，因此 Δ 是超椭圆曲线。这就是定理 2.2 的情形 **(C.2,21)** 中提到的由 G' 固定的超椭圆曲线。

4.1.5. $G' = G = \mathbb{Z}_2^2$ 情形下关于 $r = 2$的分类。

命题 4.6。考虑一个 G覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中 $G \simeq \mathbb{Z}_2^2$，且 S 正规、$G' = \mathbb{Z}_2^2$，呈现不变圆锥丛情形。那么，经过一次克雷莫纳变换后，不变铅笔的像是由平面上的一点 p所通过的直线构成的铅笔 $\mathcal{F}$；沿用上述记号，D_{10}、D_{01}、D_{11} 分别是次数为 d_{10}、d_{01}、d_{11}且奇偶性相同的曲线，它们分别在p 处有重数为 $d_{10}-1$、$d_{01}-1$、$d_{11}-1$ 的点，且没有公共分支（并且这些曲线中至多有一条在点p 处的重数可以再高一重）。

反过来，任何具有上述分支数据且满足 $G' = \mathbb{Z}_2^2$ 的 $\mathbb{Z}_2^2$覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，都使得 S 有理且正规，并呈现不变圆锥丛结构情形。

证明。为简便起见，令 $(d_{10}, d_{01}, d_{11}) = (a, b, c)$，并令 (λ, μ, ν) 表示 D_{10}, D_{01}, D_{11} 在 p 处的重数。众所周知，$\mathcal{F}$ 中的一般直线 ℓ 上有三个分支点。这意味着：

(a) 要么 ℓ 与曲线 D_{10}, D_{01}, D_{11} 的总和相交于 p 以外的三个点，且 p 不是分歧点；

(b) 要么 ℓ 与曲线 D_{10}, D_{01}, D_{11} 的总和相交于 p 以外的两个点，且 p 是分歧点。

我们先考察情形 (a)。在此情形下，除重新排列 D_{10}, D_{01}, D_{11} 外，可能有以下几种情况：

(a1) $(\lambda, \mu, \nu) = (a-1, b-1, c-1)$; (a2) $(\lambda, \mu, \nu) = (a, b-1, c-2)$; (a3) $(\lambda, \mu, \nu) = (a, b, c-3)$.

我主张情形（a2）和（a3）不可能发生。来看情形（a2）。我们在平面上的 p 点进行爆破，得到 $\pi: \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中 $\mathbb{F}_1$ 的 (-1) 曲线 E 被收缩到 p。考虑笛卡尔图 (12)，其中 $f': Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^2$ 覆盖，其构造数据只是将 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的构造数据沿 π 拉回。令 D'_{10}，D'_{01}，D'_{11} 为 $\mathbb{F}_1$ 上 D_{10}，D_{01}，D_{11} 的严格变换。$f': Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 的分支数据为

$$\bar{D}_{10} = D'_{10} + aE,\ \bar{D}_{01} \sim D'_{01} + (b-1)E,\ \bar{D}_{11} = D'_{11} + (c-2)E.$$

如果 a，b，c 都是偶数，那么在将 Y 正规化后，分支数据变为

$$\bar{D}_{10} = D'_{10},\ \bar{D}_{01} \sim D'_{01} + E,\ \bar{D}_{11} = D'_{11} \tag{14}$$

而这是不可能的，因为 E 出现在分支曲线中，因此 p 是 $\mathcal{F}$中一条一般直线上的分支点，这是我暂时排除的一种情形。如果 a, b, c为奇数，则在正规化 Y 的过程中，分支数据首先变为

$$\bar{D}_{10} = D'_{10} + E,\ \bar{D}_{01} \sim D'_{01},\ \bar{D}_{11} = D'_{11} + E$$

然后再次变为如(14)所示，这同样导致矛盾。情形（a3）的论证完全类似，可留给读者。

情形 (a1) 则恰好对应于命题陈述中所描述的情况。

为完成此情形下的论证，我们来证明：任何具有此类构造数据的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f\colon\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，都使得 S 是有理的。

照例，铅笔 $\mathcal{F}$ 到 S 的拉回是一个有理曲线铅笔。因此，要证明该断言，只需证明 S 是正则的。照例，我在 p 处爆破平面，得到 $\pi\colon\ \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中 $\mathbb{F}_1$ 的 (-1)–曲线 E 在 p 处被收缩。考虑笛卡尔图 (12)，其中 $f'\colon\ Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖，其构造数据是 $f\colon\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的构造数据经由 π 的拉回。在采用与上文相同的记号对 Y 进行正规化之后，分支数据变为

$$\bar{D}_{10} = D'_{10} \sim aH - (a-1)E, \quad \bar{D}_{01} = D'_{01} \sim bH - (b-1)E, \quad \bar{D}_{11} = D'_{11} \sim cH - (c-1)E$$

因此

$$2L'_{10} \sim (a+c)H-(a+c-2)E,\ 2L'_{01} \sim (b+c)H-(b+c-2)E,\ 2L'_{11} \sim (a+b)H-(a+b-2)E.$$

现在注意到，f' 的分支曲线 $D\colon\ Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 至多有二重点，或者有一个为三条曲线 D_{10}、D_{01}、D_{11}所共有的三重点。这些点可能对应于 Y的奇点。于是，无论是应用 [6] 中的结果，还是直接解消奇点，都很容易看出，它们不会降低 Y的解消 Y' 的结构层的欧拉示性数。然后，简单应用（9）即可得出 $\chi(\mathcal{O}_{Y'}) = 1$，从而证明了这一断言。

现在来讨论情形（b）。在这种情形下（对 D_{10}、D_{01}、D_{11}重新排序后），我们可能遇到以下情形:

（b1）$(\lambda、\mu、\nu) = (a、b-1、c-1)$；

（b2）$(\lambda、\mu、\nu) = (a、b、c-2)$。

我断言（b2）不可能发生。其证明与排除情形（a2）和（a3）的证明完全类似，可以留给读者完成。情形（b1）恰好对应于命题陈述中描述的情况；结合我在情形（a1）中已经使用过的论证，可以看出这种情况确实可能发生，并由此产生一个平面的有理 $\mathbb{Z}_2^2$覆盖。□

注记 4.7。 定理 4.6 陈述中列出的情形，对应于定理 2.2 中无穷多个类型为**(C.22)** 的情形。注意，假设三条曲线 D_{10}、D_{01}、D_{11} 均不可约，则在每条曲线上任取一个一般点，其经由 f 拉回后由两个点组成。因此，正如定理 2.2 的情形**(C.22)**所述，有三条正亏格超椭圆曲线在 G的元素作用下保持不变。若三条曲线 D_{10}、D_{01}、D_{11} 变为可约，则相应的超椭圆曲线也会退化。

4.2. 情形 $r = 3$。 在此情形下， $G \simeq \mathbb{Z}_2^3$。

4.2.1. 的行为（$r = 3$时）。我们有一个 $\mathbb{Z}_2^3$重覆盖 $f\colon\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，并且（在 S的极小解消 S' 上）存在一个由 $\mathbb{Z}_2^3$ 作用保持不变的铅笔 $|F|$，它映射到由点 $p \in \mathbb{P}^2$出发的直线铅笔 $\mathcal{F}$。

在当前情形下，G'（即作用在 $|F|$的一般纤维上的群），根据 $\mathbb{P}^1$的有限阿贝尔群分类，原则上可以是 0、$\mathbb{Z}_2$ 或$\mathbb{Z}_2^2$。然而，前一种情形不可能发生。事实上，在这种情形下，$\pi(G) = G$ 将会是

同构于 $\mathbb{Z}_2^3$，这是不可能的，因为 $\pi(G)$作用在铅笔 $|F|$ 上，而它是一个$\mathbb{P}^1$。因此只有两种可能：

(1) $G' \simeq \mathbb{Z}_2$ 和 $\pi(G) \simeq \mathbb{Z}_2^2$；(2) $G' \simeq \mathbb{Z}_2^2$ 和 $\pi(G) \simeq \mathbb{Z}_2$。考察定理 2.2，我们需要处理以下情形：(i) $G' \simeq \mathbb{Z}_2$，对应于定理 2.2 中的 **(P1.2221)**、**(P1.222)** 和 **(C.2,22)**；(ii) $G' \simeq \mathbb{Z}_2^2$，对应于定理 2.2 中的 **(P1s.222)** 和 **(C.221)**。设 $\ell \in \mathcal{F}$ 是铅笔中的一条一般直线。因此，我们有以下可能性：(i) ℓ 经由 f 的拉回由 $|F|$ 中四条互异曲线组成，每条曲线到 ℓ 的映射次数均为 2；此时 $G' \simeq \mathbb{Z}_2$，且 ℓ 上有 2 个分歧点，每个分歧点按重数 4 计；(ii) ℓ 经由 f 的拉回由 $|F|$ 中两条互异曲线组成，每条曲线到 ℓ 的映射次数均为 4；此时 $G' \simeq \mathbb{Z}_2^2$，且 ℓ 上有 3 个分歧点，每个分歧点按重数 4 计。

4.2.2. $r = 3$的 $G' = \mathbb{Z}_2$ 情形下的分类。

命题 4.8. 考虑一个 G 覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中 $G \simeq \mathbb{Z}_2^3$，且 S 正规、 $G' \simeq \mathbb{Z}_2$，属于不变圆锥丛情形。那么，经过克雷莫纳变换后，不变铅笔的像是由平面上的一点p出发的直线铅笔 $\mathcal{F}$，且该覆盖的分支数据如下：

(i) $\mathcal{F}$的三条不同直线 D_{100}、 D_{010}、 D_{001}；

(ii) D_{111} 是次数为奇数 $d\colon = d_{111} \geqslant 1$的约化曲线，不包含直线$D_{100}$、 D_{010}、 D_{001}，并且要么 $d = 1$ 和 D_{111} 不包含点 p，要么 $d \geqslant 3$ 和D_{111} 在 p处有一个重数为 $d-2$ 的点；*(iii)* $D_{110}, D_{101}, D_{011}$ 为零。

反过来，任何具有上述分支数据的 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，以及 $G' = \mathbb{Z}_2$，都满足 S 是有理且正规的，因而属于不变圆锥丛情形。

证明。设 $X = S/G'$，并考虑双覆盖 $g\colon S \longrightarrow X$。映射 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$可分解为经过 g 的映射以及映射 $h\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^2$；后者是一个 $\bar{G}$–覆盖，具有 $\bar{G} \simeq \mathbb{Z}_2^2$，属于不变圆锥丛情形，且 $\bar{G}' = 0$。于是根据命题 4.2，经过一次克雷莫纳变换后，我们可以假设 $h\colon S' \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的分支曲线由三条经过点 p 的不同直线组成。这些直线也属于 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的分支曲线。正如我们所见，经过 p 的一般直线 ℓ 只包含两个分支点，因此分支曲线的剩余部分 D' 是一条奇数次曲线 d，在 p 处的重数为 $d-2$；或者在 p 处的重数为 $d-1$，此时 p 算作 ℓ 上的一个分支点。与命题 4.4 的证明一样，可以看出，如果 D' 在 p 处的重数为 $d-1$，那么经过一次平面的克雷莫纳变换后，我们可以假设 D' 的次数为 1，且不经过 p。由此分析可得断言的第一部分。

反过来，假设我们有一个 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其分支数据如上文 (i)–(iii) 所述。证明与命题 4.4 证明的结尾类似。曲面 S 有一个有理曲线铅笔 $\mathcal{G}$，即经由 f 对 $\mathcal{F}$ 中直线铅笔的拉回。为了完成证明，我们必须证明 $\mathcal{G}$ 是有理的。再次考虑双覆盖 $g\colon S \longrightarrow X$。不变铅笔在 g 下的像是一个有理曲线铅笔 $\mathcal{F}'$。分支曲线为 $D_{100} + D_{010} + D_{001}$的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $h\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 将铅笔 $\mathcal{F}'$ 以 4 次映射到 $\mathcal{F}$，且分歧恰好发生在

对应于 D_{100}、 D_{010} 和 D_{001} 的三个点处。这说明 $\mathcal{F}'$ 是有理的。此外，由于 $G'=\mathbb{Z}_2$，一般曲线在 $\mathcal{F}'$ 中经由 g 的拉回是这个不变铅笔中的唯一一条曲线。这证明 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{F}'$ 都是有理的，并由此完成证明。□

注 4.9。案例**(P¹.222)** 和**(P¹.2221)** 出现在命题 4.8 的陈述中，对应于案例 $d=1$。案例 **(C.2,22)** 对应于案例 $d>3$。由 G' 固定的超椭圆曲线对应于曲线 D_{111} 的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 C，该曲线位于 X 上，并且是双覆盖 $s: S\longrightarrow X$ 的分支曲线。实际上，若 D_{111} 的亏格为 g'（假设 D_{111} 在 p 处有一个普通奇点，且在其他地方光滑，则由黎曼–赫尔维茨公式可得 $g'=d-2$），那么在 **(C.2,22)** 这一点， C 的亏格模 4 等于 $g=4g'+3\equiv -1$，正如定理 2.2 所预言的那样。

4.2.3. $r=3$的 $G'=\mathbb{Z}_2^2$ 情形下的分类。

命题 4.10。考虑一个 G–覆盖 $f:\ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$，其中 $G\simeq\mathbb{Z}_2^3$，且 S 正规，$G'\simeq\mathbb{Z}_2^2$，呈现不变圆锥丛情形。那么，经过克雷莫纳变换后，不变铅笔的像是由平面上一个点p 的所有直线构成的铅笔 $\mathcal{F}$。该覆盖的分支数据如下：

(i) D_{100}、D_{010}、D_{110} 分别是次数为 a、b、c（具有相同奇偶性）的曲线，在 p 处分别具有重数 $a-1$、$b-1$、$c-1$ 的点（对于这些曲线中的至多一条p，其重数可以再增加一）；

(ii) D_{001} 是经过点 p 的2 条不同直线的并，且与 D_{100}、D_{010}、D_{110}没有公共分支；

(iii) D_{111}、D_{101}、D_{011} 均为零。

反之，给定任意一个 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f:\ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$，具有上述分支数据且 $G'=\mathbb{Z}_2^2$，则 S 是有理且正规的，呈现不变圆锥丛情形。

证明。设 $k\in\mathbb{Z}_2^3$ 是一个不属于 G' 的元素。令 $T=S/\langle k\rangle$，其中双覆盖 $g:\ S\longrightarrow T$。映射 $f:\ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 可分解为经过 g 的映射以及映射 $h:\ T\longrightarrow\mathbb{P}^2$，后者是一个 $\bar{G}$–覆盖，其中 $\bar{G}\simeq\mathbb{Z}_2^2$ 呈现不变圆锥丛情形，且 $\bar{G}'\simeq\bar{G}\simeq\mathbb{Z}_2^2$。注意，不变有理曲线铅笔 $|F|$ 在 S 上的像在 T 上是一个有理曲线铅笔 $\mathcal{F}'$，它经由 h 映射到直线铅笔 $\mathcal{F}$。由于 $h:\ T\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 是一个 $\bar{G}$–覆盖，且 $\bar{G}\simeq\mathbb{Z}_2^2$ 满足 $\bar{G}'\simeq\bar{G}\simeq\mathbb{Z}_2^2$，因此 $\mathcal{F}'$ 到 $\mathcal{F}$ 的映射是双有理的，故 $\mathcal{F}'$ 也是有理的。

根据命题 4.6，经过克雷莫纳变换后，我们不妨设 h 的分支曲线 $T\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 由三条次数分别为 a、b、c 且奇偶性相同的互异曲线组成，它们在 p 处的重数分别为 $a-1$、$b-1$、$c-1$（其中至多一条曲线 p 的重数可能多一）。这些曲线也是 $f:\ S\longrightarrow\mathbb{P}^2$ 的分支曲线的一部分。由于正如我们所见，经过p 的 ℓ 一般直线只包含三个分支点，因此分支曲线的其余部分是经过 p 的 d 条直线 ℓ_1、.....、ℓ_d 的并。我断言 $d=2$。事实上，将 ℓ_1、.....、ℓ_d 拉回到 T 后所得曲线的并，就是双覆盖 $g:\ S\longrightarrow T$ 的分支曲线，因此它由 d 条有理铅笔中的有理曲线组成。由于 S 是有理的，立即可得 $d=2$。

反过来，假设我们有一个 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f:S\longrightarrow\mathbb{P}^2$，其分支数据如上文 (i)–(iii) 所示。由上文同样的论证可知， S 有一个有理曲线铅笔，因此它是有理的，从而证明了该命题。□

注记 4.11. 命题 4.10 中的情形对应于定理 2.2 中的**(P1s.222)** 和**(C.221)**两种情形。

(i) 至于**(P1s.222)**的情形，它对应于 $a=b=c=1$ 与三条直线 $D_{100}, D_{010}, D_{110}$ 有一个公共点 $q \neq p$的情形。此时分支曲线 D 是三条直线 $D_{100}, D_{010}, D_{110}$ 与经过该点 $q \neq p$的两条直线 D_{001} 的并。进一步考察这个 $\mathbb{Z}_2^3$– $\mathbb{P}^2$覆盖颇有意思。我们对两点 p, q进行爆破，从而得到一个态射 $\pi: P \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中两个例外除子$E, E'$ 分别收缩到 p, q 。记 H 为 P 上一条一般直线在 $\mathbb{P}^2$上的严格变换。通过 π 拉回 $\mathbb{P}^2$ 的 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖并将其正规化后，我们得到一个 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f': Y \longrightarrow P$，其分支数据为

$$D'_{100} \sim D'_{010} \sim D'_{110} \sim H-E', \ D'_{001} \sim 2H-2E$$

其中，按照惯例，我用 $D'_{100}, D'_{010}, D'_{110}, D'_{001}$ 表示 $D_{100}, D_{010}, D_{110}, D_{001}$到 P的严格变换。应用 (10)，我们计算得 $K_Y^2=0$。

接下来考察两个线性束 $|H-E|$ 和 $|H-E'|$。$|H-E|$ 的一般成员 N 的拉回是两条互不相交的有理曲线 $A+A'$ 的并，它们是 $\mathbb{P}^1$的两个 $\mathbb{Z}_2^2$覆盖，各自在 N 与三条曲线 $D'_{100}, D'_{010}, D'_{110}$相交的三个点处分歧。正如我们所见， A和 A'线性等价，并属于一个由有理曲线组成的有理曲线铅笔 $|A|$。类似地， $|H-E'|$的一般成员 M的拉回是四条互不相交的有理曲线 $B_1+\cdots+B_4$的并，每条都是 $\mathbb{P}^1$的双覆盖，且各自在 M 与D'_{001}中的三条曲线相交的两个点处分歧。同样， $B_1, \ldots, B_4$属于同一个由有理曲线组成的有理铅笔 $|B|$。现在我们有 $8=(2A)\cdot(4B)$，因此 $A \cdot B=1$，于是存在一个双有理态射$g: Y \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，使得 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的两个自然直纹的拉回分别为线性束 $|A|$和 $|B|$。

注意到， E' 经 f' 拉回后是两条互不相交的有理曲线E'_2， E'_2 它们都是一个在 $\mathbb{P}^1$ 的三个交点处分歧的 $\mathbb{Z}_2^2$覆盖。这些交点是曲线D'_{100}， D'_{010}， D'_{110}与 E'的交点。于是有（E'_2）^{2} =（E'_2）^{2} = -4。类似地， E经 f'拉回后是四条互不相交的有理曲线 E_1，……， E_4每条都是 $\mathbb{P}^1$ 的双覆盖，在曲线 D'_{001} 与 E的两个交点处分歧。于是有（E_i）$^2=-2$，其中 $1 \leqslant i \leqslant 4$。

唯一的曲线 $C \in |H-E-E'|$ 是 $\mathbb{P}^1$ 和 $C^2=-1$，并且 f' 在其上没有分歧点，因此 C 经 f' 拉回后是八个互不相同的 $\mathbb{P}^1$副本的并，每个副本的自交数为 -1。铅笔 $|A|$ 包含两条曲线，它们由 E'_2， E'_2以及位于 C 上方的四条（-1）曲线组成，每条都与 E'_2交于一点。类似地， $|B|$包含四条曲线，它们由 E_1，……， E_4 以及位于 C上方的两条（-1）曲线组成，每条都与 E_1，……， E_4 交于一点。

态射 g： $Y \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 不过是将 C 上的八条（-1）曲线收缩。

我还要指出，在这种情况下，可以按以下方式简化分支曲线。考虑直线 D_{100} 与构成 D_{001} 的其中一条直线的交点 r ，并以 p， q， r 为基点作二次变换。此二次变换将直线 D_{100} 和经过 r 的 D_{001} 直线压缩为点。随后，它将点 p， q， r 炸开为直线。不过，前两个点不会对分支曲线产生贡献，而第三个点会。因此，作此二次变换后，分支曲线只由四条直线 D_{001}， D_{110}， D_{010}， D_{101} 组成。接着计算构造数据，它们都与 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ 线性等价，只有 $L_{011} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ 除外。应用 (9)

和 (10) 可知，对应的 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 满足 $\chi(\mathcal{O}_S)$ 和$K_S^2 = 8$。

容易验证，事实上 S 是一个二次曲面。为看出这一点，考虑态射

$$\psi : (x : y : z : t) \in \mathbb{P}^3 \longrightarrow (x^2 : y^2 : z^2 : t^2) \in \mathbb{P}^3$$

它是 $\mathbb{P}^3$ 的一个 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖，在坐标平面上分歧。考虑方程为 $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$的光滑二次曲面 S。 S 经由 ψ 的像是方程为 $x + y + z + t = 0$的平面。因此， ψ 在 S 上的限制确定了一个 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖$f : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ ，它如上所述沿四条一般直线分歧。

（ii）至于**(C.221)**的情形，考察三条曲线 D_{100}， D_{010}， D_{110} ，并假设它们不可约且处于一般位置，特别是除 p外，它们不经过同一个点 q 。对其中每一条，一般点经由 f 的原像由四个点组成。这些四重覆盖的分支点出现在这些曲线的两两交点处，以及与D_{001}中两条直线的交点处；在这些点处，经由 f 的原像仅由两个点组成。利用黎曼–赫尔维茨公式计算曲线 D_{100}， D_{010}， D_{110}中每一条（例如 D_{100}）的覆盖的亏格 g ，可得

$$8 + 2g - 2 = 4 + 2(2a + b + c - 2)$$

因此 $g = 2a+b+c-3$ 是奇数，因为 a、 b、 c具有相同的奇偶性。也不难看出，这些 D_{100}、 D_{010}、 D_{110} 的四重覆盖实际上是超椭圆曲线，正如定理 2.2 的情形 **(C.221)** 所述。

4.3. 情形 $r = 4$。 在此情形下， $G \simeq \mathbb{Z}_2^4$。

4.3.1. 的行为对于 $r = 4$。我们有一个 $\mathbb{Z}_2^4$ 重覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ ，并且（在 S 的最小解奇点化 S' 上）存在一个由 $\mathbb{Z}_2^3$ 作用保持不变的铅笔 $|F|$ ，它映射到经过点 $p \in \mathbb{P}^2$ 的直线铅笔 $\mathcal{F}$。

在当前情形下，根据 $\mathbb{P}^1$ 的有限阿贝尔群分类， G' （即作用于 $|F|$的一般纤维上的群）原则上可以是 0、 $\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}_2^2$。然而，前两种情形不可能发生。事实上，在这种情形下， $\pi($ $G) = G$ 将同构于 $\mathbb{Z}_2^s$，其中 $s \geqslant 3$；但根据 $\mathbb{P}^1$ 的有限阿贝尔群分类，这是不可能的，因为 $\pi(G)$ 作用于铅笔 $|F| \simeq \mathbb{P}^1$ 上。因此，唯一可能的情况是 $G' \simeq \pi(G) \simeq \mathbb{Z}_2^2$。

根据定理 2.2，我们只需处理两种情形，即**(P1.2222)**和**(C.22,22)**。

取铅笔中的一条一般直线 $\ell \in \mathcal{F}$。那么只有以下一种可能： ℓ 经 f 拉回后，在 $|F|$ 中由四条互异曲线组成，每条曲线都以 4 次映射到 ℓ，并且 ℓ上有 3 个分歧点，每个分歧点的重数均计为 8。

4.3.2. $r = 4$情形下的分类。

命题4.12。 考虑一个 G覆盖 $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中 $G \simeq \mathbb{Z}_2^4$，且 S 正规，属于不变圆锥丛情形。那么，经过克雷莫纳变换后，不变铅笔的像是平面上一点 p 处直线的铅笔 $\mathcal{F}$。该覆盖的分支数据为：

(i) D_{1000}、 D_{0100}、 D_{1100} 分别是次数为 a、 b、 c （奇偶性相同）的曲线，分别在 p 处有重数为 $a-1$、 $b-1$、 $c-1$ 的点（并且其中至多一条曲线可以在 p 处再多一个重数）；

(ii) 另外三条不同直线 D_{0010}、D_{0001}、D_{0011} 经过 p，且不包含在 D_{1000}、D_{0100}、D_{1100} 中；

(iii) 其余分支数据均为零。

反过来，任何具有上述分支数据的 $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，都使得 S 是有理且正规的，从而给出不变圆锥丛情形。

证明。 证明仿照命题 4.10。

正合列 (1) 分裂。因此我们有 $\pi(G) \subset G$。令 $T = S/\pi(G)$，并考虑 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $g\colon S \longrightarrow T$。映射 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 可分解为经过 g 以及一个映射 $h\colon T \longrightarrow \mathbb{P}^2$，后者是一个 $\bar{G}$–覆盖，其中 $\bar{G} \simeq \mathbb{Z}_2^2$ 给出不变圆锥丛结构情形，且 $\bar{G}' \simeq \bar{G} \simeq \mathbb{Z}_2^2$。

于是由命题 4.6，经过克雷莫纳变换后，我们可以假设 $h\colon T \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的分支曲线由三条次数分别为 a、b、c 且奇偶性相同的互异曲线组成，它们分别在 p 处有一个重数为 $a-1$、$b-1$、$c-1$ 的点（且其中至多一条曲线可在 p 处再有一个重数大一的点）。这些曲线也属于 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的分支曲线。由于如前所见，经过 p 的一般直线 ℓ 只包含三个分支点，因此分支曲线的其余部分是经过 p 的 d 条直线 ℓ_1、.....、ℓ_d 的并。

T 上的拉回是 $\mathcal{F}$ 中一般直线 ℓ，它是 ℓ的唯一有理曲线，并且是一个 $\mathbb{Z}_2^2$重覆盖。因此， T 上存在一个由有理曲线组成的有理铅笔 $\mathcal{F}'$，即$\mathcal{F}$的拉回。

ℓ_1的拉回,$\ldots,\ell_d$是铅笔 $\mathcal{F}'$中的 d条曲线，它们是 $\mathbb{Z}_2^2$重覆盖 $g\colon S \longrightarrow T$的分支曲线。经由 f 拉回的一般直线 $\ell \in \mathcal{F}$ 是4条有理曲线的并（每条曲线都属于不变铅笔 $|F|$），且每条都是ℓ的 $\mathbb{Z}_2^2$重覆盖。这意味着映射 $g\colon S \longrightarrow T$ 诱导出从不变铅笔 $|F|$到 $\mathcal{F}'$的 $\mathbb{Z}_2^2$ 重覆盖，因此恰有3个分支点。这意味着 $d = 3$，从而证明分支数据如(i)–(iii)所示。

反过来，假设我们有一个 $\mathbb{Z}_2^4$重覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其分支数据如上文(i)–(iii)所示。用上述相同论证可知， S 有一个有理曲线铅笔，因而它是有理的，从而证明了该命题。□

注记 4.13. (i) 作为合理性检验，假设我们有一个 $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其分支数据如命题 4.6 的 (i)–(iii) 所示。那么 S 有一族有理曲线铅笔。我们来检查 S 是正则的，因而是有理的。假设我们处于一般情形，也就是说，曲线 D_{1000}、D_{0100}、D_{1100} 在 p 处有常点，并且在 p 之外横截相交（否则证明会稍微复杂一些，但概念上相同）。我们在 p处对平面进行爆破，得到 $\pi\colon \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中 $\mathbb{F}_1$ 的 (-1)–曲线 E 在 p处被收缩。再次考虑笛卡尔图 (12)，其中 $f'\colon Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖，其构造数据是通过 π 对 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$的构造数据进行拉回得到的。将 Y正规化为曲面 S' 后，分支数据变为（沿用通常的记号）

$$\bar{D}_{1000} \sim aH-(a-1)E,\ \bar{D}_{0100} \sim bH-(b-1)E,\ \bar{D}_{1100} \sim cH-(c-1)E,$$
$$\bar{D}_{0010} \sim \bar{D}_{0001} \sim \bar{D}_{0011} \sim H-E$$

且所有其他分支数据均为零。此时利用 (8) 计算构造数据，并可验证 a、b、c的奇偶性必须相同。然后应用 (9)，可知 $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = 1$。

(ii) 命题4.12中的情形与定理 2.2 的**(P1.2222)** 和**(C.22,22)**情形有关。至于**(P1.2222)**情形，其情况与注记 **4.11 (i)** 中描述的**(P1s.222)** 情形并无太大不同。它对应于 $a=b=c=1$ 与三条直线 D_{1000}、D_{0100}、D_{1100} 交于同一点 $q\neq p$的情形。此时，分支曲线 D 是经过点 q 的三条直线 D_{1000}、D_{0100}、D_{1100} 与经过点 p的三条直线 D_{0010}、D_{0001}、D_{0011} 的并。

对两点 p,q进行爆破，从而得到一个态射 $\pi\colon P\longrightarrow\mathbb{P}^2$，其中两个例外除子 E, E'分别收缩到 p,q。记 H为 P上一般直线在 $\mathbb{P}^2$上的严格变换。通过 π拉回 $\mathbb{P}^2$ 的 $\mathbb{Z}_2^4$覆盖并进行正规化后，我们得到一个 $\mathbb{Z}_2^4$覆盖 $f'\colon Y\longrightarrow P$，其分支数据为

$$D'_{1000}\sim D'_{0100}\sim D'_{1100}\sim H-E',\ D'_{0010}\sim D'_{0001}\sim D'_{0011}\sim H-E,$$

（记号采用通常的记法）。应用（**10**），我们计算得 $K_Y^2=-8$。

考察两个铅笔 $|H-E|$和 $|H-E'|$。$|H-E|$ [的一般成员的拉回，以及 $|H-E'|$] 的一般成员的拉回，分别是由四条互不相交的有理曲线组成的并，分别属于有理曲线铅笔 $|A|$ [和 $|B|$] 。现在我们有 $16=(4A)\cdot(4B)$，因此$A\cdot B=1$，于是存在一个双有理态射 $g\colon Y\longrightarrow\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，使得 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 的两个自然直纹的拉回分别为线性束 $|A|$ 和 $|B|$。

经 f' 拉回 E [（分别拉回 E'] ）后，所得为四条互不相交的有理曲线之并；每条都是 $\mathbb{P}^1$ 的 $\mathbb{Z}_2^2$ 重覆盖，且在曲线 D'_{0010}、D'_{0001}、D'_{0011}[（分别是曲线 D'_{1000}、D'_{0100}、D'_{1100}] ）相交的三个点处分歧。每条这样的曲线的自交数为 -4。

唯一的曲线 $C\in|H-E-E'|$ 是一条 $\mathbb{P}^1$，并且 $C^2=-1$； f' 上没有分歧点，因此经 f' 拉回 C 后，所得为十六个互不相同的 $\mathbb{P}^1$ 副本之并，每个副本的自交数为 -1。铅笔 $|A|$ [（分别是 $|B|$] ）包含位于 E' [（分别位于 E] ）之上的四条曲线，以及各四条位于 C 之上的（-1）曲线；它们分别与位于 E' [（分别位于 E] ）之上的曲线在一点相交。态射 $g\colon Y\longrightarrow\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 无非是收缩位于 C 之上的十六条（-1）曲线。

(iii) 与**(C.22,22)**的情形一样，这里的情况也类似于注记 **4.11 (ii)**。考察三条曲线 D_{1000}、D_{0100}、D_{1100}，并假设它们不可约且处于一般位置；特别是，除 p 外，它们不经过同一个点 q。对于其中每一条曲线，一般点在经由 f 的原像由 8 个点组成。这些 8 重覆盖的分支点出现在这些曲线的两两交点处，以及它们与 D_{0010}、D_{0001}、D_{0011} 中直线的交点处；在这些点处，经由 f 的原像仅由 4 个点组成。因此，每个分支点的重数均为 4。利用黎曼–赫尔维茨公式计算这些曲线 D_{1000}、D_{0100}、D_{1100} 中每一条覆盖的亏格 g，例如 D_{1000}，可得

$$16+2g-2=12+4(2a+b+c-2)$$

因此 $g=2(2a+b+c)-1$，即与 3 模 4 同余。也不难看出，这些 D_{1000}、D_{0100}、D_{1100} 的 8 元组覆盖实际上是超椭圆曲线，正如定理 2.2 的情形**(C.221)**所述。

5. The classification in the Del Pezzo case

在本节中，我考虑一个 G–覆盖 $f\colon S\longrightarrow\mathbb{P}^2$，其中 $G\simeq\mathbb{Z}_2^r$，S 有理且正规（并且 $r>1$），并将讨论德尔佩佐情形。再次，如我们在定理 2.2 中所见，有 $2\leqslant r\leqslant 4$。我将考虑最小解奇点化 $\phi\colon S'\longrightarrow S$。我将

假设对 $(S', \mathbb{Z}_2^r)$ 是一个极小的 $\mathbb{Z}_2^r$–曲面，并且 $\mathrm{Pic}(S')^{\mathbb{Z}_2^r} \simeq \mathbb{Z}$ 由 $\mathbb{Q}$ 上的 $K_{S'}$ 类生成（见命题 1.1）。在本节中我将始终沿用这一记号。

5.1. **德尔佩佐情形的分类** $r = 2$。在 $r = 2$ 的德尔佩佐情形中，根据定理 2.3，我们需要考察 **(2.G2)** 和 **(1.B2.1)** 两种情形。

5.1.1. *2 次德尔佩佐情形。*在 **(2.G2)** 情形中，$\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 满足：S' 是一个次数为 2 的德尔佩佐曲面，它是一个双覆盖 $g : S' \longrightarrow \mathbb{P}^2$（通过贝尔蒂尼对合 σ），分支沿着一条光滑四次曲线 Γ，该曲线在平面的一个非平凡对合 ι 下保持不变，并且 $\mathbb{Z}_2^2 = \langle \sigma, \iota \rangle$。

命题 5.1。在 **(2.G2)** 情形中，$\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 在平面的克雷莫纳变换意义下，具有以下分支数据：
(i) D_{10} 是在点 x 处有一个自切点的四次曲线；
(ii) D_{01} 是经过 x 且在 x 处具有与 D_{10}的自切切线相同切线的光滑圆锥曲线；

(iii) $D_{11} = 0$。
反之，任何具有上述分支数据的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 都给出了德尔佩佐情形**(2.G2)**。

证明。我们从一个双覆盖 $g\colon S' \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 开始，其中 S' 是一个次数为 2 的德尔佩佐曲面，g 由贝尔蒂尼对合 σ 给出，分支沿着一条光滑四次曲线Γ。假设 Γ 在平面的一个对合 ι 下不变。对合 ι 有一个不动点 $p \notin \Gamma$ 和一条不动点直线 ℓ，该直线不经过 p。考虑商 $Q = \mathbb{P}^2/\langle\iota\rangle$ 和双覆盖 $h : \mathbb{P}^2 \longrightarrow Q$。曲面 Q 同构于 $\mathbb{P}^3$ 中的一个二次锥面，其顶点为 q；双覆盖 h: $\mathbb{P}^2 \longrightarrow Q$ 在q（对应于点 p）处以及沿着一条光滑圆锥曲线 Λ（对应于直线ℓ）分歧。令 Δ 为 Γ 在 Q 上的像。注意，$h : \Gamma \longrightarrow \Delta$ 在 Γ 与 ℓ的交点处分歧，因此 Δ 是一条算术亏格为 1 的四次曲线，所以它是 Q 与一个不包含 q的二次曲面的完全交。复合映射$h \circ g\colon S' \longrightarrow Q$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖。为了得到原始 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的模型，我们需要从 Q 的一般点向平面双有理投影 Q。如此便得到 (i)–(iii) 中所述的分支数据。

反过来，假设我们有一个 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其分支数据如 (i)–(iii) 所述。我们来证明 S 是有理的，且事实上它对应于情形 **(2.G2)**。我们假设四次曲线 D_{10} 与圆锥曲线 D_{10} 在 x 处的相交重数恰为 4，并在 x之外横截相交于四个点。若非如此，证明过程类似（且只会稍微复杂一些），可留给读者完成。

这里的构造数据为

$$L_{10} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2),\ L_{01} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1),\ L_{11} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3).$$

曲面 S 在点 x上是奇异的。我们要消解它的奇点。首先，我吹起 x，得到 $\pi : \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其中位于 x 的 (-1)–曲线 E 被收缩。考虑笛卡尔图 (12)，其中 $f' : Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖，其构造数据是通过 π 拉回 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$的构造数据得到的。令 D'_{10}，D'_{01} 为 $\mathbb{F}_1$上 D_{10}，D_{01} 的严格变换。$f' : Y \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 的分支数据为

$$\bar{D}_{10} = D'_{10} + 2E, \bar{D}_{01} = D'_{01} + E, \bar{D}_{11} = 0,$$

因此 Y 不是正规的。我们按照第 3.4 节所述的方法将其正规化。正规化 Z 确定了一个 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f'' : Z \longrightarrow \mathbb{F}_1$，其分支数据为

$$\bar{D}'_{10} = D'_{10}, \bar{D}'_{01} = D'_{01} + E, \bar{D}'_{11} = 0.$$

正规化 Z 仍然是奇异的，因为总分支曲线 $D' = D'_{10} + D'_{01}$ 在 y 与 E 的交点 D'_{10} 处有一个四重点，且该点位于 D'_{01} 上（因为 D'_{10} 在 E 上有一个节点，而 D'_{01} 简单地经过该节点）。此时，我可以应用 [6]中的结果来计算 Z 的极小解消的不变量，并证明它是有理的。不过，为了使论述自成一体，我像上文那样继续消解 Z。

我们吹起 y，得到一个态射 $\pi' : \tilde{\mathbb{F}}_1 \longrightarrow \mathbb{F}_1$，其例外曲线 E'在 y处收缩。E 的严格变换是一条（-2）曲线，我仍将其记作 E。将 $\mathbb{Z}_2^2$覆盖 $f'' : Z \longrightarrow \mathbb{F}_1$ 拉回并进行正规化后，我们得到一个新的 $\mathbb{Z}_2^2$覆盖

$f''' : T \longrightarrow \tilde{\mathbb{F}}_1$。来看 f'''的分支数据：$T \longrightarrow \tilde{\mathbb{F}}_1$。这些是 D_{10}、$\mathbb{F}_1$上D'_{10} 的严格变换，以及 D_{01}；后者是 D'_{01} 的严格变换与 E之和，而 $D_{11} = 0$。由于总分支曲线只有正规交叉奇点，T 是光滑的。

令 H 表示 $\mathbb{P}^2$的一般直线在 $\tilde{\mathbb{F}}_1$ 上的拉回。那么

$$\tilde{D}_{10} \simeq 4H - 2E - 4E', \ \tilde{D}_{01} \simeq 2H - 2E'$$

因此构造数据为

$$\tilde{L}_{10} \simeq 2H - E - 2E', \ \tilde{L}_{01} \simeq H - E', \ \tilde{L}_{11} \simeq 3H - E - 3E'.$$

现在我断言

$$h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, \tilde{L}_{10}^{-1}) = h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, \tilde{L}_{01}^{-1}) = h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, \tilde{L}_{11}^{-1}) = 0.$$

$h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, \tilde{L}_{10}^{-1}) = 0$ 的证明显然是平凡的，因为 $\tilde{L}_{10} \simeq 2H - E - 2E'$ 显然是大且数值有效的。至于 $h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, \tilde{L}_{01}^{-1})$，它等于 $h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, K_{\tilde{\mathbb{F}}_1} + \tilde{L}_{01})$。现在

$$K_{\tilde{\mathbb{F}}_1} + \tilde{L}_{01} \simeq -3H + E + 2E' + H - E' = -2H + E + E'$$

因此

$$h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, \tilde{L}_{01}^{-1}) = h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, -2H + E + E')$$

也就是 0，因为 $2H - E - E'$ 是大且数值有效的。

至于 $h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, \tilde{L}_{11}^{-1})$，它等于 $h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, K_{\tilde{\mathbb{F}}_1} + \tilde{L}_{11})$。现在

$$K_{\tilde{\mathbb{F}}_1} + \tilde{L}_{11} \simeq -3H + E + 2E' + 3H - E - 3E' = -E'$$

因此

$$h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, \tilde{L}_{01}^{-1}) = h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, -E') = 0.$$

事实上，考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{F}}_1}(-E') \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{F}}_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{E'} \longrightarrow 0.$$

映射 $H^0(\tilde{\mathbb{F}}_1, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{F}}_1}) \longrightarrow H^0(E', \mathcal{O}_{E'})$ 是满射，且 $h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{F}}_1}) = 0$，这意味着 $h^1(\tilde{\mathbb{F}}_1, -E') = 0$。

总之，考虑到 (5)，我们看到 T 的不规则度为 0。

接下来，由 Hurwitz 公式可得

(15)

$$2K_T \sim (f''')^*(2K_{\tilde{\mathbb{F}}_1} + \tilde{D}) \sim (f''')^*\Big(2(-3H + E + 2E') + (6H - 2E - 6E')\Big) = -2(f''')^*(E')$$

由此显然有 $h^0(T,\ 2K_T) = 0$。因此，根据 Castelnuovo 有理性判别准则， T是有理的，证明完毕。□

注 5.2. (i) 沿用命题 5.1 证明中的记号。由 (15) 或 (10)，我们看到 $K_T^2 = -4$。另一方面，我们知道 T 是一个次数为 2 的德尔佩佐曲面 S' 的修改。确切地说， T 是在六个点处爆破 S' 所得。事实上，回想一下，我们从双覆盖 $g : S' \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 开始，其中 S' 是次数为 2 的德尔佩佐曲面， g 由贝尔蒂尼对合 σ给出，且分歧于一条光滑四次曲线Γ，该曲线在平面上的一个对合 ι 下保持不变。众所周知， ι 在Γ之外有一个不动点 p。于是我们考虑了商 $Q = \mathbb{P}^2/\langle\iota\rangle$，它同构于$\mathbb{P}^3$ 中的一个二次锥面，其顶点为 q （即 p的像），并且存在双覆盖 $h : \mathbb{P}^2 \longrightarrow Q$。于是我们得到 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $h \circ g :\ S' \longrightarrow Q$。为了得到原始 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f :\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$的一个模型，我们需要从 Q的一般点 q 向平面作 Q 的双有理投影。现在很容易看出， T 是在 S' 处爆破所得，其中包括经由 g 对 p 拉回得到的两个点，以及经由 $h \circ g$对 q 拉回得到的四个点。总之，我们得到 $K_{S'}^2 = 2$，正如预期的那样。

(ii) 命题 5.1 中的分支曲线可以通过以下两种等价方式略作简化。一种方法是从交点 t 向下投影二次锥面 Q，该交点是 Λ 与 Δ 的交点。这样便可看出，分支数据变为 D'_{10} 一条三次曲线、 D'_{01} 一条直线，以及 D'_{11} 一条与三次曲线 D'_{10} 相切的直线。另一种方法是进行以 x、沿圆锥曲线D_{01} 位于 x 上的无穷近点 y，以及 D_{10} 与 D_{01} 在 x 和 y 之外的交点 z 为中心的二次变换。四次曲线 D_{10} 映为三次曲线 D'_{10}，圆锥曲线 D_{01} 映为直线 D'_{01}，点 z 吹起后映为一条与 D'_{10}相切的直线 D'_{11}。

如果考虑具有这些分支数据的 $\mathbb{Z}_2^2$ 覆盖，那么在 D'_{11} 与 D'_{10} 的切点上仍然是奇异的。消解奇点后（为此，必须在 D'_{11} 与 D'_{10} 的切点处吹起平面，并在 D'_{11} 与 D'_{10} 仍共有的无穷近点处再吹起），可得到一个有理曲面 X，使得 $K_X^2 = -1$。这与上面的 (i) 并不矛盾，因为在这种情况下， X 是由 2 次德尔佩佐曲面 S' 吹起三个点（而非像之前那样吹起六个点）得到的，即 S' 位于 $p \in \mathbb{P}^2$ 上的两个点，以及 S' 位于点 t 上的唯一一点。

5.1.2. 次数为 *1* 的德尔佩佐情形。 在情形**(1.B2.1)**中， $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f :\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 满足： S 是一个次数为 1 的德尔佩佐曲面，它是二次锥面 Q 在 $\mathbb{P}^3$ 中的双覆盖 $g :\ S \longrightarrow Q$ （通过 Geiser对合 τ），分歧于锥的顶点以及一条亏格为 4 的光滑六次曲线 Γ（它是 Q 与一个三次曲面的完全交），并且 Γ 在 Q的一个非平凡对合 ι 下保持不变，且 $\mathbb{Z}_2^2 = \langle\tau,\ \iota\rangle$。我们有一个双覆盖 $h :\ Q \longrightarrow Q/\langle\iota\rangle \simeq \mathbb{P}^2$ 以及 $f = h \circ g$。

命题 5.3。 在情形**(1.B2.1)**中， $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f :\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 经平面的克雷莫纳变换后，具有如下分支数据：***(i)*** D_{10} 和 D_{01} 是平面上的两条不同直线，它们交于一点 p ；***(ii)*** D_{11} 是一条光滑三次曲线，不经过点 p ，并与直线 D_{10} 和 D_{01}横截相交。

反过来，任何具有上述分支数据的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f :\ S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 都呈现德尔佩佐情形 **(1.B2.1)**。

证明。在双覆盖 $h :\ Q \longrightarrow Q/\langle\iota\rangle \simeq \mathbb{P}^2$ 中，分支曲线由平面上相交于一点 p 的两条不同直线组成。这两条直线属于分支

曲线 D 的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$。分支曲线的唯一其他分支是曲线 Γ在平面上的像。将 h限制到 Γ上得到一个双覆盖$h_{|\Gamma}: \Gamma \longrightarrow \Gamma'$，它有 6 个分支点，即 Γ 与作为 h分支曲线的两条直线的交点。这表明 Γ' 是一条亏格为 1 的三次曲线。于是我们看到，分支数据满足 (i)–(ii)。

反过来，设我们有一个分支数据由 (i) 和 (ii) 给出的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$。那么 S 光滑，并且构造数据为

$$L_{10} \simeq L_{01} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2),\ L_{11} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1).$$

应用 (9) 和 (10)，得到 $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ 和 $K_S^2 = 1$。还需证明 S 是有理的，且实际上是德尔佩佐曲面。

首先，根据 [4,命题 2.13，(3)]， S 是正则的。接下来有

$$2K_S \sim f^*(2K_{\mathbb{P}^2} + D) \sim f^*(-6H + 5H) = f^*(-H)$$

这证明了 S 的双属为 0，由此可得 S 的有理性。最后，很明显 S 是德尔佩佐曲面。□

5.2. **德尔佩佐情形的分类 $r = 3$ 情形**。 在德尔佩佐情形中，对于 $r = 3$，根据定理 2.3，我们需要考虑以下情形：**(4.222)** 和**(2.G22)**。

5.2.1. *4* 次德尔佩佐曲面情形。 在情形 **(4.222)**中， $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$来自一个由方程（2）给出的 4 次德尔佩佐曲面 S'，群 $G = \mathbb{Z}_2^3$ 由（3）给出。

命题 5.4。 在情形 **(4.222)**中， $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 经过平面的克雷莫纳变换后，其分支数据如下：

(i) three lines $D_{010}, D_{001}, D_{011}$ *不经过* D_{100}，*and* D_{011} 与另外两条直线 D_{100}，D_{010} 的两个交点，且不与三条直线中的任何一条相切。

(ii) 同一点 D_{010}，一条圆锥曲线不经过 D_{100}，经过直线 D_{011} 与另外两条直线 D_{100}，D_{010} 的两个交点，且不与三条直线中的任何一条相切。

反过来，任何具有上述分支数据的 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 都与德尔佩佐情形 **(4.222)**相关。

证明。 固定一个对合 $k \in \mathbb{Z}_2^3$，并考虑映射 $g: S' \longrightarrow S'/\langle k\rangle = Q \subset \mathbb{P}^3$，其中 Q 是 $\mathbb{P}^3$ 中的光滑二次曲面。容易看出， g 的分支曲线是由另一二次曲面在 Q 上截出的光滑亏格为 1 的四次曲线 Γ。固定一般点 $p \in Q$，从 p 向平面投影 Q。映射 $g: S' \longrightarrow Q$ 经双有理变换成为双覆盖 $h: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$，其分支曲线是 Γ 在投影下的像，即一条具有两个不同节点 ξ，η 的四次曲线 Γ'。注意， S 在 ξ 和 η 上方有两个二重点，其解消是将 S' 在 g^{-1} 中的两个点处爆破（p）。

接下来我们考虑由 $\mathbb{Z}_2^2 \simeq \mathbb{Z}_2^3/\langle k\rangle$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上的作用给出的 $\mathbb{Z}_2^2$–重覆盖 $r: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$，该作用必须整体固定 Γ'。覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 是 h 与 r 的复合。

在平面上的仿射坐标 (x, y) 中，映射 r 由 $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ 给出（见注 4.5）。我们可以假设曲线 Γ' 在 x 轴和 y 轴的无穷远点处有二重点，并且必须被 r固定，因此其方程必为以下形式

$$ax^2y^2 + bx^2 + cy^2 + d = 0.$$

其中 a，b，c，d 均为充分一般的。该曲线在 r 下的像是圆锥曲线 Δ，其方程为

$$axy + bx + cy + d = 0$$

它经过 x轴和 y 轴的无穷远点，并且是 f的分支曲线的一部分。此外， r 的分支曲线由以下三条直线并组成： x， y 轴以及无穷远直线。我分别将这三条直线记为 D_{010}， D_{001}， D_{011}，并将圆锥曲线 Δ 记为 D_{100} ；它们满足命题陈述中的 (i)–(ii)。

反过来，假设我们有一个 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ ，其分支数据如 (i)– (ii) 所示。那么分支曲线 $D = D_{010} + D_{001} + D_{011} + D_{100}$ 在两个点 ξ， η （分别位于 x 轴和 y 轴的无穷远处）上方各有一个三重点；在此处，圆锥曲线 D_{100} 与（无穷远处的）直线 D_{100} 相交。我们需要消解这些奇点，为此，对 ξ 和 η进行爆破，从而得到态射 $\pi\colon P \longrightarrow \mathbb{P}^2$ ，其中两个例外除子 E_1， E_2分别收缩到 ξ， η。通过沿 π 拉回 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ ，我们得到一个 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $\phi\colon X \longrightarrow P$ ，其构造数据是 $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的构造数据经 π拉回到 P 所得。

令 H 为 $\mathbb{P}^2$的一般直线在 P 上的拉回。考虑 D_{010}， D_{001}， D_{011}， D_{100} 在 P上的严格变换 D'_{010}， D'_{001}， D'_{011}， D'_{100}。我们有

$$D'_{010} \sim H - E_1,\ D'_{001} \sim H - E_2,\ D'_{011} \sim H - E_1 - E_2,\ D'_{100} \sim 2H - E_1 - E_2.$$

$\phi : X \longrightarrow P$ 的分支数据为

$$\bar{D}_{010} = D'_{010} + E_1,\ \bar{D}_{001} = D'_{001} + E_2,\ \bar{D}_{011} = D'_{011} + E_1 + E_2,\ \bar{D}_{100} = D'_{100} + E_1 + E_2.$$

因此， ϕ 的分支曲线不是既约的，故 X 不是正规的。我们用第 3.4 节给出的步骤将其正规化。这样便得到一个新的 $\mathbb{Z}_2^3$ 覆盖 $\psi : Y \longrightarrow P$，其分支数据为

$$\begin{gathered}\bar{D}'_{010} = D'_{010},\ \bar{D}'_{001} = D'_{001},\ \bar{D}'_{011} = D'_{011},\\ \bar{D}'_{100} = D'_{100},\ \bar{D}'_{110} = E_2,\ \bar{D}'_{101} = E_1,\ \bar{D}'_{111} = 0,\end{gathered}$$

且此时 Y 是光滑的。因此，构造数据为

$$\begin{gathered}L_{100} \sim L_{011} \sim H,\ L_{010} \sim H - E_1,\ L_{0001} \sim H - E_2,\\ L_{110} \sim L_{101} \sim L_{111} \sim 2H - E_1 - E_2.\end{gathered}$$

然后利用 (9) 和 (10) 进行计算，得到 $\chi(\mathcal{O}_Y) = 1$ 和 $K_Y^2 = 2$。

此外，若 D' 是分支曲线，则有

$$2K_Y \sim \psi^*(2K_P + \bar{D}') \sim \psi^*(-H)$$

这证明了 Y 的双属为 0，因此几何亏格也为 0，且不规则度为 0，所以 Y 是有理的。此外，很明显 Y 是德尔佩佐曲面。□

注 5.5。 在命题 5.4 的情形下，可以通过以下方式对分支曲线稍作简化。分支曲线有两个三重点 ξ， η。考虑圆锥曲线 D_{100} 与直线 D_{001} 的交点 ζ ，并以 ξ， η， ζ为基点作二次变换。该变换将直线 D_{011}和 D_{001}压缩为点，并将圆锥曲线 D_{100} 映射为一条直线。此外，它还将三个点ξ， η， ζ爆破为三条直线，这些直线属于新的分支曲线。准确地说，新的分支曲线由五条直线组成，分别是 D'_{100} （圆锥曲线 D_{100}的像）、 D'_{010} （直线 D_{010}的像）、 D'_{110} （对应于点 η爆破的直线），以及 D'_{101}（由点 ξ 和 ζ爆破所对应的两条直线组成）。

作为合理性检查，我计算了构造数据，它们除 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$之外全都同构于

$$L'_{100} \simeq L'_{110} \simeq L_{011} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$$

因此，利用 (9) 和 (10)，我们看到，对于新的 $\mathbb{Z}_2$–覆盖 $f' : S' \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 对于这条由五条直线组成的新分支曲线 D'，我们有 $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = 1$ 以及 $K^2_{S'} = 2$ 以及

$$2K_{S'} \sim (f')^*(2K_{\mathbb{P}^2} + \bar{D}') \sim (f')^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)).$$

5.2.2. *2 次德尔佩佐情形。* 在情形 **(2.G22)** 中，$\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$来自一个 2 次德尔佩佐曲面 S'。群 $\mathbb{Z}_2^3$ 包含贝尔蒂尼对合 σ。

命题 5.6. 在情形 **(2.G22)** 中，$\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 在相差一个平面的克雷莫纳变换的意义下，具有如下分支数据：
(i) three lines $D_{100}, D_{010}, D_{110}$ 不经过 *ing through th*同一 *po i nt*；*(ii)* 一条不可约圆锥曲线 D_{011} 不经过直线D_{100}、D_{010}、D_{110} 的交点，且不与它们相切。

反之，任何具有上述分支数据的 $\mathbb{Z}_2^3$–覆盖 $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 都属于德尔佩佐情形**(2.G22)**。

证明。我们从由贝尔蒂尼对合给出的、沿一条光滑四次曲线 Γ分歧的双覆盖 $g : S' \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 出发。然后，f 由 g 与注 4.5 中整体固定曲线 Γ的 $\mathbb{Z}_2^2$–覆盖 $h : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 复合而得。此处$\mathbb{Z}_2^2 \simeq \mathbb{Z}_2^3/\langle\sigma\rangle$。$h$: $\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的分支曲线由不在同一铅笔中的三条直线给出。Γ 经由 h 的像是一条相对于上述三条直线处于一般位置的圆锥曲线 Δ。它们是 $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 的分支曲线的各分量，并且可以验证 (i) 与 (ii) 成立。

确切地说，我们需要验证 D_{011} 不经过直线 D_{100}、D_{010}、D_{110}的交点，并且不与它们相切。为此，我们可以假设直线 D_{100}、D_{010}、D_{110}的方程分别为 $x = 0$、$y = 0$、$z = 0$，且D_{011}的方程为 $f_2(x, y, z) = 0$。回顾定理 2.3 的情形 (2.G22)，光滑四次曲线 Γ的方程为 $F(x, y, z) = f_2(x^2, y^2, z^2) = 0$。现在，假设 D_{011}经过 D_{100}、D_{010}、D_{110} 的某个交点，例如点$(0 : 0 : 1)$。则

$$f_2(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cxy + dxz + eyz,$$

因此

$$f_2(x^2, y^2, z^2) = ax^4 + by^4 + cx^2y^2 + dx^2z^2 + ey^2z^2,$$

由此可知，Γ 在$(0 : 0 : 1)$处是奇异的，矛盾。类似地，假设直线 $D_{100}, D_{010}, D_{110}$中的一条，例如 $x = 0$，与 D_{011}相切。则该方程组

$$f_2(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cxy + dxz + eyz + fz^2 = 0, \ x = 0$$

存在一个重数 2 的解。这等价于说 $e^2 - 4bf = 0$。现在来看这个系统

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y(2by + cx + ez) = 0\\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z\frac{\partial f_2}{\partial z} = 2z(2fz + dx + ey) = 0\end{gathered}$$

并且，由于 $e^2 - 4bf = 0$，关于 $x = 0$ 存在一个解，这意味着 Γ 是奇异的，这再次构成矛盾。

反过来，如果（i）和（ii）得到验证，我们便有 S 是光滑的，因为分支曲线 D 具有正规交叉。此外

$$2K_S \sim f^*(2K_{\mathbb{P}^2} + D) \sim f^*(-H)$$

因此， S 的双属为 0，且 $K_S^2 = 2$。此外，容易计算构造数据，并利用（9）验证 $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$。因此， S 是有理曲面，事实上是次数为 2 的德尔佩佐曲面。□

5.3. **德尔佩佐情形下的分类** $r = 4$。 在满足 $r = 4$的德尔佩佐情形下，根据定理 2.3，我们只需考虑**(4.2222)**这一情形。在**(4.2222)**这一情形中， $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 来自一个由方程（2）给出的次数为 4 的德尔佩佐曲面 S'，而群 $G = \mathbb{Z}_2^4$ 由（4）给出。

命题5.7. 在**(4.2222)**这一情形中， $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 经平面的克雷莫纳变换后，其分支数据由一般位置的五条直线 D_{1000}、 D_{0100}、 D_{0010}、D_{0001}、 D_{1111} 给出。

反之，任何具有上述分支数据的 $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 均属于德尔佩佐情形（**4.2222**）。

证明。 让我们回到定理 2.3 中情形 **（4.2222）** 的描述。 $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 是通过 $G \simeq \mathbb{Z}_2^4$ 对由方程（2）给出的 4 次德尔佩佐曲面 S 的射影变换群（由（4）给出）的作用取商得到的。考虑态射

$$\psi : (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \in \mathbb{P}^4 \longrightarrow (x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : x_4^4 : x_5^5) \in \mathbb{P}^4.$$

这是一个 $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖， $\mathbb{P}^4$ 沿五个坐标超平面 $x_i = 0$分支，其中$1 \leqslant i \leqslant 5$。德尔佩佐曲面在 ψ 下的像显然是一个平面，而将 ψ 限制在 S 上，恰好就是 $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$。由此可知， f 的分支曲线正好是一般位置的五条直线，因此分支数据就是命题陈述中的那些数据。

反过来，假设我们有一个具有上述分支数据的 $\mathbb{Z}_2^4$–覆盖 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 。利用 (8) 计算构造数据，可得

$$L_{1110} \sim L_{1011} \sim L_{0111} \sim L_{1101} \sim L_{1111} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$$

而其余十组构造数据都与 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$(1)同构。应用 (9) 和 (10) 可知 $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ 和 $K_S^2 = 4$。此外

$$2K_S \sim f^*(2K_{\mathbb{P}^2} + D) \sim f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1))$$

由此可得 S 是有理曲面，实际上是一个次数为 4 的德尔佩佐曲面。 □

References

[1] L. Bayle、A. Beauville、 *Birational involutions of* $\mathbb{P}^2$，《亚洲数学杂志》4 (1)，(2000)，11–18。[2] J. Blanc, *Finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane*，博士论文，日内瓦大学，2006（doi: 10.13097/archive-ouverte/unige:425）。[3] A. Calabri, *Rivestimenti del piano, Sulla razionalità dei piani doppi e tripli ciclici*，Ed. Plus，比萨大学出版社，(2006)。[4] J. Caro, J. Cruz, Penagos、S. Troncoso, *On the Ulrich complexity and Noether-Severi groups of birational planes* 2025，预印本。[5] G. Castelnuovo、F. Enriques, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*，《巴勒莫数学会刊》**14**，(1900)，290–302。

[6] F. Catanese, *Singular bidouble covers and the construction of interesting algebraic surfaces*, 载于《数学研究所丛书》。Mathematica Gottingensis，**8**，(1999)，97–120。[7] T. de Fernex、L. Ein, *Resolution of indeterminacy of pairs*, 《代数几何》，165-177，deGruyter，柏林（2002）。[8] R. Pardini, *Abelian covers of algebraic varieties*, 《纯粹与应用数学杂志》**417**，(1991)，191–213。

C. Ciliberto, Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata", Via dellaRicerca Scientifica, 00173 Roma, Italy*Email address*: cilibert@axp.mat.uniroma2.it