arXiv:2603.01093v1 [math.NA] 1 Mar 2026

用于具有双曲特征线的多值非线性一阶偏微分方程水平集计算的自适应增长随机神经网络

Haoning Dang[1], Shi Jin[2], Fei Wang[3]

摘要。 本文提出一种自适应增长随机神经网络（AG-RaNN）方法，用于计算具有双曲特征线的非线性一阶偏微分方程的多值解，包括拟线性双曲平衡律和 Hamilton–Jacobi 方程。此类解出现于几何光学、地震波、量子动力学的半经典极限以及线性波的高频极限中，并且与粘性解或熵解显著不同。主要计算困难在于，奇异性形成之后，解不再是函数，而成为多个分支的并。水平集表述提供了一种系统性替代方案，即将非线性动力学嵌入增广相空间中的线性输运方程，代价是维数大幅增加。为减轻这一计算负担，我们将 AG-RaNN 与自适应配点策略相结合，使样本集中于零水平集的管状邻域，并配合层增长机制逐步丰富随机特征空间。在输运场与特征流的标准正则性假设下，我们建立了水平集方程 AG-RaNN 近似的收敛性结果。数值实验表明，所提方法能够在高维情形下高效恢复多值结构并分辨非光滑特征。

关键词： 随机神经网络、自适应增长、一阶偏微分方程、水平集方法、多值解

数学主题分类： 68T07, 68W25, 65M22,65N22

1 引言

许多非线性偏微分方程即使具有光滑的初始数据，也可能在有限时间内产生奇异性。典型例子包括 Hamilton–Jacobi 方程和双曲守恒律。对于前者，解的导数可能变得不连续，从而形成焦散；对于后者，解本身可能变得不连续，进而产生激波。奇异性形成后，必须在弱意义或广义意义下理解解；若没有额外的可容许性条件，解通常不具有唯一性。因此，引入守恒律的熵条件和 Hamilton–Jacobi 方程的黏性解理论，以确定具有物理意义的解（[25, 7]）。

在一些重要的物理应用中，黏性解或熵解在物理上并不适用，恰当的描述反而涉及多值解。代表性例子包括几何光学、Schr¨odinger方程的半经典极限、地震波传播，以及线性波动方程的高频极限（[3, 15, 17, 23, 39]）。在这些情形中，底层动力学由哈密顿系统支配，其中能量守恒成立，解的结构自然地在相空间中加以描述。

[1]西安交通大学数学与统计学院，中国陕西省西安市 710049。电子邮箱：haoningdang.xjtu@stu.xjtu.edu.cn[2]上海交通大学数学科学学院与自然科学研究院，中国上海市 200240。电子邮箱：shijin-m@sjtu.edu.cn[3]西安交通大学数学与统计学院及动力工程多相流国家重点实验室，中国陕西省西安市 710049。电子邮箱： feiwang.xjtu@xjtu.edu.cn

多值解源于特征线的相交，并且在增广相空间表述中观察时，可借助特征线法解释为控制方程的经典解（[6, 39]）。

多值解的计算颇具挑战，因为这类解不再是单值函数，必须引入新的变量来表示时间演化过程中出现的多相。此外，相的总数通常无法先验确定（[3, 15, 23]）。深度神经网络已被用于应对这些困难，例如，学习与半经典极限下薛定谔方程（[20]）的多值解相关的矩系统的闭合关系。

另一种方法是， [24, 29] 中提出的水平集方法为在相空间中计算多值解提供了一个系统框架。通过在增广相空间中引入水平集函数，可以将原始的非线性演化重新表述为线性输运方程，其零水平集表示多值解。尽管求解这类线性方程在概念上比直接追踪非线性且相数随时间变化的问题更简单，但水平集表述的维数可能显著更高——通常可达到原始问题的两倍——若不采用复杂的局部化策略（[33]），便会导致严重的维数灾难。

深度神经网络已成为求解高维偏微分方程的强大工具。具有代表性的方法包括深度 Ritz 方法（[13]）、物理信息神经网络（[34]）及相关变体（[38, 44, 45, 27]）。浅层神经网络的近似性质已得到深入研究（[8, 1, 2]），近年来也在多种情境下得到进一步探讨（[14, 19, 28, 32, 21, 22]）。这些方法通常依赖非线性、非凸的损失函数，并通过随机梯度算法进行优化；尤其在高维情形下，这类算法可能收敛缓慢，或陷入次优的局部极小值。因此，优化误差可能会显著降低所求解的精度。

为缓解优化难题，随机神经网络（RaNN）提供了一种颇具吸引力的替代方案：固定大多数非线性参数，仅训练线性系数。极限学习机（ELM）是具有单隐藏层的随机神经网络的一种特殊形式，已成功应用于偏微分方程问题。例如，局部极限学习机方法（[11, 12]）通过界面配置点耦合子域解，而随机特征方法（[4, 5]）则采用单位分解框架来保证整体连续性。随机神经网络还与经典数值方法相结合，包括 Petrov–Galerkin 公式（[36, 37]）、间断 Galerkin 方法（[40, 41, 42]）、混合间断 Petrov–Galerkin 方法（[9]）以及有限差分格式（[26]）。为进一步提高计算效率，研究者已针对由此产生的最小二乘系统提出预条件策略（ [35]）。

在本研究中，我们采用 [10] 中提出的自适应增长 RaNN（AG-RaNN），通过水平集表述求解拟线性双曲平衡律和 Hamilton–Jacobi 方程的多值解。通过将原问题重新表述为增广时空区域中的线性水平集方程，所得数值方法成为一种完全时空方法，无需时间推进。因此，计算归结为求解一个线性最小二乘问题。尽管 AG-RaNN 在训练过程中固定了大多数参数，但现有逼近理论表明，它仍具有强大的表达能力。此外，所得最小二乘问题是线性且凸的，因此能够获得稳健而高效的数值解。在此框架基础上，我们进一步引入零水平集附近的自适应配置和层增长机制，以提高高维水平集场景下的效率与精度。

本文其余部分安排如下：第 2 节回顾一阶偏微分方程和水平集表述。第 3 节介绍 AG-RaNN 方法，包括层增长策略和自适应配置点选择。第 4 节阐述 RaNN 方法的误差分析，涵盖近似误差、统计误差和优化误差。第 5 节介绍定位零水平集的数值过程，并通过数值实验展示所提方法的准确性和效率。最后，第6 节总结本文的主要结果。

2 一阶偏微分方程与水平集方法

本节回顾一类非线性一阶偏微分方程的水平集表述。我们考虑以下一般的一阶偏微分方程：

$$\partial_t u + G(t, \boldsymbol{x}, u, \nabla_{\boldsymbol{x}} u) = 0, \tag{2.1}$$

其中 $u(t,\boldsymbol{x})\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是一个标量值函数，而 $G(t,\boldsymbol{x},z,\boldsymbol{p})\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是一个给定的标量（非线性）函数。按照 [24, 29]，我们引入一个水平集函数 ϕ，使得

$$\phi(t,\boldsymbol{x},z,\boldsymbol{p}) = 0 \quad \text{at} \quad z = u(t,\boldsymbol{x}) \text{ and } \boldsymbol{p} = \nabla_{\boldsymbol{x}} u(t,\boldsymbol{x}). \tag{2.2}$$

水平集函数 ϕ 满足以下线性输运方程：

$$\partial_t \phi + \nabla_{\boldsymbol{p}} G \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi + (\boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}} G - G)\,\partial_z \phi - (\nabla_{\boldsymbol{x}} G + \boldsymbol{p}\,\partial_z G)\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}\phi = 0. \tag{2.3}$$

该方程可以写成统一算子形式

$$\mathcal{G}\phi(\boldsymbol{X}) := \partial_t \phi(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{X})\cdot\nabla_{\boldsymbol{Y}}\phi(\boldsymbol{X}) = 0, \qquad \boldsymbol{X} = (t,\boldsymbol{Y}), \tag{2.4}$$

其中，$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{x}, z, \boldsymbol{p})$包含物理变量和辅助变量，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{X})$表示相应的特征速度场。为简单起见，我们将分析限制在有界计算域 $D = (0,T)\times\Omega = (0,T)\times\Omega_{\boldsymbol{x}}\times I_z\times\Omega_{\boldsymbol{p}}$内，且 $\Gamma\subset\partial D$ 为流入边界。在理论分析中，我们假设计算域 Ω 取得足够大，使得从初始时刻边界发出的特征线在所有 $t\in[0,T]$下均保持在 $D = (0,T)\times\Omega$内。鉴于线性输运方程 (2.3) 的有限传播速度，这一假设是合理的。等价地，在所关注的时间区间内，没有特征线通过 Ω 的侧边界进入 D。在这一假设下，流入边界缩减为初始时刻边界，即 $\Gamma = \{0\}\times\Omega$。在数值实验中，我们采用足够大的计算域，使这一假设在实践中具有合理性。

由于水平集表述将解流形嵌入维数为 $2d+1$的增广相空间，因此需要确定 $d+1$ 个水平集函数的交集，以恢复原方程的唯一解 u（t，$\boldsymbol{x}$）。根据不同的初始条件，我们可以得到全部 $d+1$ 个水平集函数 ϕ_i（t，$\boldsymbol{x}$，z，$\boldsymbol{p}$），它们满足同一水平集方程（2.3）。两种代表性构造分别在第2.1 节和2.2节中给出。在时空框架内，我们将流入边界条件视为时空域上的狄利克雷边界条件，并写成

$$\mathcal{B}\phi = \phi|_\Gamma = g, \tag{2.5}$$

其中 g 表示给定的边界数据。在本文所考虑的所有情形中，$\mathcal{B}$ 为恒等算子；此处引入它仅为提供统一记号，以便于后续分析。

2.1 Ha哈密顿–雅可比方程：梯度场的水平集表述 s

当 $G = G$（t，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{p}$）与 z无关，即该一阶方程不显式依赖于解 u 时，便出现一种特殊情形。在此设定下，水平集函数（2.2）定义为

$$\phi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = 0 \quad \text{at} \quad \boldsymbol{p} = \nabla_{\boldsymbol{x}} u(t,\boldsymbol{x}), \tag{2.6}$$

而水平集方程（2.3）化简为

$$\partial_t\phi + \nabla_{\boldsymbol{p}} G\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi - \nabla_{\boldsymbol{x}} G\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}\phi = 0. \tag{2.7}$$

在这种情况下，$\phi(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p})$ 的零水平集刻画的是梯度场 $\nabla_{\boldsymbol{x}} u(t,\ \boldsymbol{x})$，而非标量解$u$ 本身。

这种情况的一个典型例子是 Hamilton–雅可比方程

$$\partial_t S + H(\boldsymbol{x}, \nabla_{\boldsymbol{x}} S) = 0, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \tag{2.8}$$

$$S(0, \boldsymbol{x}) = S_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.9}$$

其中 $H(\boldsymbol{x}, \nabla_{\boldsymbol{x}} S)$: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 表示哈密顿量。

若只关注梯度 $\nabla_{\boldsymbol{x}} S$，则可以引入 d 个水平集函数

$$\phi_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = p_i - \partial_{x_i} S(t, \boldsymbol{x}), \qquad i = 1, \cdots, d,$$

使其 $\phi_i = 0$ 编码 $p_i = \partial_{x_i} S$。每个 ϕ_i 都满足

$$\partial_t \phi_i + \nabla_{\boldsymbol{p}} H \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi_i - \nabla_{\boldsymbol{x}} H \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} \phi_i = 0, \qquad i = 1, \cdots, d, \tag{2.10}$$

其初始条件为

$$\phi_i(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = p_i - \partial_{x_i} S_0(\boldsymbol{x}), \qquad i = 1, \cdots, d. \tag{2.11}$$

若还需要标量函数 S 本身，则引入 $d+1$ 个水平集函数

$$\phi(t, \boldsymbol{x}, z, \boldsymbol{p}) = 0 \quad \text{at} \quad z = S \text{ and } \boldsymbol{p} = \nabla_{\boldsymbol{x}} S, \tag{2.12}$$

这些函数满足水平集方程

$$\partial_t \phi_i + \nabla_{\boldsymbol{p}} H \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi_i + (\boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} H - H) \partial_z \phi_i - \nabla_{\boldsymbol{x}} H \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} \phi_i = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, d. \tag{2.13}$$

对于初始条件，一个直接的选择是

$$\phi_0(0, \boldsymbol{x}, z, \boldsymbol{p}) = z - S_0(\boldsymbol{x}), \quad \phi_i(0, \boldsymbol{x}, z, \boldsymbol{p}) = p_i - \partial_{x_i} S_0(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \cdots, d. \tag{2.14}$$

这里，增广相空间引入了辅助变量（z，$\boldsymbol{p}$）（维数为 $d+1$），而解流形可表征为与（$d+1$ 相关的零水平集的交集2.14）。

在薛定谔方程的半经典（WKB）极限下，相位函数 u 满足程函方程，该方程是一个哈密顿-雅可比方程，其哈密顿量为 $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{p}|^2 + V(\boldsymbol{x})$。在此情形下，$\nabla_{\boldsymbol{x}} S$ 表示相应的动量场。

2.2 标量双曲平衡律：解的水平集表述

在{v1}的情形下e G 对 $\boldsymbol{p}$呈线性依赖时，一阶方程可化为标量双曲平衡律 w

$$\partial_t u + G(t, \boldsymbol{x}, u, \nabla_{\boldsymbol{x}} u) = \partial_t u + \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}, u) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} u + B(t, \boldsymbol{x}, u) = 0. \tag{2.15}$$

在这种情况下，只需引入一个水平集函数

$$\phi(t, \boldsymbol{x}, z) = 0 \quad \text{at} \quad z = u(t, \boldsymbol{x}), \tag{2.16}$$

它满足约化水平集方程

$$\partial_t \phi + \nabla_{\boldsymbol{p}} G \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi + (\boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} G - G) \partial_z \phi = 0. \tag{2.17}$$

根据（2.15），上述方程等价于

$$\partial_t \phi + \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}, z) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi - B(t, \boldsymbol{x}, z) \partial_z \phi = 0. \tag{2.18}$$

一个特例是以下拟线性双曲平衡律。解 $u(t,\ \boldsymbol{x})$ 是满足下式的标量函数

$$\partial_t u + \boldsymbol{F}(u)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} u + q(\boldsymbol{x},u) = 0, \quad (t,\boldsymbol{x}) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \tag{2.19}$$

$$u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.20}$$

其中 $\boldsymbol{F}(u):\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ 是一个向量，而 $q(\boldsymbol{x},\ u):\ \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个标量源项。方程（2.19）关于 u 的梯度呈线性关系。根据（2.18），水平集方程为

$$\partial_t\phi + \boldsymbol{F}(z)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi - q(\boldsymbol{x},z)\partial_z\phi = 0. \tag{2.21}$$

对于初始条件，直接的选择是

$$\phi(0,\boldsymbol{x},z) = z - u_0(\boldsymbol{x}). \tag{2.22}$$

然而，对于不连续的 u_0，这一选择可能不光滑，因此可以用界面 $z=u_0(\boldsymbol{x})$ 的有符号距离函数替代。由于在（2.21）中仅引入了一个新维度，我们只需计算采用初始条件（2.22）的解。

3 自适应增长随机神经网络

我们采用自适应增长随机神经网络，通过水平集公式求解非线性一阶偏微分方程，包括哈密顿–雅可比方程和拟线性双曲平衡律，目标是计算多值解。为提高随机特征的表达能力，我们采用 [10]中提出的层增长策略。为完整起见，我们简要总结网络表示和层增长过程，然后描述零水平集附近配点的自适应选择。

3.1 采用层增长策略的 AG-RaNN

我们简要回顾 [10] 中介绍的网络结构。考虑一个具有 L 个隐藏层的 AG-RaNN，因此计入输入层和输出层后共包含 $L+2$ 层。令 m_l 表示层 l 中神经元的数量，其中 $l=0,\ 1,\ \cdots,\ L+1,\ m_0$ 为输入维度，m_{L+1} 为输出维度。第 l 个隐藏层的激活函数记为 ρ_l，其中 $l=1,\ \cdots,\ L$。

由于随机神经网络中的非线性参数在初始化后固定，因此所得近似可以表示为由隐藏层生成的基函数的线性组合。具体而言，我们递归地定义隐藏层基向量 $\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{x})$：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x}) = \rho_1(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_1),\\
&\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{\psi}_{l-1}(\boldsymbol{x});\ \rho_l(\boldsymbol{W}_l\boldsymbol{\psi}_{l-1}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}_l)\odot\boldsymbol{G}_l(\boldsymbol{x})], \quad l=2,\cdots,L,
\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{W}_1\in\mathbb{R}^{m_1\times m_0}$、$\boldsymbol{W}_l\in\mathbb{R}^{m_l\times\sum_{i=1}^{l-1}m_i}(l=2,\ \cdots,\ L)$ 和 $\boldsymbol{b}_l\in\mathbb{R}^{m_l\times 1}(l=1,\ \cdots,\ L)$ 分别为权重和偏置。向量 $\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{x})$ 包含 $\sum_{i=1}^{l}m_i$ 个基函数。第一层参数（$\boldsymbol{W}_1,\ \boldsymbol{b}_1$）可以通过 [10]，中的基于频率的初始化和神经元增长策略确定，也可以从均匀分布$\mathcal{U}(-\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_1)$ 中采样。接下来，我们重点构造 $\boldsymbol{W}_l$ 和 $\boldsymbol{b}_l$，其中 $l=2,\ \cdots,\ L$。

AG-RaNN 的层增长过程以迭代方式进行。假设一个具有$l-1$ 个隐藏层的 RaNN 已构建完成，并令 $\boldsymbol{\psi}_{l-1}(\boldsymbol{x})$ 表示截至第 $l-1$ 个隐藏层所生成的相应特征（基）向量。下一步增长的目标是为第 l 个隐藏层构造参数 $\boldsymbol{W}_l$、$\boldsymbol{b}_l$ 以及局部化函数 $\boldsymbol{G}_l(\boldsymbol{x})$。

基于当前的特征表示 $\boldsymbol{\psi}_{l-1}(\boldsymbol{x})$，我们得到中间 RaNN 近似 $\phi_\rho^{l-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}_{l-1}\boldsymbol{\psi}_{l-1}(\boldsymbol{x})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_{l-1} \in \mathbb{R}^{1\times\sum_{i=1}^{l-1} m_i}$ 表示线性系数向量。利用这一近似，我们选取一组误差指示点 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{err}}^l = (\boldsymbol{x}_1^l, \cdots, \boldsymbol{x}_{m_l}^l)$，该点集由与预设误差估计器最大值相关联的 m_l 个点组成。随后，新隐藏层的参数定义为

$$\boldsymbol{W}_l = \boldsymbol{H}_l\boldsymbol{\alpha}_{l-1}, \quad \boldsymbol{b}_l = -\boldsymbol{H}_l \odot [\phi_\rho^{l-1}(\boldsymbol{X}_{\mathrm{err}}^l)]^\top,$$

以及局部化函数

$$\boldsymbol{G}_l(\boldsymbol{x}) = (G_l^1(\boldsymbol{x}), \cdots, G_l^{m_l}(\boldsymbol{x}))^\top, \quad G_l^j(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\frac{\left\|\eta_2^l \boldsymbol{h}_j^l \odot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j^l)^\top\right\|_2^2}{2}\right).$$

这里的缩放向量 $\boldsymbol{H}_l$ 由下式给出

$$\boldsymbol{H}_l = \sqrt{(\boldsymbol{H}_l^0 \odot \boldsymbol{H}_l^0)\mathbf{1}_{m_0\times 1}}, \quad \boldsymbol{H}_l^0 = \eta_1^l \nabla\phi_\rho^{l-1}(\boldsymbol{X}_{\mathrm{err}}^{l\top}) \text{ or } \boldsymbol{H}_l^0 = (\boldsymbol{h}_1^{l\top}, \cdots, \boldsymbol{h}_{m_l}^{l\top})^\top \in \mathbb{R}^{m_l\times m_0}, \quad \boldsymbol{h}_j^l \sim \mathcal{U}(-\boldsymbol{r}_l, \boldsymbol{r}_l).$$

备注3.1 上述构造中涉及若干参数，包括 $\boldsymbol{r}_l$、η_1^l 和 η_2^l（$l = 2$、$\cdots$、L），这些参数必须预先指定。在本文报告的所有数值实验中，我们对 $\boldsymbol{h}_j^l \sim \mathcal{U}(-\boldsymbol{r}_l, \boldsymbol{r}_l)$ 进行采样，并设定 $\eta_2^l = 15$，因此 $\boldsymbol{r}_l$ 是唯一需要调整的参数。

3.2 自适应配置点

在进行层增长之前，我们首先计算一个粗略的 RaNN 解 $\phi_\rho^1(t, \boldsymbol{Y})$，其中 t 表示时间，而 $\boldsymbol{Y}$则包含水平集表述中的其余变量。由于我们的目标是准确捕捉$\phi(t, \boldsymbol{Y})$的零水平集，因此只需在 $\{\phi = 0\}$附近采样配点即可（这样也更高效）。受局部水平集方法（[33]）的启发，我们采用自适应配点策略，根据粗略解 ϕ_ρ^1更新采样点。

水平集方程定义在无界域上，在大范围截断区域内进行均匀采样很快就会变得效率低下。为初始化这一过程，我们从正态分布中对变量 $\boldsymbol{Y}$ 进行采样，并在有界区间内对时间变量 t 进行均匀采样，从而定义初始计算域（如图1中的红色矩形所示）。此初始化涉及若干参数，包括均值、方差和采样数量。这些参数仅用于初始化，不会进行大量调优；其取值旨在确保计算域得到充分覆盖。基于这组初始采样，可得到粗略的 RaNN 解 ϕ_ρ^1，并提取零水平集的近似（如图1中间子图的绿色曲线所示）。

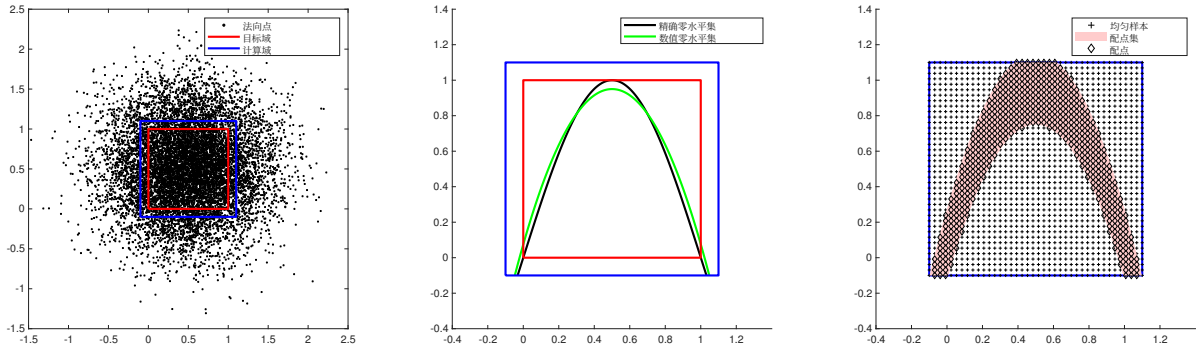

图1：自适应配置点示意图。

为更新内部配置点，不能忽略初始目标域之外区域的影响。因此，我们引入一个计算域 $D = (0, T) \times \Omega$（图中蓝色矩形所示，见

图1）并从该域均匀采样点 $\{(t_i, \boldsymbol{Y}_i)\}_{i=1}^N$。基于粗略解 ϕ_ρ^1，我们定义更新后的内部配置点集合

$$\Lambda_A = \left\{(t_i, \boldsymbol{Y}_i) : \ |\phi_\rho^1(t_i, \boldsymbol{Y}_i)| \le \varepsilon_A\right\},$$

这对应于零水平集的一个管状邻域（图 1 右侧子图中的红色阴影区域），其中 $\varepsilon_A > 0$ 是用户指定的阈值。该过程依赖于粗略近似足够精确，从而能够定位零水平集的邻域。边界配置点也以类似方式处理。使用更新后的配点集，我们重新计算 RaNN 近似，为简便起见，仍记为 ϕ_ρ^1。

注 3.2 为确保数值精度，参数 ε_A 应足够大，使得 Λ_A 包含精确解的零水平集。然而，过大的 ε_A会导致配点数量增加并降低计算效率。另一种做法是使用较小的 ε_A，并结合多个更新周期，但这会增加计算开销。本文报告的所有数值实验中，我们均选取足够大的 ε_A，并且只更新一次配点。

3.3 误差指示点

为了构造误差指示点 $\boldsymbol{X}_{\text{err}}^l$，我们首先需要在高维空间中对零水平集进行近似；第5.1小节介绍了一种实用方法。一旦获得零水平集上（或其附近）的一组点，我们便使用误差估计器选取 $\boldsymbol{X}_{\text{err}}^l$。在我们的实验中，我们使用残差 $\left|\mathcal{G}\phi_\rho^l(\boldsymbol{X})\right|$ 作为 $\boldsymbol{X} \in \Lambda_A$的误差指示量。

4 数值分析

按照算子形式（2.4），设 $D \subset \mathbb{R}^m$ 是扩展变量 $\boldsymbol{X}$上的一个有界利普希茨区域，且$\Gamma \subset \partial D$ 为流入边界。我们考虑希尔伯特空间

$$V_1 = L^2(D), \qquad V_2 = H^1(D), \qquad Y = L^2(D), \qquad Z = L^2(\Gamma).$$

这里我们使用不同的 V_1 和 V_2，而不是像 [10]中那样使用相同的 V。

4.1 图范数等价

为推导误差估计，我们在[10]中建立与假设 4.1 同类型的图范数等价。以下结构性假设刻画了向量场的正则性以及特征流的适定性。

假设 4.1（特征线的正则流） 我们假设

1. 输运场 $\boldsymbol{a} \in C^1(D; \mathbb{R}^{m-1})$ 在$\overline{D}$ 上有界：存在 $C_a > \overline{0}$ 使得

$$|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{X})| \le C_a, \qquad \forall\, \boldsymbol{X} \in \overline{D}.$$

2. 对于每一个 $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma$ 特征常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{X}(s) = (1, \boldsymbol{a}(\boldsymbol{X}(s))), \qquad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{\zeta}, \tag{4.1}$$

在 $s \in [0,T]$ 上具有唯一解，且该解保持在 D内，以及相应的流映射

$$\Psi : (0,T) \times \Gamma \to D, \qquad \Psi(s,\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{X}(s;\boldsymbol{\zeta})$$

是一个 C^1-微分同胚。其雅可比行列式 $J(s,\boldsymbol{\zeta}) := \left|\det D\Psi(s,\boldsymbol{\zeta})\right|$ 满足一致有界性

$$0 < c_0 \le J(s,\boldsymbol{\zeta}) \le C_0 < \infty, \qquad \forall\, (s,\boldsymbol{\zeta}) \in (0,T) \times \Gamma.$$

注4.2 假设 *4.1* 是线性一阶输运方程理论中的标准要求，参见 *[16]*中的经典结果。对于水平集方程 (2.10)、(2.13)和 (2.21)，只要 $\boldsymbol{F}$、 q 和H （连同它们的一阶导数）在有界计算域的$(\boldsymbol{x}, z, \boldsymbol{p})$ 变量上有界且满足利普希茨条件，该假设便成立。

现在我们证明，在假设4.1下，算子 $\mathcal{G}$ 满足以下图范数等价关系。

定理4.3（水平集方程的图范数等价）在假设 *4.1*下，考虑算子 $\mathcal{G}: V_2 \to Y$ 由 (2.4) 给出，以及边界算子 $\mathcal{B}: V_2 \to Z$ 由 (2.5)定义。于是存在常数 $C_L, C_U > 0$，它们仅依赖于 D, C_a, c_0 和 C_0，使得对所有 $\phi \in H^1(D)$

$$C_L \|\phi\|_{0,D}^2 \;\le\; \|\mathcal{G}\phi\|_{0,D}^2 + \|\mathcal{B}\phi\|_{0,\Gamma}^2 \;\le\; C_U \|\phi\|_{1,D}^2. \tag{4.2}$$

证明。 我们首先证明 $\phi \in C^1(D)$ 的情形，并将其分为两个步骤 ps.

步骤 *1*：上界。 由于 $\boldsymbol{a}$ 在 D 上有界，存在 $\overline{C}_a > 0$ 使得对于所有 $\boldsymbol{X} = (t,\ \boldsymbol{Y}) \in D$，均有 $|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{X})| \le C_a$。对于 $\phi \in C^1(\overline{D})$，我们有

$$|\mathcal{G}\phi(\boldsymbol{X})| = \left|\partial_t\phi(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{X}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{Y}}\phi(\boldsymbol{X})\right| \le |\partial_t\phi(\boldsymbol{X})| + C_a|\nabla_{\boldsymbol{Y}}\phi(\boldsymbol{X})|.$$

对其平方并在 D 上积分，得到

$$\|\mathcal{G}\phi\|_{0,D}^2 \le 2\|\partial_t\phi\|_{0,D}^2 + 2C_a^2\|\nabla_{\boldsymbol{Y}}\phi\|_{0,D}^2 \le C\left(\|\partial_t\phi\|_{0,D}^2 + \|\nabla_{\boldsymbol{Y}}\phi\|_{0,D}^2\right) \le C\,\|\phi\|_{1,D}^2,$$

其中某个常数 $C > 0$ 仅取决于 C_a 和 D。此外，根据利普希茨区域 D 上的迹定理，

$$\|\mathcal{B}\phi\|_{0,\Gamma}^2 = \|\phi\|_{0,\Gamma}^2 \le C_{\mathrm{tr}}^2\|\phi\|_{1,D}^2,$$

其中 C_{tr} 为迹常数。结合这两个估计，我们得到

$$\|\mathcal{G}\phi\|_{0,D}^2 + \|\mathcal{B}\phi\|_{0,\Gamma}^2 \le (C + C_{\mathrm{tr}}^2)\,\|\phi\|_{1,D}^2 =: C_U\,\|\phi\|_{1,D}^2,$$

这就证明了（4.2）中的上界。

步骤 *2*：通过特征线获得下界。令 $\phi \in C^1(D)$，并记

$$F(\boldsymbol{X}) := \mathcal{G}\phi(\boldsymbol{X}) = \partial_t\phi(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{X}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{Y}}\phi(\boldsymbol{X}).$$

For 对每个 $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma$，考虑特征曲线 $\boldsymbol{X}(\tau;\ \boldsymbol{\zeta})$ 满足方程 4.1。沿着该曲线，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\phi\big(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta})\big) = \partial_\tau\phi\big(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta})\big) + \boldsymbol{a}\big(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta})\big) \cdot \nabla_{\boldsymbol{Y}}\phi\big(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta})\big) = F\big(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta})\big). \tag{4.3}$$

对（4.3）从 0 积分到 $s \in [0,T]$ 可得

$$\phi\big(\boldsymbol{X}(s;\boldsymbol{\zeta})\big) = \phi(\boldsymbol{\zeta}) + \int_0^s F\big(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta})\big)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.4}$$

利用 $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ 和柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\phi\big(\boldsymbol{X}(s;\boldsymbol{\zeta})\big)\right|^2 &\le 2|\phi(\boldsymbol{\zeta})|^2 + 2\left(\int_0^s |F(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta}))|\,\mathrm{d}\tau\right)^2 \le 2|\phi(\boldsymbol{\zeta})|^2 + 2s\int_0^s |F(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta}))|^2\,\mathrm{d}\tau \\ &\le 2|\phi(\boldsymbol{\zeta})|^2 + 2T\int_0^T |F(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta}))|^2\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

对该不等式关于 $[0,T]$ 在 s 上积分，得到

$$\int_0^T \left|\phi\big(\boldsymbol{X}(s;\boldsymbol{\zeta})\big)\right|^2 \mathrm{d}s \le 2T|\phi(\boldsymbol{\zeta})|^2 + 2T^2\int_0^T |F(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta}))|^2\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.5}$$

现在我们通过流映射 $\Psi(s,\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{X}(s;\boldsymbol{\zeta})$，将变量从 $\boldsymbol{X}\in D$ 变换为 $(s,\boldsymbol{\zeta})\in(0,T)\times\Gamma$。根据假设4.1，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = J(s,\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\zeta}),$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 表示 Γ 上的曲面测度。利用上界 $J(\tau,\boldsymbol{\zeta}) \le C_0$ 以及 (4.5)，可得

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{0,D}^2 &= \int_D |\phi(\boldsymbol{X})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \int_\Gamma\int_0^T \left|\phi\big(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta})\big)\right|^2 J(\tau,\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\zeta}) \\ &\le C_0\int_\Gamma\int_0^T \left|\phi\big(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta})\big)\right|^2 \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\zeta}) \\ &\le 2TC_0\int_\Gamma |\phi(\boldsymbol{\zeta})|^2\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\zeta}) + 2T^2C_0\int_\Gamma\int_0^T |F(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta}))|^2\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\zeta}).\end{aligned}$$

对于第二项，我们利用下界 $J(\tau,\boldsymbol{\zeta}) \ge c_0$ 将变量换回 $\boldsymbol{X}\in D$:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\int_0^T |F(\boldsymbol{X}(\tau;\boldsymbol{\zeta}))|^2\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\zeta}) &= \int_D |F(\boldsymbol{X})|^2 \frac{1}{J(\tau(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{X}))}\,\mathrm{d}\boldsymbol{X} \\ &\le \frac{1}{c_0}\int_D |F(\boldsymbol{X})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \frac{1}{c_0}\|\mathcal{G}\phi\|_{0,D}^2,\end{aligned}$$

其中 $(\tau(\boldsymbol{X})\ \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{X}))$ 是 $\boldsymbol{X}$ 在 Ψ 下的唯一原像。因此，

$$\|\phi\|_{0,D}^2 \le 2TC_0\|\phi\|_{0,\Gamma}^2 + \frac{2T^2C_0}{c_0}\|\mathcal{G}\phi\|_{0,D}^2.$$

重新整理可得

$$\|\mathcal{G}\phi\|_{0,D}^2 + \|\phi\|_{0,\Gamma}^2 \ge C_L\,\|\phi\|_{0,D}^2 \text{ with } C_L := \min\left\{\frac{1}{2TC_0},\ \frac{c_0}{2T^2C_0}\right\} > 0.$$

这正是（4.2）中针对 $\phi\in C^1(D)$ 的下界。

由于 D 是利普希茨连续的，$C^1(D)$ 在 $H^1(D)$ 中稠密。因此，对于任意 $\phi\in H^1(D)$，存在一个序列 $\{\phi_n\}\subset C^1(D)$，使得

$$\|\phi_n-\phi\|_{1,D}\to 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

由于 $\boldsymbol{a}\in C^1(D)$有界，算子 $\mathcal{G}: H^1(D)\to L^2(D)$有界且线性，且迹算子$\mathcal{B}: H^1(D)\to L^2(\Gamma)$有界，因此

$$\|\mathcal{G}(\phi_n-\phi)\|_{0,D}\to 0, \qquad \|\mathcal{B}(\phi_n-\phi)\|_{0,\Gamma}\to 0.$$

在关于 ϕ_n 的不等式中取极限，得到（4.2），对所有 $\phi \in H^1(D)$。 ■

有了图范数等价，我们可以调用在 [10]中针对当前水平集算子 $\mathcal{G}$ 与边界算子 $\mathcal{B}$所建立的希尔伯特空间误差分解框架。特别地，我们沿用 [10] 中的记号与常数，并仅强调针对水平集设定的修改；因此，近似与统计部分的详细证明予以省略，可参见 [10]。

为清晰起见，我们首先针对单隐藏层随机神经网络说明该分析：

$$\mathcal{N}_\rho(D) = \{\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}\rho(\boldsymbol{W}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) : \boldsymbol{x} \in D, \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \le C_N\}.$$

设 ϕ^* 为偏微分方程（2.4）–（2.5）的精确解，我们引入

$$\phi_a = \arg\min_{\phi \in \mathcal{N}_\rho(D)} \|\phi - \phi^*\|_{1,D},$$

这意味着 ϕ_a 是 ϕ^* 在 RaNN 空间 $\mathcal{N}_\rho(D)$ 中的最佳近似。我们的目标是通过最小化损失函数来计算近似解 ϕ_ρ

$$\mathcal{L}_\eta(\phi) = \|\mathcal{G}\phi\|_{0,D}^2 + \eta\|\mathcal{B}\phi - g\|_{0,\Gamma}^2, \tag{4.6}$$

其中 η 为边界惩罚参数。在实验中，我们取 $\eta = 15$，并在下文中省略 η。在适当的配点 $\{\boldsymbol{X}_i^I\}_{i=1}^{N^I}$、$\{\boldsymbol{X}_i^B\}_{i=1}^{N^B}$ 与基函数 $\boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x})$ 下，即

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\phi) = \frac{|D|}{N^I}\sum_{i=1}^{N^I}|\mathcal{G}\phi(\boldsymbol{X}_i^I)|^2 + \frac{|\Gamma|}{N^B}\sum_{i=1}^{N^B}|\mathcal{B}\phi(\boldsymbol{X}_i^B) - g(\boldsymbol{X}_i^B)|^2. \tag{4.7}$$

由于 $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x})$是基函数的线性组合，我们只使用最小二乘法计算 $\boldsymbol{\alpha}$。令 ϕ_ρ 为经验损失函数 $\mathcal{L}(\phi)$在 $\mathcal{N}_\rho(D)$上的极小化解：

$$\bar{\phi}_\rho = \arg\min_{\phi \in \mathcal{N}_\rho(D)} \widetilde{\mathcal{L}}(\phi),$$

而 ϕ_ρ 是通过最小二乘求解器得到的解。

假设 4.4（激活函数适 admissibility）激活函数 ρ 满足：

(A1) $\rho \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$。*(A2)* $\widehat{\rho'}(1) \neq 0$, $\rho' \in L^1(\mathbb{R})$ 以及 $\rho'' \in L^1(\mathbb{R})$。

备注 4.5 满足假设*4.4* 的激活函数双曲正切函数、逻辑函数及其他光滑的 *S* 形函数都属于这一类。相比之下，ReLU 和ReLU^k 由于缺乏足够的光滑性，不属于这一类。尽管如此，众所周知，*ReLU* 型激活函数也具有通用逼近性质；证明见例如 *[30]*。

利用图范数等价，并采用与 [10], 中类似的方法，我们得到

$$C_L\|\phi^* - \phi_\rho\|_{0,D}^2 \le \mathcal{L}(\phi_\rho) \le C_U\|\phi^* - \phi_a\|_{1,D}^2 + 2\sup_{\phi \in \mathcal{N}_\rho(D)}|\mathcal{L}(\phi) - \widetilde{\mathcal{L}}(\phi)| + (\widetilde{\mathcal{L}}(\phi_\rho) - \widetilde{\mathcal{L}}(\phi_a)).$$

前两项的估计已在 [10], 中建立，主要结果总结如下。

定理 4.6（逼近误差）假设 *4.1* 成立，且 $\phi^* \in H^{1+\varepsilon_C}(D)$ 对于某个 $\varepsilon_C > 0$，激活函数 ρ满足假设 *4.4*。进一步假设，*RaNN* 的内部参数 $(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{b})$是从一个固定的有界盒 $\Theta \subset \mathbb{R}^{m+1}$中采样得到的。

那么，对于任意容差 $\varepsilon > 0$ 和置信水平 $\delta \in (0, 1)$，存在一个网络宽度 M，使得相应的最佳近似 $\phi_a \in \mathcal{N}_\rho(D)$ 满足

$$\|\phi^* - \phi_a\|_{1,D} \leq \varepsilon$$

关于内部参数的随机性，以至少 $1 - \delta$ 的概率。

定理 4.7（统计分量界）在假设4.1下，对于 $1 - \delta_s$ 配点的随机选取，以至少该概率，统计分量满足以下界

$$\sup_{\phi \in \mathcal{N}_\rho(D)} \left| \mathcal{L}(\phi) - \widetilde{\mathcal{L}}(\phi) \right| \lesssim C_N^2 C_R^2 M \left(\sqrt{\frac{\log(6M/\delta_s)}{N^I}} + \sqrt{\frac{\log(6M/\delta_s)}{N^B}} \right),$$

其中 $\widetilde{\mathcal{L}}(\phi)$ 是 L^2 中定义的经验（4.7）。

因此，接下来的分析主要关注最后一个优化项。

4.2 优化项

回顾一下，$\bar{\phi}_\rho$ 是经验损失函数 $\widetilde{\mathcal{L}}(\phi)$在 $\mathcal{N}_\rho(D)$上的极小值点，因此对于任意 $\phi \in \mathcal{N}_\rho(D)$，$\widetilde{\mathcal{L}}(\phi_\rho) \leq \widetilde{\mathcal{L}}(\phi)$。由 $\phi_a \in \mathcal{N}_\rho(D)$可知，差值 $\widetilde{\mathcal{L}}(\phi_\rho) - \widetilde{\mathcal{L}}(\phi_a)$非正。优化误差可分解为

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{L}}(\phi_\rho) - \widetilde{\mathcal{L}}(\phi_a) = \widetilde{\mathcal{L}}(\phi_\rho) - \widetilde{\mathcal{L}}(\bar{\phi}_\rho) + \widetilde{\mathcal{L}}(\bar{\phi}_\rho) - \widetilde{\mathcal{L}}(\phi_a) \leq \widetilde{\mathcal{L}}(\phi_\rho) - \widetilde{\mathcal{L}}(\bar{\phi}_\rho) \\
=&\frac{|D|}{N^I} \sum_{i=1}^{N^I} \left(|\mathcal{G}\phi_\rho(\boldsymbol{X}_i^I)|^2 - |\mathcal{G}\bar{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}_i^I)|^2 \right) + \frac{|\Gamma|}{N^B} \sum_{i=1}^{N^B} \left(|\mathcal{B}\phi_\rho(\boldsymbol{X}_i^B) - g(\boldsymbol{X}_i^B)|^2 - |\mathcal{B}\bar{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}_i^B) - g(\boldsymbol{X}_i^B)|^2 \right) \\
\leq&\frac{|D|}{N^I} \left(\sum_{i=1}^{N^I} |\mathcal{G}\phi_\rho(\boldsymbol{X}_i^I) - \mathcal{G}\bar{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}_i^I)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N^I} |\mathcal{G}\phi_\rho(\boldsymbol{X}_i^I) + \mathcal{G}\bar{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}_i^I)|^2 \right)^{1/2} \\
&+ \frac{|\Gamma|}{N^B} \left(\sum_{i=1}^{N^B} |\mathcal{B}\phi_\rho(\boldsymbol{X}_i^B) - \mathcal{B}\bar{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}_i^B)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N^B} |\mathcal{B}\phi_\rho(\boldsymbol{X}_i^B) + \mathcal{B}\bar{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}_i^B) - 2g(\boldsymbol{X}_i^B)|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

假设 4.8（离散算子有界性）对于每个有限维 *RaNN* 空间 $\mathcal{N}_\rho(D)$ 以及每一组内部配点和边界配置点 $\{\boldsymbol{X}_i^I\}_{i=1}^{N^I} \subset D$、$\{\boldsymbol{X}_i^B\}_{i=1}^{N^B} \subset \Gamma$，都存在常数 $C_2 > 0$和 $C_3 > 0$，且与 $\phi \in \mathcal{N}_\rho(D)$ 无关，使得

$$\sum_{i=1}^{N^I} |\mathcal{G}\phi(\boldsymbol{X}_i^I)|^2 \leq C_2 \sum_{i=1}^{N^I} |\phi(\boldsymbol{X}_i^I)|^2, \quad \sum_{i=1}^{N^B} |\mathcal{B}\phi(\boldsymbol{X}_i^B)|^2 \leq C_3 \sum_{i=1}^{N^B} |\phi(\boldsymbol{X}_i^B)|^2.$$

在有限维 RaNN 空间中，只要采样点足够密集且分布均匀，这一假设就是合理的。

由于 ρ 连续且 D 有界，$\phi \in \mathcal{N}_\rho(D)$始终有界，这意味着存在常数$C_g$、$C_I$ 和 C_B，使得

$$\left(\frac{1}{N^B} \sum_{i=1}^{N^B} |g(\boldsymbol{X}_i^B)|^2 \right)^{1/2} \leq C_g, \quad \left(\frac{1}{N^I} \sum_{i=1}^{N^I} |\phi(\boldsymbol{X}_i^I)|^2 \right)^{1/2} \leq C_I, \quad \left(\frac{1}{N^B} \sum_{i=1}^{N^B} |\phi(\boldsymbol{X}_i^B)|^2 \right)^{1/2} \leq C_B,$$

其中，C_g，C_I，C_B仅取决于 g和 RaNN 基函数的一致 L^∞ 界（通过约束 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \le C_N$），而与 $\phi \in \mathcal{N}_\rho(D)$的具体选择无关。

于是，我们有

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\phi_\rho) - \widetilde{\mathcal{L}}(\phi_a) \le \frac{2C_I\sqrt{C_2}|D|}{\sqrt{N^I}} \left(\sum_{i=1}^{N^I} |\mathcal{G}\phi_\rho(\boldsymbol{X}_i^I) - \mathcal{G}\bar{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}_i^I)|^2\right)^{1/2} + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{C_g^2+C_B^2}|\Gamma|}{\sqrt{N^B}} \left(\sum_{i=1}^{N^B} |\mathcal{B}\phi_\rho(\boldsymbol{X}_i^B) - \mathcal{B}\bar{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}_i^B)|^2\right)^{1/2}.$$

取 $\phi_\rho = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\psi}$和 $\bar{\phi}_\rho = \bar{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\psi}$，其中 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_M)$和 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \cdots, \psi_M)^\top$，令 $\sigma_{\max}(A)$为 A的最大奇异值，其中 $A_{ij} = \mathcal{G}\psi_j(\boldsymbol{X}_i^I)$对应 $1 \le i \le N^I$，而 $A_{ij} = \mathcal{B}\psi_j(\boldsymbol{X}_{i-N^I}^B)$对应 $N^I + 1 \le i \le N^I + N^B$，则可得

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\phi_\rho) - \widetilde{\mathcal{L}}(\phi_a) \le \max\left\{\frac{2C_I\sqrt{C_2}|D|}{\sqrt{N^I}}, \frac{2\sqrt{2}\sqrt{C_g^2+C_B^2}|\Gamma|}{\sqrt{N^B}}\right\} \sigma_{\max}(A) \left\|\boldsymbol{\alpha} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}\right\|_2.$$

$\boldsymbol{\alpha} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 的 l^2 范数估计由以下定理给出。

定理 4.9（ [18]中的定理 5.3.1）设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{r}$，$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$，且 $\bar{\boldsymbol{r}}$ 满足

$$\|A\boldsymbol{\alpha}^\top - b\|_2 = \min, \quad \boldsymbol{r} = b - A\boldsymbol{\alpha}^\top,$$
$$\|(A+\delta A)\bar{\boldsymbol{\alpha}}^\top - (b+\delta b)\|_2 = \min, \quad \bar{\boldsymbol{r}} = (b+\delta b) - (A+\delta A)\bar{\boldsymbol{\alpha}}^\top,$$

其中 A 为满列秩，$\|\delta A\|_2 < \sigma_{min}(A)$ 和 $\sigma_{min}(A)$ 分别为 A 的最小奇异值。假设b、$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 均不为零。令 $\theta \in (0, \pi/2)$ 由 $\sin(\theta) = \|\boldsymbol{r}\|_2/\|b\|_2$定义。若

$$\varepsilon_L = \max\left\{\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}, \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}\right\}, \quad \nu = \frac{\|A\boldsymbol{\alpha}^\top\|_2}{\sigma_{min}(A)\|\boldsymbol{\alpha}\|_2},$$

then

$$\frac{\|\boldsymbol{\alpha} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}\|_2}{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2} \le \varepsilon_L \left\{\frac{\nu}{\cos(\theta)} + [1 + \nu\tan(\theta)]\frac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)}\right\} + O(\varepsilon_L^2).$$

在我们的设定中，$(A,\ b)$ 表示与所选基函数和配点相对应的最小二乘矩阵及右端项，而 $(A+\delta A,\ b+\delta b)$ 则表示数值最小二乘求解器中使用的有限精度对应量。因此，扰动水平 ε_L 由浮点精度和求解器的稳定性决定。实际上，这意味着优化项可以忽略不计，相较于逼近误差和统计分量而言。

4.3 层增长

层增长策略通过在更深的层中加入新生成的神经元来扩展 RaNN 假设空间，并丰富特征集。因此，随着网络容量的增加，逼近误差通常会降低。另一方面，若不相应增加配点数量，更多的基函数可能会增大统计分量，正如 [10] 中所讨论的那样。在我们的实验中，我们选择足够多的配点来平衡这一权衡。

5 数值实验

5.1 零水平集

我们首先描述如何近似标量值水平集函数的零水平集。基于 RaNN 的求解器的一个关键优势在于，数值近似 ϕ_ρ 可以在任意查询点处求值，从而在提取零水平集时避免插值。

标量值情形 给定数值近似 $\phi_\rho(\boldsymbol{X})$ 以及位于其零水平集邻域内的初始点集 $\{\boldsymbol{X}_i\}_{i=1}^I$，我们通过局部扰动细化每个 $\boldsymbol{X}_i$。具体而言，对于每个 i，我们在 $\boldsymbol{X}_i$ 的一个小邻域内生成有限候选点集 $\{\boldsymbol{X}_{ij}\}_{j=1}^{J_i}$，在这些候选点处对 ϕ_ρ 求值，并更新

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_i = \arg\min_{\boldsymbol{X}_{ij}} |\phi_\rho(\boldsymbol{X}_{ij})|.$$

˜将 $\boldsymbol{X}_i$ 替换为 $\boldsymbol{X}_i$ 并重复此过程，可得到一组经过细化的点，用以逼近零水平集$\{\phi_\rho = 0\}$。

初始化 关键步骤是构造零水平集附近的初始点 $\{\boldsymbol{X}_i\}_{i=1}^I$。我们在略微扩大的区域内采样一组候选点。对于每个候选点，我们检查该点及其局部邻点处 ϕ_ρ 的符号；如果该邻域内的符号并非完全相同，那么该邻域很可能与零水平集相交，此时便选取该候选点作为初始点。在二维和三维空间中，也可以使用 MATLAB 中的 contour 和 isosurface 等例程进行可视化和初始化。

示例 考虑在 $[0,1]\times[0,1]$上满足 $-x_2$、 $=\sin(\pi x_1)$ 的 $\phi_\rho(\boldsymbol{x})$。首先，我们在扩大区域 $[-0.1,1.1]\times[-0.1,1.1]$ 上采样一个均匀网格，每个方向各取 50 个点。从检测到的初始点出发，令 $J_i = 9$，并通过张量积模板生成 $\{\boldsymbol{x}_{ij}\}_{j=1}^9$

$$(x_{i1}-h_1, x_{i1}, x_{i1}+h_1)\times(x_{i2}-h_2, x_{i2}, x_{i2}+h_2),$$

其中 h_1 和 h_2 为网格间距。在每次迭代中，步长 $\boldsymbol{h} =$ （h_1， h_2）减半。经过五次迭代后，所得点位于零水平集的一个小邻域内。图 2 展示了细化过程。

向量值情形 对于向量值水平集函数 $\boldsymbol{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}^k$，其零水平集对应于各分量零水平集的交集。实践中，我们采用与标量情形相同的细化过程，但将标量目标替换为向量范数：

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_i = \arg\min_{\boldsymbol{X}_{ij}} \|\boldsymbol{\phi}_\rho(\boldsymbol{X}_{ij})\|_{\ell^2}.$$

初始化时，我们不分别选取点集再求交集（这可能不稳定），而是选取满足小残差准则（例如 $\|\boldsymbol{\phi}_\rho(\boldsymbol{X})\|_{\ell^2} \le \varepsilon_0$）并逐分量通过局部变号检验的候选点。

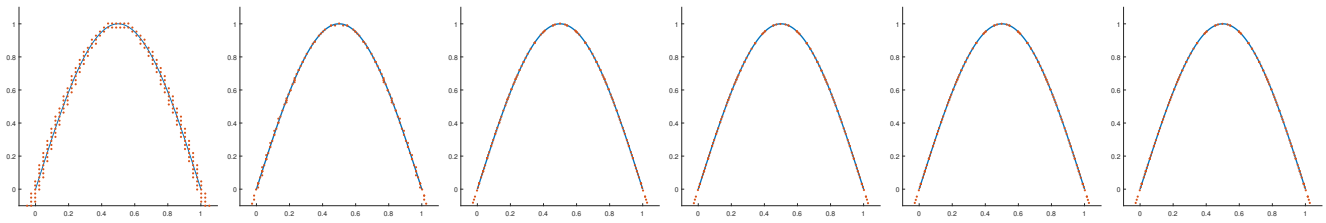

图2：寻找零水平集的迭代法。

5.2 示例

所有实验均在 MATLAB 中进行。为确保可复现性，我们通过 rng(1) 固定随机种子。最小二乘问题由基于 QR的例程求解（MATLAB linsolve，使用 opts.RECT=true）。在所有

示例中，我们在每一层都使用高斯激活函数 $\rho(x)$ =exp($-x^2/2$)。由于基函数是固定的，我们使用解析导数计算所需的微分算子，从而避免使用自动微分和有限差分近似，在保持高精度的同时提高效率。

我们的自适应策略将配点集中在零水平集周围的管宽 Λ_A 内。因此，远离 Λ_A 的区域精度可能会下降。因此，在可视化解时，我们仅关注足够接近 Λ_A 的点。为高效识别此类点，我们采用 k近邻搜索（MATLAB knnsearch）来估计绘图点到配点集的距离。

实验中使用的主要参数总结如下：

- N^I和 N^B分别表示内部配点和边界配置点的数量。
- E 和 Var 表示自适应配点过程中用于初始正态采样的均值和方差参数。
- N 是用于更新内部/边界配点集的候选点总数，ε_A 是定义 $\Lambda_A = \{|\phi_\rho^1| \le \varepsilon_A\}$ 的管宽，N_A^I和 N_A^B分别是更新后的内部/边界配点数量。
- T 是最终时间。我们将目标域（评估/可视化精度的区域）与较大的计算域 Ω 区分开来，后者用于更新配点，具体如第 3.2 小节所述。
- m_l 和 $\boldsymbol{r}_l$ 表示第 l层神经元的数量以及内部参数的均匀采样范围。对于所有算例，$m_1 = 2000$ 和 $m_2 = m_3 = 1000$。
- t_1、t_2和 t_3 分别表示采用(i)常规配置、(ii)自适应配置 Λ_A以及(iii)层增长时的运行时间。

除非另有说明，红色曲线/曲面表示参考（精确）解。

例1（一维无黏受迫伯格斯方程）我们考虑如下一维无黏受迫伯格斯方程：

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_x V = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

其中 $V(x)$ 为势函数。我们考察四种情形，分别改变 $V(x)$ 和 $u_0(x)$，这些情形已在 *[24]*中进行过测试。对于所有情形，我们在第三行实验中应用层增长，前两行则使用单层*RaNN*基线。

我们将每种情形的全部参数列于表1。

	N^I	N^B	E	Var	N	ε_A	T	Ω	$\boldsymbol{r}_1$	$\boldsymbol{r}_2$
情况 1	64000	5000	(0,0)	(1,1)	51^3	0.4	1	$[-1,1]\times[-1,1]$	(3,3,3)	(5,5,5)
案例 2			(0,0)	(1.5,1.5)		0.2	1	$[-1,1]\times[-1.1,1.1]$		
案例 3			(0,0.5)	(2,1.5)		0.6	1	$[-1.3,1.3]\times[-0.3,1.3]$		
案例4			(0,0)	(1.5,1.5)		0.9	π	$[-2,2]\times[-2,2]$		

表 1：示例中使用的参数1。

情况 1：连续初始数据。

在这种情况下，初始条件为

$$u_0(x) = -\sin(\pi x) \tag{5.3}$$

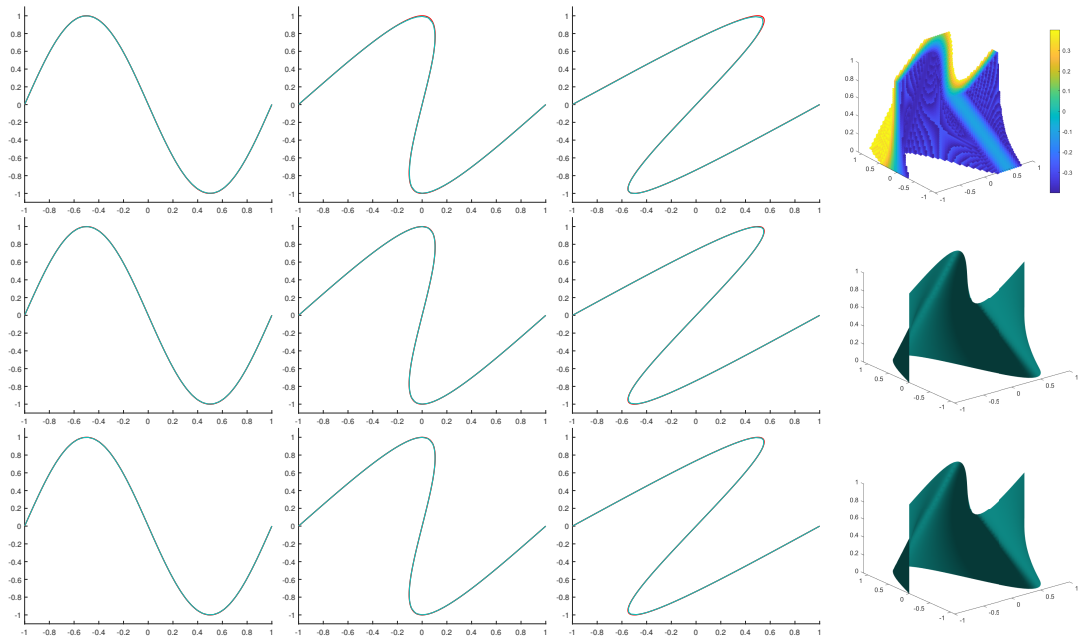

图3：案例 1的 AG-RaNN 方法结果。第 1–3 列分别对应 $t = 0$，0。5、1，第 4 列显示零水平集。各行（从上到下）分别使用常规配置点、配点集 Λ_A ($N_A^I = 39784$，$N_A^B = 836$)，以及层增长策略。运行时间：（t_1，t_2，t_3）=(2.45、1.63、7.23）。

，势函数为 $V(x) = 0$。数值结果如图 3所示。

案例 2：稀疏初始数据。

在此情况下，初始条件为

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

势函数为 $V(x) = 0$。数值结果见图4。

案例 3：激波初始数据。

在此情况下，初始条件为

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

势函数为 $V(x) = 0$。数值结果如图5所示。

案例4：谐振子。

在此案例中，初始条件为

$$u_0(x) = -\tanh(5x) \tag{5.6}$$

势函数为 $V(x) = \frac{1}{2}x^2$。数值结果如图6所示。

在所有案例中，常规配置点得到的结果精度较低。使用配点集 Λ_A时，数值解更接近精确解。经过层增长后，数值解的精度更高。与 [24], 中的有限差分法结果相比，RaNN 方法能够以更快的速度获得精度相近的解，并且在这些测试中，我们能够在更长的时间范围内计算解。

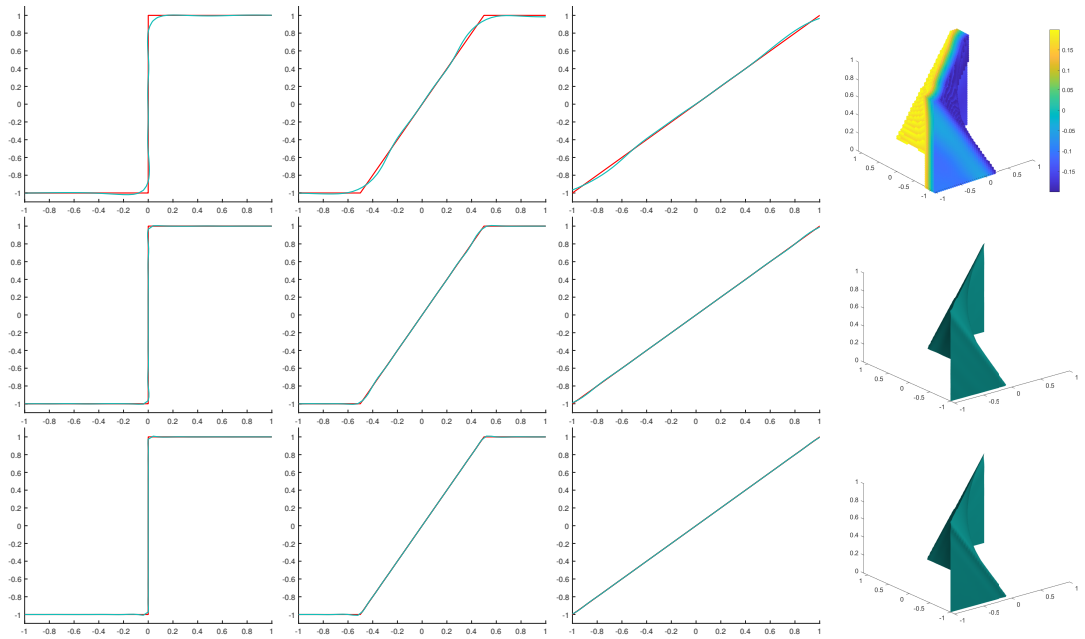

图4：AG-RaNN方法在示例1的案例 2 中的结果。第1至3列分别对应 $t = 0$、0.5、1，第4列展示零水平集。从上到下各行分别采用常规配置点、配点集 Λ_A $(N_A^I = 33051,\ N_A^B = 799)$以及层增长策略。运行时间：$(t_1,\ t_2,\ t_3) = (2.47,\ 1.38,\ 8.70)$。

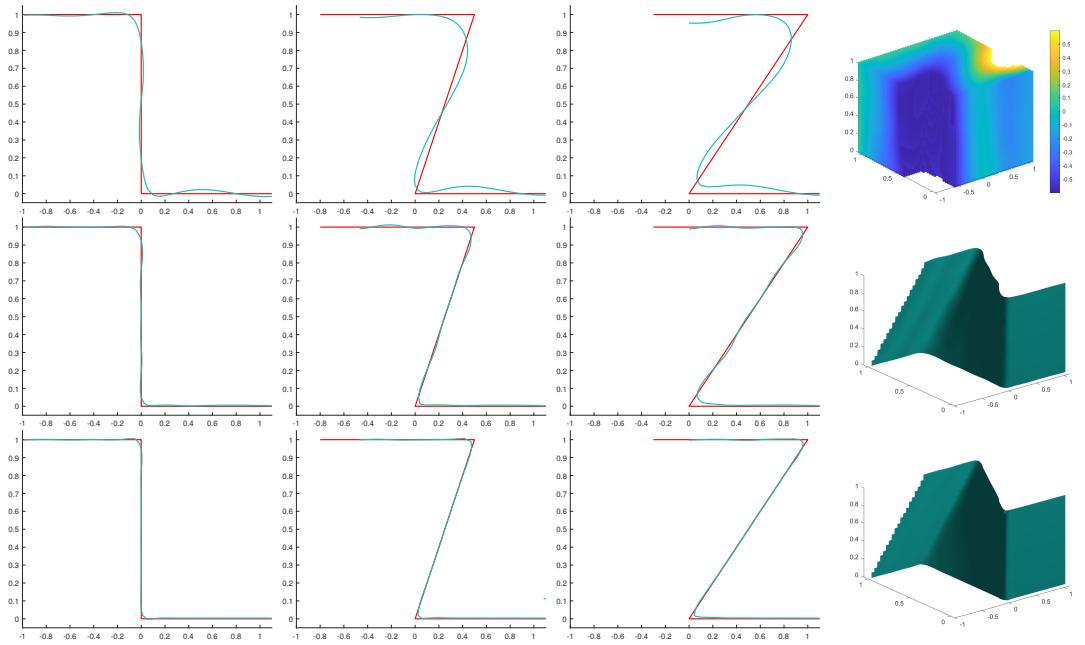

图5：AG-RaNN方法在示例1的案例 3 中的结果。第1至3列分别对应 $t = 0$、0.5、1，第4列展示零水平集。从上到下各行分别采用常规配置点、配点集 Λ_A $(N_A^I = 96122,\ N_A^B = 1685)$以及层增长策略。运行时间：$(t_1,\ t_2,\ t_3) = (2.47,\ 5.52,\ 23.28)$。

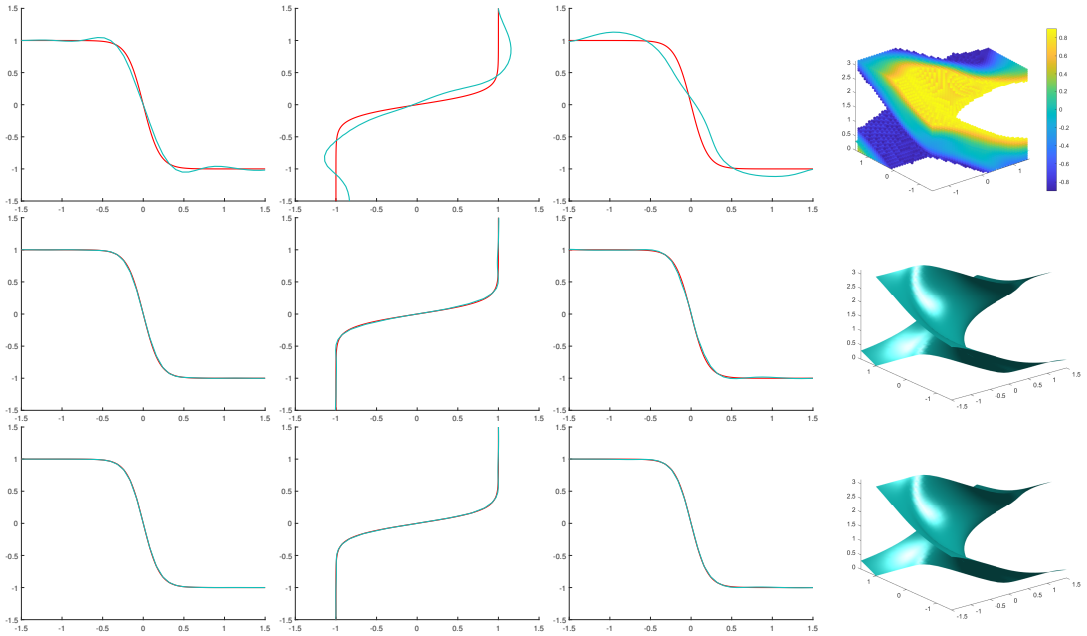

图6：示例1中案例4的AG-RaNN方法结果。第1至3列分别对应 $t=0$、$\pi/2$、π，第4列显示零水平集。从上到下各行依次采用常规配置点、配点集 Λ_A ($N_A^I = 55236$、$N_A^B = 1142$)和层增长策略。运行时间：(t_1、t_2、t_3) $=(2.62,\ 2.07,\ 9.87)$。

Exa示例2（二维伯格斯方程）我们还测试了以下二维无黏伯格斯方程 *on:*

$$\partial_t u + u\partial_x u + u\partial_y u = 0, \quad (t,x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \tag{5.7}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{5.8}$$

我们考察了两种情况，改变 $u_0(x,y)$。

我们在表2中列出了各情况的所有参数。

	N^I	N^B	E	Var	N	ε_A	T	Ω	$\boldsymbol{r}_1$	$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_3$
情况 1	200000	20000	(0,0)	(1,1)	31^4	0.5	1	$[-1,1]^3$	(3,3,3,3)	N/A
案例 2				(2,2)			0.5		(2,2,2,2)	(2,2,2,2)

表2：示例中使用的参数 2。

情况 1：连续初始数据。

在这种情况下，初始条件为

$$u_0(x,y) = 0.45\cos(\pi x)[\sin(\pi y) - 1]. \tag{5.9}$$

数值结果如图 7所示。

案例 2：一个黎曼问题。

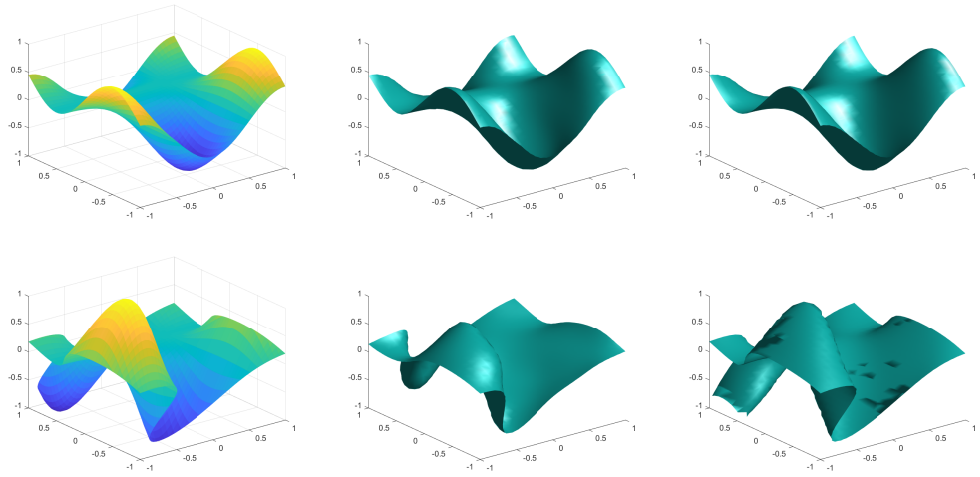

图7：示例2中情况 1的AG-RaNN方法结果。第一行和最后一行分别对应 $t=0$ 和$t=1$。各列从左至右依次展示精确解、采用常规配置点得到的结果，以及采用配点集 $\Lambda_A(N_A^I=362245,\quad N_A^B=11902)$得到的结果。运行时间：$(t_1,\quad t_2)=(12.85,45.42)$。

在这种情况下，初始条件为

$$u_0(x,y)=\begin{cases}-1, & x>0,y>0,\\ -0.2, & x<0,y>0,\\ 0.5, & x<0,y<0,\\ 0, & x>0,y<0.\end{cases} \tag{5.10}$$

数值结果如图8所示。

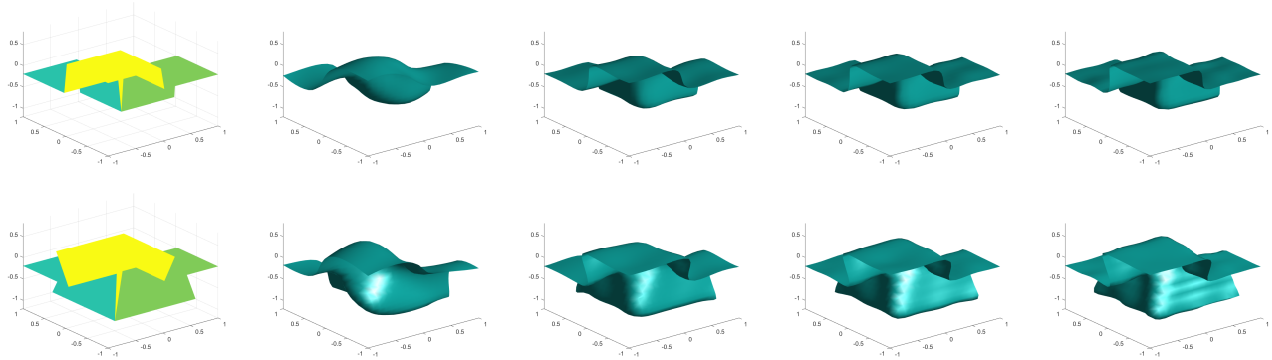

图8：示例2中案例 2的AG-RaNN方法结果。第一行和最后一行分别对应 $t=0$和 $t=0.5$。第1至3列依次展示精确解、采用常规配置点得到的结果，以及采用配点集 $\Lambda_A(N_A^I=469858,\quad N_A^B=13757)$得到的结果；最右侧两列则采用层增长策略得到。

在本例中，当初始条件如情况 1 所示为连续时，利用自适应配置点计算数值解是直接的。然而，对于案例 2 中的黎曼问题，基于粗略解的自适应配置可能无法准确定位间断。因此，我们采用层增长策略来增强近似的表达能力。如图 8所示，增加层数可提高间断附近的分辨率，尽管激波仍略有抹平。

例3（一维 Hamilton–Jacobi 方程）我们考虑如下一维 *Hamilton*–雅可比方程：

$$\partial_t S + \frac{1}{2}|\partial_x S|^2 + V = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \tag{5.11}$$

$$S(0,x) = S_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.12}$$

其中， $V(x)$ 是势函数。我们探讨四种情况，改变 $V(x)$ 和 $S_0(x)$。

在此示例中，我们仅通过基于梯度的水平集表述 $\partial_x S$ 计算梯度场（2.10）。各情况的参数列于表 3。

	N^I	N^B	E	Var	N	ε_A	T	Ω	$\boldsymbol{r}_1$
情况 1	20000	5000	(0,0)	(2,2)	51^3	1	10	$[-2,2]\times[-2,2]$	(2,2,2)
案例 2						1	10	$[-2,2]\times[-2,2]$	
案例 3						0.6	2	$[-2,2]\times[-2,2]$	
案例4						0.6	2π	$[-3,3]\times[-3,3]$	

表 3：示例中使用的参数3。

情况 1：无焦散。

在这种情况下，精确解为

$$S(t,x) = \frac{x^2}{2(t+1)}, \quad \partial_x S(t,x) = \frac{x}{t+1} \tag{5.13}$$

，势函数为 $V(x) = 0$。数值结果如图 9所示。

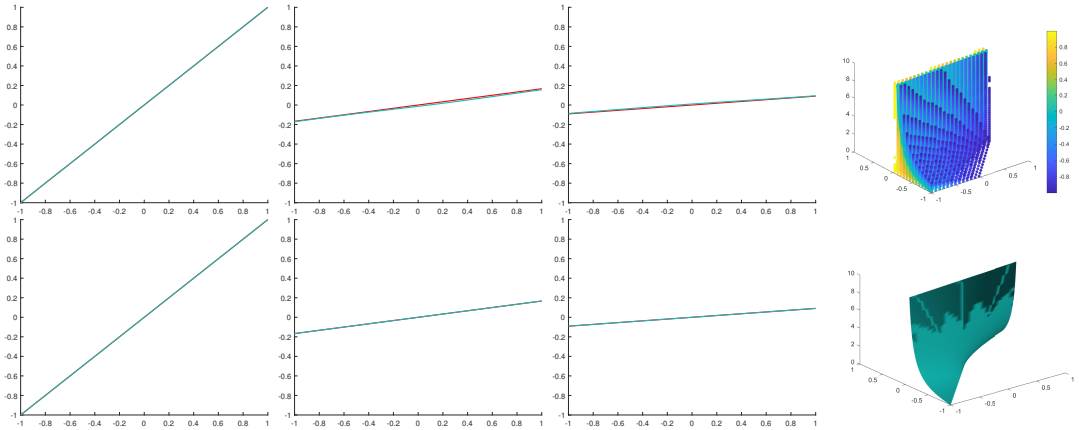

图 9：AG-RaNN 方法在示例 3 的情况 1 中的结果。第 1 至 3 列分别对应 $t = 0$、5、10；第 4 列显示零水平集。顶行和底行分别采用常规配置点和配点集$\Lambda_A(N_A^I = 15933,\ N_A^B = 1119)$ 得到。运行时间：（t_1，t_2）=(0.95，0.76）。

案例 2：点聚焦。

在此情况下，精确解为

$$S(t,x) = \frac{x^2}{2(t-1)}, \quad \partial_x S(t,x) = \frac{x}{t-1} \tag{5.14}$$

且势函数为 $V(x) = 0$。数值结果如图 10所示。

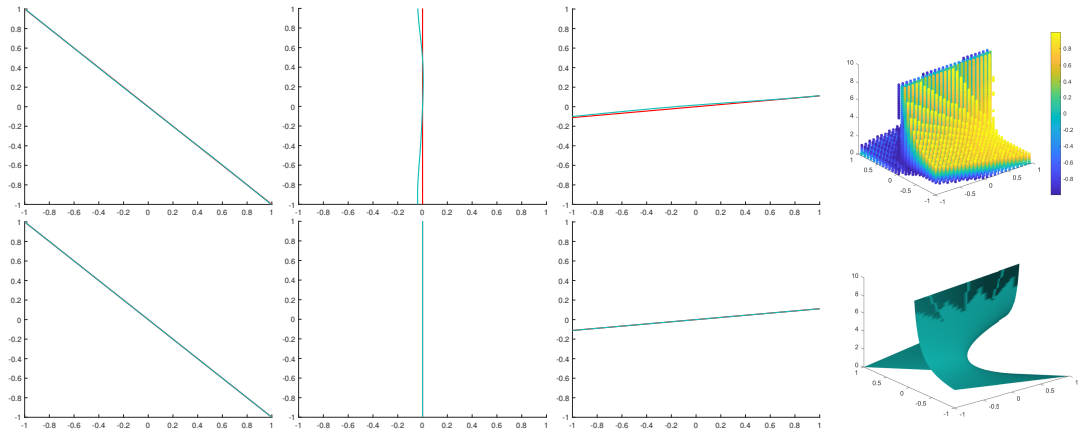

图 10：示例3中案例 2 的 AG-RaNN方法结果。第 1-3 列分别对应 $t = 0$、2、10，第 4 列显示零水平集。上下两行分别由常规配置点和配点集$\Lambda_A (N_A^I = 26942,\ \ N_A^B = 1119)$得到。运行时间：$(t_1,\ \ t_2) = (0.92,\ \ 1.16)$。

案例 3：焦散。

在这种情况下，初始条件为

$$S_0(x) = -\ln(\cosh(x)), \quad \partial_x S_0(x) = -\tanh(x) \tag{5.15}$$

且势函数为 $V(x) = 0$。数值结果见图11。

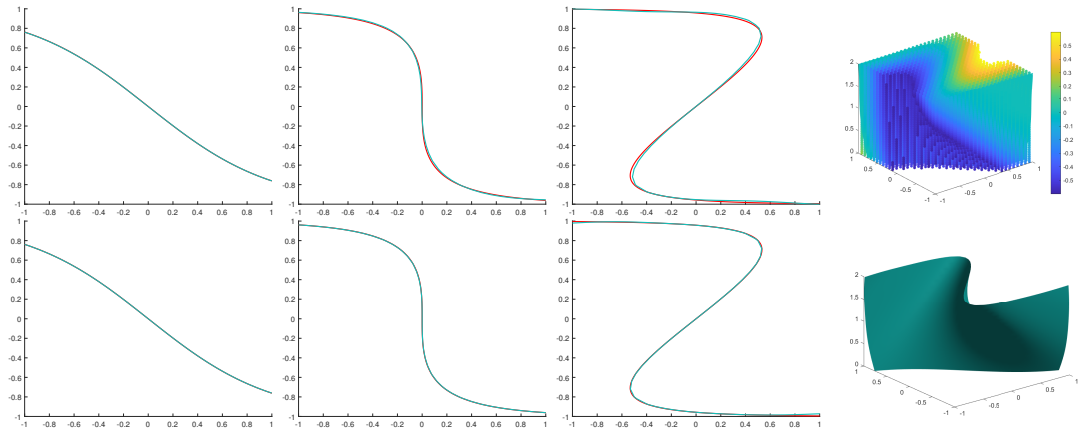

图11：示例3中案例 3 的 AG-RaNN方法结果。第 1-3 列分别对应 $t = 0$、1、2，第 4 列显示零水平集。上下两行分别由常规配置点和配点集$\Lambda_A (N_A^I = 57777,\ \ N_A^B = 765)$得到。运行时间：$(t_1,\ \ t_2) = (0.99,\ \ 2.10)$。

案例4：谐振子。

在此案例中，精确解为

$$S(t,x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)\tan(t) + \frac{x}{\cos(t)}, \quad \partial_x S(t,x) = -x\tan(t) + \frac{1}{\cos(t)} \tag{5.16}$$

，势函数为 $V(x) = x^2/2$。数值结果如图12所示。

原方程 是一个关于时间和空间的二维问题 $S(t,\ \ x)$，它被转换为
一个三维问题
通过引入水平集函数来求解 $\phi(t,\ \ x,\ \ p)$。但我们只能求得 S 的梯度。

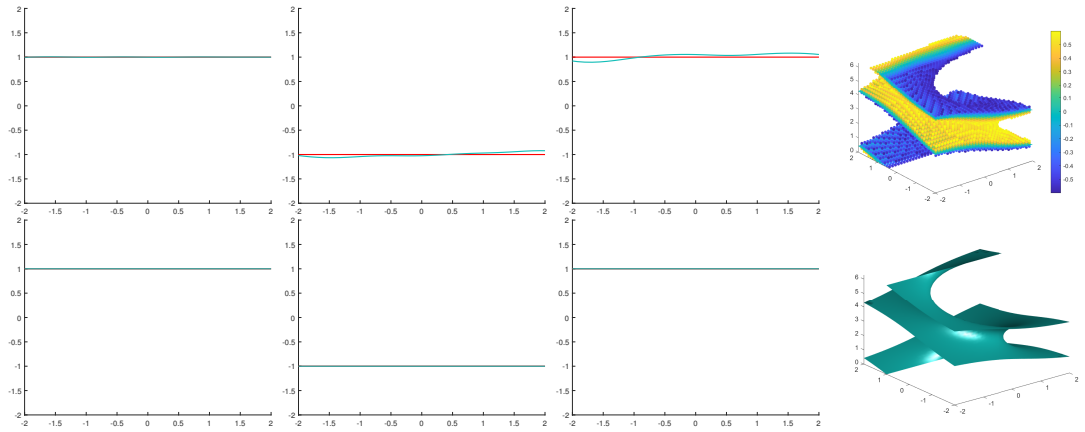

图12：AG-RaNN方法在例3的案例4中的结果。第1至3列分别对应 $t = 0$、 π、 2π，第4列显示零水平集。顶行和底行分别由常规配置点和配点集Λ_A($N_A^I = 28170$、 $N_A^B = 510$)得到。运行时间： （t_1、 t_2） =(0.96， 1.18)。

在所有情况下，初始值都具有良好的光滑性。可以看出，RaNN 方法在这个问题上也有良好的表现。

例4（一维 Hamilton–Jacobi 方程：同时恢复 S 和 $\partial_x S$）在本例中，我们考虑与例3相同的设置，并求解 S 以及 S 的梯度，依据水平集方程(2.13)。各案例的所有参数均列于表4。

	N^I	N^B	E	Var	N	ε_A	T	Ω	$\boldsymbol{r}_1$
情况 1	100000	5000	(0,0,0)	(1.5,1.5,1.5)	21^4	0.5	2	$[-1.5, 1.5]^3$	(3,3,3,3)
案例 2									
案例 3									
案例4	200000	20000		(3,3,3)		1	2π	$[-2.5, 2.5]^3$	(0.3,0.3,0.3,0.3)

表 4：示例中使用的参数 4。

情况 1：无焦散。

在这种情况下，精确解为

$$S(t,x) = \frac{x^2}{2(t+1)} \tag{5.17}$$

，势函数为 $V(x) = 0$。数值结果见图13。

情况 2：点聚焦。

在这种情况下，精确解为

$$S(t,x) = \frac{x^2}{2(t-1)} \tag{5.18}$$

，势函数为 $V(x) = 0$。数值结果见图14。

案例 3：焦散。

在此案例中，初始条件为

$$S_0(x) = -\ln(\cosh(x)) \tag{5.19}$$

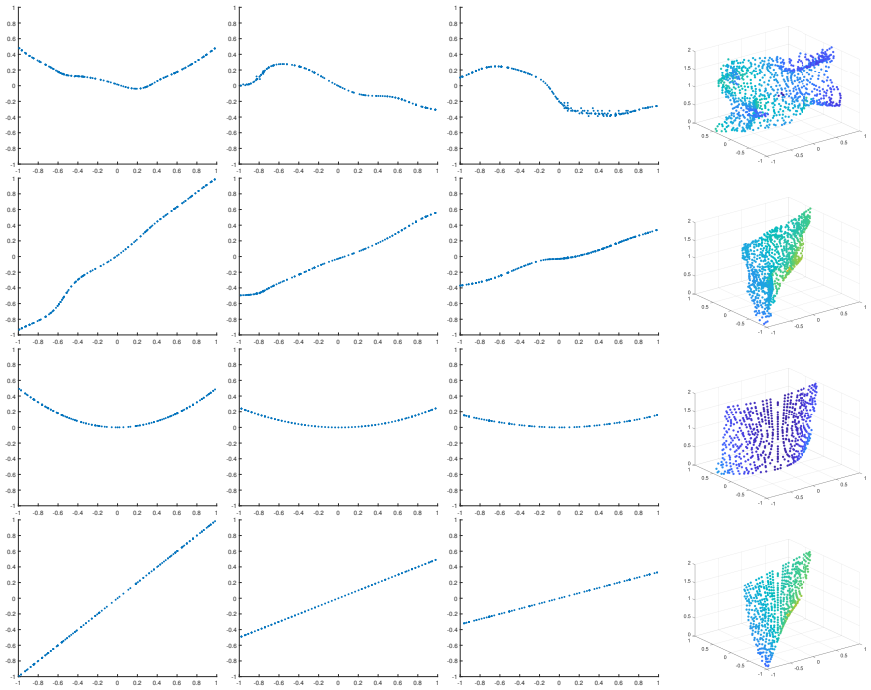

图 13：AG-RaNN方法在示例 4的情况 1 中的结果。第 1–3 列分别显示 S和 $\partial_x S$在 $t = 0$、1、2 时的结果，第 4 列显示零水平集。前两行使用常规配置点，后两行使用配点集 $\Lambda_A(N_A^I = (42014、30178)$， $N_A^B = (2955、2719)$)。运行时间：$(t_1、 t_2) = (3。74、4。82)$。

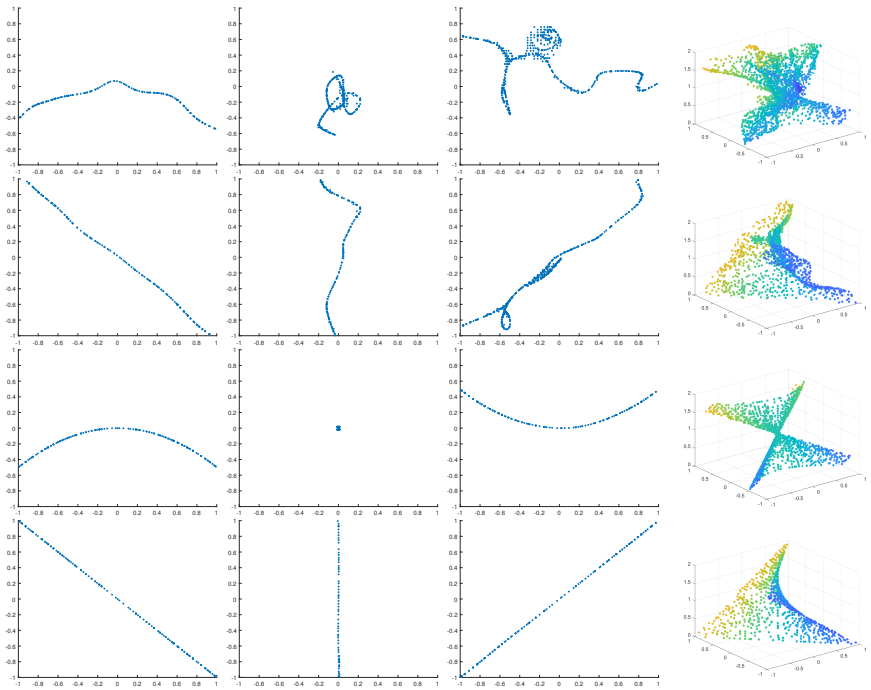

图 14：AG-RaNN方法在示例 4的情况 2 中的结果。第 1–3 列分别显示 S和 $\partial_x S$在 $t = 0$、1、2 时的结果，第 4 列显示零水平集。前两行使用常规配置点，后两行使用配点集 $\Lambda_A(N_A^I = (53139、62047)$， $N_A^B = (2833、2766)$)。运行时间：$(t_1、 t_2) = (3。75、6。18)$。

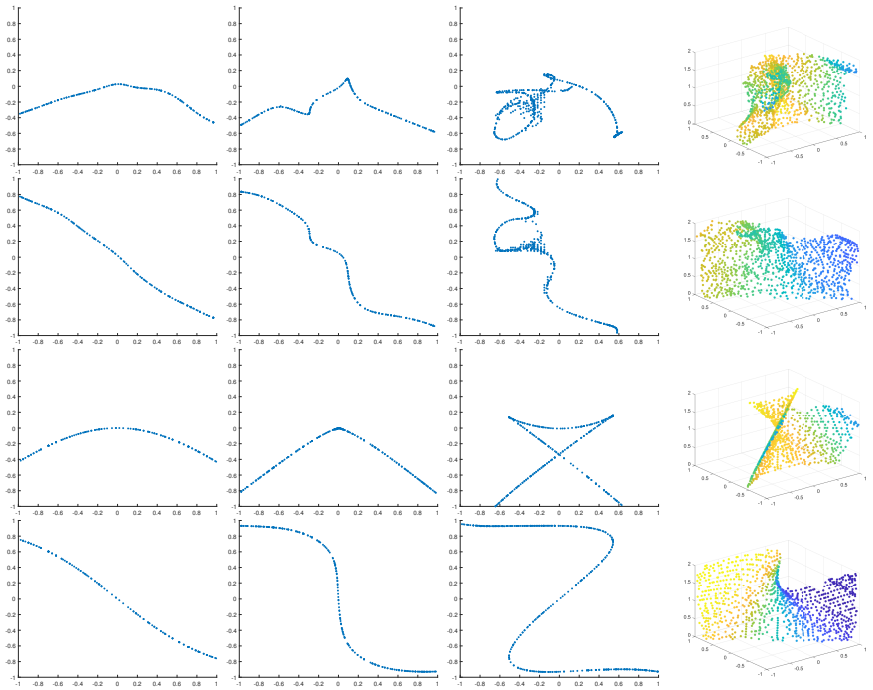

图15：案例 3 的示例 4中 AG-RaNN 方法的结果。第 1 至第 3 列分别显示 S和 $\partial_x S$在 $t=0,\ 1,\ 2$ 处的结果，第 4 列显示零水平集。上方两行使用常规配置点，下方两行使用配点集 Λ_A（$N_A^I=(58433,\ 95927)$，$N_A^B=(2892,\ 2942)$）。运行时间：$(t_1,\ t_2)=(3.77,\ 7.49)$。

且势函数为 $V(x)=0$。数值结果见图 15。

案例4：谐振子。

在此案例中，精确解为

$$S(t,x)=-\frac{1}{2}(x^2+1)\tan(t)+\frac{x}{\cos(t)} \tag{5.20}$$

且势函数为 $V(x)=x^2/2$。数值结果见图 16。

此例与 [29], 相同。为了计算 S 和 S的梯度，我们将原二维问题 $S(t,\ x)$ 转换为四维问题 $\phi_1(t,\ x,\ z,\ p)$ 和 $\phi_2(t,\ x,\ z,\ p)$。零水平集的交集

$$\begin{cases}\phi_1(t,x,z,p)=0\\ \phi_2(t,x,z,p)=0\end{cases}$$

是四维空间中的一个二维曲面。然后我们将其投影到 p 和 z，得到两个曲面$z=S(t,\ x)$（图 13、14、15 和 16的第一行和第三行中的右侧子图）以及 $p=\partial_x S(t,\ x)$（图 13、14、15 和 16的第二行和第四行中的右侧子图）。从数值结果来看，这些结果与算例 3的结果相似，并且都具有良好的数值精度。

例5（二维哈密顿–雅可比方程）最后，我们考虑以下二维 *Hamilton*–雅可比方程：

$$\partial_t S+\frac{1}{2}|\nabla_{\boldsymbol{x}} S|^2=0,\quad (t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \tag{5.21}$$

$$S(0,\boldsymbol{x})=S_0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2. \tag{5.22}$$

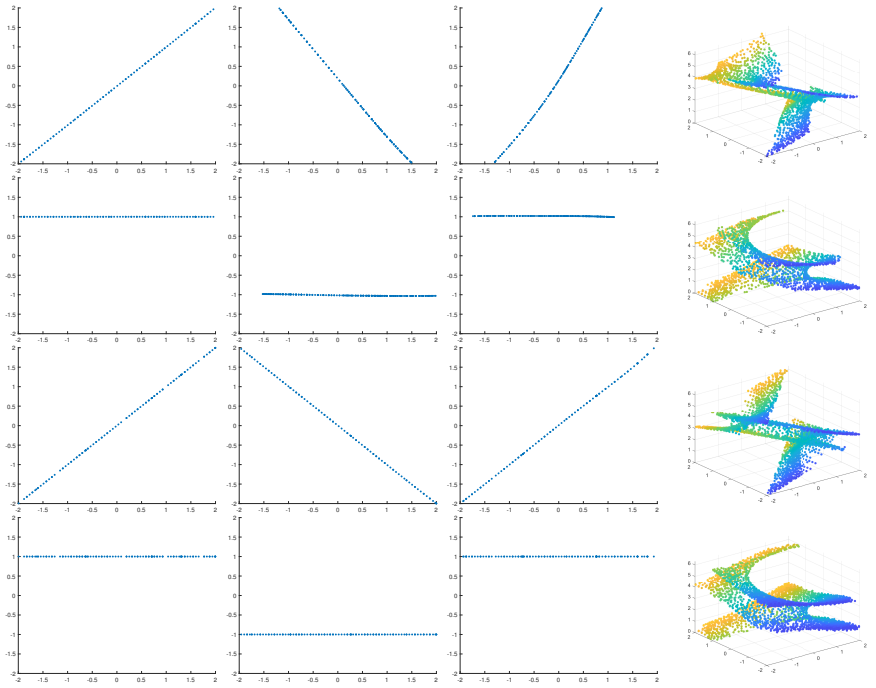

图16：案例4的示例4中 AG-RaNN 方法的结果。4。第1至3列分别显示 S 和 $\partial_x S$ 在 $t=0$、π、2π处的结果，第4列显示零水平集。前两行使用常规配置点，后两行使用配点集 $\Lambda_A(N_A^I=(64218,\ 76954),\ N_A^B=(3264,\ 3485))$。运行时间：$(t_1,\ t_2)=(11.70,\ 6.99)$。

取梯度 $\boldsymbol{v}=\nabla_{\boldsymbol{x}} S$，可得

$$\partial_t \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}=0,\quad (t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{v}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}):=\nabla_{\boldsymbol{x}} S_0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2. \tag{5.24}$$

A根据特征线法，方程（5.23）-（5.24）的解具有如下形式

$$\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}_0\big(\boldsymbol{x}-t\,\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\big), \tag{5.25}$$

这是一个隐式方程。我们对5.25）求解隐式方程（ $\boldsymbol{v}$（t，$\boldsymbol{x}$）。取

$$S_0(\boldsymbol{x})=\frac{0.45}{\pi}(\sin(\pi x_1)-1)(\sin(\pi x_2)-1)\quad\text{and}\quad \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})=\nabla_{\boldsymbol{x}} S_0(\boldsymbol{x}). \tag{5.26}$$

表中列出了每个案例的所有参数5。精确解和数值结果见图17。

N^I	N^B	E	Var	N	ε_A	T	Ω	$\boldsymbol{r}_1$
500000	50000	(0,0,0,0)	(1,1,1,1)	20^5	0.5	1	$[-1.2,1.2]^4$	(2,2,2,2,2)

表5：示例中使用的参数5。

在此示例中，水平集函数定义在五维空间上：$\phi_1(t,\ x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2)$ 和 $\phi_2(t,\ x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2)$。零水平集的交集

$$\begin{cases}\phi_1(t,x_1,x_2,p_1,p_2)=0\\ \phi_2(t,x_1,x_2,p_1,p_2)=0\end{cases}$$

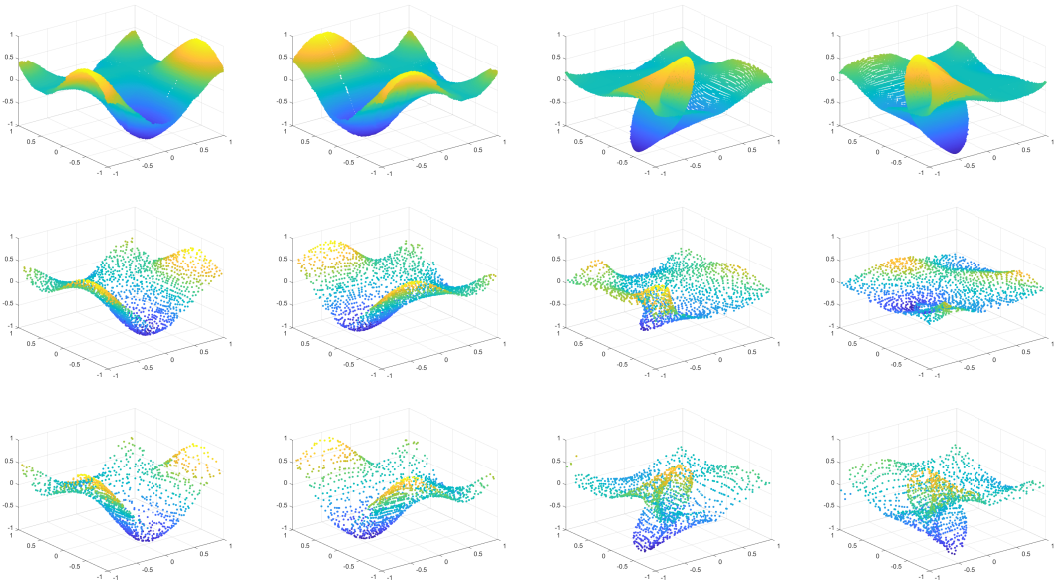

图17：AG-RaNN方法对示例5的结果。前两列展示 $\boldsymbol{v}(t,\ \boldsymbol{x})$在$t=0$处的两个分量，后两列展示这些分量在 $t=1$处的结果。各行（自上而下）依次给出精确解、常规配置点的结果，以及配点集 $\Lambda_A(N_A^I=(1286734,\ 1277793),\ N_A^B=(62291,\ 62637))$ 的结果。

是五维空间中的一个三维超曲面。然后，我们将其投影到 p_2 和 p_1上，得到两个超曲面 $p_1=v_1(t,\ x_1,\ x_2)$ 和 $p_2=v_2(t,\ x_1,\ x_2)$。图 17 仅展示了 $t=0$（前两列）和 $t=1$（后两列）时的曲面。此示例涉及真正的高维增广相空间，并不依赖于对解流形的低维参数化。

6 总结

本文研究非线性一阶偏微分方程多值解流形恢复中的计算挑战，包括Hamilton–Jacobi 方程和标量双曲平衡律。此类解出现于几何光学、地震波、量子动力学的半经典极限以及线性波的高频极限中，并与黏性解有显著区别。主要计算困难在于，奇异性形成之后，解不再是函数，而成为多个分支的并集。我们的方法基于水平集表述，将原始非线性动力学转化为定义在增广相空间中的线性输运方程；该空间将奇异性展开，且演化方程在全部时间上保持全局有效。尽管这一重新表述简化了控制方程，维数的增加仍可能成为计算瓶颈。为缓解这一困难，我们采用随机神经网络，其凸最小二乘训练可实现稳健优化，并能够在高维中进行高效近似。

有两个要素对所提方法的效率与精度至关重要。首先，自适应配置将采样集中于零水平集周围的狭窄管状区域，从而将计算工作聚焦于感兴趣区域。其次，逐层增长策略逐步丰富随机特征空间，从而提高分辨率与精度。针对所得水平集方程，我们建立了相应的误差分析，以支持 RaNN 近似的收敛性。大量数值实验证实了所提方法在捕捉多值结构与不连续性方面的有效性。

致谢

Haoning Dang 与 Fei Wang 感谢国家自然科学基金委员会的资助（项目编号：92470115）。Shi Jin 感谢国家自然科学基金委员会项目（编号 12531016）、上海市科学技术委员会（STCSM）项目（编号 23JC1402300）以及中央高校基本科研业务费的资助。

参考文献

[1] A. R. Barron，S 型函数叠加的通用逼近界，《IEEE 信息论汇刊》39(3) (1993)，930–945。[2] A. R. Barron，人工神经网络的近似与估计界，《机器学习》14(1) (1994)，115–133。[3] Y. Brenier，标量守恒律的平均多值解，《SIAM 数值分析杂志》21(6) (1984)，1013–1037。[4] J. Chen、X. Chi、W. E 和 Z. Yang，连接求解偏微分方程的传统算法与基于机器学习的算法：随机特征方法，《机器学习杂志》1(3) (2022)，268–298。[5] J. Chen、W. E 和 Y. Sun，高精度 regime 下随机特征方法的优化，《应用数学与计算通讯》6(2) (2024)，1490–1517。[6] D. Hilbert 和 R. Courant，《数学物理方法：第 1 卷》，John Wiley & Sons，2008。[7] M. G. Crandall 和 P. L. Lions，Hamilton–Jacobi 方程的黏性解，《美国数学学会汇刊》277(1) (1983)，1–42。[8] G. Cybenko，S 型函数的叠加逼近，《数学、控制与信号系统》2(4) (1989)，303–314。[9] H. Dang 和 F. Wang，结合混合不连续 Petrov-Galerkin 方法的 Stokes-Darcy 流局部随机神经网络，《流体物理学》36(8) (2024)，087138。[10] H. Dang、F. Wang 和 S. Jiang，偏微分方程的自适应增长随机神经网络：算法与数值分析，arXiv:2408.17225v3。[11] S. Dong 和 Z. Li，局部极限学习机与区域分解：求解线性与非线性偏微分方程，《计算方法与应用力学及工程》387 (2021)，114129。[12] S. Dong 和 Y. Wang，利用随机权重神经网络计算参数偏微分方程逆问题的方法，《计算物理学杂志》489 (2023)，112263。[13] W. E 和 B. Yu，深度 Ritz 方法：一种基于深度学习的变分问题数值算法，《数学与统计通讯》6(1) (2018)，1–12。[14] W. E 和 S. Wojtowytsch，Barron 函数的表示公式与逐点性质，《变分法与偏微分方程》61(2) (2022)，46。[15] B. Engquist 和 O. Runborg，几何光学中的多相计算，《计算与应用数学杂志》74 (1-2) (1996)，175–192。[16] L. C. Evans，《偏微分方程》，第 2 版，美国数学会，2022。[17] S. Fomel 和 J. A. Sethian，多重到达波的快速相空间计算，《美国国家科学院院刊》99 (11) (2002)，7329–7334。

[18] G. H. Golub 和 C. F. Van Loan，《矩阵计算》，第 4 版，宾夕法尼亚州费城：约翰斯·霍普金斯大学出版社，2013。[19] J. He、T. Mao 和 J. Xu，具有 ReLU^{k}激活函数的深度神经网络的表达能力与近似性质，arXiv:2312.16483。[20] J. W. Jang、J. Y. Lee、L. Liu、Z. Zhu，基于深度学习的矩闭合：薛定谔方程半经典极限的多相计算，arXiv:2504.08341。¨Y. Jiao、Y. Lai、X. Lu、F. Wang、J. Yang 和 Y. Yang，具有 ReLU-正弦-指数激活函数的深度神经网络打破 Hölder 类近似中的维数灾难，《SIAM 数学分析杂志》55(4) (2023)，3635–3649。[21] Y. Jiao、R. Li、P. Wu、J. Yang 和 P. Zhang，重新审视深度 Ritz 方法：完整的误差分析，《机器学习研究杂志》26(115) (2025)，1–76。¨S. Jin 和 X. Li，薛定谔方程半经典极限的多相计算及相关问题：Whitham 与 Wigner，《物理学 D》182 (1-2) (2003)，46–85。[22] S. Jin 和 S. Osher，一种计算拟线性双曲型偏微分方程及 Hamilton–Jacobi 方程多值解的水平集方法，《数学科学通讯》1(3) (2003)，575–591。[23] P. D. Lax，《双曲型守恒律系统与激波的数学理论》，SIAM，1973。¨Y. Li 和 F. Wang，用于界面问题的有限差分方法与局部随机神经网络，《计算物理学杂志》529 (2025)，113847。[24] Y. Liao 和 P. Ming，深度 Nitsche 方法：带本质边界条件的深度 Ritz 方法，《计算物理通讯》29(5) (2021)，1365–1384。[25] Y. Liao 和 P. Ming，深度神经网络近似的谱 Barron 空间，《SIAM 数学与数据科学杂志》7(3) (2025)，1053–1076。[26] H. Liu、L. Cheng 和 S. Osher，一种捕捉非线性一阶方程多值解的水平集框架，《科学计算杂志》29 (2006)，353–373。[27] X. Liu、T. Mao 和 J. Xu，通过 ReLU[28] 激活函数表示 Sobolev 空间以及线性化网络的最优误差估计，arXiv:2505.00351，2025。[29] V. P. Maslov 和 M. V. Fedoriuk，《量子力学中的半经典近似》，Springer Science & Business Media，2001。[30] Y. Meng 和 P. Ming，源自 Barron 类的新函数空间及其在神经网络近似中的应用，《计算物理通讯》32(5) (2023)，1361–1400。^{k} D. Peng、B. Merriman、S. Osher、H. Zhao 和 M. Kang，一种基于偏微分方程的快速局部水平集方法，《计算物理学杂志》155(2) (1999)，410–438。[31] M. Raissi、P. Perdikaris 和 G. E. Karniadakis，物理信息神经网络：求解涉及非线性偏微分方程的正问题与反问题的深度学习框架，《计算物理学杂志》378 (2019)，686–707。[32] Y. Shang、A. Heinlein、S. Mishra 和 F. Wang，用于区域分解随机神经网络的重叠 Schwarz 预条件子，《计算方法与应用力学及工程》442 (2025)，118011。[33] Y. Shang、F. Wang 和 J. Sun，结合 Petrov-Galerkin 方法求解线性与非线性偏微分方程的随机神经网络，《非线性科学与数值模拟通讯》127 (2023)，107518。

[37] Y. Shang 和 F. Wang，采用 Petrov-Galerkin 方法求解线弹性和 Navier-Stokes 方程的随机神经网络，*J. Eng. Mech.*，**150**（2024），04024010。[38] J. Sirignano 和 K. Spiliopoulos，深度 Galerkin 方法：一种求解偏微分方程的深度学习算法，*J.Comput. Phys.***375**（2018），1339–1364。[39] C. Sparber、P.A. Markowich 和 N. Mauser，多值几何光学中的 Wigner 函数与 WKB 方法，*Asymptot. Anal.***33**（2）（2003），153–187。[40] J. Sun、S. Dong 和 F. Wang，用于偏微分方程的局部随机神经网络与间断 Galerkin 方法，*J. Comput. Appl. Math.*，**445**，（2024），115830。[41] J. Sun 和 F. Wang，用于扩散-黏性波动方程的局部随机神经网络与间断 Galerkin 方法，*Comput. Math. Appl.***154**（2024），128–137。[42] J. Sun 和 F. Wang，用于 KdV 型方程和 Burgers 方程的局部随机神经网络与间断 Galerkin 方法，*Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **150**（2025），108957。[43] J. A. Tropp，随机矩阵之和的用户友好尾界，*Found. Comput. Math.* **12**（4）（2012），389–434。[44] J. Xu，有限神经元方法与收敛性分析，*Commun. Comput. Phys.* **28**（5）（2020），1707–1745。[45] Y. Zang、G. Bao、X. Ye 和 H. Zhou，用于高维偏微分方程的弱对抗网络，*J. Comput. Phys.***411**（14）（2020），109409。