arXiv:2603.01076v1 [math.OC] 1 Mar 2026

# 非方系统分散积分可控性的可行配对

**Yuhao Tong**[1], **Steven W. Su** [1, 2 *]

*†‡

## 摘要

本文研究非方系统分散积分可控性的可行输入输出配对的确定问题。这一问题的重要性不仅局限于传统工业过程，还延伸至现代人工智能研究，尤其是多智能体强化学习（MARL）；在这类研究中，环境通常表现为高度非方映射，通过相对低维的全局奖励来评估高维联合动作空间。为解决这些复杂分布式架构的稳定性问题，我们将D稳定性的概念扩展至非方阵，从而提供关键的数学基础。我们将非方阵的D稳定性形式化定义为方阵情形的直接推广。通过引入“平方矩阵”这一概念——平方矩阵由非方形式中的特定列选择构成，并直接对应候选控制配对——我们建立了这些方形子组件的稳定性与原非方系统之间的基本联系。最终，我们提出了充分条件：在这些条件下，平方组件各自的Volterra-Lyapunov稳定性能够保证非方矩阵的扩展D稳定性，从而为识别可行配对提供严格方法，确保经典应用和数据驱动应用中的稳健分散控制。

## 1 引言

在各种科学与工程应用中，系统在结构变化和约束条件下的稳定性是首要关注的问题。例如，对于生物系统在恒定平衡状态下的扩散模型线性化过程，人们提出了强稳定矩阵的概念[1, 14]。类似地，在系统控制领域，分散稳定性推动了对各种矩阵类性质的广泛研究，包括P矩阵、D-稳定矩阵和Volterra-Lyapunov稳定矩阵 [5, 11, 15, 16, 23, 25]。这些数学结构在经济学中也有重要应用。

在过程控制行业中，由于结构简单、灵活性更高且具有容错性，分散式或分布式控制架构往往优于集中式方案 [3, 4, 13, 17,19, 20]。对于采用积分作用的分散式结构下线性方形系统的可控性，已有充分研究；然而，处理非方形过程时仍面临挑战。这类非方形配置的特点是输入和输出数量不相等，在各种控制与优化场景中十分常见。例如，航空航天飞行控制系统

*通讯作者。

†[1] 中国山东省第一医科大学（山东省医学科学院）医学人工智能与大数据学院。

‡[2] 澳大利亚悉尼科技大学。

第35届神经信息处理系统大会（NeurIPS 2021）。

通常配备的执行器多于主要输出；机器人系统往往具有冗余自由度；某些化学蒸馏塔则依靠数量不平衡的输入和输出维持经济高效运行。

传统上，针对这些非方形过程的控制器设计需要将系统转换为方形配置，方法是移除多余输入或增加新的输出。然而，这种强制方形化方法可能会严重损害反馈系统的灵活性和可靠性。具体而言，移除多余输入会降低控制器的适应能力，而增加新输出则需要付出额外的控制代价。
为克服这些局限，人们强烈希望将分散积分可控性直接应用于非方形过程（DIC-NSQ），而无需进行结构变换。将D稳定性扩展到非方阵，为保证这些分布式系统的稳定性提供了必要的数学基础。最重要的是，这一扩展框架使我们能够系统地评估并选择可行的输入输出配对，而不必舍弃冗余执行器，从而确保独立整定，并在部分或全部执行器发生故障时仍保持稳健性能。

近年来，多智能体强化学习（MARL）也已成为一种用于分布式决策和协同控制的数据驱动框架 [6, 8, 12]。在许多实际的MARL建模中，环境表现为一种强非方形映射：高维联合动作空间（每个智能体对应一个控制输入，且组合规模通常很大）通过维度相对较低的全局状态或团队奖励进行评估。从控制视角来看，这与非方形系统的分布式控制设计相似，即控制通道数量多于测量输出数量。近期研究已明确利用MARL为大规模系统（如网络和无人机集群）构建可扩展的分布式控制器 [10, 26, 27]。

鉴于非方形系统在这些不同领域中十分普遍，研究其相关实矩阵的稳定性至关重要 [2, 18, 22, 28, 29]。为此，需要将稳定性概念从方阵推广到非方阵，以形式化地说明如何将冗余输入安全地与主要输出配对。本文聚焦于实矩阵，但也可以通过频域技术将结果推广到复矩阵。
本研究的主要贡献在于确定了能够保证非方阵具有扩展 D稳定性的条件，从而为建立 $feasible\ decentralized\ pairings$提供严谨的理论依据。我们基于系统方形子组件的 Volterra-Lyapunov 稳定性，推导出一个较弱的充分条件。本研究引出的一个自然开放问题是，刻画非方阵具有 D稳定性的充要条件。

## 2 非方形系统的分散稳定化

将 D稳定性推广至非方阵的动机部分源于分散无条件稳定性（DUS）分析 [13, 17, 19, 21]。对于方形系统，一项关键的 DUS 条件与稳态增益矩阵的 D稳定性要求相对应。本文将这一条件推广至非方系统。

为便于分析非方形系统的分散积分可控性（DIC-NSQ）（见图 1），我们采用组合系统和分散积分控制器的状态空间实现。假设 $(A,\ B,\ C,\ D)$ 是过程 $H(s)$ 的最小实现。即：

$$H(s):\begin{cases}\dot{z}=Az+Bu\\ y=Cz+Du\end{cases} \tag{1}$$

其中，$z$ 表示被控对象的状态向量。
此外，我们将积分控制器的状态空间实现定义如下：

$$\begin{cases}\dot{x}=-\eta y\\ u=\bar{K}x\end{cases} \tag{2}$$

其中，$x$ 表示积分状态，$\eta$ 是一个正的标量调节参数，用于控制积分¯速率；$K\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 是该非方系统的积分系数矩阵。

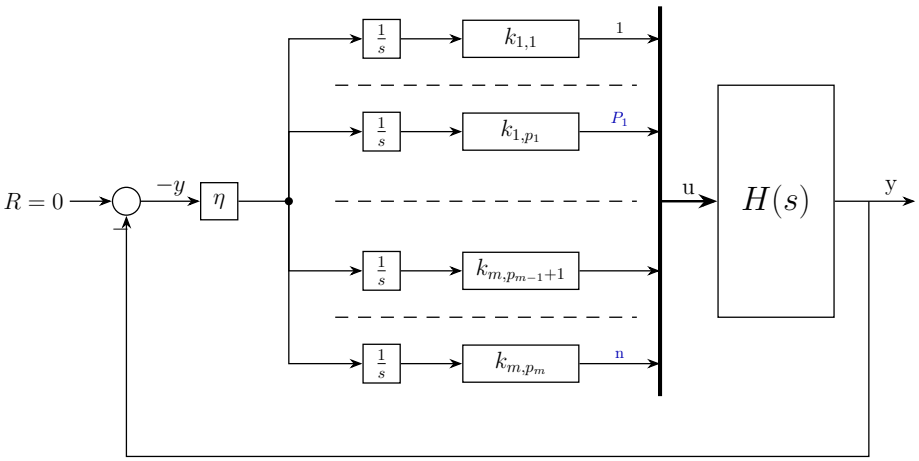



图 1：非方系统的分布式积分可控性。该过程将高维输入空间映射到低维输出空间，从而容纳冗余控制通道。

$\bar{K}$ 的结构定义为通过分块结构的系数矩阵将 $m$ 输出映射到 $n$ 输入：

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,p_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{2,1} & \cdots & k_{2,p_2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k_{m,1} & \cdots & k_{m,p_m} \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

其中，输入总数为 $\sum_{i=1}^{m} p_i = n$。

将积分状态 $x_i$ 视为主要系统状态后，我们可以构造无外力闭环状态方程。这一具体形式使闭环系统动力学能够转换为标准奇异摄动形式，从而将慢控制器动力学与快被控对象动力学分离。

基于组合系统和控制器的状态空间实现，无外力闭环状态方程可表示如下：

$$\begin{cases} \frac{1}{\eta}\dot{x} = -D\bar{K}x - Cz \\ \dot{z} = B\bar{K}x + Az \end{cases} \tag{4}$$

为分析该系统的稳定性，我们将方程 (4) 转换为标准奇异摄动形式。通过引入慢时间尺度 $\tau = \eta(t - t_0)$，使得 $\tau = 0$ 在 $t = t_0$时，系统动力学变为：

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -D\bar{K}x - Cz \\ \eta\frac{dz}{d\tau} = B\bar{K}x + Az \end{cases} \tag{5}$$

根据标准奇异摄动分析，快系统动力学（由状态 $z$表示）将快速收敛。具体而言，当积分速率 $\eta$ 足够小时（$\eta \to 0$），快动力学将达到准稳态，此时 $BKx + Az \approx 0$。由于原始被控对象矩阵 $A$ 是渐近稳定的，其逆矩阵 $A^{-1}$ 存在，因此可以将快状态表示为 $z \approx -A^{-1}B\bar{K}x$。

S将此准稳态代回慢动力学方程，可得到降阶模型 ：

$$\begin{cases} \dot{x} \approx -(D - CA^{-1}B)\bar{K}x = -H(0)\bar{K}x \\ z \approx -A^{-1}B\bar{K}x \end{cases} \tag{6}$$

因此，根据奇异摄动理论，存在一个足够小的正尺度 $\epsilon$，使得每当 $0 < \eta \leq \epsilon$时，如果$-H(0)K$ 的特征值位于开左半平面，则整体闭环系统渐近稳定。

因此，根据奇异摄动理论，存在一个足够小的正尺度 $\epsilon$，使得每当 $0 < \eta \leq \epsilon$ 时，如果

$$\mathrm{Re}\{\sigma_i(-H(0)\bar{K})\} < 0 \quad \text{for } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \tag{7}$$

前述奇异摄动分析确立了系统 $H(s)$的动态闭环稳定性与其稳态增益矩阵$H(0)$的代数性质之间的根本联系。具体而言，系统实现分散无条件稳定性¯（分散无条件稳定性）的条件完全由矩阵乘积 $-H(0)K$的特征值决定。因此，我们可以将系统层面的分散积分可控性（DIC）抽象为一个纯粹的矩阵理论框架。通过假定一般的非方实矩阵 $A$ 等价于稳态增益矩阵 $H(0)$，验证该动态系统DIC的问题便直接简化为评估常数矩阵 $A$的扩展D稳定性。为严格分析这一联系并建立必要的数学界限，我们现在形式化非方矩阵的D稳定性定义。

**定义1.** 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为具有 $n > m$的非方矩阵。我们将 $A$ 定义为***D*-稳定**，如果存在块对角矩阵 $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$，使得对所有非负对角矩阵$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 以及所有 $j \in \mathcal{M}$:

$$\mathrm{Re}\{\sigma_i([AEK]_j)\} > 0, \tag{8}$$

其中，$\mathcal{M}$ 是由范围1，...，$m$内的整数构成的所有 $k$元组的指标集，$[M]_j$ 表示第 $j$个主子式（或由分散控制上下文 *[7]*定义的相关分块结构），而$\mathrm{Re}\{\sigma_i(\cdot)\}$表示特征值的实部。

**注 1.** 根据 *[7]*，若 $E$ 的对角元为零，则将 $A$ 中对应的列（以及 $K$中的行）视为非活动项，并从乘积 $AEK$中移除。若与 $K$ 的某个特定列块相关联的所有输入均为零，则在分析中实际上会删除整个该块。

定义 1 将经典D稳定性推广到一般情形；在方阵情形（$n = m$）下，它退化为标准定义。为对此进行分析，我们定义矩阵 $K$的具体结构。设 $K$ 为一个分块对角混合矩阵，定义如下:

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{k}_m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{9}$$

其中，每个块$\mathbf{k}_i = [k_{i,1}, \ldots, k_{i,p_i}]$ 都是长度为 $p_i$的行向量，且 $\sum_{i=1}^{m} p_i = n$。为简单起见，我们假设$k_{i,\ j} \geq 0$。

¯令 $E = \mathrm{diag}(\varepsilon_{1,\ 1},\ \ldots,\ \varepsilon_{m,\ p_m})$，其中 $\varepsilon_{i,\ j} \geq 0$。乘积 $K = EK$ 保留分块结构，并将元素缩放为 $\varepsilon_{i,\ j}$。将 $A$ 划分为与 $K$兼容的分区:

$$A = [\boldsymbol{a}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{1,p_1}, |\cdots|, \boldsymbol{a}_{m,1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{m,p_m}],$$

乘积 $AEK$ 变为各个块内列的线性组合:

$$AEK = \left[ \sum_{j=1}^{p_1} \varepsilon_{1,j} k_{1,j} \boldsymbol{a}_{1,j},\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{p_m} \varepsilon_{m,j} k_{m,j} \boldsymbol{a}_{m,j} \right] \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{10}$$

### 2.1 平方矩阵与Volterra-Lyapunov稳定性

现在我们引入“平方矩阵”的概念，以弥合非方形 $A$与方形稳定性理论之间的差距。

**定义 2 (**平方矩阵)。考虑按上述方式分区的 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。我们构造一组 $m \times m$ 矩阵，记为 $A$的平方矩阵。一个平方矩阵 $[A]_{s_l}^{m}$ 由从 $A$的 $m$ 个分区中各选取一列构成。形式上，令 $\kappa = (\kappa_1,\ \ldots,\ \kappa_m)$ 为一个元组，其中 $\kappa_i \in \{1, \ldots, p_i\}$。对应的平方矩阵为:

$$[A]_{s_\kappa}^{m} = [\boldsymbol{a}_{1,\kappa_1}, \boldsymbol{a}_{2,\kappa_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{m,\kappa_m}].$$

此类矩阵的总数为 $N = \prod_{i=1}^{m} p_i$。

如果停用特定分区（对应于 $E$ 中的零元素，参见注 1），则可以类似地定义维度为 $k < m$ 的平方矩阵。

回顾标准的稳定性定义 [9]:

**定义 3.** 矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足:

*1.* 若对所有对角 $D > 0$, $MD$ 均稳定（特征值位于开左半平面），则称其为***D*-稳定**。

*2.* 若存在一个对角 $D > 0$，使得 $MD + DM^T > 0$（正定），则称其为 ***Volterra-Lyapunov*** 稳定。

**引理 1** ([9])。 若 $M$ 是 *Volterra-Lyapunov* 稳定的，则 $M$ 是 *D*-稳定的。此外，*Volterra-Lyapunov* 稳定矩阵的任意主子式也都是 *D*-稳定的。

我们将其推广到非方阵情形:

**定义 4**。 如果对于每个由 $l \in \{1, \dots, N\}$ 索引的方阵 $[A]^m_{s_l}$，都存在一个单独的正对角矩阵 $D_l > 0$，使得非方阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是逐个 ***Volterra-Lyapunov*** 稳定 的:

$$[A]^m_{s_l} D_l + D_l([A]^m_{s_l})^T > 0.$$

## 3 主要结果

本文的核心理论结果确立了：逐个 Volterra-Lyapunov 稳定性意味着非方阵的扩展D稳定性。这一结果依赖于关于加权参数存在性的组合结果。

**引理2** （组合存在性引理）。 考虑 $m$ 个互不相交的指标组，其中第 $\phi$ 个组的大小为 $p_\phi$。令 $\kappa =$（$\kappa_1$，.....，$\kappa_m$）表示从每个组中各选取一个指标所构成的组合。对于每个组合和每个组，设有一组与之相关联的正标量 $\lambda^\phi_\kappa > 0$ 。令 $P_{\phi,\ j}$ 表示组 $\phi$ 中第 $j$ 个元素的总加权收益，定义如下:

$$P_{\phi,j} := \sum_{\kappa:\, \kappa_\phi = j} \gamma_\kappa\, \lambda^\phi_\kappa,$$

其中， $\gamma_\kappa > 0$是组合 $\kappa$的全局权重。给定任意一组期望比例 $k^\phi_j > 0$ ，对于$j \in \{1, \dots, p_\phi - 1\}$ ，且满足$P_{\phi,\ j+1}/P_{\phi,\ 1} = k^\phi_j$ ，则存在一组正的全局权重 $\{\gamma_\kappa\}_\kappa$ ，使所有指定比例同时得到满足。

证明。 证明过程具有构造性，详见附录 A。该证明利用对各组 $\phi = 1, \dots, m$ 的归纳论证来求解 $\gamma_\kappa$。 □

### 3.1 说明性示例： $3 \times 2 \times 3$ 配置

为阐明上述证明中的构造过程，我们给出一个详尽且独立的示例。考虑 $m = 3$ 个组，其大小分别为 $p_1 = 3$、 $p_2 = 2$和 $p_3 = 3$。组合总数为$N = 3 \times 2 \times 3 = 18$。

我们将指标记为 $\kappa = (i, j, \ell)$，其中 $i \in \{1, 2, 3\}$、 $j \in \{1, 2\}$和 $\ell \in \{1, 2, 3\}$。目标是求出 18 个严格正权重$\gamma_{(i,j,\ell)}$ ，使其满足以下目标比率:

- 第*1*组 *($p_1 = 3$)*：比例 $k^1_1$（介于 $i = 2$ 和 1 之间）以及 $k^1_2$（介于 $i = 3$ 和 1 之间）。
- 第*2*组 *($p_2 = 2$)*：比例 $k^2_1$（介于 $j = 2$ 和 1 之间）。
- 第*3*组 *($p_3 = 3$)*：比例 $k^3_1$（介于 $\ell = 2$ 和 1 之间）以及 $k^3_2$（介于 $\ell = 3$ 和 1 之间）。

步骤 *1*：处理第*1*组（固定尾部 $\alpha = (j, \ell)$）

在证明中，“尾部”指标为 $\alpha$。这里， $\alpha = (j,\ \ell)$。我们对每个$2 \times 3 = 6$ 尾部逐项满足这些比例。对于每一对 $(j,\ \ell)$，我们将 $\gamma_{(2,j,\ell)}$ 和 $\gamma_{(3,j,\ell)}$ 定义为关于 $\gamma_{(1,j,\ell)}$ 的表达式:

$$\gamma_{(2,j,\ell)} := k^1_1 \frac{\lambda^1_{(1,j,\ell)}}{\lambda^1_{(2,j,\ell)}} \gamma_{(1,j,\ell)}, \qquad \gamma_{(3,j,\ell)} := k^1_2 \frac{\lambda^1_{(1,j,\ell)}}{\lambda^1_{(3,j,\ell)}} \gamma_{(1,j,\ell)}. \tag{11}$$

这确保无论 $\gamma_{(1,j,\ell)}$ 的值如何，第1组的支付比都能得到满足。与归纳证明一致，其余自由参数是首个指标固定为 1 的那些参数。我们将这些参数定义为一级基参数 $\beta_{\alpha}^{(1)}$:

$$\beta_{(j,\ell)}^{(1)} := \gamma_{(1,j,\ell)}. \tag{12}$$

第*2*步：处理第*2*组（固定尾部 $\eta' = (\ell)$）

现在我们满足第2组的比率 $k_1^2$。剩余的尾部指标为 $\eta' = (\ell)$。总支付 $P_{2,\,j}$ 是对指标 $i$ 和 $\ell$求和得到的。我们按尾部 $\ell$对各项分组。利用第1步中的代换，任一特定尾部 $\ell$ 对支付$P_{2,\,j}$ 的贡献都是基参数 $\beta^{(1)}{}_{(j,\,\ell)}$ 的线性函数。令 $A_{2,\,j,\,\ell}$ 为指标 $j$ 和尾部 $\ell$ 对应的累积系数（证明中对应于 $A_{j,\,\eta'}$）：

$$A_{2,j,\ell} := \lambda^2_{(1,j,\ell)} + k_1^1 \frac{\lambda^1_{(1,j,\ell)}}{\lambda^1_{(2,j,\ell)}} \lambda^2_{(2,j,\ell)} + k_2^1 \frac{\lambda^1_{(1,j,\ell)}}{\lambda^1_{(3,j,\ell)}} \lambda^2_{(3,j,\ell)}.$$

那么支付为 $P_{2,\,j} = \sum_{\ell} A_{2,\,j,\,\ell} \beta^{(1)}{}_{(j,\,\ell)}$。我们根据 $\beta^{(1)}{}_{(1,\,\ell)}$ 定义 $\beta^{(1)}{}_{(2,\,\ell)}$，使其逐项满足比率 $k_1^2$:

$$\beta^{(1)}_{(2,\ell)} := k_1^2 \frac{A_{2,1,\ell}}{A_{2,2,\ell}} \beta^{(1)}_{(1,\ell)}. \tag{13}$$

剩余的自由参数现在对应于将前两个 指标固定为 1（即 $i = 1,\ j = 1$）。我们定义二级基参数:

$$\beta^{(2)}_{(\ell)} := \beta^{(1)}_{(1,\ell)} = \gamma_{(1,1,\ell)}. \tag{14}$$

步骤*3*：处理第*3*组（无剩余尾部）

最后，我们满足第3组的比例 $k_1^3$ 和 $k_2^3$。收益$P_{3,\ell}$ 是先前指标 $i, j$上的求和。利用步骤2中的代入，每个收益都是 $\beta^{(2)}{}_{(\ell)}$的倍数。令$A_{3,\ell}$ 为指标 $\ell$ 的总累积系数（采用与步骤2类似的方式，利用已知的 $\lambda$、 $k$和$A$计算）。我们定义:

$$\beta^{(2)}_{(2)} := k_1^3 \frac{A_{3,1}}{A_{3,2}} \beta^{(2)}_{(1)}, \qquad \beta^{(2)}_{(3)} := k_2^3 \frac{A_{3,1}}{A_{3,3}} \beta^{(2)}_{(1)}. \tag{15}$$

注意到 $\beta^{(2)}{}_{(\ell)} = \gamma_{(1,1,\ell)}$，此步骤将$\gamma_{(1,1,2)}$ 和$\gamma_{(1,1,3)}$ 表示为$\gamma_{(1,1,1)}$的形式。

结果

通过为$\gamma_{(1,1,1)}$ 选择任意严格正值（例如 $\gamma_{(1,1,1)} = 1$），所有其他权重$\gamma_{(i,j,\ell)}$均可经由步骤3、2和1的反向代入唯一确定。该构造保证全部18个权重均为正，且所有目标比率同时得到满足。

**定理1**。 如果实非方阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是逐个 *Volterra-Lyapunov* 稳定（定义 *4*），则 $A$ 是 *D*-稳定的（定义 *1*）。也就是说，存在矩阵 $K$，使得对于所有非负对角 $E$，$\mathrm{Re}\{\sigma_i([AEK]_j)\} > 0$。

证明。 假设 $E$ 严格为正（含零元素的情形可按照注 1 通过降维处理）。由于 $A$ 逐个 Volterra-Lyapunov 稳定，对于每个平方矩阵指标$l \in \{1, \ldots, N\}$，都存在 $D_l > 0$，使得:

$$[A]^m_{s_l} D_l + D_l ([A]^m_{s_l})^T > 0. \tag{16}$$

由于正定矩阵之和仍为正定矩阵，对于任意系数 $\gamma_l > 0$:

$$\sum_{l=1}^{N} \gamma_l \left( [A]^m_{s_l} D_l + D_l ([A]^m_{s_l})^T \right) > 0. \tag{17}$$

令 $D_{sum} = \sum_{l=1}^{N} \gamma_l [A]^m_{s_l} D_l$。根据李雅普诺夫算子的标准性质，矩阵 $D_{sum}$ 具有正实部特征值。我们需要证明，通过适当选取 $\gamma_l$，矩阵 $AEK$ 可以表示为 $D_{sum}$ 的形式（具体而言，即列加权和）。

根据 (10)， $AEK$ 的第 $j$ 列为 $\sum_{r=1}^{p_j} \varepsilon_{j,r} k_{j,r} \boldsymbol{a}_{j,r_0}$。项 $\sum_{l=1}^{N} \gamma_l [A]_{s_l}^m D_l$ 可以展开。令 $D_l = \text{diag}(\lambda_l^1, \dots, \lambda_l^m)$。该和的第 $j$ 列为：

$$\sum_{r=1}^{p_j} \left( \sum_{l:\kappa_j(l)=r} \gamma_l \lambda_l^j \right) \boldsymbol{a}_{j,r}.$$

通过设置 $AEK$ 中的标量，使其与这些和相匹配，即根据各内层求和的比值确定 $\varepsilon_{j,r} k_{j,r}$，我们可以应用引理2。该引理保证，对于任意给定的列系数目标比值（由 $E$ 和 $K$确定），都存在权重 $\gamma_l$，使得聚合矩阵与$AEK$ 相匹配，至多相差一个列缩放对角矩阵（该矩阵不会影响符号稳定性）。因此， $AEK$继承了这些稳定性特性，从而证明了该定理。 □

## 4 讨论与开放问题

前述分析确立了非方系统的动态闭环稳定性与其稳态增益矩阵 $H(0)$ 的代数性质之间的基本联系。具体而言，通过策略性地重新分组并配对系统的输入和输出，我们可以显著改变 $H(0)$ 和分块对角混合矩阵 $K$ 的有效结构。分散式控制架构中的这种配置灵活性极具优势，因为即使默认配对无法满足我们针对 DIC-NSQ 提出的充分条件，它也使我们能够有意调整系统表示，使其满足这些条件。

为将系统层面的分散积分可控性（DIC）抽象为纯矩阵理论框架，我们假设一般的非方实矩阵 $A$表示负稳态增益矩阵，使得 $A = -H(0)$。通过这一替换，验证动态系统 DIC 的问题便可直接简化为评估常数矩阵 $A$的扩展D稳定性。

本研究提出了保证非方系统具备分散积分可控性的温和充分条件。我们证明，若非方矩阵 $A$ 单独为 Volterra-Lyapunov 稳定矩阵，或者其所有平方矩阵均为列严格对角占优矩阵，则相应的非方系统具有 DIC-NSQ。

然而，对于实矩阵和动态系统，这些稳定性要求的精确边界仍是一个尚待解决的数学问题。尽管我们提出的充分条件为控制器设计提供了一种高效实用的方法，但非方矩阵和系统扩展D稳定性的精确充要条件仍然缺失。未来的研究应致力于完整刻画这些充要条件，从而进一步降低设计中的保守性，并分析非方分散式控制系统的绝对基本极限。

**开放问题：非方D稳定性的充要条件**
令 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ （其中 $n > m$）表示系统的负稳态增益矩阵，使得 $A = -H(0)$。通过策略性地重新分组并配对输入和输出，我们确立了混合矩阵 $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 的特定块对角结构。

开放问题是确定关于 $A$ 的精确代数充要条件，使得至少存在一种有效配置 $K$ （其中 $k_{i,j} \geq 0$），以确保 $A$ 的扩展D稳定性。形式上，这要求确定 $A$ 必须具备的精确、非保守性质，以便对于所有非负对角矩阵 $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和所有指标子集 $j \in \mathcal{M}$:

$$\text{Re}\{\sigma_i([AEK]_j)\} > 0 \tag{18}$$

尽管已经确立了一些充分条件（例如， $A$的平方矩阵具有逐个 Volterra-Lyapunov 稳定性），可确保分散积分可控性（DIC-NSQ），但刻画此类稳定非方矩阵完整类别的基本代数界限仍未解决。

## 5 结论

我们的主要贡献是推导出可确保非方矩阵具有扩展D稳定性的温和充分条件，为识别可行的输入输出配对提供了严格的数学基础。具体而言，我们证明了：如果由非方系统导出的所有方阵的集合（这些方阵直接代表候选控制配对）均具有逐个 Volterra-Lyapunov 稳定性，或者它们均为列严格对角占优，则该系统在扩展意义下是D-稳定的。这为非方分散控制系统的稳定性提供了稳健且实用的充分条件，无需通过移除关键的冗余执行器来人为地将系统方阵化，即可确保无条件稳定性和容错性。

通过直接应对非方映射的结构性挑战，该框架得以拓展至传统工业过程之外，并为多智能体强化学习（MARL）等现代数据驱动架构提供了有价值的理论见解。尽管取得了这些进展，确定非方D稳定性的精确边界仍是一个尚未解决的数学问题。未来的工作将着重确定非方阵D稳定性的精确充要条件。此外，后续研究还将探索通过策略性地配对输入与输出来构造分块对角混合矩阵 $K$ 的最优策略，旨在降低保守性，并确定经典环境和人工智能驱动环境下非方分散控制架构的绝对基本极限。

## A 引理2的证明

证明。 该证明具有构造性。我们通过逐群满足比例约束，依次从 $\phi = 1$ 到 $\phi = m$，证明严格正权重 $\gamma_\kappa$ 的存在性。

### 设置与定义

固定 $m \in \mathbb{N}$ 和群大小 $p_{\phi}$。令 $\kappa = (\kappa_1、\ .....、\ \kappa_m)$ 为组合的多重指标，其中 $\kappa_\phi \in \{1, \dots, p_\phi\}$。给定严格为正的比例因子 $\lambda_\kappa^\phi > 0$ 和目标比率$k_j^\phi > 0$。我们的目标是找到 $\gamma_\kappa > 0$，使得对于每个群 $\phi$ 和每个指标 $j \in \{1, \dots, p_\phi - 1\}$:

$$\frac{P_{\phi,j+1}}{P_{\phi,1}} = \frac{\sum_{\kappa:\, \kappa_\phi = j+1} \gamma_\kappa \lambda_\kappa^\phi}{\sum_{\kappa:\, \kappa_\phi = 1} \gamma_\kappa \lambda_\kappa^\phi} = k_j^\phi. \tag{19}$$

### 处理组第1组

考虑第一个群（$\phi = 1$）。总指标可以拆分为第一个分量 $\kappa_1$ 和“尾部”$\alpha = （\kappa_2，\ .....，\ \kappa_m）$。第1组的条件要求加权和的比值等于 $k_j^1$。我们以尽可能严格的方式满足这一条件：对于每一种尾部配置，逐项地满足。

固定任意一个尾部 $\alpha$。我们定义权重 $\gamma_{(j+1,\alpha)}$（其中第一个指标为 $j+1$）与权重 $\gamma_{(1,\alpha)}$（其中第一个指标为 1）之间的关系如下:

$$\gamma_{(j+1,\alpha)} := k_j^1 \frac{\lambda^1_{(1,\alpha)}}{\lambda^1_{(j+1,\alpha)}} \gamma_{(1,\alpha)}. \tag{20}$$

S由于 $\gamma_{(1,\alpha)}$ 尚未确定，我们将其视为一个自由参数。下面验证求和比值:

$$\frac{P_{1,j+1}}{P_{1,1}} = \frac{\sum_\alpha \gamma_{(j+1,\alpha)} \lambda^1_{(j+1,\alpha)}}{\sum_\alpha \gamma_{(1,\alpha)} \lambda^1_{(1,\alpha)}}.$$

将（20）中的定义代入分子:

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \left( k_j^1 \frac{\lambda^1_{(1,\alpha)}}{\lambda^1_{(j+1,\alpha)}} \gamma_{(1,\alpha)} \right) \lambda^1_{(j+1,\alpha)} &= \sum_\alpha k_j^1 \left( \gamma_{(1,\alpha)} \lambda^1_{(1,\alpha)} \right) \\ &= k_j^1 \sum_\alpha \gamma_{(1,\alpha)} \lambda^1_{(1,\alpha)}. \end{aligned}$$

分子恰好是分母的 $k_j^1$ 倍。因此，该比值成立。

在本步骤结束时，独立自由度是第一个指标固定为 1 的那些权重。我们将这些定义为我们的第一组基参数:

$$\beta_{\alpha}^{(1)} := \gamma_{(1,\alpha)}.$$

注意， $\alpha$ 表示指标（$\kappa_2$，……， $\kappa_m$）。

**归纳步骤**

假设：假定我们已经处理了组 1，……， $\delta$。每个权重 $\gamma_\kappa$ 当前均表示为特定正系数 $C_\kappa^{(\delta)}$乘以基参数 $\beta_\eta^{(\delta)}$，其中 $\eta =$（$\kappa_{\delta+1}$，……， $\kappa_m$）是剩余的尾部指标。关键在于，与基础情形一致，该基参数对应于前 $\delta$ 个指标固定为 1 的权重：

$$\beta_{\eta}^{(\delta)} = \gamma_{(1,\ldots,1,\eta)}. \tag{21}$$

处理组 $\delta+1$: 我们现在使群 $\phi = \delta+1$ 的比例得到满足。设该群的指标为 $j = \kappa_{\delta+1}$。设剩余指标为新的尾部 $\eta' =$（$\kappa_{\delta+2}$，……， $\kappa_m$）。我们可以将基参数 $\beta_\eta^{(\delta)}$显式写为 $\beta^{(\delta)}{}_{(j,\ \eta')}$。

The 收益和$P_{\delta+1,\ j}$是对所有可能组合求和。我们按新的尾部 $\eta$对这个和进行分组 ′:

$$P_{\delta+1,j} = \sum_{\eta'} \left( \text{Terms depending on } \beta_{(j,\eta')}^{(\delta)} \right).$$

具体而言，特定尾部 $\eta'$ 对收益 $P_{\delta+1,\ j}$ 的贡献是 $\beta^{(\delta)}{}_{(j,\ \eta')}$的线性函数。令 $A_{j,\ \eta'}$ 表示此项累积的正系数（由 $\lambda$ 和之前的$k$推导得出）。

为满足目标比率 $k_j^{\delta+1}$，我们针对每个尾部 $\eta'$逐项施加条件。我们将参数 $\beta^{(\delta)}{}_{(j+1,\ \eta')}$（其中指标 $\delta+1$ 为 $j+1$）定义为 $\beta^{(\delta)}{}_{(1,\ \eta')}$（其中指标 $\delta+1$ 为 1）：

$$\beta_{(j+1,\eta')}^{(\delta)} := k_j^{\delta+1} \frac{A_{1,\eta'}}{A_{j+1,\eta'}} \beta_{(1,\eta')}^{(\delta)}. \tag{22}$$

这确保对于由 $\eta'$定义的每个项子组，其比率都恰好为 $k_j^{\delta+1}$。因此，总和的比率也为 $k_j^{\delta+1}$。

**求和**

通过这种构造，下一步的独立参数是群$\delta+1$ 的指标固定为 1 的那些参数。我们定义新的基参数:

$$\beta_{\eta'}^{(\delta+1)} := \beta_{(1,\eta')}^{(\delta)} = \gamma_{(1,\ldots,1,1,\eta')}.$$

Iter重复此过程，直到 $\phi = m$，唯一剩下的自由参数是所有指标都为 e fixe为 1:

$$\beta^{(m)} = \gamma_{(1,1,\ldots,1)}.$$

由于各步骤中产生的所有比例常数都严格为正（由正的 $\lambda$、 $k$ 和系数相乘或相除得到），选择 $\gamma_{(1,\ldots,1)} = 1$（或任意正实数）即可唯一确定所有 $\gamma_\kappa > 0$，并同时满足所有比例约束。

上述比例的完全展开形式（其中包含原始的扩展分子和分母），以及该引理的相关证明，可参见 **[24]以供完整参考**。

□

## 参考文献

[1] 三种矩阵稳定性。《线性代数及其应用》，20(3):253–263，1978年。[2] 求解非方线性方程组的一种新迭代方法。《计算与应用数学杂志》，322:1–6，2017年。[3] B. Anderson 和 D. Clements。分散控制中固定模态的代数刻画。《自动化》，17:703–712，1981年。[4] B. D. Anderson 和 D. J. Clements。分散控制中固定模态的代数刻画。《自动化》，17(5):703–712，1981年。[5] G. P. Barker、A. Berman 和 R. J. Plemmons。李雅普诺夫方程的正对角解。《线性与多重线性代数》，5(4):249–256，1978年。[6] L. Busoniu、R. Babuska、B. De Schutter 和 D. Ernst。多智能体强化学习综合综述。《IEEE系统、人和控制论汇刊：C辑（应用与评论）》，38(2):156–172，2008年。doi: 10.1109/TSMCC.2007.913919。[7] P. J. Campo 和 M. Morari。分散控制系统可实现的闭环性质：涉及稳态增益的条件。《IEEE自动控制汇刊》，39(5):932–943，1994年。[8] L. Canese、G. I. M. Colombo、A. Farinelli 和 L. Bascetta。多智能体强化学习：挑战与应用综述。《应用科学》，11(11):4948，2021年。doi: 10.3390/app11114948。[9] G. Cross。三种矩阵稳定性。《线性代数及其应用》，20:253–263，1978年。[10] R. Gandhi、A. Jain 和 A. Abhyankar。面向电力系统运行与控制的多智能体强化学习。《电力系统研究》，223:109581，2023年。doi: 10.1016/j.epsr.2023.109581。[11] B. S. Goh。多物种系统中的全局稳定性。《美国博物学家》，111(977):135–143，1977年。[12] S. Gronauer 和 K. Diepold。多智能体深度强化学习：综述。《人工智能评论》，55:895–943，2022年。doi: 10.1007/s10462-021-10025-y。[13] P. Grosdidier 和 M. Morari。分散控制系统的交互作用度量。《自动化》，22(3):309–319，1986年。[14] K. Hadeler。生物学中的非线性扩散方程。载于《常微分方程与偏微分方程：第四届会议论文集，1976年3月30日至4月2日，苏格兰邓迪》，第163–206页。施普林格，2006年。[15] A. Iggidr 和 M. O. Souza。关于沃尔泰拉函数在李雅普诺夫方法中的局限性：以Anderson-May-Gupta模型为警示案例。《数学分析与应用杂志》，517(1):126465，2023年。[16] C. R. Johnson。D稳定性的充分条件。《经济理论杂志》，9(1):53–62，1974年。[17] S. Skogestad 和 M. Morari。分散控制的变量选择。《美国化学工程师学会年会》，华盛顿特区，第128c号论文，1988年。[18] T. R. V. Steentjes。互联系统线性系统分布式控制的数据驱动方法。2022年。[19] S. Su、J. Bao 和 P. Lee。非线性系统的分散积分可控性分析。《计算机与化学工程》，28:1781–1787，2004年。[20] S. W. Su、A. V. Savkin、B. G. Celler 和 H. T. Nguyen。基于一种新的无条件稳定性判据的分散积分可控性分析。《IEEE自动控制汇刊》，60(1):211–215，2015年。doi: 10.1109/TAC.2014.2323166。

[21] S. W. Su、Z. Zhang、B. G. Celler 和 A. V. Savkin。《非方形过程的分布式积分可控性：全面研究与数值分析》。富兰克林学会期刊，362:107338，2025年。doi: 10.1016/j.jfranklin.2024.107338。[22] V. Sujatha 和 R. C. Panda。《复杂非方形化学过程的控制理念》。《过程工业损失预防杂志》，80:104900，2022年。[23] Z. Sun。《结构化矩阵的对角稳定性条件综述（及相关综述论文）》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2301.01272*，2023年。[24] Y. Tong 和 S. W. Su。《非方阵的充分 d-稳定性条件》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2406.15440*，2024年。[25] S. Wang 和 E. Davison。《分散控制系统的稳定化》。*IEEE Trans.Auto.Con.*，18:473–478，1973年。[26] Q. Yang、J. Liu 和 Y. Hong。《面向大规模无人机集群系统的图均值场多智能体强化学习》。*IEEE*《网络科学与工程汇刊》，2023年。doi: 10.1109/TNSE.2023.3239477。提前在线发表。[27] F. Zhang、S. L. Smith 和 A. R. Teel。《基于李雅普诺夫的强化学习在多智能体系统分散控制中的应用》。载于第*59*届 *IEEE* 决策与控制会议论文集（*CDC*），第3624–3631页，韩国济州，2020年。doi: 10.1109/CDC42340.2020.9303850。[28] Y. Zhang、S. Su、A. Savkin、B. Celler 和 H. Nguyen。《非线性多输入单输出过程的多回路积分可控性分析》。《工业与工程化学研究》，56(28):8054–8065，2017年。[29] L. Zhiteckii 和 K. Solovchuk。《一类非方形无记忆系统的鲁棒自适应控制》。《高级控制系统：理论与应用》，第203页，2022年。