arXiv:2603.01066v1 [math.DG] 1 Mar 2026

各向异性毛细 L_p-Minkowski 问题

SHANWEI DING、JINYU GAO、GUANGHAN LI 和 MENGLIANG LIU*

Abstract. 本文引入了 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 中两个超曲面的 *anisotropic ω_0-capillary p-sum*，并建立了各向异性毛细凸体理论。对于具有各向异性 ω_0-毛细管边界的光滑凸超曲面 Σ，我们通过该 p-和计算其各向异性毛细 k阶 quermass 积分的变分，从而定义了毛细 Wulff 形 $\mathcal{C}_{\omega_0}$上相应的各向异性 ω_0-毛细k阶 p表面积测度。这促使我们提出并求解$p \geqslant 1$的各向异性毛细 L_p-Minkowski 问题。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 7 2.1. Wulff 形状与对偶闵可夫斯基范数 7 2.2. 各向异性曲率 7 2.3. 新度量与各向异性公式 8 2.4. 各向异性毛细支撑函数 10 2.5. 各向异性毛细超曲面的一般拟混合体积 10 3. $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 12中的各向异性 ω_0-毛细凸体3.1. 各向异性毛细凸体与凸函数 12 3.2. 毛细凸体的各向异性毛细 p-和 14 3.3. 各向异性毛细 p-表面积测度与指定测度问题 17 4. 各向异性毛细 L_p-Minkowski 问题解的正则性 19 4.1. C^0估计 19 4.2. C^1估计 22 4.3. C^2估计 26 5. 定理 1.2 的证明（$p = 1$） 30 6. 定理 1.4 的证明（$p > 1$） 32 参考文献 36

The second author was support by NSF of Zhejiang province (No. LQN26A010008). The third author was support by NSFC (Nos. 11871053 and 12261105). Corresponding author.

2020 Mathematics Subject Classification. 53C65, 35J66, 53C42, 35J60, 53C45.

Keywords: Anisotropic capillary L_p-Minkowski problem, Anisotropic capillary hypersurface, Robin boundary value condition, Monge-Ampère equation.

1. Introduction

经典的 Minkowski 问题是凸几何中的一个核心问题，涉及指定面积测度（或高斯曲率）。它也是微分几何中的一个经典问题，关乎具有指定高斯曲率（作为外法向量的函数）的闭凸超曲面的存在性、唯一性、正则性与稳定性。对该问题作出主要贡献的有 Minkowski [42,43], 亚历山德罗夫 [1–4], 芬切尔和耶森 [16], 莱维 [29,30], 尼伦伯格 [44], 卡拉比 [7], 波戈列洛夫 [46,47], 程和丘成桐 [11], 卡法雷利、尼伦伯格和斯普鲁克 [8], 等等。

在 [34], 中，卢特瓦克将经典闵可夫斯基问题推广到 L_p 形式，即L_p-闵可夫斯基问题，该问题指定与凸体上体积泛函关于Firey p-和的微分相关的 L_p-表面积测度。 L_p-闵可夫斯基问题已针对参数 p的各种取值范围得到广泛研究，奠基性结果见于诸如 [9,12,21,24,27,34,35,57,58]等著作。进一步的发展及相关研究可见于例如 [10,13,31] 及其参考文献。

此外，毛细超曲面的几何，即以常数交角与其他超曲面相交的超曲面，近年来受到越来越多的关注。许多对闭超曲面而言现已成为经典的结果，最近被推广到毛细情形。毛细指定面积测度问题最近在 [25, 26, 40, 41, 50]中得到研究。更具体地说，他们解决了情形 $p \geqslant n+1$ 与$p = 1$下的毛细 L_p-闵可夫斯基问题，以及情形 $1 < p < n+1$下具有偶指定数据的毛细 L_p-闵可夫斯基问题。

另一方面，最近 Xia [52]研究了各向异性闵可夫斯基问题，即在相对几何或 Minkowski 几何中，为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭严格凸超曲面指定各向异性高斯-克罗内克曲率，使其成为定义在各向异性法向量上的函数。

受上述研究启发，我们转向一个更困难的情形，即各向异性毛细凸几何，并特别关注其核心问题——各向异性毛细 L_p-Minkowski 问题。与经典毛细指定测度问题不同，后者的指定测度定义在球冠上，而各向异性情形涉及支撑在球面一般子集上的指定测度，这源于 Wulff 形状的存在。这一特点带来了远超各向同性情形的分析难题。此外，由于引入了各向异性，与单个凸体相关的每个几何量都被涉及两个凸体的混合量所取代，这本身又带来了重大的额外挑战。

本文主要研究半空间中的各向异性毛细超曲面

$$\mathbb{R}^{n+1}_{+} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle y, E_{n+1}\rangle > 0\},$$

其中，$\underline{E_i}(i = 1, \cdots, n+1)$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准坐标向量，并且对于 $\alpha = 1, \cdots, n$，$E_\alpha \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_{+}$。

设 $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个给定的光滑闭严格凸超曲面，它包围原点 O，其支撑函数为 $F : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}_{+}$。与 F 相关联的 Cahn-Hoffman 映射定义为

$$\Psi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \Psi(x) = F(x)x + \nabla^{\mathbb{S}} F(x),$$

其中 $\nabla^{\mathbb{S}}$ 表示 $\mathbb{S}^n$ 上关于标准圆度量的协变导数。设Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 中一个光滑紧致可定向超曲面，其边界为 $\partial\Sigma \subset \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$，它包围一个有界区域 $\hat{\Sigma}$。设 ν 是 Σ 指向 Σ 外侧的单位法向量。给定常数 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1})\ F(-E_{n+1}))$，若 Σ 是各向异性 ω_0-毛细超曲面（参见 [28]），则

$$\langle \Psi(\nu), -E_{n+1}\rangle = \omega_0, \quad \text{on } \partial\Sigma. \tag{1.1}$$

为便于描述，我们需要定义一个常向量 $E^F_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ （参见[28]）：

$$E^F_{n+1} = \begin{cases} \frac{\Psi(E_{n+1})}{F(E_{n+1})}, & \text{if } \omega_0 < 0, \\ E_{n+1}, & \text{if } \omega_0 = 0, \\ -\frac{\Psi(-E_{n+1})}{F(-E_{n+1})}, & \text{if } \omega_0 > 0. \end{cases}$$

注意， E^F_{n+1} 是沿方向 Ψ（E_{n+1}）的唯一向量，其与 E_{n+1} 的标量积为 1（见 [28,式（3.2）]）。

各向异性 ω_0-毛细超曲面的经典例子是 ω_0-毛细 Wulff 形（见 [28]），它是在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$中的 Wulff 形的一部分，满足各向异性毛细边界条件（1.1）。我们将 $\mathcal{W}_{r_0,\omega_0} = \mathcal{W}_{r_0}(y_0) \cap \mathbb{R}^{n+1}_+$记作 $y_0 = r_0\omega_0 E^F_{n+1}$，其中 $\mathcal{W}_{r_0}(y_0)$ 由（2.2）定义。此外，令 $\mathcal{C}_{\omega_0} := \mathcal{W}_{1,\omega_0} = \mathcal{T}(\mathcal{W} \cap \{x_{n+1} \geqslant -\omega_0\})$，其中 $\mathcal{T}$: $y \to y + \omega_0 E^F_{n+1}$ 表示在 $\mathbb{R}^{n+1}$中平移 $\omega_0 E^F_{n+1}$。见图 1。

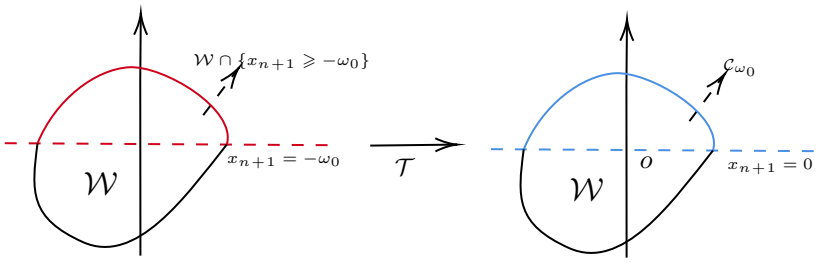

图 1. $\mathcal{T}$的平移

设 Σ 是各向异性严格凸 ω_0-毛细超曲面，位于 $\mathbb{R}^{n+1}_+$且其边界位于 $\overline{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+}$。我们将各向异性毛细高斯映射定义为 $\widetilde{\nu_F} = \mathcal{T}\nu_F = \nu_F + \omega_0 E^F_{n+1}$，并用它对 Σ 上的各向异性支撑函数 $\hat{\mathcal{C}}_{\omega_0}$重新参数化，其中 ν_F 的各向异性法向量和 Σ的支撑函数 $\hat{s}$ 定义于第 2节。半空间中的正则各向异性毛细闵可夫斯基问题提出以下问题:

各向异性毛细管 Minkowski 问题：给定 f 上的正函数$\mathcal{C}_{\omega_0}$，能否找到一个严格凸的各向异性 ω_0-毛细超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$，使得

$$\frac{1}{K(\widetilde{\nu_F}^{-1}(\xi))} = f(\xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}. \tag{1.2}$$

其中， K 是 Σ的各向异性高斯-克罗内克曲率。

以下能量泛函

$$\mathcal{E}(\Sigma) = |\Sigma|_F + \omega_0 |\widehat{\partial\Sigma}|, \tag{1.3}$$

由 Jia、Wang、Xia 和 Zhang 研究 [28], , 更早时 Philippis 和 Maggi 也曾研究 [45]。此处 $\widehat{\partial\Sigma} = \hat{}\Sigma \cap \overline{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+}$表示由 $\partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n = \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ 所围成的区域，$|\cdot|$表示该区域在 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^{n+1}$中的体积。注意，各向异性面积元定义为 $\mathrm{d}\mu_F := F(\nu)\mathrm{d}\mu_g$，其中 $\mathrm{d}\mu_g$ 是由标准欧几里得内积诱导的体积形式。Σ 的各向异性面积为

$$|\Sigma|_F = \int_\Sigma \mathrm{d}\mu_F.$$

通过直接计算，我们发现泛函（1.3）具有如下等价的积分形式:

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \int_\Sigma \left(1 + \omega_0 G(\nu_F)\left(\nu_F, E^F_{n+1}\right)\right) \mathrm{d}\mu_F,$$

其中 G 是第 2.3 节中定义的新度量。这一简单观察导出了与给定严格凸各向异性毛细超曲面 Σ相关的如下面积测度 m_{ω_0}：

$$m_{\omega_0}(B) := \mathcal{E}(\widetilde{\nu_F}^{-1}(B)) = \int_{\widetilde{\nu_F}^{-1}(B)} \left(1 + \omega_0 G(\nu_F)\left(\nu_F, E^F_{n+1}\right)\right) \mathrm{d}\mu_F,$$

对于任意博雷尔集 $B \subset \mathcal{C}_{\omega_0}$，称其为$\Sigma$的各向异性毛细面积测度。经过变换，它还可以写成如下形式

$$m_{\omega_0}(B) := \int_B \frac{F(\nu(\xi)) + \omega_0\langle\nu(\xi), E^F_{n+1}\rangle}{K(\widetilde{\nu_F}^{-1}(\xi))}\mathrm{d}\mathcal{H}^n(\xi),$$

对于任意博雷尔集 $B \subset \mathcal{C}_{\omega_0}$，其中 $F(\nu(\xi)) + \omega_0\langle\nu(\xi)\ E^F_{n+1}\rangle$ 是 $\mathcal{C}_{\omega_0}$的支撑函数，$\mathrm{d}\mathcal{H}^n(\xi)$表示 n维豪斯多夫测度。因此，我们可以从各向异性毛细管曲面面积测度的角度表述各向异性毛细管 Minkowski 问题:

给定 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上的博雷尔测度 m， m 满足什么条件，才能刻画具有常数 ω_0 、且其诱导的各向异性毛细面积测度满足 $m_{\omega_0} = m$ 的广义凸各向异性毛细超曲面的存在性与唯一性?

我们将各向异性毛细 Minkowski 问题归结为以下 Monge-Amp`ere 型方程的存在性问题，该方程对各向异性毛细支撑函数 $\hat{s}$ 自然满足罗宾边值条件：$\mathcal{C}_{\omega_0} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \det(\mathring{\nabla}_{ij}\hat{s} - \frac{1}{2}Q_{ijk}\mathring{\nabla}_k\hat{s} + \hat{s}\mathring{g}_{ij}) &= f, & \text{in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \langle\mathring{\nabla}\hat{s}, E_{n+1}\rangle &= \omega_0 \cdot \hat{s}, & \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $\mathring{g}_{ij} = G(\mathcal{T}^{-1}\xi)(\partial_i\xi, \partial_j\xi)$， $\mathring{\nabla}$ 是 $\mathring{g}$ 在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$上的 Levi-Civita 联络，并且 Q是一个 (0,3) 阶张量，其定义见 (2.6)。条件 (1.4) 中的边界条件等价于

$$\mathring{\nabla}_{\mu_F}\hat{s} = \frac{\omega_0}{F(\nu)\langle\mu, E_{n+1}\rangle}\hat{s}, \quad \text{or} \quad \langle\mathring{\nabla}\hat{s}, \mu\rangle = \frac{\omega_0}{\langle\mu, E_{n+1}\rangle}\hat{s}, \tag{1.5}$$

其中 ν 是 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$中的单位外法向量， μ是 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0}$ 在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$中的单位各向同性外余法向量， $\mu_F = A_F(\nu)\nu$ 满足 A_F 由（2.1）定义，且μ_F 称为 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0}$ 在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 中的各向异性外余法向量。关于证明的详细内容，参见引理 3.3。在第 5 节中，直接观察可知，我们可以将$\hat{s}$限制为满足以下正交条件:

$$\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} G(\hat{\xi})(\hat{\xi}, E_\alpha)\hat{s}\ \mathrm{d}\mu_F = 0, \quad \forall\alpha = 1, \cdots, n, \tag{1.6}$$

其中 $\hat{\xi} = \mathcal{T}^{-1}\xi \in \mathcal{W}$。

分析方程（1.4）的一项根本困难在于，其非线性椭圆结构与左侧的梯度项相互耦合。这种组合使得先验估计的推导，尤其是 C^2 估计的推导，成为几何和分析两方面的一项关键挑战。在各向同性情形下，推导 C^2 估计的关键在于 $\partial\mathcal{C}_\theta \subset \mathcal{C}_\theta$ 的凸性，其中球冠 $\mathcal{C}_\theta$ 定义如下 [40],

$$\mathcal{C}_\theta := \left\{ y \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} \mid \ |y + \cos\theta E_{n+1}| = 1 \right\},$$

并采用经典障碍技巧 [32, 37] 来处理定义在一致凸区域上的 Neumann 边界条件。因此，在各向异性问题中，自然需要以下条件。

定义 1.1。 我们称 ω_0-毛细 *Wulff* 形 $\mathcal{C}_{\omega_0} \subset \mathcal{W} = \mathcal{T}(\mathcal{W})$ 的边界是各向异性凸的，如果 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0} \subset \mathcal{C}_{\omega_0}$ 满足 $\left(\hat{h}^{\partial\mathcal{C}_{\omega_0}}_{\alpha\beta}\right) > 0$，其中 $\hat{h}^{\partial\mathcal{C}_{\omega_0}}_{\alpha\beta} =: \tilde{g}(\tilde{e}_\alpha, \nabla_{\tilde{e}_\beta}\tilde{e}_n)$，$\tilde{e}_\alpha$ 且 $\tilde{g}$ 是相对于平移后的 *Wulff* 形定义的各向异性量，该 *Wulff* 形 $\mathcal{W}$ 定义于第 4节。

此条件最早用于 [15]，并且等价于

$$\omega_0 < \frac{Q(z)(Y, Y, \mu_F)\langle E_{n+1}, \mu\rangle F(\nu)}{G(z)(Y, Y)}, \tag{1.7}$$

对所有 $z \in \mathcal{W} \cap \{x_{n+1} = -\omega_0\}$ 和 $Y \in T_z((\mathcal{W} \cap \{x_{n+1} = -\omega_0\})$。详情请参见第4.1条备注和第4.7 条命题（见第4节）。在特殊情形$\mathcal{W} = \mathbb{S}^n$下，乌尔夫球冠 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 变为各向同性毛细球冠，记作 $\mathcal{C}_\theta$，且条件（1.7）等价于 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$。在各向异性和各向同性情形下，我们都希望消除这一限制，并期望在未来的工作中实现这一目标。

我们旨在将关于毛细L_p-闵可夫斯基问题且 $p \geqslant 1$ 的已知结果完整推广到各向异性情形，同时克服这一推广中固有的所有技术难题。本文的主要结果总结如下列定理。第一个定理是对 [40]中结果的直接推广：

定理 1.2。 设 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1})\ F(-E_{n+1}))$ 使得 ω_0- 毛细 *Wulff* 形 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0} \subset \mathcal{C}_{\omega_0}$ 的边界是各向异性凸的，并且 $f(\xi) \in C^2(\mathcal{C}_{\omega_0})$ 是满足以下条件的正函数

$$\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} G(\hat{\xi})(\hat{\xi}, E_\alpha) f(\xi)\ \mathrm{d}\mu_F = 0, \quad \forall \alpha = 1, \cdots, n. \tag{1.8}$$

那么存在一个 $C^{3,\gamma}\ (0 < \gamma < 1)$严格凸的 ω_0-毛细超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$使得 (1.2) 成立。此外， Σ在水平平移意义下唯一。

在第 3 节中，我们定义各向异性毛细 p-和以及各向异性毛细 p-表面积测度，并提出相应的指定测度问题，即各向异性毛细 L_p-Minkowski 问题。该问题可归结为证明一个带有自然罗宾边界条件的全非线性椭圆型偏微分方程存在凸解：

$$\begin{cases} \det\left(\mathring{\nabla}_{ij}\hat{s} - \frac{1}{2}Q_{ijk}\mathring{\nabla}_k\hat{s} + \hat{s}\mathring{g}_{ij}\right) &= f\hat{s}^{p-1}, & \text{in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \mathring{\nabla}_{\mu_F}\hat{s} &= \frac{\omega_0}{F(\nu)\langle\mu, E_{n+1}\rangle}\hat{s}, & \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}. \end{cases} \tag{1.9}$$

对于一类特殊的 Wulff 形状，我们给出各向异性毛细环境中偶函数的以下概念。

定义1.3。 令 $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1})\in\mathcal{C}_{\omega_0}$，并定义 $\bar{\xi}:=(-\xi_1,\dots,-\xi_n,\xi_{n+1})$。若支撑函数 F *of* $\mathcal{W}$ 满足

$$F(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=F(x_1,\dots,x_n,-x_{n+1}),$$
$$F(-x_1,\dots,-x_n,x_{n+1})=F(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}),$$

对所有 $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{S}^n$，则 $\mathcal{W}$（或等价地 F）称为对称。给定一个对称的 $\mathcal{W}$，函数 $f\in C^2(\mathcal{C}_{\omega_0})$ 称为定义在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上的各向异性毛细偶函数，若其满足

$$f(\xi)=f(\bar{\xi}),\ \forall\xi\in\mathcal{C}_{\omega_0}.$$

下面的定理将 Mei、Wang 和 Weng 的结果 [41] 推广到了各向异性毛细环境。

定理 1.4。 设 $\omega_0\in(-F(E_{n+1})\ F(-E_{n+1}))$ 满足：ω_0-毛细 *Wulff* 形 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0}\subset\mathcal{C}_{\omega_0}$ 的边界是各向异性凸的，并且 $f\in C^2(\mathcal{C}_{\omega_0})$ 是一个正函数。

(1) 若 $1<p<n+1$，假设 $\mathcal{W}$ 是对称的，$\omega_0\leqslant 0$，且 f 在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$上是偶函数。那么，方程 $\hat{s}$（(1.9)）存在唯一的光滑各向异性毛细偶解。*(2)* 若 $p=n+1$，则存在唯一的（相差一个伸缩）正光滑解$\hat{s}$ 以及一个正常数 η 满足

$$\begin{cases}\det\left(\hat{s}_{ij}-\frac{1}{2}Q_{ijk}\hat{s}_k+\hat{s}\mathring{g}_{ij}\right) &= \eta f\hat{s}^n, \quad in\ \mathcal{C}_{\omega_0},\\ \langle\mathring{\nabla}\hat{s},E_{n+1}\rangle &= \omega_0\cdot\hat{s}, \quad on\ \partial\mathcal{C}_{\omega_0}.\end{cases}\tag{1.10}$$

(3) 若 $p>n+1$，则方程 $\hat{s}$（(1.9)）存在唯一的光滑解。

注 1.1。 对于希望了解满足定理第一部分中特殊 *Wulff* 形状构造的例子的读者，请参阅*1.4*的附录 [15]。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们系统地介绍各向异性毛细超曲面的预备概念，尤其着重于精确定义各向异性支撑函数；它对应于欧几里得空间中各向同性毛细超曲面的支撑函数。我们还定义各向异性毛细超曲面的混合曲率积分，并证明这些定义是适定的。在第3节中，我们将凸体的经典理论推广至各向异性毛细超曲面情形，并定义各向异性毛细 p-和以及第 k阶各向异性毛细 p-表面积测度。我们提出两个指定测度问题，其中包括各向异性毛细 L_p-Minkowski 问题。在第4节中，我们为定理1.2 和定理1.4中的问题的解建立先验估计。C^1 和 C^2 估计依赖于条件（1.7）。然而，获得 C^2 估计仍然极具挑战性，因为我们无法直接应用与各向同性情形中所用方法相似的技巧，例如文献 [40]中的引理 3.3 和引理 3.4。具体而言，我们研究的 Monge-Amp`ère 型方程不仅包含梯度项，而且还涉及边界条件。为此，我们借鉴了 [26] 和 [52] 的研究，构造如下辅助函数:

$$P(\xi)=\log\sigma_1+e^{\beta(m_2-\tilde{s})},$$

其中， σ_1 是所有各向异性主曲率半径之和， m_2 是各向异性支撑函数的上界，而 $\tilde{s}$ 是通过平移乌尔夫形重新参数化的各向异性毛细支撑函数。该函数平衡了内部项和边界项，从而能够有效运用最大值原理。此外，条件（1.7）对于获得 C^1 和 C^2 估计至关重要。值得注意的是，推导 C^0 估计时可以不需要这一条件。最后，在第5 节和第6节中，我们采用连续性方法完成主要定理的证明。

2. 预备知识

2.1. Wulff 形状与对偶闵可夫斯基范数。设 F 是标准球面上的光滑正函数（$\mathbb{S}^n$， $g^{\mathbb{S}^n}$， $\nabla^{\mathbb{S}}$），使得矩阵

$$A_F(x) = \nabla^{\mathbb{S}}\nabla^{\mathbb{S}}F(x) + F(x)g^{\mathbb{S}^n}, \quad x \in \mathbb{S}^n, \tag{2.1}$$

在 $\mathbb{S}^n$ 上正定，其中 $g^{\mathbb{S}^n}$ 表示 $\mathbb{S}^n$上的圆度量。于是存在唯一的光滑严格凸超曲面 $\mathcal{W}$，由下式定义

$$\mathcal{W} = \{\Psi(x)|\Psi(x) := F(x)x + \nabla^{\mathbb{S}}F(x),\ x \in \mathbb{S}^n\},$$

其支撑函数为 F。我们称 $\mathcal{W}$ 为由函数 $F \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$确定的 Wulff 形状。若 F 为常数，则相应的 Wulff 形状与标准欧几里得空间中的圆球面重合。$\mathbb{S}^n$ 上的光滑函数 F 可通过下式延拓为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的 1 次齐次函数

$$F(y) = |y|F(y/|y|), \quad y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},$$

并令 $F(0) = 0$。于是容易证明，对于 $x \in \mathbb{S}^n$，有 $\Psi(x) = DF(x)$，其中 D 是欧几里得梯度。

齐次延拓 F 在 $\mathbb{R}^{n+1}$上定义了一个 Minkowski 范数，也就是说， F 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的一个范数，且 $D^2(F^2)$在 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$上处处正定。我们可以在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义对偶闵可夫斯基范数 F^0，如下所示

$$F^0(\zeta) := \sup_{y \neq 0} \frac{\langle y, \zeta\rangle}{F(y)}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

单位 Wulff 形状可由 F^0 解释为

$$\mathcal{W} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : F^0(y) = 1\}.$$

以 y_0 为中心、半径为 r_0 的 Wulff 形状表示为

$$\mathcal{W}_{r_0}(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : F^0(y - y_0) = r_0\}. \tag{2.2}$$

半径为 r_0 的 ω_0-毛细 Wulff 形表示为

$$\mathcal{W}_{r_0,\omega_0}(E) := \{y \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} : F^0(y - r_0\omega_0 E) = r_0\}, \tag{2.3}$$

它是由超平面 $\{x_{n+1} = 0\}$ 截取 Wulff 形所得的一部分。此处， E 满足 $\langle E, E_{n+1}\rangle = 1$，这保证了 $\mathcal{W}_{r_0,\omega_0}(E)$ 满足毛细条件（1.1）。若无歧义，本文将 $\mathcal{W}_{r_0,\omega_0} := \mathcal{W}_{r_0,\omega_0}(E^F_{n+1})$ 简记为。

2.2. 各向异性曲率。设 $(\Sigma,\ g,\ \nabla) \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$是一个 $\overline{C^2}$ 超曲面，满足$\partial\Sigma \subset \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$。$\Sigma$ 的各向异性高斯映射定义为

$$\begin{aligned} \nu_F : \quad & \Sigma \to \mathcal{W} \\ & X \mapsto \Psi(\nu(X)) = F(\nu(X))\nu(X) + \nabla^{\mathbb{S}}F(\nu(X)). \end{aligned}$$

Σ 在$X \in \Sigma$ 处相对于 $\mathcal{W}$的各向异性主曲率 $\kappa^F = (\kappa_1^F, \cdots, \kappa_n^F)$定义为下式的特征值:

$$S_F = \mathrm{d}\nu_F = \mathrm{d}(\Psi \circ \nu) = A_F \circ \mathrm{d}\nu : T_X\Sigma \to T_{\nu_F(X)}\mathcal{W} = T_X\Sigma.$$

$\tau =$关于 $\mathcal{W}$在 $X \in \Sigma$处的各向异性主曲率半径 $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_n)$，定义为 $\tau_i = (\kappa_i^F)^{-1}$，其中 $\kappa_i^F \neq 0, i = 1, \cdots, n$。

我们定义各向异性主曲率 κ^F 的归一化 k 阶初等对称函数 $H_k^F = \sigma_k(\kappa^F) : / \binom{n}{k}$

$$H_k^F := \binom{n}{k}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \kappa_{i_1}^F \cdots \kappa_{i_k}^F, \quad k = 1, \cdots, n, \tag{2.4}$$

其中 $\binom{n}{k} = \underline{{}_k{}^n! \, !(n-k)!}$。为方便起见，令 $H_0^F = 1, H_{n+1}^F = 0$ 和 $H_F = nH_1^F$。

2.3. **新度量与各向异性公式**。 在 Σ 和$\mathbb{R}^{n+1}$上有新的度量，由 Andrews 在 [5] 中引入，并由 Xia 在 [52]中重新表述。这个新的黎曼度量 G 关于 F^0 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义为

$$G(y)(V, W) := \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2(\frac{1}{2}(F^0)^2)(y)}{\partial y^i \partial y^j} V^\alpha W^\beta, \quad \text{for } y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, V, W \in T_y\mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.5}$$

F^0 的三阶导数给出一个 (0, 3)-张量

$$Q(y)(U, V, W) := \sum_{i,j,k=1}^{n+1} Q_{ijk}(y) U^i V^j W^k := \sum_{i,j,k=1}^{n+1} \frac{\partial^3(\frac{1}{2}(F^0)^2)(y)}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} U^i V^j W^k, \tag{2.6}$$

适用于 $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, U, V, W \in T_y\mathbb{R}^{n+1}$.

将度量 G 限制到 $\mathcal{W}$上时， F^0 的 1 次齐次性意味着

$$G(z)(z, z) = 1, \quad G(z)(z, V) = 0, \quad \text{for } z \in \mathcal{W}, \ V \in T_z\mathcal{W}.$$
$$Q(z)(z, V, W) = 0, \quad \text{for } z \in \mathcal{W}, \ V, W \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

对于 $\mathbb{R}_+^{n+1}$中的光滑超曲面 Σ，由于对 $X \in \Sigma$有 $\nu_F(X) \in \mathcal{W}$，因此我们有

$$G(\nu_F)(\nu_F, \nu_F) = 1, \quad G(\nu_F)(\nu_F, V) = 0, \quad \text{for } V \in T_X\Sigma,$$
$$Q(\nu_F)(\nu_F, V, W) = 0, \quad \text{for } V, W \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.7}$$

这意味着，按照度量 $G(\nu_F)$， $\nu_F(X)$ 与 $T_X\Sigma$ 垂直。于是，可以将 Σ 上的黎曼度量 $\hat{g}$ 定义为

$$\hat{g}(X) := G(\nu_F(X))|_{T_X\Sigma}, \quad X \in \Sigma.$$

我们分别用 $\hat{D}$ 和 $\hat{\nabla}$ 表示 G在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的 Levi-Civita 联络以及 $\hat{g}$ 在 $\hat{\Sigma}$ 上的 Levi-Civita 联络；用 $\hat{g}_{ij}$ 和 h_{ij} 表示 $(\Sigma, \hat{g}) \subset (\mathbb{R}^{n+1}, G)$的第一基本形式和第二基本形式，即

$$\hat{g}_{ij} = G(\nu_F(X))(\partial_i X, \partial_j X), \quad \hat{h}_{ij} = G(\nu_F(X))(\hat{D}_{\partial_i}\nu_F, \partial_j X).$$

将 $\{\hat{g}^{ij}\}$记为 $\{\hat{g}_{ij}\}$的逆矩阵，我们可以将 κ^F 重新表述为 $\{\hat{h}_j^i\} = \{\hat{g}^{ik}\hat{h}_{kj}\}$的特征值。

各向异性 Gauss-Weingarten 型公式和各向异性 Gauss-Codazzi 型方程如下。

引理 2.1 ([52,引理 2.5])**.**

$$\partial_i\partial_j X = -\hat{h}_{ij}\nu_F + \hat{\nabla}_{\partial_i}\partial_j + \hat{g}^{kl}A_{ijl}\partial_k X; \quad \textit{(Gauss formula)} \tag{2.8}$$

$$\partial_i \nu_F = \hat{g}^{jk}\hat{h}_{ij}\partial_k X; \quad \textit{(Weingarten formula)} \tag{2.9}$$

$\hat{R}_{ijk\ell} = h_{ik}h_{j\ell} - h_{i\ell}h_{jk} + \nabla_{\partial_\ell}A_{jki} - \nabla_{\partial_k}A_{j\ell i} + A^m_{jk}A_{m\ell i} - A^m_{j\ell}A_{mki}$; （高斯方程）

$$\hat{\nabla}_k\hat{h}_{ij} + \hat{h}^l_j A_{lki} = \hat{\nabla}_j\hat{h}_{ik} + \hat{h}^l_k A_{lji}. \quad \textit{(Codazzi equation)} \tag{2.10}$$

这里， R 是 $\hat{g}$ 的黎曼曲率张量，而 A 是一个3-张量

$$A_{ijk} = -\frac{1}{2}\left(\hat{h}^l_i Q_{jkl} + \hat{h}^l_j Q_{ilk} - \hat{h}^l_k Q_{ijl}\right), \tag{2.11}$$

其中 $Q_{ijk} = Q(\nu_F)(\partial_i X, \partial_j X, \partial_k X)$。注意，定义在 $(\Sigma, \hat{g}) \to (\mathbb{R}^{n+1}, G)$ 上的3-张量 A 取决于 $\hat{h}^j_i$。显然， Q 关于全部三个指标完全对称，而 A 仅关于前两个指标对称。

将 X 和 ν_F 视为固定笛卡尔坐标系中的 $\mathbb{R}^{n+1}$-值函数会很方便；相应地，导数 $\partial_i\partial_j X$ 和 $\partial_i\nu_F$ 取向量函数的经典偏导数意义。我们还记 $X_i = \partial_i X$ 和 $X^i = \hat{g}^{ij}X_j$。对于 $X \in \Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$，选取局部坐标

$$\{y^i\}_{i=1}^{n+1} \ \ in \ \ \mathbb{R}^{n+1},$$

使得 $\partial/\partial y^i$、$i = 1$、$\cdots$、n 与 Σ 相切，且 $\partial/\partial y^{n+1} = \nu_F$ 是 Σ 的单位各向异性外法向量。通过恒等对应，对于 $\alpha = 1$、$\cdots$、n，有 $\partial_\alpha = \partial/\partial y^\alpha = \partial_\alpha X$。给定 Ω 中的标准体积（勒贝格测度）在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的定义， Σ 上的各向异性测度可解释为

$$d\mu_F = \Omega(\nu_F, \partial_1, \cdots, \partial_n)dy^1\cdots dy^n = F(\nu)\Omega(\nu, \partial_1, \cdots, \partial_n)dy^1\cdots dy^n, \tag{2.12}$$

另见 [52]。

直接可见，对于 $\Sigma = \mathcal{W}$，各向异性法向量 ν_F 就是位置向量，且各向异性主曲率均等于 1。于是对于情形 $\Sigma = \mathcal{C}_{\omega_0} \subset \mathcal{T}(\mathcal{W})$，我们有 $\nu_F(\Sigma) = \mathcal{T}^{-1}\nu_F = X(\Sigma) - \omega_0 E^F_{n+1}$。注意到 $\mathring{g} := G(\mathcal{T}^{-1}\xi)|_{T_\xi\mathcal{C}_{\omega_0}}$ 对于 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}$。由 [54, 命题 2.2], 可容易得到以下引理。

引理 2.2. 设 $X \in \mathcal{C}_{\omega_0} \subset \mathcal{T}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} + \omega_0 E^F_{n+1}$。我们还有

$$A_{ijk} = -\frac{1}{2}Q_{ijk} = -\frac{1}{2}Q(\mathcal{T}^{-1}X)\left(\partial_i X, \partial_j X, \partial_k X\right),$$

and

$$\mathring{\nabla}_i Q_{jkl} = \mathring{\nabla}_j Q_{ikl}. \tag{2.13}$$

高斯-魏因加滕公式和高斯方程如下：

$$\partial_i\partial_j X = -\mathring{g}_{ij}\mathcal{T}^{-1}X + \mathring{\nabla}_{\partial_i}\partial_j - \frac{1}{2}\mathring{g}^{kl}Q_{ijl}\partial_k X; \ \textit{(Gauss formula)}$$

$$\partial_i\nu_F = \partial_i X; \ \textit{(Weingarten formula)}$$

$$\mathring{R}_{ijkl} = \mathring{g}_{ik}\mathring{g}_{jl} - \mathring{g}_{il}\mathring{g}_{jk} + \frac{1}{4}\mathring{g}^{pm}Q_{jkp}Q_{mli} - \frac{1}{4}\mathring{g}^{pm}Q_{jlp}Q_{mki}. \ \textit{(Gauss equation)}$$

这里， R 表示由 $\mathring{g}$ 诱导的曲率张量。

2.4. 各向异性毛细支撑函数。 Σ的通常支撑函数定义为

$$u(X) = \langle X, \nu(X)\rangle.$$

由 [55], , 我们可以定义 $X \in \Sigma$ 关于F （或 $\mathcal{W}$）的各向异性支撑函数如下

$$\hat{s}(X) := G(\nu_F)(\nu_F, X).$$

容易看出

$$\hat{s}(X) = \frac{u(X)}{F(\nu(X))}. \tag{2.14}$$

事实上,

$$G(\nu_F)(\nu_F, Y) = \langle DF^0(DF(\nu)), Y\rangle = \langle \frac{\nu}{F(\nu)}, Y\rangle = \frac{\langle Y, \nu\rangle}{F(\nu)}, \tag{2.15}$$

对于任意 $Y \in \mathbb{R}^{n+1}$, 其中我们用到了 $DF^0(DF(x)) = x = F^*(x)$ （参见例如 [53]）。与其使用通常的各向异性高斯映射 ν_F, 使用下面的映射更为方便

$$\widetilde{\nu_F} := \mathcal{T} \circ \nu_F : \Sigma \to \mathcal{C}_{\omega_0}, \tag{2.16}$$

我们将其称为各向异性毛细高斯映射 Σ。对于各向异性 ω_0-毛细超曲面 Σ, 我们将各向异性毛细支撑函数 $\bar{s}$ 定义为

$$\bar{s}(X) = \frac{G(\nu_F(X))(X, \nu_F(X))}{G(\nu_F(X))(\widetilde{\nu}_F(X), \nu_F(X))}, \quad X \in \Sigma, \tag{2.17}$$

其中该量 $\bar{s}$ 由于 [28, 命题 32], 其定义良好。类似于（2.14）, 支撑函数（2.17）等价地定义为

$$\bar{s}(X) = \frac{\hat{s}(X)}{1 + \omega_0 G(\nu_F(X))(\nu_F(X), E^F_{n+1})} = \frac{\langle X, \nu(X)\rangle}{F(\nu(X)) + \omega_0 \langle \nu(X), E^F_{n+1}\rangle}.$$

2.5.各向异性毛细超曲面的一般拟混合体积。对于由 F 确定的给定 Wulff 形状 $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, 以及常数$\omega_0 \in (-F(E_{n+1}), F(-E_{n+1}))$, 记 $\mathcal{W} = \partial \mathcal{C}_{\omega_0}$, 其为 $\mathbb{R}^n$ 中具有支撑函数 F 的一个 $(n-1)$ 维 Wulff 形状。

最近, Ding、Gao 和 Li 引入了以下几何函数 [15], , 它们可被视为半空间 $\mathbb{R}^{n+1}_+$中具有接触常数 ω_0的各向异性毛细超曲面的适当均质积分:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{0,\omega_0}(\Sigma) &:= |\widehat{\Sigma}|,\\
\mathcal{V}_{1,\omega_0}(\Sigma) &:= \frac{1}{n+1}\left(|\Sigma|_F + \omega_0 |\widehat{\partial\Sigma}|\right),\\
\mathcal{V}_{k+1,\omega_0}(\Sigma) &:= \frac{1}{n+1}\left(\int_\Sigma H^F_k F(\nu) d\mu_g + \frac{\omega_0}{n}\int_{\partial\Sigma} H^{\bar{F}}_{k-1}\bar{F}(\bar{\nu}) ds\right), \ 1 \leqslant k \leqslant n.
\end{aligned}$$

这里, $\bar{\nu}(X)$ 也是 $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ 的单位余法向量, 而 H^F_k （其中 $0 \leqslant k \leqslant n-1$ 和 $H^{\bar{F}}_0 = 1$）表示相对于 Wulff 形状 $\mathcal{W}$ 的 k 阶归一化各向异性平均曲率。特别地, 有

$$\mathcal{V}_{k+1,\omega_0}(\Sigma) = \frac{1}{n+1}\int_\Sigma H^F_k \left(1 + \omega_0 G(\nu_F)(\nu_F, E^F_{n+1})\right) \mathrm{d}\mu_F, \quad k = 0, \cdots, n, \tag{2.18}$$

且 $\mathcal{V}_{k,\omega_0}(\mathcal{C}_{\omega_0}) = \mathrm{Vol}(\mathcal{C}_{\omega_0}) := |\mathcal{C}_{\omega_0}|$ 对于 $k = 0, \cdots, n+1$, 参见引理 7.6]。

上述定义的均质积分是良定义的, 因为它们满足以下变分公式:

命题 2.3 ([15, 定理 6.2])。 设 $\Sigma_t \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$是一族光滑的各向异性 ω_0-毛细超曲面，由 $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+$支撑，并满足约束条件 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1})\ F(-E_{n+1}))$，由嵌入 $X(\cdot,\ t)$: $\Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}_+$给出，且满足

$$\partial_t X = f\nu_F + T, \tag{2.19}$$

对于光滑函数 f 和向量场 $T \in T\Sigma_t$。那么对于 $-1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}_{k+1,\omega_0}(\Sigma_t) = \frac{n-k}{n+1}\int_{\Sigma_t} fH^F_{k+1}d\mu_F. \tag{2.20}$$

对于各向异性毛细凸体的组合 $K := \sum_{i=1}^m \lambda_i K_i$其中 $K_1,\ \cdots,\ K_m \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $m \in \mathbb{N}, \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m \geqslant 0$，混合体积 $V(K_{i_0},\ \cdots,\ K_{i_n})$ 定义为

$$|K| = \sum_{i_0,\cdots,i_n=1}^{m} \lambda_{i_0}\cdots\lambda_{i_n} V\left(K_{i_0},\cdots,K_{i_n}\right).$$

凸几何中均质积分 $\mathcal{V}_{k,\ \omega_0}$ 与混合体积之间的基本关系由以下引理给出:

引理 2.4 （[18, 引理 3。11]）。 设 Σ 是$\mathbb{R}^{n+1}_+$中的一个各向异性毛细超曲面。对于 $-1 \leqslant k \leqslant n$，有

$$\mathcal{V}_{k+1,\omega_0}(\Sigma) = V\Big(\underbrace{\widehat{\Sigma},\cdots,\widehat{\Sigma}}_{(n-k)\ copies},\underbrace{\widehat{\mathcal{C}_{\omega_0}},\cdots,\widehat{\mathcal{C}_{\omega_0}}}_{(k+1)\ copies}\Big).$$

凸几何中关于混合体积的一个关键命题如下:

命题 2.5 （[48, 定理 7.2。3]）。 设 $K, L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为凸体，并设$\mathcal{A} \subset \mathbb{S}^n$ 为一个闭集，使得

$$K = \bigcap_{u\in\mathcal{A}} H^-(K,u).$$

若 L 由下式定义

$$\bar{L} := \bigcap_{u\in\mathcal{A}} H^-(L,u),$$

then

$$V_1(K,L)^{\frac{n+1}{n}} - \mathrm{Vol}(K)\mathrm{Vol}(\bar{L})^{\frac{1}{n}} \geqslant \left[V_1(K,L)^{\frac{1}{n}} - r(K,L)\mathrm{Vol}(\bar{L})^{\frac{1}{n}}\right]^{n+1}, \tag{2.21}$$

其中 $r(K,L)$ 表示 K 相对于 L, $V_1(K,L) = V\Big(\underbrace{K,\cdots,K}_{n\ copies},L\Big)$, $H^-(K,\ u) := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \langle x,\ u\rangle \leqslant h(K,\ u)\right\}$，以及 $h(K,\ u) := \sup\left\{\langle x,u\rangle :\ x \in K\right\}$对于 $u \in \mathbb{R}^{n+1}$。

对于严格凸的各向异性 ω_0-毛细超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}_+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$，取 $\mathcal{A} = \overline{\{\nu(X) :\ X \in \Sigma\}\bigcup\{-E_{n+1}\}}$，那么根据引理 3.2，可验证

$$\widehat{\Sigma} = \bigcap_{u\in\mathcal{A}} H^-(\widehat{\Sigma},u), \quad \widehat{\mathcal{C}_{\omega_0}} = \bigcap_{u\in\mathcal{A}} H^-(\widehat{\mathcal{C}_{\omega_0}},u).$$

综合上述事实、引理 2.4，以及由 $r(\Sigma)$ 的定义（见 (4.4)），不等式 (2.21) 具有如下形式:

$$\mathcal{V}_{1,\omega_0}(\Sigma)^{\frac{n+1}{n}} - \mathrm{Vol}(\Sigma)\mathrm{Vol}(\mathcal{C}_{\omega_0})^{\frac{1}{n}} \geqslant \left[\mathcal{V}_{1,\omega_0}(\Sigma)^{\frac{1}{n}} - r(\Sigma)\mathrm{Vol}(\mathcal{C}_{\omega_0})^{\frac{1}{n}}\right]^{n+1}. \tag{2.22}$$

结合与 [5, 命题 5.1] 类似的证明以及不等式 (2.22)，我们得到如下命题。

命题 2.6。对于严格凸的各向异性 ω_0-毛细超曲面 Σ，有

$$\frac{\mathrm{Vol}(\Sigma)}{\mathcal{V}_{1,\omega_0}(\Sigma)} \leqslant r(\Sigma). \tag{2.23}$$

这里 r（Σ）定义为 （4.4）。

3. Anisotropic ω_0-capillary convex bodies in $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$

在本节中，我们定义各向异性毛细 p-和以及第 k 个各向异性毛细 p-表面积测度，并提出两个指定测度问题，其中包括各向异性毛细 L_p-Minkowski 问题。

3.1. 各向异性毛细凸体与凸函数。

定义 3.1。给定一个 *Wulff* 形状 $\mathcal{W}$ （或一个 *Minkowski* 范数 F）。对于 $\omega_0 \in$ ^^ （$-F$（E_{n+1}） F（$-E_{n+1}$），如果 Σ 是一个位于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中且具有非空内部的凸体（即紧凸集），并且 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 中的各向异性 ω_0-毛细超曲面，则称 Σ 为各向异性 ω_0-毛细凸体。$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 中各向异性 ω_0-毛细凸体的类记为 ~~$\mathcal{K}_{\omega_0}$~~。对于 ^ $\Sigma \in \mathcal{K}_{\omega_0}$，如果 $\widehat{\partial\Sigma} \subset \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ 包含原点 O，则记为 ^$\Sigma \in \mathcal{K}^O_{\omega_0}$。

^^ ^最简单的毛细凸体由 $\mathcal{C}_{\omega_0} \in \mathcal{K}_{\omega_0}$ 给出。对于任意 $\Sigma \in \mathcal{K}_{\omega_0}$，我们通过各向异性毛细高斯映射 $\widetilde{\nu_F}$ 给出 Σ 的参数化。

引理 3.2 ([18], 引理3.1)。给定一个 *Wulff* 形状 $\mathcal{W}$ （或一个 *Minkowski* 范数F），以及一个常数 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1})\ F(-E_{n+1}))$。记 $\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{S}^n : \langle DF(x)\ E_{n+1}\rangle \geqslant -\omega_0\}$。对于任意 $\Sigma \in \mathcal{K}_{\omega_0}$，以下陈述成立。

(i) 凸体 Σ 的高斯映射 ν 的球面像为 $\mathcal{A} \subset \mathbb{S}^n$，且 $\nu\colon \Sigma \to \mathcal{A}$ 是一个微分同胚。(ii) 凸体 Σ 的各向异性毛细高斯映射 $\widetilde{\nu_F} = \nu_F + \omega_0 E^F_{n+1}$ 的像包含于 $\mathcal{C}_{\omega_0}$，且 $\widetilde{\nu_F}\colon \Sigma \to \mathcal{C}_{\omega_0}$ 是一个微分同胚。

引理3.2说明我们可以通过逆各向异性帽状高斯映射对严格凸的各向异性毛细超曲面进行参数化 Σ，即 $X\colon$ $\mathcal{C}_{\omega_0}$ $\to\Sigma$，其定义为

$$X(\xi) = \widetilde{\nu_F}^{-1}(\xi) = \nu_F^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}(\xi) = \nu_F^{-1}(\xi - \omega_0 E^F_{n+1}).$$

现在，我们将 (2.17) 和 (2.14) 视为定义在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上的函数，由我们的参数化可得

$$\hat{s}(\xi) := G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(X(\xi), \mathcal{T}^{-1}\xi\Big) = G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\widetilde{\nu_F}^{-1}(\xi), \xi - \omega_0 E^F_{n+1}\Big), \tag{3.1}$$

and

$$\bar{s}(\xi) := \frac{\hat{s}(\xi)}{1 + \omega_0 G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(E^F_{n+1}, \mathcal{T}^{-1}\xi\Big)}, \quad \text{for } \xi \in \mathcal{C}_{\omega_0},$$

°它在 $\nabla_{\mu_F}\bar{s} = 0$ 上具有性质 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0}$，见 [15, 引理 34]。

^为区别于凸体的各向异性支撑函数 Σ，我们^将$\hat{s}$ 在（3.1）中称为的各向异性毛细支撑函数 Σ （或 Σ的）。显然，

$\mathcal{C}_{\omega_0}$ 的各向异性毛细高斯映射是从 $\mathcal{C}_{\omega_0} \to \mathcal{C}_{\omega_0}$到 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 的恒等映射，并且

$$\begin{aligned}\hat{s}|_{\mathcal{C}_{\omega_0}}(\xi) =& G(\xi-\omega_0 E_{n+1}^F)\Big(\xi, \xi-\omega_0 E_{n+1}^F\Big)\\ =& G(\xi-\omega_0 E_{n+1}^F)\Big(\xi-\omega_0 E_{n+1}^F+\omega_0 E_{n+1}^F, \xi-\omega_0 E_{n+1}^F\Big)\\ =& 1+\omega_0 G(\xi-\omega_0 E_{n+1}^F)\Big(E_{n+1}^F, \xi-\omega_0 E_{n+1}^F\Big).\end{aligned}$$

为简便起见，我们记

$$\ell(\xi) := 1+\omega_0 G(\xi-\omega_0 E_{n+1}^F)\Big(E_{n+1}^F, \xi-\omega_0 E_{n+1}^F\Big). \tag{3.2}$$

因此，在后一种情形下，ℓ 是 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ （或 $\mathcal{C}_{\omega_0}$）的各向异性毛细支撑函数。

通过用 $\hat{s}$ 表示 X 的几何量，我们得到以下引理。

引理 3.3 ([18, 引理 3.2])。对于参数化 $X: \Big(\mathcal{C}_{\omega_0}, \mathring{g}, \mathring{\nabla}\Big) \to \Sigma$ 的各向异性 ω_0-毛细凸体 Σ，有

(1) $X(\xi) = \mathring{\nabla}\hat{s}(\xi) + \hat{s}(\xi)\mathcal{T}^{-1}\xi$。*(2)* $\nabla_{\mu_F}\hat{s} = F\nu^{\omega_0}(\langle\mu, E_{n+1}\rangle\hat{s}$ 沿着 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0}$。
(3) Σ 在 $X(\xi)$ 处的各向异性主半径由 $\tau_{ij}(\xi)$ 相对于度量 $\mathring{g}$ 的特征值给出：$= \mathring{\nabla}_{e_i}\mathring{\nabla}_{e_j}\hat{s}(\xi) + \mathring{g}_{ij}\hat{s}(\xi) - \frac{1}{2}Q_{ijk}\mathring{\nabla}_{e_k}\hat{s}(\xi)$。特别地，$(\tau_{ij}) > 0$ 在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上。

注 3.1. 沿着 $(\mathcal{C}_{\omega_0}, \mathring{g})$ 的边界，我们可以选取一个标准正交标架 $\{e_i\}_{i=1}^n$，使得

$$e_n = \frac{\mu_F}{|\mu_F|_{\mathring{g}}} = \frac{F(\nu)^{\frac{1}{2}}A_F(\nu)\mu}{\langle A_F(\nu)\mu, \mu\rangle^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.3}$$

详情请参阅 [18,引理 3.2] 和 [15, 注 3.1]。

定义 3.4. 对于 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1})\ F(-E_{n+1}))$，若函数 $f \in C^2(\mathcal{C}_{\omega_0})$ 满足 *Robin* 型边界条件，则称其为各向异性毛细函数

$$\mathring{\nabla}_{\mu_F} f = \frac{\omega_0}{F(\nu)\langle\mu, E_{n+1}\rangle} f \quad on \quad \partial\mathcal{C}_{\omega_0}. \tag{3.4}$$

此外，若张量

$$\tau_{ij}[f](\xi) := \mathring{\nabla}_{e_i}\mathring{\nabla}_{e_j} f(\xi) + \delta_{ij} f(\xi) - \frac{1}{2}Q_{ijk}\mathring{\nabla}_{e_k} f(\xi),$$

在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上正定，则称 f 为各向异性毛细凸函数，定义在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上。

下一个命题建立了 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上的各向异性毛细凸函数与 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 中的各向异性 ω_0-毛细凸体之间的一一对应关系。这推广了经典的对应关系：$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的凸体与 $\mathbb{S}^n$ 上的凸函数（或 Wulff 形状 $\mathcal{W}$）之间的对应关系，详见 [52]。

命题 3.5 ([18, 命题 3.4])**.** 设 $\hat{s} \in C^2(\mathcal{C}_{\omega_0})$。那么，$\hat{s}$ 是各向异性毛细凸函数，当且仅当 $\hat{s}$ 是某个各向异性毛细凸体 $\Sigma \in \mathcal{K}_{\omega_0}$ 的各向异性毛细支撑函数。

3.2. **毛细凸体的各向异性毛细 p和。** 受[48, 第 9 节1], [31], 和 [38], 启发，本小节定义了适用于凸函数和凸体的各向异性毛细 p和，并阐明定义3.9与定义3.7 和定义3.8之间的关系（命题 3.9）。

引理 3.6. 设 $a, b \geqslant 0$ （不同时为零）和 $p \geqslant 1$ 为实数。给定两个各向异性毛细凸函数 $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathcal{C}_{\omega_0})$，考虑由 f_1 和 f_2 定义的 p-线性组合

$$f = (a \cdot f_1^p + b \cdot f_2^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.5}$$

那么，只要$p > 1$ 和 $f_1, f_2 > 0$，或 $p = 1$， $f \in C^\infty(\mathcal{C}_{\omega_0})$ 也是各向异性毛细凸函数。

证明. 由于 f_1, f_2 是两个各向异性毛细凸函数，我们有

$$\mathring{\nabla}_{\mu_F} f_k = \frac{\omega_0}{F(\nu)\langle \mu, E_{n+1}\rangle} f_k \quad \text{on} \quad \partial\mathcal{C}_{\omega_0}, \quad k = 1, 2, \tag{3.6}$$

and

$$\Big(\tau_{ij}[f_k]\Big) > 0, \quad \text{in} \quad \mathcal{C}_{\omega_0}, \quad k = 1, 2. \tag{3.7}$$

由 (3.5)，我们有

$$\begin{aligned}\mathring{\nabla} f =& \frac{1}{p}\Big(af_1^p + bf_2^p\Big)^{\frac{1}{p}-1} \cdot \Big(ap \cdot f_1^{p-1}\mathring{\nabla} f_1 + bp \cdot f_2^{p-1}\mathring{\nabla} f_2\Big)\\ =& f^{1-p}\Big(af_1^{p-1}\mathring{\nabla} f_1 + bf_2^{p-1}\mathring{\nabla} f_2\Big),\end{aligned} \tag{3.8}$$

and

$$\begin{aligned}\mathring{\nabla}_{ij} f =& (1-p)f^{-p} \cdot f^{1-p}\Big(af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_i f_1 + bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_i f_2\Big) \cdot \Big(af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_j f_1 + bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_j f_2\Big)\\ &+ f^{1-p}\Big(a(p-1)\mathring{\nabla}_i f_1 \mathring{\nabla}_j f_1 \cdot f_1^{p-2} + b(p-1)\mathring{\nabla}_i f_2 \mathring{\nabla}_j f_2 \cdot f_2^{p-2}\Big)\\ &+ f^{1-p}\Big(af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_{ij} f_1 + bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_{ij} f_2\Big)\\ :=& (I)_{ij} + (II)_{ij},\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中记

$$\begin{aligned}(I)_{ij} =& (1-p)f^{-p} \cdot f^{1-p}\Big(af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_i f_1 + bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_i f_2\Big) \cdot \Big(af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_j f_1 + bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_j f_2\Big)\\ &+ f^{1-p}\Big(a(p-1)\mathring{\nabla}_i f_1 \mathring{\nabla}_j f_1 \cdot f_1^{p-2} + b(p-1)\mathring{\nabla}_i f_2 \mathring{\nabla}_j f_2 \cdot f_2^{p-2}\Big),\end{aligned}$$

and

$$(II)_{ij} = f^{1-p}\Big(af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_{ij} f_1 + bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_{ij} f_2\Big).$$

我们可以验证 $(I)_{ij} \geqslant 0$，即 (I) 是一个半正定矩阵，因为对于任意非零向量 $Y = (Y^1, \cdots, Y^n) \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n (I)_{ij} Y^i Y^j =& (p-1)f^{1-2p}\sum_{i,j=1}^n \Big(af^p f_1^{p-2}\mathring{\nabla}_i f_1 \mathring{\nabla}_j f_1 + bf^p f_2^{p-2}\mathring{\nabla}_i f_2 \mathring{\nabla}_j f_2\\ &- (af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_i f_1 + bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_i f_2) \cdot (af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_j f_1 + bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_j f_2)\Big) Y^i Y^j\\ =& (p-1)f^{1-2p}\Big(a(f^p f_1^{p-2} - af_1^{2p-2}) \cdot (\sum_{i=1}^n \mathring{\nabla}_i f_1 Y^i)^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+b(f^p f_2^{p-2}-bf_2^{2p-2})\cdot(\sum_{i=1}^n \mathring{\nabla}_i f_2 Y^i)^2\\
&-2abf_1^{p-1}f_2^{p-1}(\sum_{i=1}^n \mathring{\nabla}_i f_1 Y^i)(\sum_{i=1}^n \mathring{\nabla}_i f_2 Y^i)\Big)\\
&\overset{(3.5)}{=} ab(p-1)f^{1-2p}f_1^{p-2}f_2^{p-2}\Big(f_2\sum_{i=1}^n \mathring{\nabla}_i f_1 Y^i - f_1\sum_{i=1}^n \mathring{\nabla}_i f_2 Y^i\Big)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

另一方面，由 (3.8) 和 (3.5)，我们有

$$
\begin{aligned}
&(II)_{ij}-\frac{1}{2}Q_{ijk}\mathring{\nabla}_k f+f\delta_{ij}\\
=&f^{1-p}\Big(af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_{ij}f_1-\frac{a}{2}f_1^{p-1}Q_{ijk}\mathring{\nabla}_k f_1+af_1^p\delta_{ij}+bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_{ij}f_2-\frac{b}{2}f_2^{p-1}Q_{ijk}\mathring{\nabla}_k f_2+bf_2^p\delta_{ij}\Big)\\
=&f^{1-p}\Big(af_1^{p-1}\tau_{ij}[f_1]+bf_2^{p-1}\tau_{ij}[f_2]\Big)>0,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

其中我们使用（3.7），且 a，$b\geqslant 0$ 不同时为零。由（3.9）$\sim$（3.11），可得

$$
\Big(\tau_{ij}[f]\Big)=\Big(\mathring{\nabla}_{ij}f-\frac{1}{2}Q_{ijk}\mathring{\nabla}_k f+f\delta_{ij}\Big)>0.
$$

此外，由（3.6）、（3.8）和（3.5），可得

$$
\mathring{\nabla}_{\mu_F}f=f^{1-p}\Big(af_1^{p-1}\mathring{\nabla}_{\mu_F}f_1+bf_2^{p-1}\mathring{\nabla}_{\mu_F}f_2\Big)=\frac{\omega_0}{F(\nu)\langle\mu,E_{n+1}\rangle}f\quad\text{on}\quad\partial\mathcal{C}_{\omega_0}.
$$

至此，证明完成。 □

我们将 $\hat{s}_K(\xi)$（$\xi\in\mathcal{C}_{\omega_0}$）记为$K\in\mathcal{K}_{\omega_0}$的各向异性毛细支撑函数。由引理 3.3，它是一个各向异性毛细凸函数。此外，引理 3.6 说明，这类支撑函数的 p-线性组合仍是各向异性毛细凸函数（定义3.4）。因此，这样的函数确定一个各向异性毛细凸体。由此，下面的定义是适定的。

定义 3.7。*(1)* 对于 $p=1$, $K,L\in\mathcal{K}_{\omega_0}$ 和 $a,b\geqslant 0$ （不同时为零），各向异性闵可夫斯基线性组合 $a\cdot K+b\cdot L\in\mathcal{K}_{\omega_0}$ 定义为

$$
\hat{s}_{a\cdot K+b\cdot L}(\xi)=a\cdot\hat{s}_K(\xi)+b\cdot\hat{s}_L(\xi).
\tag{3.12}
$$

(2) 对于 $p>1$、K、$L\in\mathcal{K}^O_{\omega_0}$，以及 a、$b\geqslant 0$（二者不同时为零），各向异性 L_p*Minkowski* 线性组合 $a\cdot K+_p b\cdot L\in\mathcal{K}^O_{\omega_0}$ 定义为

$$
\hat{s}_{a\cdot K+_p b\cdot L}(\xi)=(a\cdot\hat{s}^p_K(\xi)+b\cdot\hat{s}^p_L(\xi))^{\frac{1}{p}}.
\tag{3.13}
$$

按照 [31] 和 [36], 中的方法，我们定义以下适用于 $\mathbb{R}^{n+1}_+$非凸集的逐点加法。

定义 3.8。对于 $p\geqslant 1$、a、$b\geqslant 0$和 K、$L\subset\mathbb{R}^{n+1}_+$，和 $a\cdot K\widetilde{+}_p b\cdot L\subset\mathbb{R}^{n+1}_+$定义为

$$
a\cdot K\widetilde{+}_p b\cdot L=\Big\{a^{\frac{1}{p}}(1-t)^{\frac{1}{q}}X_1+b^{\frac{1}{p}}t^{\frac{1}{q}}X_2:X_1\in K,X_2\in L,t\in[0,1]\Big\},
$$

其中 q 是 p的 *Hölder* 共轭，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

我们可以验证，定义 3.8 与定义3.7相容：

命题 3.9. 设 a、$b \geqslant 0$ 和 K、$L \in \mathcal{K}_{\omega_0}$ 均为光滑的。若 $p=1$，则

$$a \cdot K \widetilde{+} b \cdot L = a \cdot K + b \cdot L.$$

若 $p>1$ 且 $K, L \in \mathcal{K}_{\omega_0}^{O}$，则

$$a \cdot K \widetilde{+}_p b \cdot L = a \cdot K +_p b \cdot L.$$

证明。由于证明与 [31]，非常相似，只需验证边界~条件对 $a \cdot K +_p b \cdot L$成立。

根据引理 3.2，ω_0-毛细超曲面 $\Sigma_i (i=1,2)$ 的各向异性毛细高斯映射 $\widetilde{\nu_{F i}}$ 是微分同胚，并且 $\widetilde{\nu_{F i}}(\partial\Sigma_i) = \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$ 对 $i=1,2$ 成立。这意味着，对于任意 $\xi \in \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$，存在 $X_1 \in \partial\Sigma_1$ 和 $X_2 \in \partial\Sigma_2$，使得$\widetilde{\nu_{F}}_1(X_1) = \xi$且 $\widetilde{\nu_{F}}_2(X_2) = \xi$，即 $\nu_{F1}(X_1) = \mathcal{T}^{-1}\xi$，$\nu_{F2}(X_2) = \mathcal{T}^{-1}\xi$。然后由 (3.1)

$$\hat{s}_K(\xi) := G(\hat{\xi})\Big(\hat{\xi}, X_1\Big) = \sup_{Z_1 \in \Sigma_1} G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\mathcal{T}^{-1}\xi, Z_1\Big) = \sup_{Z_1 \in K} G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\mathcal{T}^{-1}\xi, Z_1\Big),$$
$$\hat{s}_L(\xi) := G(\hat{\xi})\Big(\hat{\xi}, X_2\Big) = \sup_{Z_2 \in \Sigma_2} G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\mathcal{T}^{-1}\xi, Z_2\Big) = \sup_{Z_2 \in L} G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\mathcal{T}^{-1}\xi, Z_2\Big).$$

对于 $p \geqslant 1$，我们有

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{\Sigma_3}(\xi) :=& \sup_{Z_3 \in \Sigma_3} G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\mathcal{T}^{-1}\xi, Z_3\Big) = \sup_{Z_3 \in K \widetilde{+}_p L} G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\mathcal{T}^{-1}\xi, Z_3\Big) \\
=& \sup_{t\in[0,1], Z_1 \in K, Z_2 \in L} G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\mathcal{T}^{-1}\xi, (1-t)^{\frac{1}{q}} Z_1^p + t^{\frac{1}{q}} Z_2^p\Big) \\
=& \sup_{t\in[0,1]} (1-t)^{\frac{1}{q}} \hat{s}_K^p + t^{\frac{1}{q}} \hat{s}_L^p = (1-t_*)^{\frac{1}{q}} \hat{s}_K^p + t_*^{\frac{1}{q}} \hat{s}_L^p \\
=& G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\mathcal{T}^{-1}\xi, (1-t_*)^{\frac{1}{q}} {X_1}^p + t_*^{\frac{1}{q}} {X_2}^p\Big), \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

其中 $t_* \in [0,1]$。记 $X_3 := (1-t_*)^{\frac{1}{q}} {X_1}^p + t_*^{\frac{1}{q}} {X_2}^p \in \Big(K \widetilde{+}_p L\Big) \cap \partial\mathbb{R}_+^{n+1}$。由于 $K \widetilde{+}_p L$ 是凸的，我们有 $X_3 \in \partial\Big(K \widetilde{+}_p L\Big) \cap \partial\mathbb{R}_+^{n+1} = \partial\Sigma_3$，由 (3.14) 可得 $\widetilde{\nu_{F}}_3(X_3) = \xi$，其中 $\widetilde{\nu_{F}}_3$ 是 Σ_3 的各向异性毛细高斯映射。这意味着 Σ_3 也是一条 ω_0-毛细超曲面。□

按照经典方法，各向异性 ω_0-毛细凸体的 Alexandrov-Fenchel 不等式（在 [18] 中建立）给出相应的 Minkowski 不等式。利用 Hölder 不等式，我们进而得到相应的 ¨- L^pMinkowski 不等式 $p>1$，从而得到相应的 L^p-Brunn-Minkowski 不等式（参见 [48, 定理 9.1 的证明3]）：

命题 3.10。设 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1})\ F(-E_{n+1}))$，$p \geqslant 1$、$K$、$L \in \mathcal{K}_{\omega_0}^{O}$（或 K、$L \in \mathcal{K}_{\omega_0}$ 对于 $p=1$），则有

$$\frac{1}{n+1}\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \hat{s}_L^p \hat{s}_K^{1-p} \sigma_n(\tau_{ij}[\hat{s}_K])\ \mathrm{d}\mu_F(\mathcal{C}_{\omega_0}) \geqslant \mathrm{Vol}(K)^{\frac{n+1-p}{n+1}} \mathrm{Vol}(L)^{\frac{p}{n+1}}.$$

对于 $t \in (0,\ 1)$，以下结论成立：

$$\mathrm{Vol}\left((1-t)\cdot K +_p t\cdot L\right) \geqslant \Big((1-t)\mathrm{Vol}(K)^{p/(n+1)} + t\mathrm{Vol}(L)^{p/(n+1)}\Big)^{(n+1)/p}.$$

当且仅当 K 和 L 互为位似体时，等号成立。

3.3. **各向异性帽状 p-表面积测度与给定测度问题**。 我们引入各向异性帽状混合拟曲率积分，其定义为沿各向异性帽状 p-和的各向异性帽状拟曲率积分的变分，见定义3.7。

定义 3.11。 设 $0 \leqslant k \leqslant n$ 为整数， $p \geqslant 1$ 为实数。我们将两个光滑的各向异性 ω_0-毛细凸体 $K, L \in \mathcal{K}^O_{\omega_0}$ （或当 $p = 1$时的 $K, L \in \mathcal{K}_{\omega_0}$）的各向异性 ω_0-毛细 p-混合 k阶 *quermassintegral* 定义为

$$W_{p,k,\omega_0}(K, L) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{V}_{k,\omega_0}(1 \cdot K +_p t \cdot L) - \mathcal{V}_{k,\omega_0}(K)}{t}.$$

为计算 $W_{p,k,\omega_0}(K, L)$ 的积分表示，我们需要研究各向异性毛细支撑函数 $\hat{s}(\xi)$ 在 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}$ 沿一般流（2.19）演化时的标量演化方程，即流

$$\partial_t X(\xi, t) = f(\xi, t) \cdot \mathcal{T}^{-1}\xi + T(\xi, t), \tag{3.15}$$

使得 $G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(T(\xi, t)\ \mathcal{T}^{-1}\xi\Big) = 0$。现在我们假设，在一个较短的时间区间内，上述流的解由定义在 $\mathcal{C}_{\omega_0} \times [0, \varepsilon$ 上的向量值函数 $X(\xi, t)$ 给出。我们可以如下得到 $\hat{s}(\xi, t)$ 的标量演化方程

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{s}(\xi, t) =& \partial_t \left(G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(X, \mathcal{T}^{-1}\xi\Big)\right) \\
=& G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(\partial_t X, \mathcal{T}^{-1}\xi\Big) + G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(X, \partial_t(\xi - \omega_0 E^F_{n+1})\Big) \\
&+ Q(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big(X, \mathcal{T}^{-1}\xi, \partial_t(\mathcal{T}^{-1}\xi)\Big) \\
=& f(\xi, t).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

反之，对于满足 (3.16) 的一族各向异性毛细凸函数 $\hat{s}(\cdot, t)$ on $\mathcal{C}_{\omega_0}$ sat- isfying (3.16) for $t \in [0, \varepsilon)$，它们可以确定一族各向异性 ω_0-毛细凸超曲面 Σ_t。令 $X(\xi, t)$ 为由其逆各向异性毛细高斯映射给出的 Σ_t given by its inverse anisotropic capillary Gauss map for $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}, t \in [0, \varepsilon)$ 的参数化。利用 DeTurck技巧，¯存在微分同胚 $\varphi(\cdot, t) : \mathcal{C}_{\omega_0} \to \mathcal{C}_{\omega_0}$，使得 $X(\xi, t) := X(\varphi(\xi, t)\ t)$ 满足 (3.15)。

引理 3.12。 令 k、p、K 和 L 满足定义 *3.11* 中的假设。则各向异性毛细 p-混合 k 阶拟积分 $W_{p,\ k,\ \omega_0}(K, L)$ 的积分表示为

$$W_{p,k,\omega_0}(K, L) = \frac{n - k + 1}{p(n + 1)\binom{n}{k}} \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \hat{s}^p_L(\xi)\hat{s}^{1-p}_K(\xi)\sigma_{n-k}(\tau_{ij}[\hat{s}_K](\xi))\mathrm{d}\mu_F(\mathcal{C}_{\omega_0}).$$

‸证明。 设 $\Sigma_t = 1 \cdot K +_p t \cdot L \in \mathcal{K}_{\omega_0}$。 则 Σ_t 的各向异性毛细支撑函数为

$$\hat{s}(\xi, t) = \left(\hat{s}^p_K(\xi) + t\hat{s}^p_L(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

上述变分的初始速度为

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{s}(\xi, 0) = \frac{1}{p}\hat{s}^{1-p}_K \hat{s}^p_L. \tag{3.17}$$

根据定义 3.11 和命题 2.3，我们有

$$W_{p,k,\omega_0}(K, L) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathcal{V}_{k,\omega_0}(\Sigma_t)$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{n-k+1}{n+1}\int_{\Sigma_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\hat{s}(\widetilde{\nu_F}(\Sigma_t),t)\right)\cdot H_k^F(\Sigma_0)\mathrm{d}\mu_F\\
&=\frac{n-k+1}{(n+1)\binom{n}{k}}\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}}\frac{1}{p}\hat{s}_K^{1-p}\hat{s}_L^p\sigma_{n-k}(\tau_{ij}[\hat{s}_K])\mathrm{d}\mu_F(\mathcal{C}_{\omega_0}),
\end{aligned}
$$

其中我们使用（3.17），$\widehat{\Sigma}_0=K$，$\binom{n}{k}H_k^F(\Sigma_0)=\frac{\sigma_{n-k}(\tau_{ij}[\hat{s}_K])}{\sigma_n(\tau_{ij}[\hat{s}_K])}$，以及 $F(\nu(\Sigma_0))\mathrm{d}\mu(\Sigma_0)=\mathrm{d}\mu_F(\Sigma_0)=\det(\tau_{ij}[\hat{s}_K])\mathrm{d}\mu_F(\mathcal{C}_{\omega_0})$。□

定义 3.13。设 $0\leqslant k\leqslant n$ 为一个整数，p 为一个实数。光滑各向异性 ω_0-毛细凸体 K 的第 k 阶各向异性毛细 p-曲面面积测度定义为

$$
\mathrm{d}S_{p,k}(K,\xi)=\hat{s}_K^{1-p}\sigma_{n-k}\left(\tau_{ij}\left[\hat{s}_K(\xi)\right]\right)\mathrm{d}\mu_F(\mathcal{C}_{\omega_0}).
$$

特别地，我们称 $dS(K,\xi):=dS_{1,0}(K,\xi)$ 为 K的各向异性毛细管曲面面积测度。

由引理 3.12 和定义 3.13，可得

$$
W_{p,k,\omega_0}(K,L)=\frac{n-k+1}{p(n+1)\binom{n}{k}}\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}}\hat{s}_L^p(\xi)\mathrm{d}S_{p,k}(K,\xi).
$$

这促使我们利用定义 3.13提出以下两个指定测度问题，它们是定义在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上的非线性椭圆偏微分方程。

问题 3.1（各向异性毛细 p-闵可夫斯基问题）。设 $n\geqslant 1$ 为一个整数，p 为一个实数。给定定义在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$上的光滑正函数 $f(\xi)$，使得存在一个光滑各向异性毛细凸体 $K\in\mathcal{K}_{\omega_0}^O$ 满足条件 $f(\xi)$ 的必要且充分条件是什么？

$$
\mathrm{d}S_{p,0}(K,\xi)=f(\xi)\mathrm{d}\mu_F(\mathcal{C}_{\omega_0}).
$$

也就是说，寻找一个光滑的正的各向异性毛细凸函数 $\hat{s}(\xi)$ 使得

$$
\hat{s}^{1-p}(\xi)\sigma_n(\tau_{ij}[\hat{s}(\xi)])=f(\xi),\quad\forall\xi\in\mathcal{C}_{\omega_0}.
$$

命题 3.14. 若 (1.4) 对于给定函数 $f:\mathcal{C}_{\omega_0}\to\mathbb{R}$ 可解，则 f必须满足：

$$
\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}}G(\hat{\xi})(\hat{\xi},E_\alpha)f\ \mathrm{d}\mu_F=0,\quad\forall\alpha=1,\cdots,n.
$$

证明. 对于任意 $1\leqslant\alpha\leqslant n$，引理 3.2 和（2.12）推出

$$
\begin{aligned}
0&=\int_{\widehat{\Sigma}}\mathrm{div}(E_\alpha)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n+1}=\int_\Sigma\langle E_\alpha,\nu\rangle\ d\mu_g+\int_{\widehat{\partial\Sigma}}\langle E_\alpha,-E_{n+1}\rangle\ d\mu_{\widehat{\partial\Sigma}}\\
&=\int_\Sigma\Omega(E_\alpha,\partial_1,\cdots,\partial_n)dy^1\cdots dy^n\\
&=\int_{\widetilde{\nu}^{-1}(\mathcal{C}_{\omega_0})}\Omega(E_\alpha,\partial_1,\cdots,\partial_n)dy^1\cdots dy^n\\
&=\int_{\widetilde{\nu}^{-1}(\mathcal{C}_{\omega_0})}G(\hat{\xi})(E_\alpha,\hat{\xi})\Omega(\hat{\xi},\partial_1\cdots,\partial_n)dy^1\cdots dy^n\\
&=\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}}G(\hat{\xi})(E_\alpha,\hat{\xi})f\ d\mu_F,\quad\alpha=1,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

这里，$d\mu_g=\Omega(\nu,\ \partial_1,\ \cdots,\ \partial_n)dy^1\cdots dy^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$中欧几里得度量所诱导的体积。□

问题 3.2 (各向异性毛细 p-Christoffel-Minkowski问题)。 设 $n \geqslant 2$和 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 为整数， p 为实数。给定定义在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$上的光滑正函数 $f(\xi)$，使得存在光滑的各向异性毛细凸体 $K \in \mathcal{K}^O_{\omega_0}$ 满足 $f(\xi)$的必要充分条件是什么？

$$\mathrm{d}S_{p,k}(K,\xi) = f(\xi)\mathrm{d}\mu_F(\mathcal{C}_{\omega_0}).$$

也就是说，求一个光滑的正各向异性毛细凸函数$\hat{s}(\xi)$，使其满足

$$\hat{s}^{1-p}(\xi)\sigma_{n-k}(\tau_{ij}[\hat{s}(\xi)]) = f(\xi), \quad \xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}.$$

为使我们专注于 L_p-Minkowski 闵可夫斯基问题，并避免偏离本文的主题，我们将把对这一问题的研究留待后续工作。

4. The regularity of solutions to anisotropic capillary L_p-Minkowski problem

4.1. C^0 估计。

我们首先建立$\hat{s}$ 的一致正下界和上界，其中 $p \geqslant n+1$。

定义 4.1。 我们称方程 $\hat{s}$ 的解 (1.9) 为可容许解，如果

(1) $p = 1$ *or* $p \geqslant n+1$, *the* $n \times n$ *matrix* $\hat{s}_{ij} - \frac{1}{2}Q_{ijk}\hat{s}_k + \delta_{ij}\hat{s}$ *is positive definite;*

(2) $1 < p < n+1$, *the* $n \times n$ *matrix* $\hat{s}_{ij} - \frac{1}{2}Q_{ijk}\hat{s}_k + \delta_{ij}\hat{s}$ *is positive definite and* $\hat{s}$ *is an anisotropic capillary even function.*

该矩阵的正定性等价于

$$\tilde{s}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k + \tilde{s}\tilde{g}_{ij},$$

如 (4.15)所示。

引理 4.2. 设 $p > n+1$和 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1}) \quad F(-E_{n+1}))$。假设 $\hat{s}$ 是方程 (1.9)的一个可容许解。则有

$$\frac{(\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-n-1}}{\max\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f \cdot (\max\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-1}} \leqslant \hat{s}^{p-n-1} \leqslant \frac{(\max\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-n-1}}{\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f \cdot (\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-1}}.$$

证明。 考虑各向异性毛细支撑函数 $\bar{s} = \ell^{-1}\hat{s}$。根据 (1.9)，可得

$$\begin{cases} \det\left(\bar{s}_{ij}\ell - \frac{1}{2}Q_{ijk}\bar{s}_k\ell + \bar{s}_i\ell_j + \bar{s}_j\ell_i + \bar{s}\mathring{g}_{ij}\right) &= f(\bar{s}\ell)^{p-1}, \quad \text{in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \mathring{\nabla}_{e_n}\bar{s} &= 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中我们用到了 (3.3) 和 [15, 引理 3.4]。假设 $\bar{s}$ 在某点 $\xi_0 \in \mathcal{C}_{\omega_0}$处取得最大值。(4.1) 中的边界条件蕴含

$$\mathring{\nabla}\bar{s}(\xi_0) = 0, \ \mathring{\nabla}^2\bar{s}(\xi_0) \leqslant 0. \tag{4.2}$$

将（4.2）代入（4.1），可得

$$f(\bar{s}\ell)^{p-1} \leqslant \bar{s}^n \ \Leftrightarrow \bar{s}^{p-n-1}(\xi_0) \leqslant f^{-1}\ell^{1-p} \leqslant \frac{1}{\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f \cdot (\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-1}}.$$

于是，对所有 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}$,

$$\hat{s}^{p-n-1}(\xi) = (\bar{s}\ell)^{p-n-1}(\xi) \leqslant (\max_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-n-1} \cdot \bar{s}^{p-n-1}(\xi_0) \leqslant \frac{(\max\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-n-1}}{\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f \cdot (\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-1}}. \tag{4.3}$$

同样，我们也有

$$\hat{s}^{p-n-1} \geqslant \frac{(\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-n-1}}{\max\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f \cdot (\max\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell)^{p-1}}.$$

□

接下来，我们处理情形 $1 \leqslant p < n+1$。在情形 $p = 1$中，由$\widehat{\ }$注5.1 可知，我们可以将讨论限制在 $\partial\Sigma$包含原点于其内部的情形。对于 $1 < p < n+1$，根据定义1.3，我们有

$$\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\left(\mathcal{T}^{-1}\xi, E_i\right) \cdot \hat{s}(\xi)\, d\mu_F = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

由于 $\omega_0 \leqslant 0$，且 Wulff 形状 $\mathcal{W}$ 是一个对称凸超曲面， $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 的高斯映射像完全位于上半球 $\mathbb{S}^n_+ = \{x \in \mathbb{S}^n$ 内： $\langle x, \ E_{n+1}\rangle \geqslant 0\}$。因此， Σ 的高斯映射像也位于 $\mathbb{S}^n_+$ 内。这意味着并集

$$\Omega := \widehat{\Sigma} \cup (-\widehat{\Sigma})$$

是严格凸的，并且在 $\mathcal{W}$ 上具有一个偶各向异性支撑函数，记为$\hat{s}_\Omega(z)$，其中 $z \in \mathcal{W}$。若 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}$，则有$\hat{s}_\Omega(\mathcal{T}^{-1}\xi) = \hat{s}(\xi)$。这一观察使我们可以限制$\hat{s}_\Omega(z)$满足以下正交条件：

$$\int_{\mathcal{W}} G(z)\,(z, E_i) \cdot \hat{s}_\Omega(z)\, d\mu_F = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

这个正交条件意味着原点位于凸$\widehat{\ }$体 Ω 的内部，这也意味着原点位于 $\partial\Sigma$的内部。对于闭超曲面和各向同性毛细超曲面，可分别参见 [52, 方程（4.2）] 和 [40,引理 3。1],

引理4.3。考虑方程$\hat{s}$的一个可容许解（1.9）。设指数 p和接触常数 ω_0 满足以下条件之一：

(1) $p = 1$ *and* $\omega_0 \in \left(-F(E_{n+1}),\ F(-E_{n+1})\right)$;
(2) $1 < p < n+1$ *and* $\omega_0 \in \left(-F(E_{n+1}),\ 0\right]$.

则$\hat{s}$具有一致界

$$0 < m_1 \leqslant \hat{s} \leqslant m_2,$$

其中常数 m_1、 $m_2 > 0$ 仅依赖于 n、 p、最小值$_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f$和最大值$_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f$。

证明。相对于 Wulff 形状，闭超曲面的各向异性内半径和外半径定义见 [54], 由于 $\hat{}\Sigma \in \mathcal{K}^O_{\omega_0}$，为了获得$\hat{s}$ 的界，只需建立 Σ 相对于 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 的各向异性内半径和外半径的界。 Σ相对于 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 的各向异性内半径定义为

$$r(\Sigma) := \sup\{t > 0 | t\widehat{\mathcal{C}_{\omega_0}} + y \subset \hat{\Sigma} \text{ for some } y \in \overline{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+}\}, \tag{4.4}$$

$\hat{}$ Σ相对于 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 的各向异性外半径定义为

$$R(\Sigma) := \inf\{t > 0 | \hat{\Sigma} \subset t\widehat{\mathcal{C}_{\omega_0}} + y \text{ for some } y \in \overline{\partial\mathbb{R}^{n+1}_+}\}.$$

步骤 I: $\hat{s} \leqslant \mathbf{m_2}$。

存在某个 $R>0$ 使得

$$\widehat{\Sigma} \subset \widehat{\mathcal{W}}_{R,\omega_0}. \tag{4.5}$$

令 R_0 表示满足条件 R （4.5）的最小正常数。显然，存在 $X_0 \in \Sigma \bigcap R_0\mathcal{C}_{\omega_0}$。令$\hat{X}_0 = \frac{X_0}{R_0} \in \mathcal{C}_{\omega_0}$，对于任意满足 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}\hat{}\ \xi = \mathcal{T}^{-1}\xi$的，我们有

$$\hat{s}(\xi) = \sup_{y\in\Sigma} G(\hat{\xi})(\hat{\xi}, y) \geqslant R_0 \max\{0, G(\hat{\xi})(\hat{\xi}, \hat{X}_0)\} := R_0 A_1.$$

在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上对 ξ 积分，得到

$$\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \hat{s}^p d\mu_F \geqslant R_0^p \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} A_1^p d\mu_F, \tag{4.6}$$

and

$$\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \hat{s}^p f d\mu_F \geqslant R_0^p \min_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} A_1^p d\mu_F. \tag{4.7}$$

另一方面，我们有一个 Minkowski 公式

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f\hat{s}^p d\mu_F &= \int_\Sigma \hat{s} F(\nu) d\mu_\Sigma = \int_\Sigma G(\hat{\xi})(\hat{\xi}, X)\Omega(\hat{\xi}, \partial_1, \cdots, \partial_n) dy^1 \cdots dy^n \\ &= \int_\Sigma \Omega(X, \partial_1, \cdots, \partial_n) dy^1 \cdots dy^n = \int_\Sigma \langle X, \nu\rangle d\mu_\Sigma = (n+1)|\hat{\Sigma}|. \end{aligned} \tag{4.8}$$

由 [17, 定理 1.3], 中的各向异性毛细等周不等式可得

$$|\hat{\Sigma}|^{\frac{n}{n+1}} \cdot A_2 \leqslant |\Sigma|_F + \omega_0 |\widehat{\partial\Sigma}| = \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell \hat{s}^{p-1} f d\mu_F, \tag{4.9}$$

其中 $A_2 := \frac{|\mathcal{C}_{\omega_0}|_F + \omega_0|\partial\mathcal{C}_{\omega_0}|}{|\widehat{\mathcal{C}_{\omega_0}}|^{\frac{n}{n+1}}}$。（4.8）、（4.9）以及 H¨older 不等式联立可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f\hat{s}^p d\mu_F &\leqslant \Big(\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \hat{s}^{p-1} f d\mu_F\Big)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\max\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell}{A_2}\right)^{\frac{n+1}{n}} (n+1) \\ &\leqslant \left(\frac{\max\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \ell}{A_2}\right)^{\frac{n+1}{n}} (n+1)\Big(\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f\hat{s}^p d\mu_F\Big)^{\frac{(p-1)(n+1)}{pn}} \Big(\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f d\mu_F\Big)^{\frac{n+1}{np}} \\ &:= A_3\Big(\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f\hat{s}^p d\mu_F\Big)^{\frac{(p-1)(n+1)}{pn}} \Big(\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f d\mu_F\Big)^{\frac{n+1}{np}}. \end{aligned}$$

由于 $p < n+1$，我们有

$$\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \hat{s}^p d\mu_F \leqslant \frac{A_3^{\frac{np}{n+1-p}}}{\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f} \Big(\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f d\mu_F\Big)^{\frac{n+1}{n+1-p}}.$$

结合式（4.6），我们得到 R_0的正上界，这意味着的正上界，另见 [52, 引理 4。2]。

步骤 II: $\hat{s} \geqslant \mathbf{m_1}$。

由于 $\hat{\Sigma}$ 被半径为 $R(\Sigma)$ 的缩放 Wulff 形状 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 所包围，因此我们有

$$|\hat{\Sigma}| \leqslant \frac{1}{n+1} |\widehat{\mathcal{C}_{\omega_0}}| R^{n+1}(\Sigma). \tag{4.10}$$

由（4.7）、（4.8）和（4.10）可得

$$R_0 \geqslant \Big(\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} A_1^p d\mu_F\Big)^{\frac{1}{n+1-p}} \Big(\min_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f\Big)^{\frac{1}{n+1-p}} \Big(\widehat{|\mathcal{C}_{\omega_0}|}\Big)^{\frac{-1}{n+p-1}}, \tag{4.11}$$

and

$$(n+1)|\hat{\Sigma}| \geqslant R_0^p \min_{\mathcal{C}_{\omega_0}} f \cdot \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} A_1^p d\mu_F. \tag{4.12}$$

结合（4.11）与（4.12），我们得出体积 $|\widehat{\Sigma}|$ 具有一致正下界。此外，我们可以计算得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{1,\omega_0}(\Sigma) &\overset{(2.18)}{=} \frac{1}{n+1}\int_{\Sigma} 1+\omega_0 G(\nu_F)(\nu_F, E_{n+1}^F)\, d\mu_F \\
&= \frac{1}{n+1}\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \frac{F(\nu(\xi))+\omega_0\langle \nu(\xi), E_{n+1}^F\rangle}{K(\widetilde{\nu_F}^{-1}(\xi))}\, d\mathcal{H}^n(\xi) \\
&\overset{(1.2)}{=} \frac{1}{n+1}\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \big(F(\nu(\xi))+\omega_0\langle \nu(\xi), E_{n+1}^F\rangle\big)\, f\, d\mathcal{H}^n(\xi).
\end{aligned}$$

由于 $|\nu(\xi)| \leqslant 1$ 对任意 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}$，我们知道 $F(\nu(\xi)) + \omega_0\langle \nu(\xi), E_{n+1}^F\rangle$ 具有一致上界，因此 $\mathcal{V}_{1,\omega_0}(\Sigma)$ 也具有一致上界。由（2.23）和（4.12），我们知道 $r(\Sigma)$ 具有一致正下界。

对于任意 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}$，令 $t(\xi) > 0$ 表示满足 $t(\xi)\xi \in \Sigma$的数。根据 $r(\Sigma)$ 的定义可知，$r(\Sigma) \leqslant \inf_{\xi\in\mathcal{C}_{\omega_0}} t(\xi)$。因此，对于任意 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}$，我们有

$$\begin{aligned}
\hat{s}(\xi) &= \sup_{X\in\Sigma} G(\mathcal{T}^{-1}\xi)(\mathcal{T}^{-1}\xi, X) \\
&\geqslant G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\left(\mathcal{T}^{-1}\xi, t(\xi)\left(\mathcal{T}^{-1}\xi + \omega_0 E_{n+1}^F\right)\right) \\
&= t(\xi)(1+\omega_0 G(\mathcal{T}^{-1}\xi)(\mathcal{T}^{-1}\xi, E_{n+1}^F)) \\
&\geqslant r(\Sigma)c.
\end{aligned}$$

因此，各向异性支撑函数 $\hat{s}$ 的下界由 $r(\Sigma)$ 的下界决定。□

4.2. C^1 **估计。** 受欧几里得上半空间中经典各向同性毛细管闵可夫斯基问题里球冠作用的启发，我们自然地认为，对于各向异性毛细管 Minkowski 问题，目标模型不再是 Wulff 形状 $\mathcal{W}$，而是平移乌尔夫形 $\mathcal{W}$。因此，我们建立平移乌尔夫形 $\mathcal{W}$ 的各向异性几何量，并利用这些新的各向异性几何量对方程（1.9）重新参数化。

利用平移乌尔夫形 $\mathcal{W}$重新参数化该问题。

给定一个 Wulff 形状 $\mathcal{W}$ 和一个常数 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1}), F(-E_{n+1}))$，我们可以定义一个新的 Wulff 形状 $\mathcal{W} := \mathcal{T}(\mathcal{W}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$，其中 $\mathcal{T}$ 是定义在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的平移变换，其定义为

$$\mathcal{T}(y) = y + \omega_0 E_{n+1}^F, \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

由于 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1}), F(-E_{n+1}))$，我们有 $F^0(O - \omega_0 E_{n+1}^F) = F^0(-\omega_0 E_{n+1}^F) < 1$，因此，平移乌尔夫形 $\mathcal{W} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : F^0(y - \omega_0 E_{n+1}^F) = 1\}$ 仍将原点 O 包围在其内部。

对于任意 $z \in \mathcal{W}$，我们有 $\tilde{z} := z + \omega_0 E_{n+1}^F \in \widetilde{\mathcal{W}}$。如果 x 是 $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 在点 z处的单位外法向量，则 x 也是

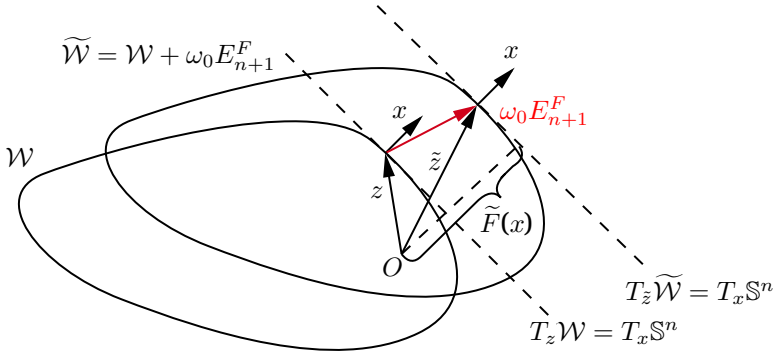

图 2. $\mathcal{W}$ 和 $\widetilde{\mathcal{W}}$

$\widetilde{\mathcal{W}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 在点 $\tilde{z}$，因为 $T_z\mathcal{W} = T_{\tilde{z}}\widetilde{\mathcal{W}}$（见图2）。则支撑函数$\sim$ $\sim F$ 的 $\mathcal{W}$ 满足

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(x) &= \langle \tilde{z}, x\rangle = \langle z, x\rangle + \langle x, \omega_0 E_{n+1}^F\rangle \\ &= F(x) + \omega_0\langle E_{n+1}^F, x\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{S}^n.\end{aligned}$$

我们将其扩展为定义在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的一次齐次函数，如下：

$$\widetilde{F}(y) = F(y) + \omega_0\langle E_{n+1}^F, y\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

于是 $D\widetilde{F} = DF + \omega_0 E_{n+1}^F, D^2\widetilde{F} = D^2F$。显然，平移映射不会改变 $\mathcal{W}$和 $\mathcal{W}$的主曲率半径，即 $A_F(x) := D^2F|_{T_x\mathbb{S}^n}(x) = D^2F|_{T_x\mathbb{S}^n}(x) = A_F(x)$，其中 $x \in \mathbb{S}^n$。我们将 $\widetilde{F}^0$称为 $\widetilde{F}$的对偶闵可夫斯基范数。相对于 $\widetilde{F}^0$的新度量 $\widetilde{G}$和 (0, 3)-张量 $\widetilde{Q}$分别由第 2.3 节中的 (2.5) 和 (2.6) 构造得到。 G 与 G、$\sim Q$与 Q之间的关系可见于 [15]的附录。

本小节中，我们用波浪号（~）表示相对于新 Wulff 形状 $\mathcal{W}$ 的相关各向异性几何量。对于 $X \in \Sigma$，将相对于 $\mathcal{W}$ 的各向异性$\widetilde{\ }$高斯映射记为：

$$\widetilde{\nu_F}(X) = D\widetilde{F}(\nu(X)) = DF(\nu) + \omega_0 E_{n+1}^F = \mathcal{T}(\nu_F(X)).$$

$\widetilde{\ }$相对于 $\mathcal{W}$ 的各向异性支撑函数为：

$$\widetilde{s}(X) = \frac{\langle X, \nu\rangle}{\widetilde{F}(\nu)} = \frac{\langle X, \nu\rangle}{F(\nu) + \omega_0\langle E_{n+1}^F, \nu\rangle} = \bar{s}(X). \tag{4.13}$$

$\widetilde{\ }$相对于 $\mathcal{W}$ 的各向异性魏因加滕矩阵为：

$$\widetilde{S_F}(X) = \widetilde{A_F}\,\mathrm{d}\,\nu = A_F\,\mathrm{d}\,\nu = S_F(X),$$

这意味着， Σ相对于 $\mathcal{W}$ 的各向异性主曲率（或主曲率半径）与 Σ相对于 $\widetilde{\mathcal{W}}$的各向异性主曲率（或主曲率半径）相同，即 $\widetilde{\kappa^F}(X) = \kappa^F(X)$ $\tilde{\tau}(X) = \tau(X)$。

在 ω_0-毛细超曲面的边界上，由于

$$\langle \widetilde{\nu_F}, -E_{n+1}\rangle = \langle \nu_F + \omega_0 E_{n+1}^F, -E_{n+1}\rangle = \langle \nu_F, -E_{n+1}\rangle - \omega_0 = 0,$$

我们有如下命题。

命题 4.4. 关于 *Wulff* 形状$\mathcal{W}$ 的各向异性 ω_0-毛细管边界问题，可以基于相应的平移乌尔夫形 $\mathcal{W}$的自由边界$\widetilde{\ }$问题的结果自然求解。

$\widetilde{\ }$设 Σ 是严格凸的各向异性 ω_0-毛细超曲面。我们知道， $\mathcal{W}$也是严格凸超曲面，因此 $\widetilde{\nu_F}$ 处处都是非退化微分同胚。我们用它对 Σ重新参数化：

$$X : \widetilde{\mathcal{W}} \to \Sigma, \quad X(\tilde{z}) = X(\widetilde{\nu_F}^{-1}(\tilde{z})),\ \tilde{z} \in \widetilde{\mathcal{W}}.$$

由4.13式可得

$$\tilde{s} \circ \mathcal{T}(z) = \frac{\hat{s}(z)}{1 + \omega_0 G(z)(z, E^F_{n+1})}, \quad z \in \mathcal{W}. \tag{4.14}$$

若仍记 $\kappa^F = \kappa^F \circ \nu_F^{-1}$， $\widetilde{\kappa^F} = \widetilde{\kappa^F} \circ \widetilde{\nu_F}^{-1}$， $\tau = \tau \circ \nu_F^{-1}$和 $\tilde{\tau} = \tilde{\tau} \circ \widetilde{\nu_F}^{-1}$，则

$$\widetilde{\kappa^F} \circ \mathcal{T} = \kappa^F, \quad \tilde{\tau} \circ \mathcal{T} = \tau.$$

~ ~ ~ ~ ~ ~记 $\tilde{s}_i = \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{s}$、$\tilde{s}_{ij} = \nabla_{\tilde{e}_i}\nabla_{\tilde{e}_j}\tilde{s}$、 $Q_{ijk} = Q(\tilde{z})(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k)$，其中 ∇ 是关于度量 $\tilde{g} = G(\tilde{z})|_{T_{\tilde{z}}\widetilde{\mathcal{W}}}$的 $\mathcal{W}$上的协变导数，而 $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$是$(\mathcal{W}, \tilde{g}, \nabla)$的标准$\widetilde{\ }$ ~正交标架。由 [52, 54], 可知， $X(\tilde{z})$处的各向异性主曲率 $\in \Sigma$ 是下式特征值的倒数

$$\tilde{\tau}_{ij}(\tilde{z}) := \tilde{s}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k + \tilde{g}_{ij}\tilde{s} > 0, \quad \tilde{z} \in \widetilde{\mathcal{W}}. \tag{4.15}$$

则方程（1.9）可改写为

$$\begin{cases} \det\left(\tilde{s}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k + \tilde{s}\tilde{g}_{ij}\right) &= \tilde{f}\tilde{s}^{p-1}, \quad \text{in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \langle \tilde{\nabla}\tilde{s}, E_{n+1}\rangle &= 0, \qquad \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}, \end{cases} \tag{4.16}$$

其中 $\tilde{f} = f\ell^{p-1}$。利用 $\tilde{s}$ 来建立 C^1 和 C^2 估计较为方便。

引理 4.5 ([15], 引理 5.10)**.** 对 $\tilde{z} \in \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$，我们取标准正交标架$\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n \in T_{\tilde{z}}\mathcal{C}_{\omega_0}$关于 $\tilde{g}$，其满足 $\tilde{e}_\alpha \in T_{\tilde{z}}\partial\mathcal{C}_{\omega_0}$对 $\alpha = 1, \cdots, n-1$，以及 $\tilde{g}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_n) = 0$ 对任意 $\tilde{e}_\alpha$。于是我们有

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_n}\tilde{s} = 0, \ and \ \ \tilde{\tau}_{\alpha n} = 0, \qquad on \ \ \partial(\mathcal{C}_{\omega_0} \cap \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}),$$

and

$$\tilde{\tau}_{\alpha\alpha,n} = \tilde{Q}_{\alpha\gamma n}(\tilde{\tau}_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}\tilde{\tau}_{nn}) \quad on \ \ \partial(\mathcal{C}_{\omega_0} \cap \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}).$$

引理 4.6 ([15], 引理 5.11)**.** 对任意 $\tilde{z} \in \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$ 和 $\tilde{e}_\alpha \in T_{\tilde{z}}(\partial\mathcal{C}_{\omega_0})$，我们有

$$\tilde{Q}_{\alpha\alpha n} = \frac{1}{1 + \omega_0 G(z)(z, E^F_{n+1})}\left(Q_{\alpha\alpha n} - \frac{\omega_0 G(z)(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\alpha)}{F(\nu)\langle \mu, E_{n+1}\rangle}\right). \tag{4.17}$$

注 4.1。 显然，引理 *4.6* 的结论阐明了一个重要事实：条-~件 (1.7) 等价于 $Q_{\alpha\alpha n} < 0$，这对我们的先验~ ~估计至关重要。同时，不等式 $Q_{\alpha\alpha n} < 0$ 意味着矩阵 $Q_{\alpha\beta n}$ 为负定。因此，由下面的命题可知，这等价于边界 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0} \subset \mathcal{C}_{\omega_0}$ 是各向异性严格凸的。

命题 4.7。 以下是关于 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0}$ 的边界条件：

$$\tilde{\tau}_{\alpha n} = 0, \quad \tilde{Q}_{\alpha\beta n} < 0,$$

对于 $\forall \alpha, \beta = 1, \cdots, n-1$，等价于以下矩阵为正定：

$$\left(\hat{h}^{\partial\mathcal{C}_{\omega_0}}_{\alpha\beta}\right) > 0,$$

其中 $\hat{h}^{\partial\mathcal{C}_{\omega_0}}_{\alpha\beta} := \tilde{g}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_\beta}\tilde{e}_n)$。这表明 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0} \subset \mathcal{C}_{\omega_0}$ 是各向异性严格凸的。

证明。

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{\alpha n}|_{\partial\mathcal{C}_{\omega_0}} = 0 &\Leftrightarrow \tilde{s}_{\alpha n} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{\alpha\beta n}\tilde{s}_\beta = 0\\ &\Leftrightarrow \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_\alpha}\tilde{g}(\tilde{\nabla}\tilde{s}, \tilde{e}_n) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}\tilde{s}, \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_\alpha}\tilde{e}_n) = \frac{1}{2}\tilde{Q}_{\alpha\beta n}\tilde{s}_\beta\\ &\Leftrightarrow -\tilde{g}(\tilde{\nabla}\tilde{s}, \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_\alpha}\tilde{e}_n) = \frac{1}{2}\tilde{Q}_{\alpha\beta n}\tilde{s}_\beta\\ &\Leftrightarrow \hat{h}^{\partial\mathcal{C}_{\omega_0}}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\tilde{Q}_{\alpha\beta n} > 0,\end{aligned}$$

其中我们利用了以下事实：$\tilde{s}_n = 0$ 在 $\partial\mathcal{C}_{\omega_0}$上。 □

该 C^1 估计无需使用式（4.16）即可推导。

引理4.8。 考虑方程$\hat{s}$（1.9）的一个可容许解。设指数 p和接触常数 ω_0 满足以下条件之一：

(1) $p = 1$ *or* $p \geqslant n+1$,*and* $\omega_0 \in \big(-F(E_{n+1}),\ F(-E_{n+1})\big)$ *together with Condition* (1.7);

(2) $1 < p < n+1$ *and* $\omega_0 \in \big(-F(E_{n+1}),\ 0\big]$ *together with Condition* (1.7).

那么存在一个依赖于 n、 ω_0、 $\|F\|_{C^3(\mathcal{W})}$ 的常数 C，使得

$$|\tilde{\nabla}\tilde{s}| \leqslant C.$$

证明。 假设 $|\nabla\tilde{s}| \gg 1$，否则结论显然成立。由引理4.3 以及$\tilde{s}\circ\mathcal{T}(z) = \frac{\hat{s}(z)}{F(\nu)+\omega_0\langle\nu,\ E_{n+1}\rangle}$对 $z \in \mathcal{W}$，我们知道 $\tilde{s}$ 也有上下界，并仍将这些界记为 m_1 和 m_2。设 $\Psi = \log|\tilde{\nabla}\tilde{s}|^2 - \log(2m_2 - \tilde{s})$在 $\xi_0 \in \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$处取得最大值，则边界上的最大值原理意味着

$$0 \leqslant \Psi_n = \frac{2\tilde{s}_{kn}\tilde{s}_k}{|\tilde{\nabla}\tilde{s}|^2} + \frac{\tilde{s}_n}{2m_2 - \tilde{s}} = \frac{2\tilde{s}_{\alpha n}\tilde{s}_\alpha}{|\tilde{\nabla}\tilde{s}|^2} = \frac{2(\tilde{\tau}_{\alpha n} + \frac{1}{2}\tilde{Q}_{\alpha\gamma n}\tilde{s}_\gamma)\tilde{s}_\alpha}{|\tilde{\nabla}\tilde{s}|^2} < 0,$$

这就导出了矛盾。因此，最大值点为 $\xi_0 \in \mathcal{C}_{\omega_0} \setminus \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$。假设在此点 $\tilde{\tau}$ 是对角的，且不失一般性， $|\tilde{s}_1| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}|\tilde{\nabla}\tilde{s}| > 0$。在 ξ_0 处，我们有

$$\begin{aligned}0 = \tilde{s}_1\Psi_1 &= \frac{2\tilde{s}_1\tilde{s}_k\tilde{s}_{k1}}{|\tilde{\nabla}\tilde{s}|^2} + \frac{\tilde{s}_1^2}{2m_2 - \tilde{s}}\\ &= \frac{2\tilde{s}_1\tilde{s}_k(\tilde{\tau}_{1k} + \frac{1}{2}\tilde{Q}_{1kl}\tilde{s}_l - \delta_{1k}\tilde{s})}{|\tilde{\nabla}\tilde{s}|^2} + \frac{\tilde{s}_1^2}{2m_2 - \tilde{s}}\\ &\geqslant -C|\tilde{\nabla}\tilde{s}| + \frac{1}{n}\frac{|\tilde{\nabla}\tilde{s}|^2}{2m_2 - m_1},\end{aligned}$$

这意味着

$$|\tilde{\nabla}\tilde{s}| \leqslant C.$$

□

为了处理情形 $p = n+1$，我们进而建立方程 (4.16) 的解的对数梯度估计。

引理 4.9. 设 $p \geqslant n+1$。设 ω_0满足 $\omega_0 \in (-F(E_{n+1})\ F(-E_{n+1}))$ 以及条件 (1.7)。假设 $\tilde{s}$ 是方程 (4.16) 的可容许解，则存在依赖于 n、ω_0、$\|F\|_{C^3(\mathcal{W})}$ 的常数 C，使得

$$\max_{\mathcal{C}_{\omega_0}} |\tilde{\nabla} \log \tilde{s}| \leqslant C. \tag{4.18}$$

此外，若 $n+1 \leqslant p \leqslant n+2$，则（$C$ 在 (4.18) 中的常数与 p无关。

证明。定义 $v =: \log \tilde{s}$，由（4.16），则 v 满足

$$\begin{cases} \det\left(v_{ij} + v_i v_j - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk} v_k + \delta_{ij}\right) = e^{p_0 v} \tilde{f}, & \text{in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \tilde{\nabla}_{e_n} v = 0, & \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}, \end{cases} \tag{4.19}$$

其中 $p_0 := p - n - 1$。考虑函数

$$\Phi := \log |\tilde{\nabla} v|^2 + e^{4(\lambda + v)} |\tilde{\nabla} v|^2,$$

其中某个正常数为 $\lambda \in \mathbb{R}$。假设 $|\nabla \log \tilde{s}| \gg 1$；否则结论已得。设 Φ 在某点（记为 $\xi_0 \in \mathcal{C}_{\omega_0}$）处取得最大值。我们不妨假设 $|\nabla v(\xi_0)|$ 充分大；否则证明即告完成。我们将证明分为以下情形：要么 $\xi_0 \in \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$，要么 $\xi_0 \in \mathcal{C}_{\omega_0} \setminus \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$。

情形 I. $\xi_0 \in \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$。极值条件蕴含

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \Phi_n &= \frac{2 v_k v_{kn}}{|\tilde{\nabla} v|^2} + 4 e^{4(\lambda+v)} |\tilde{\nabla} v|^2 v_n + e^{4(\lambda+v)} 2 v_k v_{kn} \\ &= \left(\frac{1}{|\tilde{\nabla} v|^2} + e^{4(\lambda+v)}\right) 2 v_\beta v_{\beta n} \\ &= \left(\frac{1}{|\tilde{\nabla} v|^2} + e^{4(\lambda+v)}\right) \frac{\tilde{Q}_{\gamma\beta n} \tilde{s}_\gamma \tilde{s}_\beta}{\tilde{s}^2} < 0. \end{aligned}$$

这就导出了矛盾。因此 $\xi_0 \in \mathcal{C}_{\omega_0} \setminus \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$。

情形 II。$\xi_0 \in \mathcal{C}_{\omega_0} \setminus \partial\mathcal{C}_{\omega_0}$。此处假设 W 为对角矩阵，其中 $W_{ij} = v_{ij} + v_i v_j - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk} v_k + \delta_{ij}$，不失一般性，设 $|v_1| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} |\tilde{\nabla} v| > 0$。在 ξ_0 处，我们有

$$\begin{aligned} 0 = v_1 \Phi_1 &= \frac{2 v_1 v_k v_{k1}}{|\tilde{\nabla} v|^2} + 4 e^{4(\lambda+v)} |\tilde{\nabla} v|^2 v_1^2 + e^{4(\lambda+v)} 2 v_1 v_k v_{k1} \\ &= \frac{2 v_1 v_k (W_{1k} - v_1 v_k + \frac{1}{2}\tilde{Q}_{1kl} v_l - \delta_{1k})}{|\tilde{\nabla} v|^2} + 4 e^{4(\lambda+v)} |\tilde{\nabla} v|^2 v_1^2 \\ &\quad + e^{4(\lambda+v)} 2 v_1 v_k (W_{1k} - v_1 v_k + \frac{1}{2}\tilde{Q}_{1kl} v_l - \delta_{1k}) \\ &\geqslant 2 e^{4(\lambda+v)} v_1^2 |\tilde{\nabla} v|^2 - C |\tilde{\nabla} v|^3, \end{aligned}$$

这意味着

$$|\tilde{\nabla} v| \leqslant C.$$

□

4.3. C^2 **估计。** 在本小节中，我们建立方程（C^2 4.16）的可容许解的先验估计。

引理 4.10。 考虑方程 $\hat{s}$ （1.9）的可容许解。设指数 p和接触常数 ω_0 满足以下条件之一：

(1) $p = 1$ 或 $p \geqslant n+1$，以及 $\omega_0 \in \left(-F(E_{n+1})\ \ F(-E_{n+1})\right)$ 连同条件 (1.7)；
(2) $1 < p < n+1$ 和 $\omega_0 \in \left(-F(E_{n+1})\ \ 0\right]$ 连同条件 (1.7)。

˜那么存在一个常数 C，它取决于 $n, p, \omega_0, \|F\|_{C^4(\mathcal{W})}$ $\|f\|_{C^2(\mathcal{C}_{\omega_0})}$，使得

$$\max_{\mathcal{C}_{\omega_0}} |\tilde{\nabla}^2 \tilde{s}| \leqslant C. \tag{4.20}$$

此外，如果 $n+1 \leqslant p \leqslant n+2$，则 C 中的常数 (4.20) 与 p无关。

证明。 我们考虑如下辅助函数

$$P(\xi) = \log \sigma_1 + e^{\beta(m_2 - \tilde{s})},$$

对于 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}$。 设 $P(\xi)$ 在某点 $\xi_0 \in \mathcal{C}_{\omega_0}$ 处取得最大值。根据 ξ_0 是否为内部点，我们将证明分为两种情形。

情形 I。 $\xi_0 \in \mathcal{C}_{\omega_0} \setminus \partial \mathcal{C}_{\omega_0}$ 在此情形下，我们在 ξ_0 附近选取一个标准正交标架 $\{e_i\}_{i=1}^n$，使得 $\tilde{\tau}$ 为对角矩阵。记

$$\mathcal{F}(\tilde{\tau}_{ij}) := \log \det(\tilde{\tau}_{ij}) = \log(\tilde{f}\tilde{s}^{p-1}) = f^*, \tag{4.21}$$

并令 $\tilde{\tau}^{ij}$ 为 $\tilde{\tau}_{ij}$ 的逆矩阵。于是，

$$\mathcal{F}^{ij} = \tilde{\tau}^{ij}, \quad \mathcal{F}^{ij,kl} = -\tilde{\tau}^{ik}\tilde{\tau}^{jl}. \tag{4.22}$$

显然， $\mathcal{F}$ 在 ξ_0处也为对角矩阵。对（4.21）取一阶和二阶协变导数，可得

$$\mathcal{F}^{ij}\tilde{\tau}_{ij,k} = f^*_{,k}, \quad \mathcal{F}^{ij}\tilde{\tau}_{ij,kk} + \mathcal{F}^{ij,rs}\tilde{\tau}_{ij,k}\tilde{\tau}_{rs,k} = f^*_{,kk}. \tag{4.23}$$

于是极值条件蕴含

$$P_i = \frac{\sigma_{1,i}}{\sigma_1} - \beta e^{\beta(m_2 - \tilde{s})}\tilde{s}_i = 0, \tag{4.24}$$

and

$$0 \geqslant \mathcal{F}^{ij}P_{ij} = \frac{\sum_{i,k}^n \mathcal{F}^{ii}\tilde{\tau}_{kk,ii}}{\sigma_1} - \frac{\sum_{i,k}^n \mathcal{F}^{ii}\tilde{\tau}^2_{kk,i}}{\sigma_1^2} + \sum_i^n \mathcal{F}^{ii}e^{\beta(m_2-\tilde{s})}(\beta^2\tilde{s}_i^2 - \beta\tilde{s}_{ii}). \tag{4.25}$$

接下来我们估计这些项$\sum_{i,k}^n \mathcal{F}^{ii}\tilde{\tau}_{kk,ii}$，$\sum_{i,k}^n \mathcal{F}^{ii}\tilde{\tau}^2_{kk,i}$以及 $-\sum_i^n \mathcal{F}^{ii}e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\beta\tilde{s}_{ii}$。($\mathcal{C}_{\omega_0}$, $\tilde{g}$)上的里奇恒等式给出

$$\tilde{\tau}_{kk,ii} = \tilde{\tau}_{ii,kk} + \frac{1}{2}(\tilde{Q}_{iip}\tilde{\tau}_{kk,p} - \tilde{Q}_{kkp}\tilde{\tau}_{ii,p}) + \tilde{g}_{ii}\tilde{\tau}_{kk} - \tilde{g}_{kk}\tilde{\tau}_{ii} + \tilde{Q} * \tilde{Q} * \tilde{\tau} + \tilde{\nabla}\tilde{Q} * \tilde{\tau},$$

其中记号 $*$ 表示两个张量的标量缩并，缩并方式为 $\tilde{g}$，另见[51, 引理A.1]。由 Q的定义可见其仅依赖于 F 与 ω_0。利用上述里奇恒等式，（4.23）和（4.24），我们推出

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{ii}\tilde{\tau}_{kk,ii} &= \frac{\Delta\tilde{f}}{\tilde{f}} - \frac{|\tilde{\nabla}f|^2}{\tilde{f}^2} + (p-1)\frac{\Delta\tilde{s}}{s} - (p-1)\frac{|\tilde{\nabla}\tilde{s}|^2}{\tilde{s}^2} \\
&\quad + \tilde{\tau}^{ii}\tilde{\tau}^{jj}\tilde{\tau}^2_{ij,k} + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{ii}\tilde{Q}_{iik}\sigma_1\beta e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\tilde{s}_k - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{kk\ell}f^*_{,\ell} \\
&\quad + \mathcal{F}^{ii}\sigma_1 + \mathcal{F}^{ii}(\tilde{Q} * \tilde{Q} * \tilde{\tau} + \tilde{\nabla}\tilde{Q} * \tilde{\tau}) - n^2 \\
&\geqslant \tilde{\tau}^{ii}\tilde{\tau}^{jj}\tilde{\tau}^2_{ij,k} - C_1\mathcal{F}^{ii}(\sigma_1 + 1) + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{ii}\tilde{Q}_{iik}\sigma_1\beta e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\tilde{s}_k.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\mathcal{F}^{ii}\tilde{\tau}_{kk,ii}}{\sigma_1} \geqslant \frac{\tilde{\tau}^{ii}\tilde{\tau}^{jj}\tilde{\tau}^2_{ij,k}}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{ii}\tilde{Q}_{ii\ell}\beta e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\tilde{s}_\ell - C_2(\mathcal{F}^{ii}+1).$$

注意到

$$\tilde{\tau}_{kk,i}+\frac{1}{2}\tilde{Q}_{kk\ell}\tilde{\tau}_{i\ell}=\tilde{\tau}_{ik,k}+\frac{1}{2}\tilde{Q}_{ik\ell}\tilde{\tau}_{k\ell}, \tag{4.26}$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{ii}\tilde{\tau}^2_{kk,i}&\leqslant\mathcal{F}^{ii}\Big(\tilde{\tau}^2_{ik,k}+|\tilde{Q}*\tilde{Q}|\sigma_1^2+2|\tilde{Q}|\sigma_1|\tilde{\tau}_{ik,k}|\Big)\\&\leqslant\sum_{i,j,k}^{n}\tilde{\tau}^{ii}(\tilde{\tau}_{jj}\tilde{\tau}^{jj}\tilde{\tau}^2_{ij,k})+C_3\mathcal{F}^{ii}\sigma_1^2+C_4\mathcal{F}^{ii}\sigma_1^2\beta e^{\beta(m_2-\tilde{s})}|\tilde{s}_i|\\&\leqslant\sum_{l}^{n}\tilde{\tau}_{ll}\sum_{i,j,k}^{n}\tilde{\tau}^{ii}\tilde{\tau}^{jj}\tilde{\tau}^2_{ij,k}+C_3\mathcal{F}^{ii}\sigma_1^2+\frac{1}{2}C_5\beta^{\frac{3}{2}}e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\mathcal{F}^{ii}\sigma_1^2\tilde{s}_i^2+\frac{1}{2}C_6\beta^{\frac{1}{2}}e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\mathcal{F}^{ii}\sigma_1^2,\end{aligned}$$

其中第二个不等式由 (4.26) 和 (4.24) 得出。因此，我们得到

$$\frac{\mathcal{F}^{ii}\tilde{\tau}^2_{kk,i}}{\sigma_1^2}\leqslant\frac{\tilde{\tau}^{ii}\tilde{\tau}^{jj}\tilde{\tau}^2_{ij,k}}{\sigma_1}+C_3\mathcal{F}^{ii}+\frac{1}{2}C_5\beta^{\frac{3}{2}}e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\mathcal{F}^{ii}\tilde{s}_i^2+\frac{1}{2}C_6\beta^{\frac{1}{2}}e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\mathcal{F}^{ii}.$$

我们还有

$$\begin{aligned}-\sum_{i}^{n}\mathcal{F}^{ii}e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\beta\tilde{s}_{ii}&=-e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\beta\mathcal{F}^{ii}(\tilde{\tau}_{ii}+\frac{1}{2}\tilde{Q}_{ii\ell}\tilde{s}_\ell-\tilde{s})\\&\geqslant m_1e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\beta\mathcal{F}^{ii}-\frac{1}{2}\beta e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\mathcal{F}^{ii}\tilde{Q}_{ii\ell}\tilde{s}_\ell-C_6.\end{aligned}$$

最后，我们得到

$$0\geqslant\mathcal{F}^{ij}P_{ij}\geqslant e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\mathcal{F}^{ii}\tilde{s}_i^2\Big(\beta^2-\frac{C_5\beta^{\frac{3}{2}}}{2}\Big)+e^{\beta(m_2-\tilde{s})}\mathcal{F}^{ii}\Big(m_1\beta-\frac{C_6\beta^{\frac{1}{2}}}{2}-C_3\Big)-C_6,$$

并且，取足够大的 β，我们得到

$$\sum_{i}^{n}\mathcal{F}^{ii}\leqslant C_7, \tag{4.27}$$

其中，C_7取决于 p、n、m_1、m_2、$\|f\|_{C^2}$、$\|\tilde{s}\|_{C^1}$和 $\|F\|_{C^5}$。

回顾以下基本不等式（见 [56]）：

$$\frac{\sum_{i}^{n}\lambda_i}{\prod_{i}^{n}\lambda_i}\leqslant\Big(\sum_{i}^{n}\lambda_i^{-1}\Big)^{n-1}\quad for\ \lambda_i>0,\quad\forall i=1,\cdots,n.$$

由（4.21）和（4.27），可得

$$\sigma_1\leqslant C_7^{n-1}\prod_{i}^{n}\tilde{\tau}_{ii}\leqslant C.$$

情形 II。 $\xi_0\in\partial\mathcal{C}_{\omega_0}$。我们在 ξ_0 附近选取一个满足 $\{e_i\}_{i=1}^n e_n=\frac{\mu_F}{|\mu_F|_{\tilde{g}}}$ 的标准正交标架，并记 $\tilde{\tau}_{nn}=$的最大值为$\{\tilde{\tau}_{ii}|i=1,\cdots,n\}>0$。由（4.23），可得

$$\begin{aligned}f^*_{,n}=\mathcal{F}^{ii}\tilde{\tau}_{ii,n}&=\mathcal{F}^{nn}\tilde{\tau}_{nn,n}+\mathcal{F}^{\alpha\alpha}\tilde{\tau}_{\alpha\alpha,n}\\&=\mathcal{F}^{nn}\tilde{\tau}_{nn,n}+\mathcal{F}^{\alpha\alpha}\tilde{Q}_{\alpha\alpha n}(\tilde{\tau}_{\alpha\alpha}-\tilde{\tau}_{nn}),\end{aligned}$$

这意味着

$$\tilde{\tau}_{nn,n}=\frac{f^*_{,n}}{\mathcal{F}^{nn}}-\frac{\mathcal{F}^{\alpha\alpha}}{\mathcal{F}^{nn}}\tilde{Q}_{\alpha\alpha n}(\tilde{\tau}_{\alpha\alpha}-\tilde{\tau}_{nn}).$$

˜由于 $0 \leqslant \sigma_1 \cdot \nabla_n P(\xi_0) = \sigma_{1,\ n}$，在 ξ_0 处我们有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mathcal{F}^{nn}\sigma_{1,n} &\leqslant f^*_{,n} - \mathcal{F}^{\alpha\alpha}\tilde{Q}_{\alpha\alpha n}(\tilde{\tau}_{\alpha\alpha} - \tilde{\tau}_{nn}) + \mathcal{F}^{nn}\tilde{Q}_{\alpha\alpha n}(\tilde{\tau}_{\alpha\alpha} - \tilde{\tau}_{nn}) \\ &= f^*_{,n} + (-\tilde{Q}_{\alpha\alpha n})(\tilde{\tau}_{\alpha\alpha} - \tilde{\tau}_{nn})(\mathcal{F}^{\alpha\alpha} - \mathcal{F}^{nn}) \\ &= f^*_{,n} + (-\tilde{Q}_{\alpha\alpha n})\sum_i(\tilde{\tau}_{ii} - \tilde{\tau}_{nn})(\mathcal{F}^{ii} - \mathcal{F}^{nn}) \\ &\leqslant f^*_{,n} + (-\tilde{Q}_{\alpha\alpha n})(n+1 - \mathcal{F}^{nn}\sigma_1 - \tilde{\tau}_{nn}\sum_i \mathcal{F}^{ii}) \\ &\leqslant f^*_{,n} + (-\tilde{Q}_{\alpha\alpha n})(n+1 - \mathcal{F}^{nn}\sigma_1). \end{aligned} \tag{4.28}$$

因此，

$$\sigma_1 \leqslant \frac{C_8}{\mathcal{F}^{nn}} + \frac{n+1}{\mathcal{F}^{nn}}. \tag{4.29}$$

接下来，我们证明 $\mathcal{F}^{nn}$ 不能太小。可以看出，

$$0 \leqslant \mathcal{F}^{nn}\sigma_{1,n} \leqslant f^*_{,n} + (-\tilde{Q}_{\alpha\alpha n})\Big(n+1 - \mathcal{F}^{nn}\sigma_1 - \frac{\sum_i \mathcal{F}^{ii}}{\mathcal{F}^{nn}}\Big).$$

算术几何平均不等式表明

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{F}^{ii} \geqslant n(\det \tilde{\tau}_{ij})^{-\frac{1}{n}} \geqslant n\big(\min_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{f}^{-1}(\tilde{s}^{1-p})\big)^{\frac{1}{n}} \geqslant C_9. \tag{4.30}$$

显然，如果 $\mathcal{F}^{nn}$ 太小，就与最大值在边界点处取得这一事实矛盾。无论最大值在哪里取得，对于可容许解 $\tilde{s}$，我们都有

$$0 < 2\sigma_2 = \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\tau}_{ii}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^n |\tilde{\tau}_{ij}|^2,$$

于是得到（4.20）。

若 $p \in$ （$n+1$，$n+2$），由（4.28）和（4.30）可知，（C）中的常数4.20与 p 无关。

由此，我们完成了引理4.10的证明。 □

命题 4.11. 考虑方程 $\hat{s}$的一个可容许解 (1.9)。设指数 p 和接触常数 ω_0 满足以下条件之一：

(1) $p = 1$ *or* $p \geqslant n+1$,*and* $\omega_0 \in \big(-F(E_{n+1}),\ F(-E_{n+1})\big)$ *together with Condition* (1.7)*;*

(2) $1 < p < n+1$ *and* $\omega_0 \in \big(-F(E_{n+1}),\ 0\big]$ *together with Condition* (1.7).

对每个积分 $k \geqslant 1$ 和 $\gamma \in (0,1)$，存在一个常数 C，它依赖于p、n、k、γ、$\|f\|_{C^{k+1}(\mathcal{C}_{\omega_0})}$以及$\|F\|_{C^{k+3}(\mathcal{C}_{\omega_0})}$，使得

$$\|\hat{s}\|_{C^{k+1,\gamma}(\mathcal{C}_{\omega_0})} \leqslant C. \tag{4.31}$$

此外，若 $n+1 < p < n+2$，则式 C 中 (4.31) 的常数与 p无关。

证明。 结合引理 4.2、引理 4.3、引理 4.8 和引理4.10，我们得到 n

$$\|\hat{s}\|_{C^2(\mathcal{C}_{\omega_0})} \leqslant C.$$

利用完全非线性二阶一致椭圆方程的斜导数边界条件理论（例如参见 [33, 定理 1。1]），可以得到 $C^{2,\ \gamma}$ Schauder 估计和高阶估计，如（4.31）所示。至此，证明完成。 □

5. Proof of Theorem 1.2 ($p = 1$)

在本节中，我们采用 [11,35,44,52] 中的连续性方法来完成定理1.2的证明。

令 $L_{\hat{s}}$ 为 $\hat{s} \mapsto \det(\tau_{ij}[\hat{s}])$ 的线性化算子，即，

$$L_{\hat{s}}(v) := \mathcal{G}^{ij}\left(v_{ij} + v\mathring{g}_{ij} - \frac{1}{2}Q_{ijk}v_k\right) = \mathcal{G}^{ij} \cdot \tau_{ij}[v], \tag{5.1}$$

对任意 $v \in C^{\infty}(\mathcal{C}_{\omega_0})$ 均成立。这里 $\mathcal{G}^{ij} := \frac{\partial}{\det(\tau[\hat{s}])\,\partial\tau_{ij}}$，$v_k = \mathring{\nabla}_k v, v_{ij} = \mathring{\nabla}_i\mathring{\nabla}_j v$，$\tau_{ij}[v] = v_{ij} - \frac{1}{2}Q_{ijk}v_k + v\mathring{g}_{ij}$，且 $\mathring{\nabla}$ 是相对于各向异性度量 $\mathring{g}$的 $(\mathcal{C}_{\omega_0}, \mathring{g})$ 的 Levi-Civita 联络。因此，对于常数 $\{a_i\}_{i=1}^n$，函数 $L(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i G(\mathcal{T}^{-1}\xi)\left(\mathcal{T}^{-1}\xi, E_i\right)$ 满足

$$L_{ij} - \frac{1}{2}Q_{ijk}L_k + L\delta_{ij} = 0, \text{ in } \mathcal{C}_{\omega_0},$$

and

$$\mathring{\nabla}_{\mu_F} L = \frac{\omega_0}{F(\nu)\langle E_{n+1}, \mu\rangle} L, \text{ on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}.$$

关于证明细节，可参见 [52, 式 (4.1)] 和 [15, 引理 5.1]。因此，若$\hat{s}$是满足 (1.4) 的各向异性毛细凸函数，则对于任意常数L，$\hat{s} + L$ 也是一个解。根据 [18], 命题 3.5，$\hat{s}$ 和$\hat{s} + L$ 分别与各向异性毛细凸体一一对应，我们分别将其记为 Σ_1 和 Σ_2。这两个凸体通过平移相关：$\Sigma_2 = \Sigma_1 + \sum_{i=1}^n a_i E_i$ 其中$\widehat{\ }$为某些系数 a_i。如果原点不是 $\partial\Sigma_1 \subset \mathbb{R}^n$的内部点，我们可以用适当的向量 $\sum_{i=1}^n a_i E_i \in \mathbb{R}^n$平移 Σ_1，使平移后的区域$\frown\partial\Sigma_2$ 包含原点且原点位于其内部。

注 5.1. 这一观察使我们能够不失一般性地假设，各向异性毛细超曲面 Σ由问题$\widehat{\ }$ (1.4) 的解所确定，并且满足 $\partial\Sigma$ 以原点为内部点。

Let

$$f_t := (1-t) + tf, \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

考虑该问题

$$\begin{cases} \det(\tau[\hat{s}]) &= f_t, & \text{in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \mathring{\nabla}_{\mu_F}\hat{s} &= \frac{\omega_0}{F(\nu)\langle\mu, E_{n+1}\rangle}\hat{s}, & \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}. \end{cases} \tag{5.2}$$

定义该集合

$$\mathcal{H} := \left\{\hat{s} \in C^4(\mathcal{C}_{\omega_0}) : \mathring{\nabla}_{\mu_F}\hat{s} = \frac{\omega_0}{F(\nu)\langle\mu, E_{n+1}\rangle}\hat{s} \text{ on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}, \text{ and } \tau[\hat{s}] > 0 \text{ in } \mathcal{C}_{\omega_0}\right\}.$$

我们记

$$\mathcal{I} := \{t \in [0,1] : \text{ Eq. (5.2) has a solution in } \mathcal{H}\},$$

我们将方程（5.2）改写为

$$\mathcal{G}(\tau[\hat{s}]) := \det(\tau[\hat{s}]) = f_t, \tag{5.3}$$

以及方程（ $L_{\hat{s}}$ 的线性化算子5.3）由（5.1）定义。接下来，以下引理表明，算子 $L_{\hat{s}}$ 的核仅包含张成空间$\{G((\xi))(\mathcal{T}^{-1}\xi, E_i)\}_{i=1}^n$ 中的函数，其中 $\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0}$，见 [18, 引理 4。1]。

引理 5.1。 设 $f(\xi) \in C^2(\mathcal{C}_{\omega_0})$ 是一个满足 $\tau[f] = 0$ 的函数。那么

$$f = \sum_{\alpha=1}^{n+1} a_\alpha G(\mathcal{T}^{-1}\xi)(\mathcal{T}^{-1}\xi, E_\alpha), \tag{5.4}$$

对某些常数 $a_1, \cdots, a_{n+1}$。此外，若 f 也满足边界条件 (3.4)，则 $a_{n+1} = 0$，即

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i G(\mathcal{T}^{-1}\xi)(\mathcal{T}^{-1}\xi, E_i),$$

对某些常数 a_1、$\cdots$、a_n。这里 $\{E_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$的水平坐标单位向量。

上述引理表明:

引理 5.2. 设 $v \in \mathcal{H}$ 与 $L_{\hat{s}}(v) = 0$，其中 $\hat{s}_{ij} - \frac{1}{2}Q_{ijk}\hat{s}_k + \mathring{g}_{ij}\hat{s} > 0$。则

$$v(\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i G(\mathcal{T}^{-1}\xi)(\mathcal{T}^{-1}\xi, E^i),$$

对某些常数 a_1、$\cdots$、a_n。

我们现在证明 $L_{\hat{s}}$ 是一个自伴算子，这是后续分析的一个关键性质。

引理 5.3. 对于任意 $\hat{s}, v, w \in \mathcal{H}$，有

$$\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} wL_{\hat{s}}v \, d\mu_F = \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} vL_{\hat{s}}w \, d\mu_F.$$

证明. 假设 $d\mu_F = \varphi \, d\mu_{\mathring{g}}$，则

$$\varphi_i = -\frac{1}{2}\varphi \sum_{k=1}^{n} Q_{ikk},$$

参见 [52, 引理 2.8]。该 [52, 式 (5.10)] 表明

$$\mathring{\nabla}_j \mathcal{G}^{ij} \cdot v_i \cdot \varphi + \mathcal{G}^{ij} \cdot \left(v_i\varphi_j + \frac{1}{2}Q_{ijk}v_k\varphi \right) = 0. \tag{5.5}$$

应用分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} wL_{\hat{s}}(v) \, d\mu_F = \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} w\mathcal{G}^{ij} \left(v_{ij} - \frac{1}{2}Q_{ijk}v_k + v\mathring{g}_{ij} \right) \varphi \, d\mu_{\mathring{g}} \\
&= -\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \mathcal{G}^{ij} w_i v_j \varphi \, d\mu_{\mathring{g}} + \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \mathcal{G}^{ij}\mathring{g}_{ij} wv\varphi \, d\mu_{\mathring{g}} + \int_{\partial\mathcal{C}_{\omega_0}} \mathcal{G}^{ij} \cdot w \cdot v_j \varphi \frac{(\mu_F)^i}{|\mu_F|_{\mathring{g}}} \, ds \\
&\quad - \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} w \left\{ \left(\mathcal{G}^{ij}\right)_j v_i\varphi + \mathcal{G}^{ij} \left(v_i\varphi_j + \frac{1}{2}Q_{ijk}v_k\varphi \right) \right\} d\mu_{\mathring{g}} \\
&= \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \mathcal{G}^{ij}(\mathring{g}_{ij} wv - w_i v_j) \, d\mu_F + \int_{\partial\mathcal{C}_{\omega_0}} \mathcal{G}^{nn} w\varphi v \frac{\omega_0}{|\mu_F|_{\mathring{g}} F(\nu)\langle \mu, E_{n+1}\rangle} \, ds,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中用到了这一事实 $\tau_{\alpha n} = 0$，参见 [15, 注 3.1]。由此完成引理 5.3的证明。 □

以下结论可由引理 5.3直接得到。它也推广了必要条件（1.8）。

推论 5.4。 对于任意 $\hat{s} \in \mathcal{H}$，有

$$\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} G(z)(z, E_i) \det(\tau[\hat{s}]) \, d\mu_F = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

定理 1.2 的证明。首先，我们证明方程 (1.4) 的存在性。对于 $t = 0$, $\hat{s} = \ell \in \mathcal{H}$ 是一个解，即 $0 \in \mathcal{I}$，因此集合 $\mathcal{I}$ 非空。接下来，我们将应用隐函数定理来证明 $\mathcal{I}$ 的开性。令 W^m,2 为 $(\mathcal{C}_{\omega_0}, \hat{g})$ 的索об列夫空间。取充分大的 m ，使得 W^m,2($\mathcal{C}_{\omega_0}$) $\subset C^4(\mathcal{C}_{\omega_0})$。将 $L_{\hat{s}}$ 视为从 W^{m+2},2($\mathcal{C}_{\omega_0}$) 到 W^m,2($\mathcal{C}_{\omega_0}$) 的有界线性映射。引理 5.3 和引理 5.2 表明

$$\mathrm{Image}(L_{\hat{s}}) = \mathrm{Ker}(L_{\hat{s}}^*)^{\perp} = (\mathrm{Span}\{G(z)(z, E_1), \cdots, G(z)(z, E_n)\})^{\perp},$$

这意味着对于任意 $f \in W^{m,}$,2($\mathcal{C}_{\omega_0}$) 满足 (1.8) 的情形，都有 $f \in$ 像($L_{\hat{s}}$)，也就是说，$L_{\hat{s}}$ 是满射。标准的隐函数定理表明 $\mathcal{G}$ 在 $\hat{s}$附近局部可逆，进而得到 $\mathcal{I}$的开性。

由命题 4.11可知闭性，因此我们得出 $\mathcal{I} = [0, 1]$。由此，我们证明了各向异性毛细管 Minkowski 问题存在可容许解。

现在转向唯一性部分。应用引理 5.2 和引理 5.3 ，并沿用 [52], 中的论证，我们发现，对于具有相同高斯-克罗内克曲率的两个各向异性毛细超曲面 Σ 和 Σ' ，

$$\Sigma(\xi) - \Sigma'(\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i E^i \in \partial\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}},$$

这意味着 Σ 在水平平移意义下唯一。 □

6. Proof of Theorem 1.4 ($p > 1$)

现在我们准备证明定理 1.4。令

$$f_t := (1 - t) + t\tilde{f}, \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

其中 $\tilde{f} = f\ell^{p-1}$。考虑问题

$$\begin{cases} \det\left(\tilde{s}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k + \tilde{s}\tilde{g}_{ij}\right) = f_t\tilde{s}^{p-1}, & \text{in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \tilde{\nabla}_{e_n}\tilde{s} = 0, & \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}. \end{cases} \tag{6.1}$$

定义集合

$$\mathcal{H} := \left\{ h \in C^{4,\alpha}(\mathcal{C}_{\omega_0}) : \tilde{\nabla}_{e_n} h = 0 \text{ on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0} \right\},$$

且当 $p > n + 1$ 时，我们记

$$\mathcal{I} := \{t \in [0, 1] : \text{ Eq. (6.1) has a positive solution in } \mathcal{H}\},$$

当 $1 < p < n + 1$ 时，我们记

$\mathcal{I}$: $= \{t \in [0, 1]$: 方程（6.1）在 $\mathcal{H}\}$.我们将方程（6.1）改写为

$$\mathcal{G}(\tilde{\tau}) := \det(\tilde{\tau}) = \tilde{s}^{p-1} f_t, \tag{6.2}$$

以及方程的线性化算子 $L_{\tilde{s}}$ （6.2）为

$$L_{\tilde{s}}(v) := \mathcal{G}^{ij}\left(v_{ij} + v\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}v_k\right) - (p - 1)f_t h^{p-2}v,$$

其中 $v_k = \tilde{\nabla}_k v$，$v_{ij} = \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j v$，且 $\mathcal{G}^{ij} := \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tilde{\tau}_{ij}}(\tilde{\tau})$。由于 $\tilde{s}$ 是各向异性毛细凸函数（见定义3.4），我们知道 $\mathcal{G}^{ij}$ 是正定矩阵。接下来，我们采用 [22, 第 4 节。3] 中的技巧，并证明当 $L_{\tilde{s}}$ 时，算子 $p \neq n+1$的核是平凡的。

引理 6.1. 设 $p \neq n+1 > 1$。若 $v \in \mathcal{H}$, $v \in \mathrm{Ker}\,(L_{\tilde{s}})$、$\tilde{\tau}[v] > 0$、$\tilde{\tau}[\tilde{s}] > 0$ 和 $\tilde{s} > 0$, 则 $v \equiv 0$。

证明。设 $v \in \mathbf{Ker}\,(L_{\tilde{s}})$，则

$$\mathcal{G}^{ij} \cdot \left(v_{ij} + v\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk} v_k \right) - (p-1)\tilde{s}^{-1} \det(\tilde{\tau})\, v = 0. \tag{6.3}$$

将 (6.3) 乘以 $\tilde{s}$并在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$ 上积分，得到

$$(p-1) \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} v \cdot \det(\tilde{\tau})\, d\mu_F = \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot \left(v_{ij} + v\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk} v_k \right) d\mu_F. \tag{6.4}$$

类似地，记 $d\mu_F = \varphi d\mu_{\tilde{g}}$ 在 $(\mathcal{C}_{\omega_0}, \tilde{g})$ 中，(5.5) 蕴含

$$\tilde{\nabla}_j \mathcal{G}^{ij} \cdot v_i \cdot \varphi = -\mathcal{G}^{ij} \cdot \left(v_i \varphi_j + \frac{1}{2}\tilde{Q}^k_{ij} v_k \varphi \right) = \frac{1}{2}\mathcal{G}^{ij} \cdot \left(\tilde{Q}^k_{jk} v_i - \tilde{Q}^k_{ij} v_k \right) \cdot \varphi. \tag{6.5}$$

应用引理 4.5，可得 $0 = \tilde{\tau}_{\alpha n} = \left(\tilde{s}_{\alpha n} + \tilde{s}\tilde{g}_{\alpha n} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{\alpha n k}\tilde{s}_k \right)$ 对于 $e_\alpha \in T(\partial \mathcal{C}_{\omega_0})$。

结合边界条件，可得

$$\int_{\partial \mathcal{C}_{\omega_0}} \mathcal{G}^{ij} \cdot \tilde{s} \cdot v_i \cdot \tilde{g}_{jn} \varphi - \mathcal{G}^{ij} \cdot \tilde{s}_j \cdot v \cdot \tilde{g}_{in} \varphi \; ds = 0. \tag{6.6}$$

分部积分两次可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v_{ij} \; d\mu_F = \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v_{ij} \cdot \varphi \; d\mu_{\tilde{g}} \\
=& \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} -\tilde{s}_j \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v_i \cdot \varphi - \tilde{s} \cdot \tilde{\nabla}_j \mathcal{G}^{ij} \cdot v_i \cdot \varphi - \tilde{s} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v_i \cdot \varphi_j \; d\mu_{\tilde{g}} \\
&+ \int_{\partial \mathcal{C}_{\omega_0}} \mathcal{G}^{ij} \cdot \tilde{s} \cdot v_i \cdot \tilde{g}_{jn} \varphi \; ds \\
=& \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s}_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v \cdot \varphi + \tilde{s}_j \cdot \tilde{\nabla}_i \mathcal{G}^{ij} \cdot v \cdot \varphi + \tilde{s}_j \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v \cdot \varphi_i \\
&- \tilde{s} \cdot \tilde{\nabla}_j \mathcal{G}^{ij} \cdot v_i \cdot \varphi - \tilde{s} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v_i \cdot \varphi_j \; d\mu_{\tilde{g}} \\
&+ \int_{\partial \mathcal{C}_{\omega_0}} \mathcal{G}^{ij} \cdot \tilde{s} \cdot v_i \cdot \tilde{g}_{jn} \varphi - \mathcal{G}^{ij} \cdot \tilde{s}_j \cdot v \cdot \tilde{g}_{in} \varphi \; ds \\
\overset{(6.5),(6.6)}{=}& \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s}_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot \left(\tilde{Q}^k_{ik} \tilde{s}_j - \tilde{Q}^k_{ij} \tilde{s}_k \right) \cdot v - \frac{1}{2} \tilde{s}_j \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v \cdot \tilde{Q}^k_{ik} \\
&- \tilde{s} \cdot \frac{1}{2}\mathcal{G}^{ij} \cdot \left(\tilde{Q}^k_{jk} v_i - \tilde{Q}^k_{ij} v_k \right) + \frac{1}{2} \tilde{s} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v_i \cdot \tilde{Q}^k_{jk} \; d\mu_F \\
=& \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s}_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot v - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot \tilde{Q}^k_{ij} \tilde{s}_k \cdot v + \tilde{s} \cdot \frac{1}{2}\mathcal{G}^{ij} \cdot \tilde{Q}^k_{ij} v_k \; d\mu_F.
\end{aligned}$$

将其代入（6.4）可得

$$(p-1) \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} v \cdot \det \left(\tilde{s}_{ij} + \tilde{s}\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k \right) d\mu_F$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} v \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot \left(\tilde{s}_{ij} + \tilde{s}\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k \right) d\mu_F \\
&= n \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} v \cdot \det \left(\tilde{s}_{ij} + \tilde{s}\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k \right) d\mu_F.
\end{aligned}
$$

由于 $p \neq n+1$，我们有

$$
\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} v \cdot \det \left(\tilde{s}_{ij} + \tilde{s}\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k \right) d\mu_F = 0. \tag{6.7}
$$

作为 [15, 定理 1.1], 我们有

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} v \det \left(\tilde{s}_{ij} + \tilde{s}\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k \right) d\mu_F \right)^2 \\
&\geqslant \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s} \det \left(\tilde{s}_{ij} + \tilde{s}\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k \right) d\mu_F \cdot \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} v\mathcal{G}^{ij} \left(v_{ij} + v\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}v_k \right) d\mu_F.
\end{aligned}
$$

结合（6.7），可得

$$
\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} v\mathcal{G}^{ij} \left(v_{ij} + v\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}v_k \right) d\mu_F \leqslant 0. \tag{6.8}
$$

类似于（6.7），将（6.4）乘以 v 并在 $\mathcal{C}_{\omega_0}$上积分，得到

$$
\begin{aligned}
&(p-1) \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s}^{-1} v^2 \det \left(\tilde{s}_{ij} + \tilde{s}\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k \right) d\mu_F \\
&= \int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} v\mathcal{G}^{ij} \left(v_{ij} + v\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}v_k \right) d\mu_F.
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

由于 $p > 1$ 并结合（6.8）和（6.9），我们推得

$$
\int_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s}^{-1} v^2 \det \left(\tilde{s}_{ij} + \tilde{s}\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k \right) d\mu_F = 0,
$$

这意味着 $v \equiv 0$。 □

定理的证明 ***1.4***. 首先，我们证明 (1) 和 (3) 的存在性部分。令$p > 1$ 且 $p \neq n+1$。考虑方程 (6.1)。对于 $t = 0$, $\tilde{s} \equiv 1 \in \mathcal{H}$ 是一个解，即 $0 \in \mathcal{I}$，因此集合 $\mathcal{I}$ 非空。由命题 $\mathcal{I}$ 可知4.11， $\mathcal{I}$ 的开性则由隐函数定理、引理 6.1以及 Fredholm择一定理得出。于是 $1 \in \mathcal{I}$，即我们得到方程 (4.16) 的一个正解。

接下来证明 (2)，即 $p = n+1$。若 $n+1 < p < n+2$，函数$\bar{u} := \frac{s}{\overline{\tilde{s}}}$ $\min_{\omega_0} c$ 满足

$$
\begin{aligned}
\det(\bar{u}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\bar{u}_k + \tilde{g}_{ij}\bar{u}) &= (\min_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s})^{p-(n+1)} \tilde{f}\bar{u}^{p-1}, \quad in\ \mathcal{C}_{\omega_0}, \\
\tilde{\nabla}_{e_n}\bar{u} &= 0, \qquad\qquad on\ \partial\mathcal{C}_{\omega_0}.
\end{aligned}
$$

引理 4.2 说明 $(\min_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s})^{p-(n+1)}$ 具有一致正的上下界。由引理 4.9和引理 4.10，可得

$$
1 \leqslant \bar{u} \leqslant C, \quad |\tilde{\nabla}\bar{u}| \leqslant C, \quad \|\bar{u}\|_{C^2(\mathcal{C}_{\omega_0})} \leqslant C.
$$

因此，应用 Evans-Krylov定理和 Schauder理论，我们得到

$$
\|\bar{u}\|_{C^{3,\gamma}(\mathcal{C}_{\omega_0})} \leqslant C_1, \tag{6.10}
$$

其中 C_1 与 p无关。

对于固定的正数常数 $\varepsilon \in (0,1)$，考虑近似方程：

$$\begin{cases} \det\left(\tilde{s}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k + \tilde{s}\tilde{g}_{ij}\right) &= \tilde{f}\tilde{s}^{n+\varepsilon}, \text{ in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \tilde{\nabla}_{e_n}\tilde{s} &= 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}. \end{cases} \tag{6.11}$$

根据前述讨论，我们得出存在一个正函数$\tilde{s}_\varepsilon \in C^{3,\gamma}(\mathcal{C}_\theta)$，它是方程 (6.11) 的解。记

$$\bar{u}_\varepsilon := \frac{\tilde{s}_\varepsilon}{\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s}_\varepsilon},$$

我们知道 $\bar{u}_\varepsilon$ 满足方程：

$$\begin{cases} \det\left(\tilde{s}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\tilde{s}_k + \tilde{s}\tilde{g}_{ij}\right) &= (\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s}_\varepsilon)^\varepsilon \tilde{f}\tilde{s}^{n+\varepsilon}, \text{ in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \tilde{\nabla}_{e_n}\tilde{s} &= 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}. \end{cases} \tag{6.12}$$

(6.10) 蕴含

$$\|\bar{u}_\varepsilon\|_{C^{3,\gamma}(\mathcal{C}_{\omega_0})} \leqslant C,$$

其中常数 C与 ε 无关，且仅依赖于 n、k、α、$\|f\|_{C^{k+1}(\mathcal{C}_{\omega_0})}$ 和$\|F\|_{C^{k+3}(\mathcal{C}_{\omega_0})}$。因此，存在一个子列 $\varepsilon_j \to 0$，使得对于任意 $0 < \gamma_0 < \gamma$，$\bar{u}_{\varepsilon_j} \to \bar{s}$属于 $C^{2,\gamma_0}(\mathcal{C}_{\omega_0})$，并且由引理 4.2 可知，当 $j \to +\infty$ 时，对于某个正常数 $\tilde{\eta}$，有 $\left(\min\limits_{\mathcal{C}_{\omega_0}} \tilde{s}_{\varepsilon_j}\right) \to \tilde{\eta}$。由此我们得出，数对 $(\bar{s}, \tilde{\eta})$ 满足

$$\begin{cases} \det\left(\bar{s}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{ijk}\bar{s}_k + \bar{s}\tilde{g}_{ij}\right) &= \tilde{\eta}\tilde{f}\bar{s}^n, \quad \text{in } \mathcal{C}_{\omega_0}, \\ \tilde{\nabla}_{e_n}\bar{s} &= 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{C}_{\omega_0}. \end{cases} \tag{6.13}$$

因此，我们证明了情形 $p = n+1$的存在性部分。定理1.4的唯一性证明分为三种情形：

- 情形 $p = n+1$：我们按照 [21, 引理8]以及 [12,第 3]节中的思想来建立该结果。
- 情形 $1 < p < n+1$ 与 $p > n+1$：这些可类似于 [22, 第 4 节3] 和 [39, 第3节 2] 中的论证加以处理（另见 [14, 定理5.2]）。细节相似，故从略。

现在我们验证情形 $p = n+1$的唯一性。首先，假设$(\eta_1, \hat{s}_1)$与$(\eta_2, \hat{s}_2)$是(6.13)的两个解。记 Σ_1 和 Σ_2 分别为由毛细凸函数$\hat{s}_1$ 和$\hat{s}_2$所确定的各向异性毛细超曲面。通过将$\hat{s}_2$ 乘以一个适当的常数，我们可以假定 Σ_2 包含于Σ_1内部，且在某一点处与 Σ_1相接触。在该点（记为 ξ_0）处，我们有$\hat{s}_1(\xi_0) = \hat{s}_2(\xi_0)$，并且

$$\begin{aligned} \eta_1 f(\xi_0)\hat{s}_1^n(\xi_0) &= \det(\tau[\hat{s}_1]) \\ &\geqslant \det(\tau[\hat{s}_2]) \\ &= \eta_2 f(\xi_0)\hat{s}_2^n(\xi_0). \end{aligned}$$

因此 $\eta_1 \geqslant \eta_2$。由对称性可得 $\eta_1 = \eta_2$。接下来，假设$\hat{s}_1$ 和$\hat{s}_2$ 是方程 (6.13) 的两个不同解，且具有相同的 η_0。将$\hat{s}_2$ 乘以一个适当的常数后，我们可以假设集合 $E = \{\xi \in \mathcal{C}_{\omega_0} : \hat{s}_1(\xi) > \hat{s}_2(\xi)\}$ 是 $\mathcal{C}_{\omega_0}$内部的一个开集。当$\hat{s}_2$ 不是$\hat{s}_1$ 的常数倍时，我们总能这样做。令 Ω 为 E 的一个连通分支。那么$\hat{s}_1$ 和$\hat{s}_2$ 都满足

$$\begin{cases} \det(\tau[\hat{s}_i]) = \gamma f \hat{s}_i^n, & \text{in } \Omega, \\ \hat{s}_1 = \hat{s}_2, & \text{on } \partial\Omega, \\ \hat{s}_1 > \hat{s}_2, & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

但根据 [20, 定理 174]中的比较原理，这是不可能的。 □

Reference

[1] A. D. Alexandroff，凸体混合体积理论，II：混合体积之间的新不等式及其应用。 *Mat. Sbornik N.S.*，2 (1937), 1205–1238（俄文）。[2] A. D. Alexandroff，混合体积理论。III. 将 Minkowski 关于凸多面体的两个定理推广到任意凸体。 *Mat. Sbornik N.S.*，3 (1938), 27–46（俄文；附德文摘要）。[3] A. D. Alexandroff，凸体的面积测度。 *Mat. Sbornik N.S.*，6 (1939), 167–174（俄文；附德文摘要）。[4] A. D. Alexandroff，有界高斯曲率凸曲面的光滑性。

C. R.，( )，–。

(Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **36** 1942 195 199

[5] B. Andrews，保体积各向异性平均曲率流。 *Indiana Univ. Math. J.*，50 2001 783 827 ( )，-。[6] K. J. B

¨ ¨ *J.*

Amer. Math. Soc. **26** 2013 831 852

oroczky、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，对数Minkowski问题。，( )，–。[7] E. Calabi，凸型非正常仿射超曲面及 K. J¨orgens 定理的推广。 *Michigan Math. J.*，5 (1958), 105–126。[8] L. Caffarelli、L. Nirenberg 和 J. Spruck，非线性二阶椭圆方程的狄利克雷问题。I. Monge-Amp`ere 方程。 *Comm. Pure Appl. Math.*，37 (1984), 369–402。[9] S. Chen、Q. Li 和 G. Zhu，关于 $L_p$ Monge-Amp`ere 方程。 *J. Differential Equations*，263 2017 4997 5011 ( )，–。[10] Z. Chen，*A priori* 对数凹测度下各向异性L_p Minkowski问题的界、光滑解的存在性与唯一性。 *Adv. Nonlinear Stud.*，23 (2023)，论文编号 20220068，21页。[11] S. Y. Cheng 和 S. T. Yau，关于 n维 Minkowski 问题解的正则性。 *Comm. Pure Appl. Math.*，29 (1976), 495–516。[12] K. S. Chou 和 X. Wang，中心仿射几何中的 L_p-Minkowski 问题与 Minkowski 问题。 *Adv. Math.*，205 (2006), 33–83。[13] S. Ding 和 G. Li，一类各向异性流与对偶 Orlicz Christoffel-Minkowski 型方程。 *J. Differential Equations*，445 (2025)，论文编号 113586，34页。[14] S. Ding 和 G. Li，一类逆曲率流与 L^p 对偶 Christoffel-Minkowski 问题。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，376 (2023), 697–752。[15] S. Ding、J. Gao 和 G. Li，各向异性平均曲率型流与毛细管 Alexandrov-Fenchel 不等式（2025）。arXiv:arXiv:2408.10740v2。[16] W. Fenchel 和 B. Jessen，集合函数与凸

¨ *Danske Vid. Selskab.* 体。，

Mat.-fys. Medd. **16** 1938 1 31

( )，–。[17] J. Gao 和 G. Li，各向异性毛细超曲面的广义Minkowski公式与刚性结果（2024）。arXiv:2401.12137。[18] J. Gao 和 G. Li，半空间中凸各向异性毛细超曲面的 Alexandrov-Fenchel 不等式（2025）。arXiv:2507.04796。[19] M. Ghomi，非零曲率超曲面的高斯映射、拓扑与凸性。 *Topology*，41 (2002), 107–117。[20] D. Gilbarg 和 N. Trudinger，*Elliptic partial differential equations of second order*。数学经典丛书。Springer-Verlag，柏林，2001。[21] P. Guan 和 C. Lin，关于方程 $\det(u_{ij} + \delta_{ij}u) = u^p f$ 在 $\mathbb{S}^n$上，预印本。[22] P. Guan 和 C. Xia，

L^p $1 < p < k + 1$ *Calc. Var.*

Partial Differential Equations **57** 2018 69, 23

Christoffel-Minkowski 问题：情形 。，( )，论文编号 。[23] J. Guo 和 C. Xia，半空间中的稳定各向异性毛细超曲面（2024）。arXiv:2301.03020。[24] C. Haberl、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，偶 Orlicz Minkowski 问题。

Adv.，( )，–。

Math. **224** 2010 2485 2510

[25] J. Hu、Y. Hu 和 M. Ivaki，毛细管 L_p Minkowski 流（2025）。arXiv:2509.06110。

[26]Y. Hu、M. Ivaki 和 J. Scheuer，毛细管 Christoffel-Minkowski 问题（2025）。arXiv:2504.09320。[27] D. Hug、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，关于多面体的 L_p Minkowski 问题。*Discrete Comput. Geom.*，33 (2005), 699–715。[28] X. Jia、G. Wang、C. Xia 和 X. Zhang，半空间中各向异性毛细超曲面的 Alexandrov 定理。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，247 (2023), 19-25。[29] H. Lewy，关于实现给定黎曼度量的闭凸曲面的存在性。*Proc. Nat. Acad. Sci. USA*，24 (1938), 104–106。[30] H. Lewy，关于大范围微分几何。I. Minkowski 问题。

Trans. Amer. Math. , ( ), –。

Soc. **43** 1938 258 270

[31] H. Li 和 B. Xu，双曲 p-和与双曲空间中的极球面 p-Brunn-Minkowski 理论（2022）。arXiv:2211.06875。[32] P.-L. Lions、N. S. Trudinger 和 J. I. E. Urbas，Monge-Amp`ere 型方程的 Neumann 问题。 *Comm. Pure Appl. Math.*，39 (1986), 539–563。[33] G. Lieberman 和 N. Trudinger，非线性椭圆方程的非线性斜边值问题。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，295 (1986), 509–546。[34] E. Lutwak，Brunn-Minkowski-Firey 理论。I. 混合体积与 Minkowski 问题。 *J. Differential Geom.*，38 (1993), 131–150。[35] E. Lutwak 和 V. Oliker，关于 Minkowski 问题推广形式的解的正则性。 *J. Differential Geom.*，41 (1995), 227–246。[36] E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，非凸集的 Brunn-Minkowski-Firey 不等式。 *Adv. in Appl. Math.*，48 (2012), 407–413。[37] X. Ma 和 G. Qiu，Hessian 方程的 Neumann 问题。 *Comm. Math. Phys.*，366 (2019), 1–28。[38] X. Mei、G. Wang 和 L. Weng，半空间中具有毛细管边界的凸超曲面的 Alexandrov-Fenchel 不等式 II。 *Math. Z.*，310 71, 17 2025( )，论文编号 。[39] X. Mei 和 G. Wang，给定曲率的凸毛细管超曲面问题（2025）。arXiv:2504.14392。[40] X. Mei、G. Wang 和 L. Weng，毛细管 Minkowski 问题。 *Adv. Math.*，469 (2025)，论文编号 110230，29页。[41]X. Mei、G. Wang 和 L. Weng，毛细管 L_p-Minkowski 问题（2025）。arXiv:2505.07746。[42] H. Minkowski，关于凸多面体的一般定理。 , ( )，–。[43] H. Minkowski，体积与表面积。 *Math. Ann.*，57 (1903), 447–495。[44] L. Nirenberg，大范围微分几何中的 Weyl 问题与 Minkowski 问题。

Comm. , ( )，–。

Pure Appl. Math. **6** 1953 337 394

[45] G. De Philippis 和 F. Maggi，各向异性毛细管问题中的自由边界正则性及 Young 定律的成立。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，216 (2015), 473–568。[46] A. V. Pogorelov，

n *Dokl. Akad.* 维

Nauk SSSR **199** 785 788

Minkowski 问题的正则解。 , , –。[47] A. V. Pogorelov，给定高斯曲率的凸曲面的正则性。

Mat. Sbornik , ( )( )，–。

N.S. **31 73** 1952 88 103

[48] R. Schneider， *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*。《数学及其应用百科全书》第151卷。剑桥大学出版社，剑桥，2014。[49] G. Wang、L. Weng 和 C. Xia，半空间中具有毛细管边界的凸超曲面的 Alexandrov-Fenchel 不等式。 *Math. Ann.*，388 (2024), 2121–2154。[50] X. Wang 和 B. Zhu，毛细管 Orlicz-Minkowski 问题（2025）。arXiv:2509.10859。[51] Y. Wei 和 C. Xiong，完全非线性局部约束各向异性曲率流。 *Nonlinear Anal.* **217** 2022 112760, 29 , ( ),

论文编号 。[52] C. Xia，关于各向异性闵可夫斯基问题。 *Indiana Univ. Math. J.*，62 (2013), 1399–1430。[53] C. Xia， *On a Class of Anisotropic Problem*。博士论文。弗赖堡阿尔伯特-路德维希大学，2012。[54] C. Xia，凸超曲面出发的逆各向异性曲率流。 *J. Geom. Anal.*，27 (2017), 2131–2154。[55] C. Xia，逆各向异性平均曲率流与 Minkowski 型不等式。 *Adv. Math.*，315 2017 102 129 ( )，-。[56] S. T. Yau，关于紧致 K¨ahler 流形的 Ricci 曲率与复 Monge-Amp`ere 方程。I. *Comm. Pure Appl. Math.*，31 (1978), 339–411。

[57] G. Zhu，多面体的 L_p 闵可夫斯基问题， $0 < p < 1$。 *J. Funct. Anal.*，**269** （2015），1070–1094。[58] G. Zhu，多面体的 L_p 闵可夫斯基问题， $p < 0$。 *Indiana Univ. Math. J.*，**66** （2017），1333–1350。School of Mathematics and Statistics、 Wuhan University、 Wuhan 430072、 P. R. China*Email address*： dingsw@whu.edu.cn
Department of Mathematics、 Zhejiang Sci-Tech University、 Hangzhou 310018、 P. R. China*Email address*： gaojy@zstu.edu.cnSchool of Mathematics and Statistics、 Wuhan University、 Wuhan 430072、 P. R. China*Email address*： ghli@whu.edu.cn
School of Mathematics and Statistics、 Wuhan University、 Wuhan 430072、 P. R. China *Email address*： liumengliang@whu.edu.cn