arXiv:2603.01078v1 [math.AP] 1 Mar 2026

一般非线性下临界 Choquard 方程基态的存在阈值与极限剖面

Shiwang Ma[1*], Yachen Wang[2] [1] 南开大学数学科学学院与 LPMC，天津 300071，中国 [2] 华南理工大学数学学院，广州 510641，广东，中国

Abstract. 本文研究非线性 Choquard 方程正基态的存在性、不存在性及渐近行为:

$$-\Delta u+\varepsilon u=\big(I_\alpha * F(u)\big)F'(u),\quad u\in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{0.1}$$

其中 $F(u)=|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}+G(u)$，且 $G(u)=\int_0^u g(s)ds$，$N\geq 3$ 为整数，I_α 是阶数为 $\alpha\in(0,N)$ 的 Riesz 势，$\varepsilon>0$ 为频率参数。在对 $g\in C([0,\infty),[0,\infty))$ 施加一些温和的次临界增长假设后，我们建立了基态存在性的尖锐阈值结果，并对基态解在 $\varepsilon\to 0$时的渐近行为作出刻画。特别地，若 $g(s)\sim s^{q-1}$ 当 $s\to 0$ 时趋于某个 $q\in(\frac{N+\alpha}{N},\frac{N+\alpha}{N-2})$，则当 $q<\frac{N+\alpha+4}{N}$ 时，(0.1) 对所有 $\varepsilon>0$ 均存在基态；而当 $q\geq\frac{N+\alpha+4}{N}$ 时，将出现阈值现象：存在 $\varepsilon_q>0$，使得 (0.1) 在 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_q)$ 时不存在基态，而在 $\varepsilon>\varepsilon_q$ 时存在基态。若 $g(s)\simeq as^{q-1}$ 当 $s\to 0$ 时趋于某个 $a>0$，且 $q\in(\frac{N+\alpha}{N},\min\{\frac{N+\alpha}{N-2},\frac{N+\alpha+4}{N}\})$，我们证明，当 $\varepsilon\to 0$ 时，(0.1) 的基态解经过适当重新缩放后，在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到 Hardy-Littlewood-Sobolev 临界方程 $u=\frac{N+\alpha}{N}(I_\alpha*|u|^{\frac{N+\alpha}{N}})|u|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}u$ 的一个特定解。结果表明，极限剖面完全由 (a,q) 在 $(0,+\infty)\times(\frac{N+\alpha}{N},\min\{\frac{N+\alpha}{N-2},\frac{N+\alpha+4}{N}\})$ 中的位置决定。我们还对这种重新缩放建立了一种新颖的尖锐渐近刻画。

1. Introduction and Main Results

本文研究以下具有一般非线性的 Choquard 方程

$$-\Delta u+\varepsilon u=(I_\alpha * F(u))F'(u),\quad u\in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{1.1}$$

where $N\geq 3$ 是一个整数，$\varepsilon>0$ 是频率参数，I_α 是阶数为 $\alpha\in(0,N)$，其对每个 $x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ 均有定义，定义如下:

$$I_\alpha(x)=\frac{A_\alpha(N)}{|x|^{N-\alpha}}\quad\text{and}\quad A_\alpha(N)=\frac{\Gamma(\frac{N-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\pi^{\frac{N}{2}}2^\alpha},$$

其中 Γ 表示伽马函数。我们始终假设 $F(u)=|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}+G(u)$，其中 $G(u)=\int_0^u g(s)ds$ 和 $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是次临界非线性项，具体形式将在后文说明，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35J60、35Q55；次要分类：35B25、35B40、35R09、35J91。*Key words and phrases.* 下临界 Choquard 方程，一般非线性，基态，存在阈值，极限剖面。本文得到国家自然科学基金委员会（项目编号：11571187）的资助。

* 通讯作者：SHIWANG MA。

那么方程（1.1）变为

$$-\Delta u+\varepsilon u=(I_\alpha*(|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}+G(u)))(\frac{N+\alpha}{N}|u|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}u+g(u)),\quad u\in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{1.2}$$

这类方程的一个原型源于对具有吸引性组合非线性项的非线性薛定谔方程驻波解的研究

$$\begin{aligned} i\psi_t-\Delta\psi=&(I_\alpha*(|\psi|^{\frac{N+\alpha}{N}}+|\psi|^{q_i}+|\psi|^{q_j}))\\ &\cdot(\frac{N+\alpha}{N}|\psi|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}\psi+q_i|\psi|^{q_i-2}\psi+q_j|\psi|^{q_j-2}\psi), \end{aligned} \tag{1.3}$$

于 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$。设 $\psi(t,x)=e^{-i\varepsilon t}u(x)$ 满足（1.3），其中 $u:\ \mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$，则（1.3）可化为带有 $g(u)=q_i|u|^{q_i-2}u+q_j|u|^{q_j-2}u$ 的方程（1.2）。T. Tao 、 M. Visan 和 X. Zhang 最早发展了组合幂次非线性项 NLS 的理论 [31]，并在过去几十年中受到广泛关注（参见 [1, 2, 13, 14, 17, 18, 35]）。

A 方程 u_ε （1.2）的解是相应作用泛函的一个临界点，该泛函定义如下:

$$I_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}+G(u)))(|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}+G(u)). \tag{1.4}$$

文献 u_ε 讨论了方程（1.2）基态的存在性和局部正则性[12, 13, 14, 25]。本文关注问题（的基态 u_ε 方程1.2）的存在性、不存在性及其极限渐近轮廓，以及 u_ε 的不同范数在 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近行为。

在 [23], Moroz和 Muratov研究了具有吸引-排斥型非线性项的方程的渐近性质，其形式为

$$-\Delta u+\varepsilon u=|u|^{p-2}u-|u|^{q-2}u\ \text{ in }\ \mathbb{R}^N, \tag{1.5}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是一个小参数，且 $2<q<p<\infty$。他们指出，解的行为取决于 p 小于、等于还是大于临界索obole夫指数 $2^*=\frac{2N}{N-2}$。随后，Liu 和 Moroz[17] 将 [23] 中的结果推广到一类具有吸引性非局部项和排斥性局部相互作用项的 Choquard 型方程。

此外，关于具有吸引型非线性项的 Schr¨odinger方程的基态存在性及其性质，也有许多结果，其形式为

$$-\Delta u+\varepsilon u=|u|^{p-2}u+|u|^{q-2}u\ \text{ in }\ \mathbb{R}^N, \tag{1.6}$$

其中 $2<q<p\le 2^*$。过去十年间，这个方程吸引了许多作者的关注。次临界 $p<2^*$ 的基态存在性是经典结果，其研究可追溯至 [5]。在 Sobole夫临界情形 $p=2^*$下，众所周知 [4, 16, 37], 当$q\in(\max\{2,\frac{4}{N-2}\},2^*)$时，对任意 $\varepsilon>0$，方程 (1.6) 都存在基态解 u_ε。最近，T. Akahori 等人 [3] 以及 Wei 和 Wu [36] 证明，当 $N\ge 3$ 且 $\varepsilon>0$较小时，(1.6) 存在基态；而当 $N=3$ 且 $q\in(2,4]$, 时，(1.6) 在 $\varepsilon>0$较大时不存在基态。经过适当的重新缩放后，T. Akahori 等人 [1] 建立了基态 u_ε的一致衰减估计，继而证明了当 $N\ge 5$ 且 $\varepsilon>0$较大时， $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$中的基态 u_ε 具有唯一性和非退化性；并指出，当 $N\ge 3$ 且$q\in(\max\{2,\frac{4}{N-2}\},2^*)$时，随着 $\varepsilon\to\infty$， u_ε趋于临界 Emden– Fowler 方程的一个特定解。关于局部方程 (1.6) 的其他相关论文，请读者参阅[19] 及其中的参考文献。

最近，基于 [13, 14]，中基态的存在性和正则性，Ma 和 Moroz [20, 21] 研究了以下非线性 Choquard 方程的基态渐近行为

$$-\Delta u+\varepsilon u=(I_\alpha*|u|^p)|u|^{p-2}u+|u|^{q-2}u\ \text{ in }\ \mathbb{R}^N, \tag{1.7}$$

其中， $N \geq 3$ 是一个整数， $p \in \left[\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2}\right]$， $q \in \left(2, \frac{2N}{N-2}\right]$， I_α 是阶数为 $\alpha \in (0, N)$ 的 Riesz 势，且 $\varepsilon > 0$ 是一个参数。他们精确地建立了正基态解在 $\varepsilon \to 0$ 和 $\varepsilon \to \infty$ 时的渐近行为，并讨论了其与方程 (1.7) 在相应 L^2 约束条件 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = a^2$ 下给定质量的正解的存在性和多重性之间的联系。最近， [22], 他们将 [20]中的结果推广到了结合一般局部扰动项的临界 Choquard 方程

$$-\Delta u + \varepsilon u = (I_\alpha * |u|^{\frac{N+\alpha}{N}})|u|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}u + f(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N. \tag{1.8}$$

在对 $f(u)$ 作出温和的单侧假设下，他们证明了基态的存在性与不存在性，并建立了当 $\varepsilon \to 0$ 和 $\varepsilon \to \infty$时基态解的渐近刻画。

我们提到，J. Van Schaftingen 和 J. Xia [30] 证明了方程 (1.8) 在 $\varepsilon = 1$ 且局部非线性为次临界 f 时基态的存在性，其中该非线性满足 Berestycki–Lions 条件和 Ambrosetti–Rabinowitz 型条件。最近，X. Wang 和 F. Liao [32] 证明了即使不满足 Ambrosetti–Rabinowitz 条件，类似的结果仍然成立。X. Tang 等人 [29]研究了当 1.8 中 $f(u)$ 为纯幂非线性时基态的存在性。最近，S. Chen 等人 [7] 研究了方程 (1.8) 在 $\mathbb{R}^2$中的基态存在性。关于 Choquard 型方程的更多方面，读者可参阅综述论文 [26]。

关于一般非线性 [11, 12]下方程（1.2）基态的存在性，目前已有的研究结果很少。特别地，在满足关于非线性g 的一些条件（这些条件略弱于以下一般次临界假设）的情况下

(H1) $g \in C([0,\infty),[0,\infty))$ and $\lim_{s\to 0} g(s)/s^{\frac{\alpha}{N}} = \lim_{s\to\infty} g(s)/s^{\frac{2+\alpha}{N-2}} = 0$,

Li 等人 [12] 证明，若满足1.2，则对任意频率 $\varepsilon > 0$，方程（

$$\lim_{s\to 0} G(s)/s^{\frac{N+\alpha+4}{N}} = +\infty.$$

然而，据我们所知，在

$$\limsup_{s\to 0} G(s)/s^{\frac{N+\alpha+4}{N}} < +\infty.$$

一般而言，在这种情况下，基态的存在性在很大程度上取决于频率参数 $\varepsilon > 0$ 的大小。

本文将在一个略强的假设下，建立基态存在与不存在的阈值结果。更准确地说，我们将给出基态存在性的以下尖锐阈值。

定理 1.1。 假设 $\alpha > N-4$ 且**(H¹)** 成立。若存在 $q \in [\frac{N+\alpha+4}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2})$ 使得

(**H2**)
$$\limsup_{s\to 0} g(s)/s^{\frac{\alpha+4}{N}} < +\infty, \quad \liminf_{s\to 0} g(s)/s^{q-1} > 0$$

and

(**H3**)
$$\frac{N+\alpha}{N} G(s) \leq g(s)s, \quad \forall s > 0,$$

则存在一个正常数 $\varepsilon_q > 0$ 使得问题 (1.2) 在 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_q)$ 上没有基态解，并且在 $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 上存在正基态 $\varepsilon > \varepsilon_q$。此外，若 $\lim_{s\to 0} g(s)/s^{\frac{\alpha+4}{N}} = 0$，则带有 (1.2) 且满足 $\varepsilon = \varepsilon_q$ 的问题也存在正基态 $u_{\varepsilon_q} \in H^1(\mathbb{R}^N)$。

我们指出，对于某个 $q \in [\frac{N+\alpha+4}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2})$，$\liminf_{s\to 0} g(s)/s^{q-1} > 0$ 几乎是基态存在性的必要条件。

若 $\liminf_{s\to 0} g(s)/s^{q-1} > 0$ 对某个 $q \in (\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha+4}{N})$, 则 $\lim_{s\to 0} g(s)/s^{\frac{\alpha+4}{N}} = \liminf_{s\to 0} G(s)/s^{\frac{N+\alpha+4}{N}} = +\infty$，因此方程 (1.2) 对任意频率 $\varepsilon > 0$均有基态解。本文的第二个目标是研究当 $\varepsilon \to 0$时基态的极限渐近轮廓。为此，我们作出以下更强的假设

(H4) there exist $a > 0$ and $q \in (\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2})$ such that $\lim_{s\to 0} g(s)/s^{q-1} = a$.

我们证明，经过适当的重新缩放，方程 (1.2的极限方程为临界 Hardy-Littlewood-Sobolev 方程

$$w = \frac{N+\alpha}{N}(I_\alpha * |w|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}w \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N. \tag{1.9}$$

众所周知（见 [27]），

$$S_\alpha = \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |u|^{\frac{N+\alpha}{N}})|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}\right)^{\frac{N}{N+\alpha}}} \tag{1.10}$$

其定义良好且可达到。此外，极小化子由下式给出

$$W_1(x) := \left(\frac{A}{1+|x|^2}\right)^{\frac{N}{2}} \tag{1.11}$$

及其重新缩放族

$$W_\rho(x) := \rho^{-\frac{N}{2}} W_1(x/\rho),\ \rho > 0. \tag{1.12}$$

众所周知， $W_\rho(x)$ 是方程 (1.9) 在适当的 $A > 0$ 下的径向基态。

定理 1.2. 假设 **(H1)** 和 **(H4)** 成立。若 $q < \frac{N+\alpha+4}{N}$ 且 u_ε 是 (1.2)的径向基态，则当 $\varepsilon \to 0$时，有

$$u_\varepsilon(0) = \|u_\varepsilon\|_\infty \sim \varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{\alpha(N+\alpha+4-Nq)}},\quad \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 \sim \varepsilon^{\frac{(N+2)(N+\alpha)-N(N-2)q}{\alpha(N+\alpha+4-Nq)}},$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \varepsilon^{\frac{N}{\alpha}}\left[\left(\frac{N}{N+\alpha}\right)^{\frac{N}{\alpha}} S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{\alpha}} + O\left(\varepsilon^{\frac{(2+\alpha)[Nq-(N+\alpha)]}{\alpha(N+\alpha+4-Nq)}}\right)\right],$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |u_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|u_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}} = \varepsilon^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}\left[\left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}} + O\left(\varepsilon^{\frac{(2+\alpha)[Nq-(N+\alpha)]}{\alpha(N+\alpha+4-Nq)}}\right)\right].$$

此外，存在 $\xi_\varepsilon \in (0,\infty)$ 满足 $\xi_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\frac{N}{\alpha}}$ 使得当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，重新缩放的基态 $w_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\frac{N}{2\alpha}}\xi_\varepsilon^{\frac{N}{2}} u_\varepsilon(\xi_\varepsilon x)$满足

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 \sim \|w_\varepsilon\|_2^2 \sim \int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}} \sim \int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^q \sim 1,$$

并且当 $\varepsilon \to 0$, w_ε 收敛到 W_{ρ_0} 时，在 $H^1(\mathbb{R}^N)$中，其中

$$\rho_0 = \left(\frac{2q\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla W_1|^2}{a[Nq-(N+\alpha)]\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |W_1|^{\frac{N+\alpha}{N}})|W_1|^q}\right)^{\frac{2}{N+\alpha+4-Nq}}.$$

此外，当 $\varepsilon \to 0$ 时，基态的最小能量 $I_\varepsilon(u_\varepsilon)$ 满足

$$\frac{\alpha}{2N}\left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}} - \varepsilon^{-\frac{N+\alpha}{\alpha}} I_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim \varepsilon^{\frac{(2+\alpha)[Nq-(N+\alpha)]}{\alpha(N+\alpha+4-Nq)}}.$$

令人惊讶的是，在定理 1.2 中，我们证明了如果 $q \in (\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha+4}{N})$，那么当 $\varepsilon \to 0$ 时，重标度基态族 w_ε 收敛到 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的极值函数 W_{ρ_0}，而不是 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中的极值函数，即使极限方程仅在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中适定。我们将相关的 (α, q) 区域 $\left\{(\alpha,q) : \frac{N+\alpha}{N} < q < \frac{N+\alpha}{N-2}, \right.$ $\left. 0 < \alpha < N \right\}$ 分为两部分：

$$\mathcal{A}_N = \left\{ (\alpha, q) : \ \frac{N+\alpha+4}{N} \le q < \frac{N+\alpha}{N-2} \right\}.$$

$$\mathcal{B}_N = \left\{ (\alpha, q) : \ \frac{N+\alpha}{N} < q < \min\{\frac{N+\alpha}{N-2}, \frac{N+\alpha+4}{N}\} \right\},$$

如图 1 所示。于是，定理 1.1 和定理 1.2 分别适用于 $\mathcal{A}_N$ 和 $\mathcal{B}_N$。

FIGURE 1. 定理 1.1 和定理1.2适用的（α, q）平面区域。

本文强调一些新的发现。首先，我们在 $\alpha > N-4$ 的情况下发现了一个新的阈值指数$q_0 = \frac{N+\alpha+4}{N}$。对于 Choquard 方程而言，这个新指数大于质量临界指数 $\frac{N+\alpha+2}{N}$。当次临界扰动$g(s)$满足 $g(s) \sim s^{q-1}$（当 $s \to 0$ 时），则基态的存在性与不存在性由指数 q 在（$\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2}$）中的位置决定。指数 q_0 是临界的，其含义是：若 $q \in (\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha+4}{N})$，则对于任意频率$\varepsilon > 0$，(1.2) 都存在基态；而若 $q \in [\frac{N+\alpha+4}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2})$，则基态的存在性强烈依赖于频率 $\varepsilon > 0$ 的大小，并出现阈值现象：存在 $\varepsilon_q > 0$，使得当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_q)$ 时，(1.2) 不存在基态；而当 $\varepsilon \ge \varepsilon_q$ ($\varepsilon > \varepsilon_q$（在 $q = \frac{N+\alpha+4}{N}$ 的情况下）时，(1.2) 存在基态。对于临界组合薛定谔方程 [36] 和带有一般局部扰动项 [22]，的下临界 Choquard 方程，类似的阈值现象已为人所知，但相应的临界指数完全不同。在前一种情形中，类似的临界指数仅出现在 $N = 3$ 中，且 q_0 等于 4；在后一种情形中，相应的临界指数 q_0 等于薛定谔方程 ¨ 的质量临界指数$2 + \frac{4}{N}$。

—

其次，如果 $g(s) \simeq as^{q-1}$ as $s \to 0$ for some $q \in (\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha+4}{N})$ and some $a > 0$, then as $\varepsilon \to 0$, 基态的极限渐近轮廓完全由 (a, q) 在 $(0, \infty) \times (\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha+4}{N})$ 中的位置决定，这一事实颇为惊人。为了纳入

由 $g(u)$ 引起的低阶项，我们首先采用适当的重新缩放，将方程 (1.2) 转化为方程

$$-\varepsilon^{\sigma}\Delta w + w = \left(I_\alpha * (|w|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w))\right)\left(\frac{N+\alpha}{N}|w|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}w + \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w)\right),$$

其中 $\sigma := \frac{(2+\alpha)[Nq-N+\alpha]}{q}(N+\alpha+4-Nq) > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = o_\varepsilon(1)$，且满足 $\varepsilon^\sigma = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^q$。接着，我们证明基态解的重新缩放族 $\{w_\varepsilon\}$ 收敛到 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中的一个极限 $w_0 \neq 0$。一般而言，w_ε 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到 w_0 并非预期结果。为证明存在一种重新缩放，使其收敛到极限方程的某个特定解，且收敛发生在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中（而不只是 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中），我们使用如下恒等式

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 = \frac{a[Nq-(N+\alpha)]}{2q}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^q + \mathcal{R}_\varepsilon. \tag{1.13}$$

若 $\mathcal{R}_\varepsilon = o_\varepsilon(1)$，则恒等式 (1.13) 允许我们通过引入新的保持 L^2-范数的重新缩放 $\tilde{w}_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon^{N/2}w_\varepsilon(\rho_\varepsilon x)$，并选取适当的 $\rho_\varepsilon > 0$，来调整 w_ε，使得 $\tilde{w}_\varepsilon$ 的弱极限 $\tilde{w}_0$ 满足 $\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla\tilde{w}_\varepsilon\|_2 = \|\nabla\tilde{w}_0\|_2$。这意味着 $\tilde{w}_\varepsilon \to \tilde{w}_0$ 属于 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$，从而也属于 $H^1(\mathbb{R}^N)$。我们指出，证明 $\{w_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界，是采用这一技术的主要环节。然而，由于存在交叉项，$\mathcal{R}_\varepsilon \neq 0$，这一问题的证明变得复杂得多，因此需要一些新技术。本文首先证明 $\|w_\varepsilon\|_2^2$ 和 $\varepsilon^\sigma\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2$ 有界。利用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式和 Sobolev 不等式，我们还证明 $\mathcal{R}_\varepsilon \lesssim \sum_{i=1}^k \varepsilon^{\tau_i\sigma}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\beta_i}$，其中 $\tau_i > 0$ 且 $\beta_i > 0$。因此，由 (1.13) 可得

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 \lesssim \|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq-(N+\alpha)}{2}} + \sum_{i=1}^k \varepsilon^{\tau_i\sigma}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\beta_i}. \tag{1.14}$$

由于 $\beta_i > 2$ 对于某些 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$成立，我们无法从（1.14）得出 $\|\nabla w_\varepsilon\|_2$ 有界。为克服这一困难，我们找到了某些数 $\tilde{\tau}_i \in [0, \tau_i)$，使得 $0 \leq \beta_i - 2\tilde{\tau}_i \leq 2$；随后利用 $\varepsilon^\sigma\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2$ 的有界性，得到 $\mathcal{R}_\varepsilon \lesssim \sum_{i=1}^k \varepsilon^{(\tau_i-\tilde{\tau}_i)\sigma}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\beta_i-2\tilde{\tau}_i}$。

余项 $\mathcal{R}_\varepsilon$ 的这一估计使我们能够得到 $\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 \leq \|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq-(N+\alpha)}{2}} + \sum_{i=1}^k \varepsilon^{(\tau_i-\tilde{\tau}_i)\sigma}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\beta_i-2\tilde{\tau}_i}$，通过使用（1.13），结合以下事实 $\frac{Nq-(N+\alpha)}{2} < 2$可推出 $\|\nabla w_\varepsilon\|_2$的有界性。详见下文引理 4.2。我们指出，在引理 4.3的证明中也使用了类似的技巧。这种约化技巧似乎是新的，也应适用于其他相关情形。

本文结构如下。第 2 节给出一些预备引理。随后，我们分别在第 3 节和第 4 节证明主要结果，即定理 1.1 和定理 1.2。最后一节简要讨论当 $\varepsilon \to \infty$ 时基态的渐近行为。

本文中，我们始终假设 $N \geq 3$。B_r 表示 $\mathbb{R}^N$ 中以原点为中心、半径为 $r > 0$的球，$|B_r|$ 和 B_r^c 分别表示其勒贝格测度及其在$\mathbb{R}^N$中的补集。

$L^p(\mathbb{R}^N)$是满足 $1 \leq p < \infty$ 的勒贝格空间，其范数为 $\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\right)^{1/p}$.

$H^1(\mathbb{R}^N)$是通常的 Sobolev 空间，其范数为$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + |u|^2\right)^{1/2}$。

$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$。

我们用 c, C 表示各种正常数。对于任意 $s > 0$ 以及两个非负泛函 $f(s)$ 和 $g(s)$，记

(i) $f(s) \lesssim g(s)$ 或 $g(s) \gtrsim f(s)$，如果存在一个与 s 无关的正常数 C，使得 $f(s) \leq Cg(s)$。

(ii) $f(s) \backsim g(s)$，如果 $f(s) \lesssim g(s)$ 且 $f(s) \gtrsim g(s)$。如果 $|f(s)| \lesssim |g(s)|$，我们记作 $f(s) = O((g(s))$。最后，如果 $\lim f(s)/g(s) = 1$，那么记作 $f(s) \simeq g(s)$。

2. Preliminary

为证明我们的结果，我们给出一些引理，这些引理对后续证明很有帮助。首先，我们给出众所周知的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，该不等式可见 [15]。

引理 2.1。设 p、$r > 1$ 和 $0 < \alpha < N$ 满足 $1/p + (N-\alpha)/N + 1/r = 2$。令 $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ 且 $v \in L^r(\mathbb{R}^N)$。则存在一个最佳常数 $C(N, \alpha, p)$，它与 u 和 v 无关，使得

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)v(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} \right| \leq C(N, \alpha, p) \|u\|_p \|v\|_r.$$

若 $p = r = \frac{2N}{N+\alpha}$，则

$$C(N, \alpha, p) = C_\alpha(N) = \pi^{\frac{N-\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{N+\alpha}{2})} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(N)} \right\}^{-\frac{\alpha}{N}}.$$

注 2.2。根据 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，对任意满足 $s \in (1, \frac{N}{\alpha})$ 的 $v \in L^s(\mathbb{R}^N)$、$I_\alpha * v \in L^{\frac{Ns}{N-\alpha s}}(\mathbb{R}^N)$，有

$$\|I_\alpha * v\|_{\frac{Ns}{N-\alpha s}} \leq A_\alpha(N) C(N, \alpha, s) \|v\|_s.$$

Gagliardo-Nirenberg 不等式可见于 [33]。

引理 2.3. 设 $N \geq 1$、$2 < s < 2^*$ 与 $\gamma_s = \frac{N(s-2)}{2s}$，则下列精确不等式

$$\|u\|_s \leq C_{N,s} \|u\|_2^{1-\gamma_s} \|\nabla u\|_2^{\gamma_s}$$

对任意 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 成立，其中常数 $C_{N,s} = \left(\frac{s}{2\|Q_s\|_2^{s-2}} \right)$ 与 Q_s 是下列方程的唯一正解

$$-\frac{N(s-2)}{4} \Delta Q_s + \frac{2N - s(N-2)}{4} Q_s = |Q_s|^{s-2} Q_s, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.1}$$

仿照 [14, 定理 2.1] 中的论证，容易证明 (1.2) 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的任一弱解具有额外正则性，从而我们可以对所有有限能量解建立 Pohožaev 恒等式。

引理 2.4. 假设 **(H1)** 成立。若 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是 (1.2) 的解，则对每一个 $r > 1$，有 $u \in W^{2,r}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$。此外，$u$ 满足 *Pohožaev* 恒等式

$$\begin{aligned} P^0_\varepsilon(u) : = & \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{N\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \\ & - \frac{N+\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * (|u|^{\frac{N+\alpha}{N}} + G(u)))(|u|^{\frac{N+\alpha}{N}} + G(u)) dx = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

众所周知，方程 (1.2) 的任意弱解都对应于作用泛函 I_ε（定义于 (1.4)）的一个临界点，该泛函定义良好，且在 C^1 中具有 $H^1(\mathbb{R}^N)$。称非平凡解 $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 为基态，若

$$I_\varepsilon(u_\varepsilon) = m_\varepsilon := \inf\{I_\varepsilon(u) : \ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ and } I'_\varepsilon(u) = 0\}. \tag{2.3}$$

在 [13, 14]（另见 [14] 中主要结果的证明）中，已经证明

$$m_\varepsilon = \inf_{u \in \mathcal{N}^0_\varepsilon} I_\varepsilon(u) = \inf_{u \in \mathcal{P}^0_\varepsilon} I_\varepsilon(u), \tag{2.4}$$

其中， $\mathcal{N}_\varepsilon^0$ 和 $\mathcal{P}_\varepsilon^0$ 分别是相应的 Nehari 流形和 Pohožaev 流形，其定义为

$$\mathcal{N}_\varepsilon^0 := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \varepsilon |u|^2 \\ = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * (|u|^{\frac{N+\alpha}{N}} + G(u)))(\frac{N+\alpha}{N}|u|^{\frac{N+\alpha}{N}} + g(u)u)dx \end{array} \right\}$$

and

$$\mathcal{P}_\varepsilon^0 := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \;\middle|\; P_\varepsilon^0(u) = 0 \right\},$$

分别。

下面，我们给出最小能量m_ε的以下极小极大刻画。

引理2.5。设

$$u_t(x) = \begin{cases} u\left(\dfrac{x}{t}\right), & if\ t > 0, \\ 0, & if\ t = 0, \end{cases}$$

then

$$m_\varepsilon = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \sup_{t \geq 0} I_\varepsilon(tu) = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \sup_{t \geq 0} I_\varepsilon(u_t).$$

特别地，若 u_ε 是一个基态，则有 $m_\varepsilon = I_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sup_{t>0} I_\varepsilon(tu_\varepsilon) = \sup_{t>0} I_\varepsilon((u_\varepsilon)_t)$。

证明。证明是标准的，因此这里从略，并请读者参阅 [10, 14]。 □

3. Proof of Theorem 1.1

本节讨论在情形 $\alpha \geq N-4$下，方程（1.2）的基态的存在性与不存在性。在此情形下，有$\frac{N+\alpha+4}{N} \leq \frac{N+\alpha}{N-2}$。我们作如下规范重标度：

$$v(x) = \varepsilon^{-\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}} u(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} x), \tag{3.1}$$

于是，方程（1.2）变为

$$\begin{aligned} -\Delta v + v = &\left(I_\alpha * (|v|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}} G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}} v)) \right) \\ &\cdot \left(\frac{N+\alpha}{N} |v|^{\frac{N+\alpha}{N}-2} v + \varepsilon^{-\frac{2+\alpha}{4}} g(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}} v) \right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，方程（3.2）的形式极限方程为

$$-\Delta v + v = \frac{N+\alpha}{N} (I_\alpha * |v|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |v|^{\frac{N+\alpha}{N}-2} v. \tag{3.3}$$

我们将方程（3.2）和（3.3）的 Nehari 流形记为：

$$\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon := \{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \mid \tilde{N}_\varepsilon(v) = 0 \},$$

and

$$\tilde{\mathcal{N}}_0 := \{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \mid \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 = \frac{N+\alpha}{N} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |v|^{\frac{N+\alpha}{N}} \},$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\varepsilon(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} &(I_\alpha * (|v|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}} G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}} v))) \\ &\cdot (\frac{N+\alpha}{N} |v|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon^{-\frac{2+\alpha}{4}} g(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}} v) v) dx. \end{aligned}$$

对应的能量泛函（3.2）由下式给出

$$\tilde{J}_\varepsilon(v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2+|v|^2-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|v|^{\frac{N+\alpha}{N}}+\varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v)))\cdot(|v|^{\frac{N+\alpha}{N}}+\varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v))dx, \tag{3.4}$$

以及极限方程的能量泛函（3.3）为

$$\tilde{J}_0(v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2+|v|^2-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v|^{\frac{N+\alpha}{N}})|v|^{\frac{N+\alpha}{N}}. \tag{3.5}$$

容易看出

$$\tilde{m}_\varepsilon:=\inf_{v\in\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon}\tilde{J}_\varepsilon(v)\quad\text{and}\quad\tilde{m}_0:=\inf_{v\in\tilde{\mathcal{N}}_0}\tilde{J}_0(v)$$

均定义良好且为正。此外，不难证明

$$\tilde{m}_\varepsilon=\inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\sup_{t\geq0}\tilde{J}_\varepsilon(tu)=\inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\sup_{t\geq0}\tilde{J}_\varepsilon(u_t).$$

对于 $\tilde{m}_0$，类似的极大极小刻画同样成立。令 S_α 由（1.10）定义，则可按标准方法证明

$$S_\alpha=\inf_{v\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2+\int_{\mathbb{R}^N}|v|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v|^{\frac{N+\alpha}{N}})|v|^{\frac{N+\alpha}{N}}\right)^{\frac{N}{N+\alpha}}} \tag{3.6}$$

且 $\tilde{m}_0=\frac{\alpha}{2N}(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$不取到。根据 $\tilde{m}_\varepsilon$和 $\tilde{m}_0$的极小极大表征，容易证明，对于所有 $\varepsilon>0$，$\tilde{m}_\varepsilon\leq\tilde{m}_0=\frac{\alpha}{2N}(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$。

定理1.1的证明。由假设**(H3)**，对任意固定的 $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{J}_\varepsilon(v)&=\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}\varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)+4\alpha}{4\alpha}}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|v|^{\frac{N+\alpha}{N}}+\varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v)))\\&\quad\cdot(\tfrac{N+\alpha}{N}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v)-g(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v)\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v)dx\\&\leq 0.\end{aligned}$$

因此，对任意固定的 $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$，$\tilde{J}_\varepsilon(v)$关于 $\varepsilon>0$ 是非增的。对任意 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 以及任意 $v\in\mathcal{N}_{\varepsilon_1}$，存在 $t>0$ 使得 $tv\in\mathcal{N}_{\varepsilon_2}$。因此，我们得到

$$\tilde{m}_{\varepsilon_2}\leq\tilde{J}_{\varepsilon_2}(tv)\leq\tilde{J}_{\varepsilon_1}(tv)\leq\tilde{J}_{\varepsilon_1}(v),$$

由此可得 $\tilde{m}_{\varepsilon_2}\leq\tilde{m}_{\varepsilon_1}$。也就是说，$\tilde{m}_\varepsilon$ 关于 ε是非增的。另一方面，若$\tilde{m}_\varepsilon<\frac{\alpha}{2N}(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$对某个 $\varepsilon>0$成立，则仿照[12]，中的论证，我们可以证明（1.2）具有基态解。

我们断言，（1.2）在较小的 $\varepsilon>0$时没有基态解。反设（1.2）具有基态 u_ε，对所有 $\varepsilon>0$成立。则

$$v_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}u_\varepsilon(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x)$$

是方程（3.2）的基态。由 Nehari 和 Pohožaev 恒等式可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_\varepsilon|^2+\int_{\mathbb{R}^N}|v_\varepsilon|^2&=\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}+\varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)))\\&\quad\cdot(\frac{N+\alpha}{N}|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}+\varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}g(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)dx\end{aligned}$$

and

$$\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_\varepsilon|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|v_\varepsilon|^2=\frac{N+\alpha}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}+\varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)))\\ \cdot(|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}+\varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon))dx.$$

因此，我们得到

$$\tilde{m}_\varepsilon=\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_\varepsilon|^2+\frac{\alpha}{2(N+\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N}|v_\varepsilon|^2.$$

因此，$\|\nabla v_\varepsilon\|_2$ 和 $\|v_\varepsilon\|_2$ 有界。

另一方面，由 Nehari 恒等式和 Pohožaev 恒等式可得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2=&\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}+\varepsilon^{-\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)))\\ &\cdot\left(\frac{N}{2}g(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon-\frac{N+\alpha}{2}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)\right)dx.\end{aligned}\tag{3.7}$$

由于 $q\in[\frac{N+\alpha+4}{N},\frac{N+\alpha}{N-2})$，由（**H1**）和（**H2**），对于任意 $\eta>\limsup_{s\to 0}g(s)/s^{\frac{\alpha+4}{N}}$ 以及任意小的 $\delta>0$，存在 $C>0$ 使得

$$g(s)\le\eta s^{\frac{\alpha+4}{N}}+Cs^{q-1}+\delta s^{\frac{2+\alpha}{N-2}},\quad G(s)\le\eta s^{\frac{N+\alpha+4}{N}}+Cs^q+\delta s^{\frac{N+\alpha}{N-2}},\tag{3.8}$$

and

$$\left|\frac{N}{2}g(s)s-\frac{N+\alpha}{2}G(s)\right|\le\eta s^{\frac{N+\alpha+4}{N}}+Cs^q+\delta s^{\frac{N+\alpha}{N-2}},\quad\forall\ s\ge 0.\tag{3.9}$$

由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式以及 $\{v_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界性可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha+4}{N}}\lesssim\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2,\\ &\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|v_\varepsilon|^{q}\lesssim\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq-N-\alpha}{2}},\\ &\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}\lesssim\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}}.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})\left(\frac{N}{2}g(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon-\frac{N+\alpha}{2}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)\right)dx\\ &\lesssim\eta\varepsilon^{\frac{(N+\alpha+4)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2+\varepsilon^{\frac{Nq(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq-N-\alpha}{2}}+\delta\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)(N+\alpha)}{4\alpha(N-2)}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

令 $r,s\in[\frac{N+\alpha+4}{N},\frac{N+\alpha}{N-2})$，则由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式以及 $\{v_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界性，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_\varepsilon|^r)|v_\varepsilon|^s\le C\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N(r+s)}{2}-N-\alpha}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon))\left(\frac{N}{2}g(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon-\frac{N+\alpha}{2}G(\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}v_\varepsilon)\right)dx\\ &\lesssim\eta^2\varepsilon^{\frac{(N+\alpha+4)(2+\alpha)}{2\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^4+\eta\varepsilon^{\frac{(N+\alpha+4+Nq)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq+4-N-\alpha}{2}}\\ &+\eta\delta\varepsilon^{\frac{(N+\alpha+4+N2_\alpha^*)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N2_\alpha^*+4-N-\alpha}{2}}+\varepsilon^{\frac{Nq(2+\alpha)}{2\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{Nq-N-\alpha}\\ &+\delta\varepsilon^{\frac{N(2_\alpha^*+q)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N(2_\alpha^*+q)-2N-2\alpha}{2}}+\delta^2\varepsilon^{\frac{N2_\alpha^*(2+\alpha)}{2\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{N2_\alpha^*-N-\alpha},\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中，在下文中 $2_\alpha^* = \frac{N+\alpha}{N-2}$。因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2\\
&\lesssim \eta\varepsilon^{\frac{(N+\alpha+4)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2+\varepsilon^{\frac{Nq(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq-N-\alpha}{2}}\\
&+\delta\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)(N+\alpha)}{4\alpha(N-2)}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}}+\eta^2\varepsilon^{\frac{(N+\alpha+8)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^4\\
&+\eta\varepsilon^{\frac{(4+Nq)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq+4-N-\alpha}{2}}+\eta\delta\varepsilon^{\frac{(4+N2_\alpha^*)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N2_\alpha^*+4-N-\alpha}{2}}\\
&+\varepsilon^{\frac{(2Nq-N-\alpha)(2+\alpha))}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{Nq-N-\alpha}+\delta\varepsilon^{\frac{(N(2_\alpha^*+q)-N-\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N(2_\alpha^*+q)-2N-2\alpha}{2}}\\
&+\delta^2\varepsilon^{\frac{(2N2_\alpha^*-N-\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{N2_\alpha^*-N-\alpha},
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
1 \lesssim\ & \eta\varepsilon^{\frac{2+\alpha}{\alpha}}+\varepsilon^{\frac{(Nq-N-\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq-N-\alpha-4}{2}}+\delta\varepsilon^{\frac{(N2_\alpha^*-N-\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{2_\alpha^*-2}\\
&+\eta^2\varepsilon^{\frac{2(2+\alpha)}{\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2+\eta\varepsilon^{\frac{(4+Nq-N-\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq-N-\alpha}{2}}\\
&+\eta\delta\varepsilon^{\frac{(4+N2_\alpha^*-N-\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N2_\alpha^*-N-\alpha}{2}}+\varepsilon^{\frac{(Nq-N-\alpha)(2+\alpha)}{2\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{Nq-N-\alpha-2}\\
&+\delta\varepsilon^{\frac{(N(2_\alpha^*+q)-2N-2\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{\frac{N(2_\alpha^*+q)-2N-2\alpha-4}{2}}\\
&+\delta^2\varepsilon^{\frac{(N2_\alpha^*-N-\alpha)(2+\alpha)}{2\alpha}}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^{N2_\alpha^*-N-\alpha-2}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

由 $\{v_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$中的有界性，我们得出对某个 $\tilde{\varepsilon}_q>0$有 $\varepsilon>\tilde{\varepsilon}_q$。这导致矛盾，从而确立该断言。因此，我们得出对充分小的 $\varepsilon>0$有 $\tilde{m}_\varepsilon \geq \frac{\alpha}{2N}\left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$。于是，对充分小的 $\varepsilon>0$，我们得到 $\tilde{m}_\varepsilon = \frac{\alpha}{2N}\left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$。令

$$
\varepsilon_q := \sup\left\{\varepsilon>0 \,\middle|\, \tilde{m}_\varepsilon = \frac{\alpha}{2N}\left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}\right\}.
\tag{3.13}
$$

于是对 $\frac{N+\alpha+4}{N} \leq q < \frac{N+\alpha}{N-2}$有 $\varepsilon_q>0$。众所周知（参见[12]），对充分大的 $\varepsilon>0$有 $\tilde{m}_\varepsilon < \frac{\alpha}{2N}\left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$。因此我们有 $0<\varepsilon_q<+\infty$。故对 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_q)$有 $\tilde{m}_\varepsilon = \frac{\alpha}{2N}\left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$，且对 $\varepsilon>\varepsilon_q$. 有$\tilde{m}_\varepsilon \leq \frac{\alpha}{2N}\left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$。若存在 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_q)$使得 $\tilde{m}_\varepsilon$被达到，则仿照 [36, 引理3.3], 中的论证，我们得到对 $\varepsilon'>\varepsilon$有$\tilde{m}_{\varepsilon'}<\tilde{m}_\varepsilon = \frac{\alpha}{2N}\left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$，这与 ε_q的定义相矛盾。因此，我们得出(1.2)对 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_q)$没有基态解，而对 $\varepsilon>\varepsilon_q$存在基态解。

最后，假设 $\lim_{s\to 0} g(s)/s^{\frac{\alpha+4}{N}} = 0$, 则可以在（3.9）和（3.12）中取 $\eta>0$ 充分小。设 $u_\varepsilon\in H^1(\mathbb{R}^N)$是当 $\varepsilon>\varepsilon_q$ 且 $v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}u_\varepsilon(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x)$时方程（1.2）的一个基态，则 v_ε有界，因此当$\varepsilon\to\varepsilon_q^+$时，对任意 $s\in(2,2^*)$， v_ε在 $H^1(\mathbb{R}^N)$中弱收敛，且在$L^s(\mathbb{R}^N)$中收敛到$v_\varepsilon\to v_{\varepsilon_q}$。

若 $q\in\left(\frac{N+\alpha+4}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2}\right)$，则根据（3.12）及的有界性，取 $\eta>0$ 充分小，可得存在两个常数 $\{v_\varepsilon\}$和 C_1， $C_2>0$ 使得

$$
C_1 \leq \|\nabla v_\varepsilon\|_2 \leq C_2, \quad \text{for } \varepsilon>\varepsilon_q \text{ with } \varepsilon-\varepsilon_q>0 \text{ small.}
$$

取 $\delta>0$ 充分小，由于 $\{v_\varepsilon\}$有界，因此由（3.7）和（3.11）可得 (3.10)

$$
\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * (|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}+|v_\varepsilon|^q))|v_\varepsilon|^q \sim 1, \quad \text{as } \varepsilon\to\varepsilon_q^+.
\tag{3.14}
$$

由于 $\frac{N+\alpha}{N}<q<\frac{N+\alpha}{N-2}$，我们选取一个正数 δ_q，使得

$$
0<\delta_q<\min\left\{\frac{4N}{N+2}, \frac{2N}{q}\left(q-\frac{N+\alpha}{N}\right)\right\}.
$$

于是很容易看出

$$2<\frac{2N-\delta_q}{N-\delta_q}<\frac{2N}{N-2},\quad 2\le\frac{(2N-\delta_q)q}{N+\alpha}\le\frac{2N}{N-2}. \tag{3.15}$$

由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|v_\varepsilon|^q-\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_{\varepsilon_q}|^{\frac{N+\alpha}{N}})|v_{\varepsilon_q}|^q\\&=\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})(|v_\varepsilon|^q-|v_{\varepsilon_q}|^q)+\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}-|v_{\varepsilon_q}|^{\frac{N+\alpha}{N}}))|v_{\varepsilon_q}|^q\\&\le C\|v_\varepsilon\|_2^{\frac{N+\alpha}{N}}\|v_\varepsilon-v_{\varepsilon_q}\|_{\frac{2Nq}{N+\alpha}}^q+C\|v_\varepsilon-v_{\varepsilon_q}\|_{\frac{2N-\delta_q}{N-\delta_q}}^{\frac{N+\alpha}{N}}\|v_{\varepsilon_q}\|_{\frac{(2N-\delta_q)q}{N+\alpha}}^q.\end{aligned}$$

因此，得到

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_q^+}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|v_\varepsilon|^q=\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_{\varepsilon_q}|^{\frac{N+\alpha}{N}})|v_{\varepsilon_q}|^q.$$

同理，有

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_q^+}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_\varepsilon|^q)|v_\varepsilon|^q=\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|v_{\varepsilon_q}|^q)|v_{\varepsilon_q}|^q.$$

因此，由（3.14），有

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_q^+}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|v_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}+|v_\varepsilon|^q))|v_\varepsilon|^q=\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|v_{\varepsilon_q}|^{\frac{N+\alpha}{N}}+|v_{\varepsilon_q}|^q))|v_{\varepsilon_q}|^q\neq 0. \tag{3.16}$$

因此，我们得出 $v_{\varepsilon_q}\neq 0$。容易证明 $v_\varepsilon\to v_{\varepsilon_q}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中，当$\varepsilon\to\varepsilon_q^+$取子列时成立，进而得到 $v_{\varepsilon_q}\in\tilde{\mathcal{N}}_{\varepsilon_q}$。因此 $\tilde{m}_{\varepsilon_q}$由 v_{ε_q}达到，且 v_{ε_q} 是方程（3.2）的正基态解，其中 $\varepsilon=\varepsilon_q$。证明完毕。□

推论3.1。假设

$$g(u)=\sum_{i=1}^k c_i|u|^{q_i-2}u,\quad c_i>0,\quad q_i\in\Big(\frac{N+\alpha}{N},\frac{N+\alpha}{N-2}\Big).$$

令 $q:=\min\{q_i\mid i=1,2,\cdots,k\}$。则以下结论成立：

(1) 若 $q\ge\frac{N+\alpha+4}{N}$，则存在 $\varepsilon_q>0$，使得对任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_q)$，问题(1.2)不存在基态；而对任意 $\varepsilon\ge\varepsilon_q$ ($\varepsilon>\varepsilon_q$ 在 $q=\frac{N+\alpha+4}{N}$)的情况下，问题(1.2) 存在一个正基态 $u_\varepsilon\in H^1(\mathbb{R}^N)$；

(2) 若 $q<\frac{N+\alpha+4}{N}$，则对任意 $\varepsilon>0$，问题(1.2) 存在一个正基态$u_\varepsilon\in H^1(\mathbb{R}^N)$。

注3.1. 假设 (H1) 和 (H2) 成立，$q\ge\frac{N+\alpha+4}{N}$。若 (H3) 不成立，则存在 $0<\varepsilon_q^1\le\varepsilon_q^2<\infty$，使得对于任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_q^1)$，问题 (1.2) 都没有基态；而若 $\varepsilon>\varepsilon_q^2$，问题 (1.2) 存在一个正基态 $u_\varepsilon\in H^1(\mathbb{R}^N)$，它是径向对称且径向非增的。此外，若 $\lim_{s\to 0}g(s)/s^{\frac{\alpha+4}{N}}=0$ and$q\in(\frac{N+\alpha+4}{N},\frac{N+\alpha}{N-2})$，那么当 $\varepsilon\to\varepsilon_q^{2+}$ 时，取子列后，重标度基态族 $v_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}}u_\varepsilon(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x)$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到方程 (3.2) 的一个正解，其中 $\varepsilon=\varepsilon_q^2$。

4. Proof of Theorem 1.2

本节中，我们假设 $q < \frac{N+\alpha+4}{N}$ 并研究正基态解 u_ε 在（1.2）中当 $\varepsilon \to 0$时的渐近行为。令

$$\sigma = \frac{(2+\alpha)[Nq-(N+\alpha)]}{\alpha(N+\alpha+4-Nq)},$$

我们考虑如下重新缩放

$$w(x) = \varepsilon^{-\frac{N\sigma}{4}} v(\varepsilon^{-\frac{\sigma}{2}}x), \qquad v(x) = \varepsilon^{-\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}} u(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x), \tag{4.1}$$

则方程（3.2）转化为方程

$$-\varepsilon^\sigma \Delta w + w = \left(I_\alpha * (|w|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w))\right)\left(\frac{N+\alpha}{N}|w|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}w + \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w)\right), \tag{4.2}$$

其中

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{\frac{(N+\alpha)(2+\alpha)}{4\alpha}+\frac{(N+\alpha)\sigma}{4}}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}+\frac{N\sigma}{4}}.$$

容易验证

$$\varepsilon^\sigma = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^q. \tag{4.3}$$

(4.2) 对应的能量泛函为

$$J_\varepsilon(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^\sigma |\nabla w|^2 + |w|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * (|w|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w))) \cdot (|w|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w))dx.$$

(4.7) 对应的 Nehari 流形和 Pohožaev 流形分别记为$\mathcal{N}_\varepsilon$ 和 $\mathcal{P}_\varepsilon$。也就是说,

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \{w \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} \mid N_\varepsilon(w) = 0\},$$

其中

$$N_\varepsilon(w) = \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^\sigma |\nabla w|^2 + |w|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * (|w|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w))) \cdot (\frac{N+\alpha}{N}|w|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w)w)dx,$$

$$\mathcal{P}_\varepsilon := \{w \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} \mid P_\varepsilon(w) = 0\},$$

其中

$$P_\varepsilon(w) = \frac{(N-2)\varepsilon^\sigma}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 - \frac{N+\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * (|w|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w)))(|w|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w))dx.$$

当 $\varepsilon \to 0$时，方程(4.2)的极限为 Hardy-Littlewood-Sobolev 临界方程(1.9)。对应的能量泛函为

$$J_0(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w|^{\frac{N+\alpha}{N}},$$

相应的 Nehari 流形和 Pohožaev 流形定义为

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{P}_0 := \left\{w \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 = \frac{N+\alpha}{N}\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w|^{\frac{N+\alpha}{N}}\right\}.$$

下文中，令

$$\mathbb{D}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^{\frac{N+\alpha}{N}})|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}. \tag{4.4}$$

以下结果可通过标准方法验证。

引理4.1。 设 $\varepsilon > 0$， $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 且 v 是 (4.1) 中 u， $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 且 w 是 (4.6) 中 v 的重新缩放。那么

(i) $\varepsilon^{-\frac{N}{\alpha}}\|u\|_2^2 = \|v\|_2^2 = \|w\|_2^2$， $\varepsilon^{-\frac{N+\alpha}{\alpha}}\|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla v\|_2^2 = \varepsilon^{\sigma}\|\nabla w\|_2^2$,

(ii) $\varepsilon^{-\frac{N+\alpha}{\alpha}}\mathbb{D}(u) = \mathbb{D}(v) = \mathbb{D}(w)$.

此外，按照 [13, 14]，中的方法推理，容易证明

$$\tilde{m}_0 = \inf_{w\in\mathcal{N}_0} J_0(w) = \inf_{w\in\mathcal{P}_0} J_0(w),$$

and

$$\tilde{m}_\varepsilon = \inf_{w\in\mathcal{N}_\varepsilon} J_\varepsilon(w) = \inf_{w\in\mathcal{P}_\varepsilon} J_\varepsilon(w).$$

设 u_ε 为（1.2）的一个基态，并令

$$w_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\frac{N\sigma}{4}} v_\varepsilon(\varepsilon^{-\frac{\sigma}{2}}x), \qquad v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}} u_\varepsilon(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x),$$

则 w_ε 是（4.7）的一个基态，并满足 $w_\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon \cap \mathcal{P}_\varepsilon$ 且 $\tilde{m}_\varepsilon = J_\varepsilon(w_\varepsilon)$。

引理 4.2. 假设（**H1**）和（**H4**）成立，则重标度解族 $\{w_\varepsilon\}$在 H^1（$\mathbb{R}^N$）中有界，并且满足

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 = \frac{a[Nq-(N+\alpha)]}{2q}\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^q + o_\varepsilon(1). \tag{4.5}$$

证明. 首先，由于对所有 $s \geq 0$， $G(s) \geq 0$，根据 $\tilde{m}_\varepsilon$ 和 $\tilde{m}_0$的极小极大表征，容易证明 $\tilde{m}_\varepsilon \leq \tilde{m}_0$。此外，根据 $w_\varepsilon \in \mathcal{P}_\varepsilon$，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0 \geq \tilde{m}_\varepsilon = J_\varepsilon(w_\varepsilon) &= J_\varepsilon(w_\varepsilon) - \frac{1}{N+\alpha}P_\varepsilon(w_\varepsilon)\\ &= \frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^\sigma|\nabla w_\varepsilon|^2 + \frac{\alpha}{2(N+\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon|^2.\end{aligned}$$

因此，我们有 $\{w_\varepsilon\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$中有界，且 $\varepsilon^\sigma\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2$ 有界。要证明 $\{w_\varepsilon\}$在 $H^1(\mathbb{R}^N)$中有界，只需证明 $\{w_\varepsilon\}$在 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$中也有界。由于$w_\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon \cap \mathcal{P}_\varepsilon$，我们得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^\sigma\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 = &\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})\left[\frac{N}{2}\varepsilon_1^{-1}g(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\varepsilon_2 w_\varepsilon - \frac{N+\alpha}{2}\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\right]dx\\ &+\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon))\left[\frac{N}{2}\varepsilon_1^{-1}g(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\varepsilon_2 w_\varepsilon - \frac{N+\alpha}{2}\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\right]dx,\end{aligned} \tag{4.6}$$

因此

$$\begin{aligned}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 = &\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})\left[\frac{N}{2}g(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\varepsilon_2 w_\varepsilon - \frac{N+\alpha}{2}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\right]\varepsilon_2^{-q}dx\\ &+\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon))\left[\frac{N}{2}g(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\varepsilon_2 w_\varepsilon - \frac{N+\alpha}{2}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\right]\varepsilon_2^{-q}dx.\end{aligned} \tag{4.7}$$

令 $g(s) = as^{q-1} + \tilde{g}(s)$，则 $G(s) = \frac{a}{q}s^q + \tilde{G}(s)$，其中 $\tilde{G}(s) = \int_0^s \tilde{g}(\tau)d\tau$。由**(H1)** 和 **(H4)**，可得

$$\lim_{s\to 0}\tilde{g}(s)/|s|^{q-1} = \lim_{s\to 0}\tilde{G}(s)/|s|^q = 0,$$

and

$$\lim_{s\to\infty}\tilde{g}(s)/|s|^{\frac{2+\alpha}{N-2}}=\lim_{s\to\infty}\tilde{G}(s)/|s|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}=0.$$

因此，对于任意 $\delta>0$，存在常数 $C_\delta>0$ 使得

$$\left|\frac{N}{2}\tilde{g}(s)s-\frac{N+\alpha}{2}\tilde{G}(s)\right|\le\delta|s|^q+C_\delta|s|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}. \tag{4.8}$$

根据（4.7），我们有

$$\begin{aligned}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2=&\frac{a[Nq-(N+\alpha)]}{2q}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^q\\&+\frac{a[Nq-(N+\alpha)]}{2q}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2w_\varepsilon))|w_\varepsilon|^q\\&+\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*(|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}+\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2w_\varepsilon)))\cdot\left[\frac{N}{2}\tilde{g}(\varepsilon_2w_\varepsilon)\varepsilon_2w_\varepsilon-\frac{N+\alpha}{2}\tilde{G}(\varepsilon_2w_\varepsilon)\right]\varepsilon_2^{-q}dx.\end{aligned} \tag{4.9}$$

回忆一下，$\varepsilon^\sigma\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2$ 有界，由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式可得

$$\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^q\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^q)|w_\varepsilon|^qdx\lesssim\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{Nq-(N+\alpha+2)},$$

and

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}})|w_\varepsilon|^qdx&\lesssim\varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}-q}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\frac{N}{2}(\frac{N+\alpha}{N-2}+q)-(N+\alpha+2)}\\&\lesssim\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}(\frac{N+\alpha}{N-2}-q)}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{Nq-(N+\alpha+2)}.\end{aligned}$$

因此，由（4.8）可知

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2w_\varepsilon))|w_\varepsilon|^q\\&\lesssim\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^q\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^q)|w_\varepsilon|^q+\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}})|w_\varepsilon|^q\\&\lesssim\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{Nq-(N+\alpha+2)}+\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}(\frac{N+\alpha}{N-2}-q)}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{Nq-(N+\alpha+2)},\end{aligned} \tag{4.10}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2w_\varepsilon))\left|\tfrac{N}{2}\tilde{g}(\varepsilon_2w_\varepsilon)\varepsilon_2w_\varepsilon-\tfrac{N+\alpha}{2}\tilde{G}(\varepsilon_2w_\varepsilon)\right|\varepsilon_2^{-q}dx\\&\lesssim\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^q\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^q)|w_\varepsilon|^q+\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}})|w_\varepsilon|^q\\&\quad+\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{\frac{2(N+\alpha)}{N-2}-q}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}})|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}\\&\lesssim\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{Nq-(N+\alpha+2)}+\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)}{4\alpha}(\frac{N+\alpha}{N-2}-q)}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{Nq-(N+\alpha+2)}\\&\quad+\varepsilon^{\frac{N(2+\alpha)[(N+\alpha)-(N-2)q]}{2\alpha(N-2)}}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{Nq-(N+\alpha+2)},\end{aligned} \tag{4.11}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})\left|\tfrac{N}{2}\tilde{g}(\varepsilon_2w_\varepsilon)\varepsilon_2w_\varepsilon-\tfrac{N+\alpha}{2}\tilde{G}(\varepsilon_2w_\varepsilon)\right|\varepsilon_2^{-q}dx\\&\lesssim\delta\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^q+C_\delta\varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}-q}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}\\&\lesssim\delta\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq-(N+\alpha)}{2}}+\varepsilon^{\frac{(2+\alpha)(N+\alpha)}{2\alpha(N-2)}}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2\end{aligned} \tag{4.12}$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^qdx\lesssim\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\frac{Nq-(N+\alpha)}{2}},$$

并注意到 $Nq-(N+\alpha+2)<2$ 和 $\frac{Nq-(N+\alpha)}{2}<2$，由 (4.9)–(4.12) 可知$\{w_\varepsilon\}$在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中有界。因此，$\{w_\varepsilon\}$在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界。

另一方面，根据 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，由 (4.10) 可知

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon))|w_\varepsilon|^q\\ &\lesssim \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^q\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^q)|w_\varepsilon|^q dx + \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}})|w_\varepsilon|^q\\ &\lesssim \varepsilon^\sigma \|w_\varepsilon\|^{2q}_{\frac{2Nq}{N+\alpha}} + \varepsilon^\sigma \varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}-q}\|w_\varepsilon\|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}_{2^*}\|w_\varepsilon\|^q_{\frac{2Nq}{N+\alpha}},\end{aligned}$$

这与 $\{w_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界性一起意味着

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon))|w_\varepsilon|^q = 0.$$

同样，由 (4.11) 和 (4.12) 可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon))\left|\frac{N}{2}\tilde{g}(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\varepsilon_2 w_\varepsilon - \frac{N+\alpha}{2}\tilde{G}(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\right|\varepsilon_2^{-q}dx = 0,$$

and

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})\left|\frac{N}{2}\tilde{g}(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\varepsilon_2 w_\varepsilon - \frac{N+\alpha}{2}\tilde{G}(\varepsilon_2 w_\varepsilon)\right|\varepsilon_2^{-q}dx \lesssim \delta,$$

由于 δ 是任意的，由 (4.9)，我们得到

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 = \frac{a[Nq-(N+\alpha)]}{2q}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^q + o_\varepsilon(1).$$

证明完毕。 □

对于 $w \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$，令

$$\tau(w) = \frac{N}{N+\alpha}\cdot\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|w|^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w|^{\frac{N+\alpha}{N}}}, \tag{4.13}$$

那么，对于任意 $w \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$，$\tau(w)^{\frac{N}{2\alpha}}w \in \mathcal{N}_0$ 当且仅当 $\tau(w) = 1$，且 $w \in \mathcal{N}_0$。

引理4.3。 在条件 **(H¹)** 和 **(H4)**下，存在常数 $C > 0$，使得对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$，有

$$1 - C\varepsilon^\sigma \le \tau(w_\varepsilon) \le 1 + C\varepsilon^\sigma. \tag{4.14}$$

证明。 由于 $w_\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon$，可得

$$\tau(w_\varepsilon) = \frac{N}{N+\alpha}\cdot\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon|^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}} = 1 + \tau(w_\varepsilon)H(w_\varepsilon), \tag{4.15}$$

其中

$$\begin{aligned}H(w_\varepsilon) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon))\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w_\varepsilon)w_\varepsilon}{\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon|^2}\\ &+ \frac{\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})(\frac{N+\alpha}{N}\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_\varepsilon) + \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w_\varepsilon)w_\varepsilon) - \varepsilon^\sigma\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_\varepsilon|^2}{\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon|^2}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

由 （**H¹**）和 （**H4**）可知，对所有 $s \geq 0$ 以及某个$C_1, C_2 > 0$，$g(s)s, G(s) \leq C_1 s^q + C_2 s^{\frac{N+\alpha}{N-2}}$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_\varepsilon)) \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w_\varepsilon) w_\varepsilon \\
&\lesssim \varepsilon_1^{-2} \varepsilon_2^{2q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^q)|w_\varepsilon|^q + \varepsilon_1^{-2} \varepsilon_2^{q+\frac{N+\alpha}{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^q)|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}} \\
&+ \varepsilon_1^{-2} \varepsilon_2^{2\frac{N+\alpha}{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}})|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})(\frac{N+\alpha}{N} \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_\varepsilon) + \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w_\varepsilon) w_\varepsilon) dx \\
&\lesssim \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2^{q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^q + \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式、Sobolev 不等式和插值不等式，容易看出，对于任意 t，$s \in [\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2}]$，有

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^t)|w_\varepsilon|^s \lesssim \|w_\varepsilon\|_2^{N+\alpha-\frac{t+s}{2}(N-2)} \|\nabla w_\varepsilon\|_2^{N\frac{t+s}{2}-N-\alpha}.$$

注意到 $N+\alpha-\frac{t+s}{2}(N-2) + N\frac{t+s}{2} - N - \alpha = t+s \in [\frac{2(N+\alpha)}{N}, \frac{2(N+\alpha)}{N-2}]$，我们有

$$\frac{N+\alpha-\frac{t+s}{2}(N-2)}{t+s} + \frac{N\frac{t+s}{2}-N-\alpha}{t+s} = 1.$$

由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式、Young 不等式以及 $\{w_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界性，对于 $t+s \in (2\frac{N+\alpha}{N}, 2\frac{N+\alpha}{N-2})$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^t)|w_\varepsilon|^s &\lesssim \frac{N+\alpha-\frac{t+s}{2}(N-2)}{t+s} \|w_\varepsilon\|_2^{t+s} + \frac{N\frac{t+s}{2}-N-\alpha}{t+s} \|\nabla w_\varepsilon\|_2^{t+s} \\
&\lesssim \|w_\varepsilon\|_2^2 + \|\nabla w_\varepsilon\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

因此，由 $\varepsilon^\sigma = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^q$，（4.16），（4.17），（4.18），（4.19）以及 $\{w_\varepsilon\}$ 在H^1（$\mathbb{R}^N$）中的有界性，我们有

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-\sigma} H(w_\varepsilon)\|w_\varepsilon\|_2^2 + \|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 \lesssim & \|w_\varepsilon\|_2^{N+\alpha-\frac{1}{2}(\frac{N+\alpha}{N}+q)(N-2)} \|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\frac{1}{2}N(\frac{N+\alpha}{N}+q)-N-\alpha} \\
&+ \varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}-q}(\|w_\varepsilon\|_2^{\frac{N+\alpha}{N}+\frac{N+\alpha}{N-2}} + \|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\frac{N+\alpha}{N}+\frac{N+\alpha}{N-2}}) \\
&+ \varepsilon^\sigma(\|w_\varepsilon\|_2^{2q} + \|\nabla w_\varepsilon\|_2^{2q}) \\
&+ \varepsilon^\sigma \varepsilon_2^{\frac{N+\alpha}{N-2}-q}(\|w_\varepsilon\|_2^{q+\frac{N+\alpha}{N-2}} + \|\nabla w_\varepsilon\|_2^{q+\frac{N+\alpha}{N-2}}) \\
&+ \varepsilon^\sigma \varepsilon_2^{2(\frac{N+\alpha}{N-2}-q)} \|\nabla w_\varepsilon\|^{\frac{2(N+\alpha)}{N-2}} \\
\lesssim & \|w_\varepsilon\|_2^{N+\alpha-\frac{1}{2}(\frac{N+\alpha}{N}+q)(N-2)} \|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\frac{1}{2}N(\frac{N+\alpha}{N}+q)-N-\alpha} \\
&+ o_\varepsilon(1)(\|w_\varepsilon\|_2^2 + \|\nabla w_\varepsilon\|_2^2).
\end{aligned}$$

注意到 $q < \frac{N+\alpha+4}{N}$ 蕴含 $\frac{1}{2}N(\frac{N+\alpha}{N}+q)-N-\alpha < 2$，由 $\{w_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$中的有界性可得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-\sigma}H(w_\varepsilon) \lesssim & \frac{1}{\|w_\varepsilon\|_2^2}\|w_\varepsilon\|_2^{N+\alpha-\frac{1}{2}(\frac{N+\alpha}{N}+q)(N-2)}\|\nabla w_\varepsilon\|_2^{\frac{1}{2}N(\frac{N+\alpha}{N}+q)-N-\alpha} \\ & - \frac{\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2}{\|w_\varepsilon\|_2^2} + o_\varepsilon(1)(1+\frac{\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2}{\|w_\varepsilon\|_2^2}) \\ \lesssim & C\left(\frac{\|\nabla w_\varepsilon\|_2}{\|w_\varepsilon\|_2}\right)^{\frac{1}{2}N(\frac{N+\alpha}{N}+q)-N-\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{\|\nabla w_\varepsilon\|_2}{\|w_\varepsilon\|_2}\right)^2 + o_\varepsilon(1) < C < +\infty.\end{aligned}$$

因此，我们得到 $H(w_\varepsilon) \lesssim \varepsilon^\sigma$，从而

$$\tau(w_\varepsilon) = 1 + \tau(w_\varepsilon)H(w_\varepsilon) \le 1 + C\varepsilon^\sigma\tau(w_\varepsilon),$$

因此，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，有

$$\tau(w_\varepsilon) \le \frac{1}{1-C\varepsilon^\sigma} = \frac{1-C\varepsilon^\sigma+C\varepsilon^\sigma}{1-C\varepsilon^\sigma} \le 1 + C\varepsilon^\sigma.$$

另一方面，由（4.13）和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon|^2 = \frac{N+\alpha}{N}\tau(w_\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}} \le C\tau(w_\varepsilon)(\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon|^2)^{\frac{N+\alpha}{N}},$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon|^2 \ge (C\tau(w_\varepsilon))^{-\frac{N}{\alpha}} \ge C > 0.$$

因此，由（4.16）以及 $\{w_\varepsilon\}$ 在 H^1（$\mathbb{R}^N$）中的有界性，我们有

$$H(w_\varepsilon) \ge -\varepsilon^\sigma\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_\varepsilon|^2}{\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon|^2} \ge -C\varepsilon^\sigma,$$

从而

$$\tau(w_\varepsilon) = 1 + \tau(w_\varepsilon)H(w_\varepsilon) \ge 1 - C\varepsilon^\sigma\tau(w_\varepsilon),$$

结合 $\tau(w_\varepsilon) \le 1 + C\varepsilon^\sigma$这一事实，可得 $\tau(w_\varepsilon) \ge 1 - C\varepsilon^\sigma$。证明完成。□

引理4.4。 在条件 **(H¹)** 和**(H4)**下，有

$$\tilde{m}_0 - \tilde{m}_\varepsilon \sim \varepsilon^\sigma \quad as \quad \varepsilon \to 0.$$

证明。 由 **(H4)**、引理 2.5、引理 4.3 以及 $\{w_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界性，我们得到

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0 \le & \sup_{t\ge 0}J_0((w_\varepsilon)_t) = J_0((w_\varepsilon)_{t_\varepsilon}) \\ \le & \sup_{t\ge 0}J_\varepsilon((w_\varepsilon)_t) - \frac{1}{2}\varepsilon^\sigma\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(w_\varepsilon)_{t_\varepsilon}|^2 \\ & + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * (2|(w_\varepsilon)_{t_\varepsilon}|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2(w_\varepsilon)_{t_\varepsilon})))\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2(w_\varepsilon)_{t_\varepsilon})dx \\ \le & \tilde{m}_\varepsilon + \varepsilon^\sigma\Big(\tau(w_\varepsilon)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}C\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^q - \frac{\tau(w_\varepsilon)^{\frac{N-2}{\alpha}}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_\varepsilon|^2\Big) + o(\varepsilon^\sigma) \\ \le & \tilde{m}_\varepsilon + C\varepsilon^\sigma,\end{aligned}$$

其中

$$t_\varepsilon = \left(\frac{N}{N+\alpha} \cdot \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |w_\varepsilon|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \tau(w_\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.20}$$

对每个 $\rho > 0$，族 $W_\rho := \rho^{-\frac{N}{2}} W_1(x/\rho)$ 是（1.9）的径向基态。于是

$$\begin{aligned} g_0(\rho) :=& \frac{a}{q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_\rho|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_\rho|^q - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_\rho|^2 \\ =& \frac{a}{q} \rho^{\frac{N+\alpha}{2} - \frac{Nq}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_1|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_1|^q - \frac{1}{2} \rho^{-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_1|^2. \end{aligned}$$

显然，存在 $\rho_0 = \rho(q) \in (0, \infty)$，使得

$$\rho_0 = \left(\frac{2q \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_1|^2}{a[Nq - (N+\alpha)] \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_1|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_1|^q} \right)^{\frac{2}{N+\alpha+4-Nq}},$$

使得

$$g_0(\rho_0) = \sup_{\rho>0} g_0(\rho) = \frac{N+\alpha+4-Nq}{2[Nq-(N+\alpha)]} \cdot \rho_0^{-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_1|^2 > 0.$$

设 $W_0 = W_{\rho_0}$，则由 **(H4)** 和引理 2.5，存在 $t_\varepsilon \in (0, \infty)$ 满足 $t_\varepsilon W_0 \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 使得

$$\begin{aligned} \tilde{m}_\varepsilon \le& \sup_{t \ge 0} J_\varepsilon(tW_0) = J_\varepsilon(t_\varepsilon W_0) \\ \le& \sup_{t \ge 0} \left(\frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |W_0|^2 - \frac{t^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}} \right) \\ & - \varepsilon^\sigma \left(\frac{a}{q} t_\varepsilon^{\frac{N+\alpha}{N}+q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^q - \frac{t_\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_0|^2 \right) + o(\varepsilon^\sigma) \\ =& \tilde{m}_0 - \varepsilon^\sigma \left(\frac{a}{q} t_\varepsilon^{\frac{N+\alpha}{N}+q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^q - \frac{t_\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_0|^2 \right) + o(\varepsilon^\sigma). \end{aligned} \tag{4.21}$$

根据 $t_\varepsilon W_0 \in \mathcal{N}_\varepsilon$，我们有

$$\begin{aligned} t_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^\sigma |\nabla W_0|^2 + |W_0|^2 =& t_\varepsilon^{\frac{2(N+\alpha)}{N}} \cdot \frac{N+\alpha}{N} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}} \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |t_\varepsilon W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) \Big(\frac{N+\alpha}{N} \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 t_\varepsilon W_0) + \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2 g(\varepsilon_2 t_\varepsilon W_0) t_\varepsilon W_0 \Big) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 t_\varepsilon W_0)) \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2 g(\varepsilon_2 t_\varepsilon W_0) t_\varepsilon W_0 dx. \end{aligned}$$

若 $t_\varepsilon \ge 1$，由 **（H4）**，可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^\sigma |\nabla W_0|^2 + |W_0|^2 \ge t_\varepsilon^{\frac{2\alpha}{N}} \Big\{ & \frac{N+\alpha}{N} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}} \\ & + \frac{a(N+\alpha+Nq)}{Nq} \varepsilon^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^q + o(\varepsilon^\sigma) \Big\}. \end{aligned}$$

因此，

$$1 \le t_\varepsilon \le \left(\frac{\frac{2(N+\alpha)\tilde{m}_0}{\alpha} + \varepsilon^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_0|^2}{\frac{2(N+\alpha)\tilde{m}_0}{\alpha} + \frac{a(N+\alpha+Nq)}{Nq} \varepsilon^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^q + o(\varepsilon^\sigma)} \right)^{\frac{N}{2\alpha}}.$$

若 $t_\varepsilon \le 1$，由 **(H4)**，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^\sigma |\nabla W_0|^2 + |W_0|^2 \le t_\varepsilon^{\frac{2\alpha}{N}} \Big\{ \frac{N+\alpha}{N} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \frac{a(N+\alpha+Nq)}{Nq} \varepsilon^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^q + o(\varepsilon^\sigma) \Big\}.$$

因此，

$$1 \ge t_\varepsilon \ge \left(\frac{\frac{2(N+\alpha)\tilde{m}_0}{\alpha} + \varepsilon^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_0|^2}{\frac{2(N+\alpha)\tilde{m}_0}{\alpha} + \frac{a(N+\alpha+Nq)}{Nq} \varepsilon^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^q + o(\varepsilon^\sigma)} \right)^{\frac{N}{2\alpha}}.$$

所以我们得出 $t_\varepsilon \to 1$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时。

由于 $W_0 = W_{\rho_0}$ 和 $g_0(\rho_0) > 0$，我们有

$$\frac{a}{q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_0|^q > \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_0|^2,$$

因此，由（4.21）可知，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\tilde{m}_\varepsilon \le \tilde{m}_0 - C\varepsilon^\sigma$$

当 $\varepsilon > 0$较小时，结论即得。 □

引理 4.5。 在条件 **(H1)** 和**(H4)**下，有

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |w_\varepsilon|^q \sim \|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 \sim 1 \quad as \quad \varepsilon \to 0.$$

证明。 首先，结合（4.6）、（4.14）、（4.20）、**(H4)** 和引理 2.5，可得

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_0 &\le \sup_{t\ge 0} J_0((w_\varepsilon)_t) \\
&\le \tilde{m}_\varepsilon + \frac{1}{2}\tau(w_\varepsilon)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * (2|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_\varepsilon)) \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_\varepsilon) dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\tau(w_\varepsilon)^{\frac{N-2}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}) \left[\frac{N}{2} \varepsilon_1^{-1} g(\varepsilon_2 w_\varepsilon) \varepsilon_2 w_\varepsilon - \frac{N+\alpha}{2} \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_\varepsilon) \right] dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\tau(w_\varepsilon)^{\frac{N-2}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_\varepsilon)) \left[\frac{N}{2} \varepsilon_1^{-1} g(\varepsilon_2 w_\varepsilon) \varepsilon_2 w_\varepsilon - \frac{N+\alpha}{2} \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_\varepsilon) \right] dx \\
&\le \tilde{m}_\varepsilon + \varepsilon^\sigma \left(\frac{a[N+\alpha+4-Nq]}{4q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |w_\varepsilon|^q + o(\varepsilon^\sigma),
\end{aligned}$$

并且由引理4.4 可知

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |w_\varepsilon|^q \ge \frac{4q(\tilde{m}_0 - \tilde{m}_\varepsilon + o(\varepsilon^\sigma))\varepsilon^{-\sigma}}{a[N+\alpha+4-Nq]} \ge C > 0.$$

另一方面，由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式、H¨older 不等式以及 $\{w_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界性，可得 $\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |w_\varepsilon|^q \le C$。因此，当 $\varepsilon \to 0$时，$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |w_\varepsilon|^q \sim 1$。

最后，由（4.5）可得

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 \sim 1 \ \text{ as } \ \varepsilon \to 0.$$

证明完成。 □

以下结果是经典的 Brezis-Lieb 关于 Riesz 势的一个特例；证明请参见 [24]。

引理 4.6。设 $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, N)$ 是 $\{w_n\}$ 中的有界序列。如果当 $n \to \infty$ 时，$w_n \to w$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上几乎处处成立，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{D}(w_n) - \mathbb{D}(w_n - w_0) = \mathbb{D}(w_0).$$

引理 4.7。假设 $N \geq 3$、**(H1)** 和 **(H4)** 成立，则存在 $\xi_\varepsilon \in (0, \infty)$满足

$$\xi_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\frac{(2+\alpha)[Nq-(N+\alpha)]}{2\alpha(N+\alpha+4-Nq)}},$$

使得重新缩放的基态

$$w_\varepsilon(x) = \xi_\varepsilon^{\frac{N}{2}} v_\varepsilon(\xi_\varepsilon x)$$

收敛到 W_{ρ_0} 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 当 $\varepsilon \to 0$时，其中 W_{ρ_0} 是方程(1.9) 的正基态，其中

$$\rho_0 = \left(\frac{2q \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_1|^2}{a[Nq-(N+\alpha)] \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_1|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |W_1|^q} \right)^{\frac{2}{N+\alpha+4-Nq}}. \tag{4.22}$$

证明。证明与 [20, 引理 4.8]类似。为方便读者，我们给出详细证明。对于任意 $\varepsilon_n \to 0$ 当 $n \to \infty$时，w_{ε_n} 是一个正的径向对称函数，并且由引理 4.2，$\{w_{\varepsilon_n}\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界，因此，存在 $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 满足 $w = \frac{N+\alpha}{N}(I_\alpha * |w|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}w$ 使得取子序列后，以下关系成立

$$w_{\varepsilon_n} \rightharpoonup w_0 \ \text{ in } \ H^1(\mathbb{R}^N), \quad w_{\varepsilon_n} \to w_0 \ \text{ in } \ L^s(\mathbb{R}^N) \ \text{ for } \ \forall\, s \in (2, 2^*), \tag{4.23}$$

and

$$w_{\varepsilon_n} \to w_0 \ \text{ in } \ L^2_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad w_{\varepsilon_n}(x) \to w_0(x) \ \text{ a.e. on } \ \mathbb{R}^N. \tag{4.24}$$

不难证明,

$$\begin{aligned} J_0(w_{\varepsilon_n}) &= J_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n}) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n})) \cdot \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n}) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}}) \cdot \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n}) dx - \frac{1}{2}\varepsilon_n^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{\varepsilon_n}|^2 \\ &= \tilde{m}_{\varepsilon_n} + o(1) = \tilde{m}_0 + o(1), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} J_0'(w_{\varepsilon_n})w &= J_{\varepsilon_n}'(w_{\varepsilon_n})w + \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}}) \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n}) w dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n}))(\frac{N+\alpha}{N} |w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}-2} w_{\varepsilon_n} + \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n})) w dx \\ &\quad - \varepsilon_n^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_{\varepsilon_n} \nabla w = o(1). \end{aligned}$$

因此，$\{w_{\varepsilon_n}\}$是 J_0在能级 $\tilde{m}_0 = \frac{\alpha}{2N}\left(\frac{N}{N+\alpha} S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$ 处的 PS 序列。

由引理 4.5，仿照式（3.16）的证明进行推导，可得 $\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_0|^{\frac{N+\alpha}{N}}) |w_0|^q \neq 0$。因此，$w_0 \neq 0$。注意到 $J_0'(w_0) = 0$，可得 $w_0 \in \mathcal{N}_0$ 从而 $\tilde{m}_0 \leq J_0(w_0)$。由

引理 4.4 和引理 4.6，可得

$$\begin{aligned}
o(1) =&\tilde{m}_{\varepsilon_n} - \tilde{m}_0 \geq J_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n}) - J_0(w_0)\\
\geq&\frac{1}{2}(\|w_{\varepsilon_n}\|_2^2 - \|w_0\|_2^2) - \frac{1}{2}(\mathbb{D}(w_{\varepsilon_n}) - \mathbb{D}(w_0)) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^{\sigma}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_{\varepsilon_n}|^2\\
&-\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}})\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n})dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n}))\varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n})dx\\
=&\frac{1}{2}\|w_{\varepsilon_n} - w_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\mathbb{D}(w_{\varepsilon_n} - w_0) + o(1),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
0 =& \langle J_\varepsilon'(w_{\varepsilon_n}) - J_0'(w_0), w_{\varepsilon_n} - w_0\rangle\\
=&\varepsilon_n^{\sigma}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla w_{\varepsilon_n}\nabla(w_{\varepsilon_n} - w_0) + \int_{\mathbb{R}^N} w_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n} - w_0)\\
&-\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * (|w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n})))\\
&\quad\cdot(\frac{N+\alpha}{N}|w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}w_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n} - w_0) + \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 g(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n})(w_{\varepsilon_n} - w_0))dx\\
&-\int_{\mathbb{R}^N} w_0(w_{\varepsilon_n} - w_0) + \int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_0|^{\frac{N+\alpha}{N}})\frac{N+\alpha}{N}|w_0|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}w_0(w_{\varepsilon_n} - w_0)dx\\
=&\|w_{\varepsilon_n} - w_0\|_2^2 - \frac{N+\alpha}{N}\mathbb{D}(w_{\varepsilon_n} - w_0) + o(1).
\end{aligned}$$

因此，可得

$$\|w_{\varepsilon_n} - w_0\|_2^2 \leq \mathbb{D}(w_{\varepsilon_n} - w_0) + o(1) = \frac{N}{N+\alpha}\|w_{\varepsilon_n} - w_0\|_2^2 + o(1),$$

因此

$$\|w_{\varepsilon_n} - w_0\|_2^2 \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式和引理 4.6，可得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{D}(w_{\varepsilon_n}) = \mathbb{D}(w_0).$$

另一方面，由 $\{w_{\varepsilon_n}\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界性，可得

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{\varepsilon_n} = J_\varepsilon(w_{\varepsilon_n}) =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon_n^{\sigma}|\nabla w_{\varepsilon_n}|^2 + |w_{\varepsilon_n}|^2\\
&-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * (|w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n})))(|w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1}G(\varepsilon_2 w_{\varepsilon_n}))dx\\
=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|w_{\varepsilon_n}|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}} + o(1).
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，由引理 4.4 可得

$$\tilde{m}_0 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|w_0|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_0|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_0|^{\frac{N+\alpha}{N}} = J_0(w_0).$$

因此，$w_0 = W_\rho$ 对某个 $\rho \in (0,\infty)$。

此外，由（4.5），我们得到

$$\begin{aligned}
\|\nabla w_0\|_2^2 \leq \lim_{\varepsilon_n\to 0}\|\nabla w_{\varepsilon_n}\|_2^2 =& \lim_{\varepsilon_n\to 0}\frac{a[Nq-(N+\alpha)]}{2q}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_{\varepsilon_n}|^q\\
=&\frac{a[Nq-(N+\alpha)]}{2q}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_0|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_0|^q,
\end{aligned}$$

由此可得

$$\rho \geq \left(\frac{2q\|\nabla W_1\|_2^2}{a[Nq-(N+\alpha)]\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |W_1|^{\frac{N+\alpha}{N}})|W_1|^q} \right)^{\frac{2}{N+\alpha+4-Nq}}.$$

如果 $\rho = \rho_0$，则（4.5）意味着 $\lim_{\varepsilon_n\to 0}\|\nabla w_{\varepsilon_n}\|_2^2 = \|\nabla W_{\rho_0}\|_2^2$，因此 $w_{\varepsilon_n} \to W_{\rho_0}$ in$_{\mathcal{D}^{1,\,2}(\mathbb{R}^N)}$。

Let

$$M_{\varepsilon_n} = w_{\varepsilon_n}(0) \quad \text{and} \quad z_{\varepsilon_n} = M_{\varepsilon_n}[W_{\rho_0}(0)]^{-1},$$

其中 ρ_0 由（4.21）给出。我们进一步进行如下伸缩

$$\bar{w}_{\varepsilon_n}(x) = z_{\varepsilon_n}^{-1} w_{\varepsilon_n}(z_{\varepsilon_n}^{-\frac{2}{N}}x),$$

then

$$\bar{w}_{\varepsilon_n}(0) = z_{\varepsilon_n}^{-1} w_{\varepsilon_n}(0) = M_{\varepsilon_n}^{-1}[W_{\rho_0}(0)]w_{\varepsilon_n}(0) = W_{\rho_0}(0),$$

且 $\bar{w}_{\varepsilon_n}$ 满足重标度方程

$$\begin{aligned} -\varepsilon_n^\sigma z_{\varepsilon_n}^{\frac{4}{N}}\Delta\bar{w}_{\varepsilon_n} + \bar{w}_{\varepsilon_n} &= \left(I_\alpha * (|\bar{w}_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1} z_{\varepsilon_n}^{-\frac{N+\alpha}{N}} G(\varepsilon_2 z_{\varepsilon_n}\bar{w}_{\varepsilon_n}))\right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{N+\alpha}{N}|\bar{w}_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}\bar{w}_{\varepsilon_n} + \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 z_{\varepsilon_n}^{-\frac{\alpha}{N}} g(\varepsilon_2 z_{\varepsilon_n}\bar{w}_{\varepsilon_n})\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

相应的泛函为

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\varepsilon_n}(\bar{w}_{\varepsilon_n}) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_n^\sigma z_{\varepsilon_n}^{\frac{4}{N}}|\nabla\bar{w}_{\varepsilon_n}|^2 + |\bar{w}_{\varepsilon_n}|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * (|\bar{w}_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1} z_{\varepsilon_n}^{-\frac{N+\alpha}{N}} G(\varepsilon_2 z_{\varepsilon_n}\bar{w}_{\varepsilon_n}))) \\ &\quad \cdot (|\bar{w}_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1} z_{\varepsilon_n}^{-\frac{N+\alpha}{N}} G(\varepsilon_2 z_{\varepsilon_n}\bar{w}_{\varepsilon_n}))dx. \end{aligned}$$

此外，我们有

(i) $\|\bar{w}_{\varepsilon_n}\|_2^2 = \|w_{\varepsilon_n}\|_2^2, \qquad z_{\varepsilon_n}^{\frac{4}{N}}\|\nabla\bar{w}_{\varepsilon_n}\|_2^2 = \|\nabla w_{\varepsilon_n}\|_2^2.$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |\bar{w}_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}})|\bar{w}_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}} = \int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}}.$

由（4.24），对任意 $\varepsilon_n \to 0$，存在 $\rho \geq \rho_0$ 使得

$$M_{\varepsilon_n} = w_{\varepsilon_n}(0) \to W_\rho(0) = \rho^{-\frac{N}{2}} W_1(0) \leq \rho_0^{-\frac{N}{2}} W_1(0) < \infty,$$

这意味着 $M_{\varepsilon_n} \leq C$ 对于某个 $C > 0$ 以及任意小的 $\varepsilon_n > 0$。假设存在一个 $\{\varepsilon_n\}$ 序列（仍记为 ε_n）满足 $\varepsilon_n \to 0$ 且 $M_{\varepsilon_n} \to 0$。那么由（4.24），取一个子列后，$M_{\varepsilon_n} = w_{\varepsilon_n}(0) \to W_\rho(0) \neq 0$ 对于某个 $\rho \in (0, \infty)$。这就导致矛盾。因此，存在某个 $c > 0$ 使得 $M_{\varepsilon_n} \geq c > 0$。

Let

$$\xi_{\varepsilon_n} = z_{\varepsilon_n}^{\frac{2}{N}} \varepsilon_n^{\frac{(2+\alpha)[Nq-(N+\alpha)]}{2\alpha(N+\alpha+4-Nq)}},$$

then

$$\xi_{\varepsilon_n} \sim \varepsilon_n^{\frac{(2+\alpha)[Nq-(N+\alpha)]}{2\alpha(N+\alpha+4-Nq)}},$$

且当 $\varepsilon_n > 0$ 足够小时，重标度基态族

$$\bar{w}_{\varepsilon_n}(x) = \xi_{\varepsilon_n}^{-\frac{N}{2}} v_{\varepsilon_n}(\xi_{\varepsilon_n}^{-1}x)$$

满足

$$\|\nabla\bar{w}_{\varepsilon_n}\|_2^2 \sim \int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |\bar{w}_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}})|\bar{w}_{\varepsilon_n}|^{\frac{N+\alpha}{N}} \sim \|\bar{w}_{\varepsilon_n}\|_2^2 \sim 1,$$

并且当 $\varepsilon_n \to 0$, $\bar{w}_{\varepsilon_n}$ 在 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到极值函数 W_{ρ_0} 时。于是由 $\bar{w}_{\varepsilon_n} \to W_{\rho_0}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中可得, $\bar{w}_{\varepsilon_n} \to W_{\rho_0}$ 属于 $H^1(\mathbb{R}^N)$。□

定理的证明 1.2。由于 $w_\varepsilon \in \mathcal{P}_\varepsilon$, 由 $\{w_\varepsilon\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界性可得

$$\begin{aligned}\tilde{m}_\varepsilon &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^\sigma |\nabla w_\varepsilon|^2 + |w_\varepsilon|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * (|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_\varepsilon)))(|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}} + \varepsilon_1^{-1} G(\varepsilon_2 w_\varepsilon))dx \\ &= \frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}\varepsilon^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\varepsilon|^2 + \frac{\alpha}{2(N+\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N} |w_\varepsilon|^2 \\ &= \frac{\alpha}{2(N+\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N} |w_\varepsilon|^2 + O(\varepsilon^\sigma).\end{aligned}$$

同理，我们也有

$$\tilde{m}_0 = \frac{\alpha}{2(N+\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N} |W_1|^2 = \frac{\alpha}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |W_1|^{\frac{N+\alpha}{N}})|W_1|^{\frac{N+\alpha}{N}}.$$

根据引理 4.4，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} |W_1|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |w_\varepsilon|^2 = \frac{2(N+\alpha)}{\alpha}(\tilde{m}_0 - \tilde{m}_\varepsilon) + O(\varepsilon^\sigma) = O(\varepsilon^\sigma).$$

此外，由 $\|W_1\|_2^2 = \frac{N+\alpha}{N}\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * |W_1|^{\frac{N+\alpha}{N}})|W_1|^{\frac{N+\alpha}{N}} = \left(\frac{N}{N+\alpha}\right)^{\frac{N}{\alpha}} S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{\alpha}}$，我们得出

$$\|w_\varepsilon\|_2^2 = \left(\frac{N}{N+\alpha}\right)^{\frac{N}{\alpha}} S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{\alpha}} + O(\varepsilon^\sigma).$$

于是由 $w_\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}})|w_\varepsilon|^{\frac{N+\alpha}{N}} = \frac{N}{N+\alpha}\|w_\varepsilon\|_2^2 + O(\varepsilon^\sigma) = \left(\frac{N}{N+\alpha}S_\alpha\right)^{\frac{N+\alpha}{\alpha}} + O(\varepsilon^\sigma).$$

最后，根据（4.1），引理 4.4、引理 4.5 和引理 4.7，我们完成证明。 □

5. Final remarks

我们简要讨论基态在 $\varepsilon \to +\infty$ 时的渐近行为。为此，我们还作出以下更强的假设

(H5) there exist $b > 0$ and $r \in (\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2})$ such that $\lim_{s\to\infty} g(s)/|s|^{r-1} = b$.

仿照 [22, 定理2.1，定理2.3], 的论证，我们得到以下结果。

定理5.1. 假设**(H^1)** 与**(H5)** 成立。则问题(1.2) 存在一个正基态 $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$，它是径向对称且径向非增的。此外，下列陈述成立：当 $\varepsilon \to \infty$,

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(0) = \|u_\varepsilon\|_\infty &\sim \varepsilon^{\frac{2+\alpha}{4(r-1)}}, \\ \|u_\varepsilon\|_2^2 &= \varepsilon^{\frac{N+\alpha+2-Nr}{2(r-1)}}\left\{\frac{[(N+\alpha)-(N-2)r]b^2}{2r^2}\left(\frac{r}{b^2}S_r\right)^{\frac{r}{r-1}} + o_\varepsilon(1)\right\}, \\ \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 &= \varepsilon^{\frac{(N+\alpha)-(N-2)r}{2(r-1)}}\left\{\frac{[Nr-(N+\alpha)]b^2}{2r^2}\left(\frac{r}{b^2}S_r\right)^{\frac{r}{r-1}} + o_\varepsilon(1)\right\}.\end{aligned}$$

基态的最小能量满足

$$I_\varepsilon(u_\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{(N+\alpha)-(N-2)r}{2(r-1)}}\left[\frac{b^2(r-1)}{2r^2}\left(\frac{r}{b^2}S_r\right)^{\frac{r}{r-1}}+o_\varepsilon(1)\right],$$

其中

$$S_r=\inf_{w\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2+|w|^2}{(\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*|w|^r)|w|^r)^{\frac{1}{r}}}.$$

此外，当 $\varepsilon\to\infty$ 时，取一个子列，重新缩放的基态

$$w_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-\frac{2+\alpha}{4(r-1)}}u_\varepsilon(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x), \tag{5.1}$$

在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于方程的一个正解 $w_\infty\in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$-\Delta w+w=\frac{b^2}{r}(I_\alpha*|w|^r)|w|^{r-2}w.$$

基态的 L^2–质量

$$M(\varepsilon):=\|u_\varepsilon\|_2^2, \tag{5.2}$$

在分析相应的含时非线性薛定谔方程的驻波解的稳定性时起着关键作用。更确切地说， $M(\varepsilon)$ 的重要性，例如可从 Grillakis-Shatah-Strauss 理论 [8, 9, 28, 34]中看出，该理论研究这些解在含时薛定谔方程中的稳定性。该理论指出，解 u_ε 在 $M'(\varepsilon)>0$时轨道稳定，而在 $M'(\varepsilon)<0$时不稳定。因此， $M(\varepsilon)$ 递增的区间对应稳定解，而 $M(\varepsilon)$ 递减的区间则对应不稳定解。

图2概述了 $M(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon\to0$和 $\varepsilon\to\infty$时的极限，并揭示了 $M(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon>0$ 较小和 $\varepsilon>0$ 较大时，当(q,r) 位于(q,r) 平面中的不同区域时的变化情况，如定理1.2 和定理5.1所述。

	$q\in(\frac{N+\alpha}{N},\ \frac{N+\alpha+4}{N})$	$q\in(\frac{N+\alpha+4}{N},\ \frac{N+\alpha}{N-2})$
$r\in(\frac{N+\alpha+2}{N},\ \frac{N+\alpha}{N-2})$	$(M(0)\ M(\infty))=(0,\ 0)$	$(M(\varepsilon_q)\ M(\infty))=(M(\varepsilon_q),\ 0)$
$r\in(\frac{N+\alpha}{N},\ \frac{N+\alpha+2}{N})$	$(M(0)\ M(\infty))=(0,+\infty)$	$(M(\varepsilon_q)\ M(\infty))=(M(\varepsilon_q)\ +\infty)$

FIGURE 2. $M(\varepsilon)$ 随 ε 变小时和变大时的变化，此处 $M(0):=\lim_{\varepsilon\to0}M(\varepsilon)$ 和 $M(\infty):=\lim_{\varepsilon\to\infty}M(\varepsilon)$

最后，我们指出，可以找到区间 $(0,\ \varepsilon_0)$ 和 $(\varepsilon_\infty,\ \infty)$，在这些区间上， $M(\varepsilon)$ 根据 $M(\varepsilon)$ 的渐近行为而递增或递减。参见 [20, 引理 A.1]。

数据可用性 本研究没有相关数据。

利益冲突 作者不知悉任何利益冲突。

伦理审批本研究无需伦理审批。

References

[1] T. Akahori, S. Ibrahim, N. Ikoma, H. Kikuchi, H. Nawa, *Uniqueness and nondegeneracy of ground states to nonlinear scalar field equations involving the Sobolev critical exponent in two dimensions for high frequencies* **58** 2019 120, 32 ,《微积分变分与偏微分方程》, ( ), 论文编号 页 [2] T. Akahori, S. Ibrahim, H. Kikuchi, H. Nawa, *Global dynamics above the ground state energy for the combined power type nonlinear Schrödinger equations with energy critical growth at the low frequencies*,《美国数学会回忆录》272 (2021年), 第1331号, v+130 页 [3] T. Akahori, S. Ibrahim, H. Kikuchi, H. Nawa, *Non-existence of ground states and gap of variational values for 3D Sobolev critical nonlinear scalar field equations.* **334** 2022 《微分方程杂志》( ), 25–86. [4] C. Alves, M. Souto, M. Montenegro, *Existence of a ground state solution for a nonlinear scalar field equation with critical growth.* **43** 2012 537 554 《微积分变分与偏微分方程》( ), – . [5] H. Berestycki与P.-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state.*《理性力学与分析档案》82 (1983年), 313–345. [6] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals* **88** 1983 486 490 ,《美国数学会会刊》, ( ), - . [7] S. Chen, X. Tang 与 J. Wei, *Nehari-type ground state solutions for a Choquard equation with doubly critical exponents.* **10** 2021 152 171 《非线性分析进展》( ), – . [8] M. Grillakis, J. Shatah 与 W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I* ,《泛函分析杂志》( ), – . **74** 1987 160 197 [9] M. Grillakis, J. Shatah 与 W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. II* ,《泛函分析杂志》( ), – . **94** 1990 308 348 [10] L. Jeanjean, K. Tanaka, *A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$*,《美国数学会会刊》, 131 (2002 年), 2399–2408. [11] 李晓伟与王飞志, *Hardy–Littlewood–Sobolev critical exponent Existence of groundstates for Choquard type equations with* 2021 2021 102 ,《边值问题》( ) : . [12] Y. Y. Li, G. D. Li, C. L. Tang, *Radial ground state solutions for Choquard equations with Hardy-Littlewood-Sobolev lower critical growth* **67** 2022 11, 2747 2758 ,《复变函数与椭圆方程》, ( ), 第 – 期 . [13] 李新甫 , Shiwang Ma 与 Guang Zhang, *Existence and qualitative properties of solutions for Choquard equations with a local term* **45** 2019 1 25 ,《非线性分析：实世界应用》, ( ), – . [14] 李新甫与Shiwang Ma, *Choquard equations with critical nonlinearities*,《当代数学通讯》, 22 (2019年), 1950023. [15] E. H. Lieb, M. Loss,《分析》, 数学研究生教材第14卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 4 (2001年). [16] J. Liu, J.-F. Liao, C.-L. Tang, *Ground state solution for a class of Schrödinger equations involving general critical growth term.* **30** 2017 899 911 《非线性》( ), – . [17] Z. Liu, V. Moroz, *Limit profiles for singularly perturbed Choquard equations with local repulsion*,《微积分变分与偏微分方程》, 61 (2022年), 第4期, 论文编号160, 59页 [18] S. Ma, *Non-existence and multiplicity of positive solutions for Choquard equations with critical combined nonlinearities* **288** 2025 110826 ,《泛函分析杂志》( ), . [19] S. Ma, V. Moroz, *Asymptotic profiles for a nonlinear Schrödinger equation with critical combined powers nonlinearity* **304** 2023 13, 26 ,《数学杂志》, ( ), 论文编号 页 [20] S. Ma, V. Moroz, *Asymptotic profiles for Choquard equations with combined attractive nonlinearities*,《微分方程杂志》412 (2024年), 613–689. [21] S. Ma, V. Moroz, *Asymptotic profiles for Choquard equations with combined attractive-repulsive nonlinearities: the locally critical case* **64** 2025 127, 48 ,《微积分变分与偏微分方程》, ( ), 论文编号 页 [22] S. Ma, V. Moroz, *Asymptotic profiles and existence thresholds of ground states for Choquard equations with a general attractive local perturbation* , 预印本. [23] V. Moroz, C. B. Muratov, *Asymptotic properties of ground states of scalar field equations with a vanishing parameter* **16** 2014 1081 1109 ,《欧洲数学会杂志》( ), – . [24] V. Moroz, J. Van Schaftingen, *Groundstates of nonlinear Choquard equations: Existence qualitative properties and decay asymptotics* , ,《泛函分析杂志》, ( ), **265** 2013 153 184 – . [25] V. Moroz, J. Van Schaftingen, *Existence of groundstates for a class of nonlinear Choquard equations*,《美国数学会汇刊》, 367 (2015 年), 6557–6579. [26] V. Moroz 与 J. Van Schaftingen, *A guide to the Choquard equation.*《不动点理论与应用杂志》19 (2017年), 773–813. [27] J. Seok, *Nonlinear Choquard equations: Doubly critical case*,《应用数学快报》,76 (2018年), 148–156.

[28] J. Shatah 和 W. Strauss，非线性束缚态的不稳定性，《数学物理通讯》**100** (1985), 173–190。[29] X.Tang、J. Wei 和 S. Chen，《数学方法与应用科学》( )，。[30] J. Van Schaftingen、J. K. Xia，*Groundstates for a local nonlinear perturbation of the Choquard equations with lower critical exponent* **464** 2018 2, 1184 1202 ，《数学分析及其应用杂志》，( )，第 – 期。[31] T. Tao、M. Visan、X. Zhang，*The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities* **32** 2007 1281 1343 ，《偏微分方程通讯》( )，–。[32] Xiaoping Wang 和 Fangfang Liao，*Ground state solutions for a Choquard equation with lower critical exponent and local nonlinear perturbation.* **196** 2020 111831 《非线性分析》( )，。[33] M.I. Weinstein，*Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*，《数学物理通讯》**87** (1983), 567–576。[34] M. I. Weinstein，非线性 Schr¨odinger 方程基态的调制稳定性，《SIAM 数学分析杂志》**16** (1985), 472–491。[35] J. Wei 和 Y. Wu，*Normalized solutions for Schrödinger equations with critical Soblev exponent and mixed nonlinearities.* **283** 2022 109574, 46 《泛函分析杂志》( )，论文编号 pp.[36] J. Wei 和 Y. Wu，*On some nonlinear Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》**153** (2023), 1503–1528。[37] J. Zhang、W. Zou，*A Berestycki-Lions theorem revisited.*《当代数学通讯》**14** (2012), 1250033。*Email address*: shiwangm@nankai.edu.cn (S.Ma), wyachen@scut.edu.cn (Y.Wang).