arXiv:2603.01102v1 [physics.flu-dyn] 1 Mar 2026

用于不可压缩磁流体动力学方程的保结构随机神经网络

Yunlong Li[1], Fei Wang[2], Lingxiao Li[3]

摘要：不可压缩磁流体动力学（MHD）方程在许多科学和工程应用中都具有基础性作用。然而，其强非线性和双重无散约束使传统数值求解器难以应对。为克服这些困难，我们提出了一种保结构随机神经网络（SP-RaNN），能够自动且精确地满足无散条件。与依赖昂贵的非线性非凸优化的深度神经网络（DNN）方法不同，SP-RaNN 将训练过程重新表述为线性最小二乘系统，从而消除了非凸优化。该方法通过皮卡德迭代或牛顿迭代将控制方程线性化，使用有限差分格式在区域内部的配点处及边界上对方程离散化，并通过线性最小二乘过程求解由此得到的线性方程组。
SP-RaNN 从设计上在统一的时空框架内保留方程固有的数学结构，从而确保稳定性和精度。针对 Navier–Stokes、Maxwell 和 MHD 方程的数值实验表明，与传统数值方法和基于 DNN 的方法相比，SP-RaNN 精度更高、收敛更快，并能精确施加无散约束。这一保结构框架为求解复杂偏微分方程组提供了一种高效可靠的工具，同时严格维持其内在物理定律。

关键词： 磁流体动力学、保结构、随机神经网络、时空方法、无散。

数学主题分类。65M06, 68T07,41A46

1 引言

磁流体动力学（MHD）方程描述导电流体与电磁场之间的动态相互作用，在科学和工程领域有着广泛应用，例如冶金工艺、磁约束聚变和液态金属泵（[8, 15, 28, 37]）。MHD 是一个复杂的多物理场系统，其中导电流体的运动会产生电流，而电流又会改变周围的电磁场。电流

[1]西安交通大学数学与统计学院，中国陕西省西安市，邮编 710049。电子邮箱：4122107033@stu.xjtu.edu.cn[2]西安交通大学数学与统计学院及电力工程多相流国家重点实验室，中国陕西省西安市，邮编 710049。该作者的工作部分得到国家自然科学基金委员会重大研究计划（项目编号：92470115）和国家自然科学基金委员会天元数学基金（项目编号：12426105）资助。电子邮箱：feiwang.xjtu@xjtu.edu.cn[3]河南大学数学与统计学院，中国河南省开封市，邮编 475004。河南大学河南省应用数学中心，中国河南省郑州市，邮编 450046。该作者的工作部分得到国家自然科学基金委员会（项目编号：11901042）资助。电子邮箱：lilingxiao@lsec.cc.ac.cn

与磁场相互作用产生洛伦兹力，推动流体沿着同时垂直于电流和磁场的方向运动。

本文聚焦于不可压缩磁流体动力学问题，其特征是由 Navier–Stokes 方程和麦克斯韦方程构成的耦合系统。针对不可压缩MHD方程的有限元方法（FEM）已开展了大量研究。 [14, 17, 42, 53, 54] 等研究聚焦于稳态模型，而另一些研究（[11, 13, 52]）则探讨非稳态模型。不可压缩MHD方程对速度场和磁场施加了两个基本的无散度约束，分别对应质量守恒和磁通量守恒。确保这些约束得到精确满足，对于避免数值方法中的不稳定性至关重要（[29, 31, 35, 36, 49]）。已有研究提出了多种无散有限元技术，分别适用于不可压流（[4, 51]）、麦克斯韦方程（[5, 26]）和不可压缩MHD方程（[20, 22, 23, 32, 54]）。

近年来，神经网络（NN）凭借其通用逼近能力（[1, 3]），已成为求解偏微分方程（PDEs）的强大工具。人们开发了多种基于神经网络的方法，包括深度 Ritz 方法（[12]）、深度 Galerkin 方法（[45]）和物理信息神经网络（[41]）。基于神经网络的方法的总误差通常由逼近误差、统计误差和优化误差构成，其中优化误差是主要因素。由于神经网络的训练涉及求解非凸非线性优化问题，这一过程可能计算成本高昂，且容易陷入局部极小值，从而限制了当前基于神经网络的方法相较于传统数值方法的精度和效率。

随机神经网络（RaNN）是神经网络的一个子类，其训练过程中仅调整最后一个隐藏层与输出层之间的权重，从而将问题转化为线性最小二乘优化（[24, 25, 39]）。这既降低了优化误差，又保持了有竞争力的逼近精度。文献[27, 38] 及其他参考文献对 RaNN 的逼近能力进行了深入研究。近期研究表明，RaNN 在求解偏微分方程方面颇具潜力。例如，Dong 等人通过区域分解增强了极限学习机（一种 RaNN）的逼近能力，并在共享边界上施加连续性条件（[9, 10]）；Chen 等人则将这一方法扩展至重叠区域分解（[2]）。Shang、Wang 和 Sun 将 RaNN 与 Petrov-Galerkin 方法结合，用于求解线性和非线性偏微分方程（[43, 44]）；Sun、Dong 和 Wang 则采用间断伽辽金（DG）格式耦合局部 RaNN，以提升逼近质量（[47, 48]）。Dang 和 Wang 将 RaNN 与混合间断 Petrov-Galerkin 方法结合，用于求解 Stokes-Darcy 问题（[6]）；Li 和 Wang 则将 RaNN 融入界面问题的有限差分法，通过界面条件耦合局部 RaNN（[34]）。这些研究凸显了 RaNN 的高效性：它能以较低的计算成本实现高精度，因此尤其适用于时变问题和高维问题。

本文提出一种新颖的基于RaNN的方法来求解MHD方程，并提供一种自动满足无散条件的策略，体现了磁通量守恒这一基本物理定律

现有的基于神经网络的方法（[30, 44]）通常在离散点上强制满足这些条件，因此精度不足。我们提出的方法利用随机神经网络的性质，确保精确、自动地满足无散条件。我们将这种方法称为结构保持随机神经网络（SP-RaNN）。其核心思想是利用等价条件构造无散度基函数，使RaNN凭借其函数空间的性质天然满足无散度约束。

鉴于MHD方程的非线性特性，存在两种常见方法来应对这一复杂性：

训练过程中的非线性最小二乘计算（[9]），或通过非线性迭代将方程线性化（[43]）。本文采用后一种方法。SP-RaNN提高了精度，降低了计算成本，并在高雷诺数情形下表现有效。该方法被用于求解Navier-Stokes方程、Maxwell方程和MHD方程，并通过与传统神经网络方法和有限元方法的比较，展示了其鲁棒性和效率。

本文结构如下：第 2 节介绍纳维–斯托克斯方程、麦克斯韦方程和不可压 MHD方程。第 3 节介绍随机神经网络（RaNN），并展示如何构造无散随机神经网络。第 4 节介绍用于求解 MHD方程的 SP-RaNN。第 5 节给出斯托克斯方程、纳维–斯托克斯方程、麦克斯韦方程和 MHD方程的数值结果，展示该方法的准确性和鲁棒性。最后，我们总结全文并展望未来的研究方向。

2 不可压磁流体动力学方程

本节介绍本研究所考虑的方程。

不可压磁流体动力学（MHD）方程描述了纳维–斯托克斯（NS）方程与麦克斯韦方程之间的耦合。首先，我们介绍非定常纳维–斯托克斯方程如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u} &= \mathbf{f}, & \text{in } \Omega\times I, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0, & \text{in } \Omega\times I, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}_D, & \text{on } \Gamma_D\times I, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{g}_N, & \text{on } \Gamma_N\times I, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0, & \text{on } \Omega\times\{0\}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，Ω 为空间区域， I 为时间区间，$\mathbf{f}$ 为外力， t、$\mathbf{u}$和 p 分别表示无量纲时间、速度和压力。这里，Re 表示雷诺数。式（2.1）中的前两个方程分别对应动量守恒和质量守恒。无散条件 $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ 对于确保不可压缩纳维–斯托克斯模拟中的质量守恒、物理一致性和数值稳定性至关重要。违反这一条件可能导致非物理流动模式、压力伪影和不稳定性。有效施加 $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ 是求解不可压缩流动问题时实现鲁棒且准确的数值方法的基石。

接下来，我们考察理想导电条件下简单均匀介质中的麦克斯韦方程：

$$\begin{cases} \mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\nabla\times\mathbf{E}, & \text{in } \Omega\times I, \\ \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla\times\mathbf{H}, & \text{in } \Omega\times I, \\ \nabla\cdot\mathbf{H} &= 0, & \text{in } \Omega\times I, \\ \mathbf{n}\times\mathbf{E} &= 0, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega\times I, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0, & \text{on } \Omega\times\{0\}, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中$\mathbf{H}$ 表示磁场，$\mathbf{E}$ 表示电场， μ 为磁导率， ϵ表示电介电常数。式(2.2)中的前三个方程分别对应于法拉第电磁感应定律、安培′–麦克斯韦定律和磁场高斯定律。无散条件 $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$体现了磁通量守恒这一基本物理原理，表明磁力线既不在介质内部起始，也不在介质内部终止——它们要么形成闭合回路，要么延伸至无穷远。该条件对于准确刻画麦克斯韦方程的物理与数学特性至关重要。确保 $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$ 对于维持稳定性、物理真实性以及

数值模拟中的可靠性至关重要，从而使其成为求解麦克斯韦方程的任何稳健计算框架的基础要素。

最后，我们给出非定常MHD方程：

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u}-\frac{1}{\mu}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} &=& \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega\times I,\\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+\frac{1}{\sigma\mu}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})-\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) &=& \mathbf{g}, \quad \text{in } \Omega\times I,\\ \nabla\cdot\mathbf{u}=0, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} &=& 0, \quad \text{in } \Omega\times I,\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_D, \quad \mathbf{B}\times\mathbf{n} &=& \mathbf{B}_D, \quad \text{on } \partial\Omega\times I,\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{B} &=& \mathbf{B}_0, \quad \text{on } \Omega\times\{0\}, \end{array}\right. \tag{2.3}$$

在该系统中，$\mathbf{u}$是速度向量， p 是压力，$\mathbf{B}$表示磁场， μ是磁导率， σ 是电导率。前两个方程表示流体流动与磁场之间的相互作用，而第三和第四个方程分别描述质量守恒和磁通量守恒。

3 保结构随机神经网络方法

3.1 随机神经网络

首先，我们介绍深度为D的全连接神经网络 Ψ： $\mathbb{R}^{n_0}\to\mathbb{R}^{n_D}$ （见图1(a)）。每一层的宽度记为 n_l，其中 $l=0$，.....， D。该网络定义如下：

$$\begin{aligned} &\Psi_0(\mathbf{x})=\mathbf{x},\\ &\Psi_k(\mathbf{x})=\rho(W_k\Psi_{k-1}+b_k), \quad k=1,...,D-1,\\ &\Psi=\Psi_D=W_D\Psi_{D-1}, \end{aligned}$$

其中 ρ 是激活函数， $W_k\in\mathbb{R}^{n_k\times n_{k-1}}$ 和 $b_k\in\mathbb{R}^{n_k}$ 是第 k层的权重和偏置，通过训练确定。

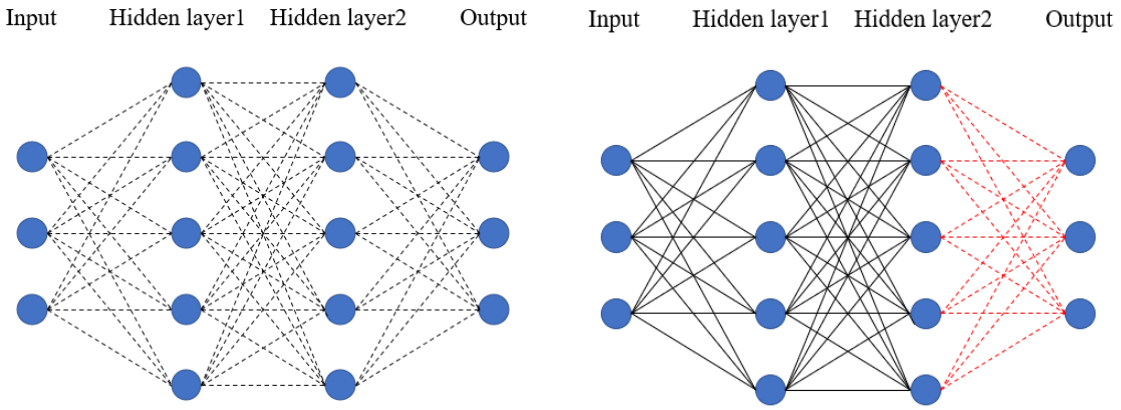
在随机神经网络（RaNN）中，权重 $W_1,\ldots,W_{D-1}$和偏置 $b_1,\ldots,b_{D-1}$是随机生成且固定的。只有最后一个隐藏层与输出层之间的权重 W_D 会被调整，从而得到 RaNN（图 1(b)），记作 $\mathbf{u}_\rho$。第 $(D-1)$ 层中的神经元 $\{\psi_1,\ldots,\psi_{n_{D-1}}\}$ 构成一组基函数，即 $u_\rho\in\mathcal{N}_\rho^D:=\mathrm{span}\{\psi_1,\ldots,\psi_{n_{D-1}}\}$，其中 u_ρ 是 $\mathbf{u}_\rho$的一个分量。假设$\mathbf{u}_\rho=(u_\rho^1,u_\rho^2,u_\rho^3)^{\mathrm{T}}$，即 $n_D=3$，则各分量可表示为基函数的线性组合：

$$u_\rho^1=\sum_{i=1}^{n_{D-1}}\alpha_i\psi_i, \quad u_\rho^2=\sum_{i=1}^{n_{D-1}}\beta_i\psi_i, \quad u_\rho^3=\sum_{i=1}^{n_{D-1}}\gamma_i\psi_i. \tag{3.4}$$

因此，训练 RaNN 需要确定 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n_{D-1}},\{\beta_i\}_{i=1}^{n_{D-1}}$ 和 $\{\gamma_i\}_{i=1}^{n_{D-1}}$ 的值，这可以通过线性优化问题求解，而不必进行非凸的非线性优化。最小二乘法是解决这一问题的有效方法。

3.2 保结构随机神经网络

在 [31], 中总结了函数“无散”的多种解释，并按从强到弱的顺序排列：逐点无散、弱无散和离散无散。在本研究中，我们开发了一种保结构随机神经网络（SP-RaNN），以实现逐点



(a) 全连接神经网络　　(b) 随机神经网络

图 1：双隐藏层神经网络的结构：虚线表示可调节的权重和偏置，实线表示随机给定且固定的权重和偏置。

无散解。其关键创新在于构造无散神经网络基函数，使网络无需额外约束或修正便能天然满足逐点无散条件。通过保留这一重要结构，SP-RaNN 为求解无散条件至关重要的问题提供了数学上自洽且物理上准确的框架。

为构造无散神经网络，我们回顾以下结果。

引理 3.1 ([40]) 在单连通区域中，对于向量值函数 $\mathbf{u}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，有如下结论：

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \iff \exists\ \boldsymbol{\Psi}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\ s.t.\ \mathbf{u}=\nabla\times\boldsymbol{\Psi}. \tag{3.5}$$

对于二维情形，$\mathbf{u}$: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，我们有类似的结论：

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \iff \exists\ \psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ s.t.\ \mathbf{u}=\mathrm{curl}\psi. \tag{3.6}$$

其中

$$\mathrm{curl}\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}.$$

利用这些结果，我们构造 SP-RaNN。给定任意向量值函数 $\boldsymbol{\Psi}(x,y,z)=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$，由 (3.5) 可知，$\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$ 是无散的，其中

$$\phi_1(\mathbf{x})=\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z},\quad \phi_2(\mathbf{x})=\frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x},\quad \phi_3(\mathbf{x})=\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}.$$

考虑一个神经网络，其中 $\psi_i=\psi_i(w_{i1}x+w_{i2}y+w_{i3}z+b_i)=\psi_i(h_i(\mathbf{x}))$ 对于 $i=1,2,3$。于是我们有

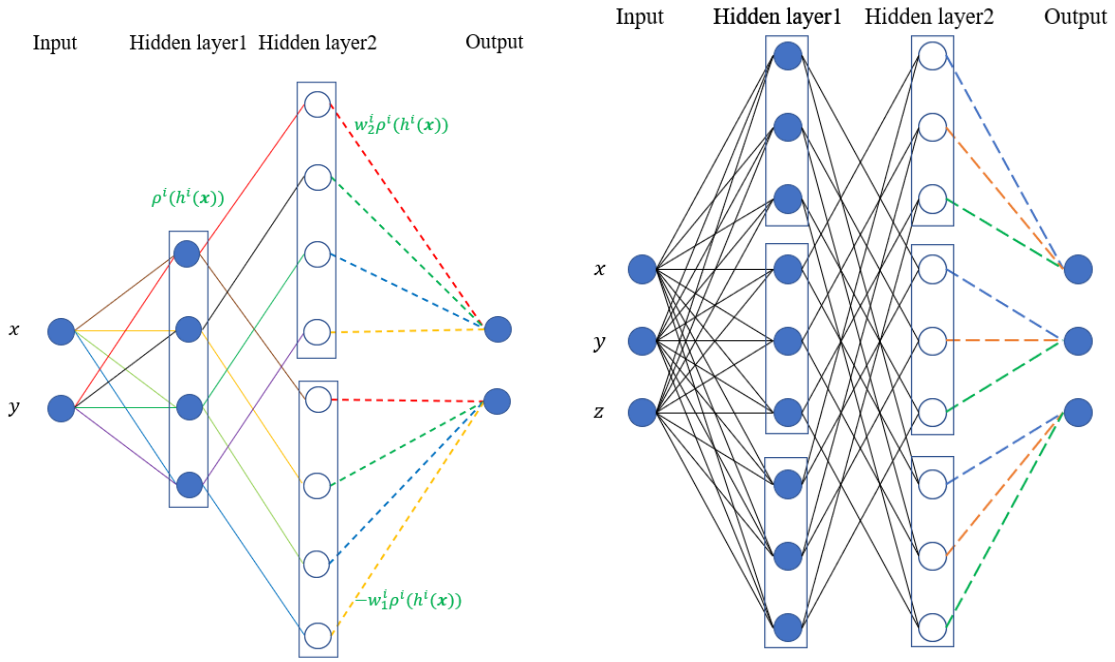
$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{x})&=w_{32}\psi_3'(h_3(\mathbf{x}))-w_{23}\psi_2'(h_2(\mathbf{x})),\\ \phi_2(\mathbf{x})&=w_{13}\psi_1'(h_1(\mathbf{x}))-w_{31}\psi_3'(h_3(\mathbf{x})),\\ \phi_3(\mathbf{x})&=w_{21}\psi_2'(h_2(\mathbf{x}))-w_{12}\psi_1'(h_1(\mathbf{x})).\end{aligned} \tag{3.7}$$

通过选择 $\psi_i' = \rho_i$，RaNN 函数

$$\mathbf{u}_\rho = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{\phi}^j$$

是无散的，其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\phi}^j = (\phi_1^j, \phi_2^j, \phi_3^j)^T, \\
&\phi_1^j(\mathbf{x}) = w_{32}^j \rho_3^j(h_3^j(\mathbf{x})) - w_{23}^j \rho_2^j(h_2^j(\mathbf{x})), \\
&\phi_2^j(\mathbf{x}) = w_{13}^j \rho_1^j(h_1^j(\mathbf{x})) - w_{31}^j \rho_3^j(h_3^j(\mathbf{x})), \\
&\phi_3^j(\mathbf{x}) = w_{21}^j \rho_2^j(h_2^j(\mathbf{x})) - w_{12}^j \rho_1^j(h_1^j(\mathbf{x})), \\
&h_i^j(\mathbf{x}) = w_{i1}^j x + w_{i2}^j y + w_{i3}^j z + b_i, \quad \text{for } j = 1, \cdots, m.
\end{aligned}$$



(a) 二维无散 RaNN　　(b) 三维无散 RaNN

图 2：双隐藏层神经网络的结构：虚线表示可调权重和偏置，实线表示随机初始化并固定的权重和偏置。

对于二维情形，给定任意标量值函数 $\psi(x, y)$，向量 $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_1, \phi_2)$ 是无散的，其中

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \ \phi_2(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

考虑一个具有 $\psi = \psi(w_1 x + w_2 y + b) = \psi(h(\mathbf{x}))$ 的神经网络，我们得到

$$\begin{aligned}
&\phi_1(\mathbf{x}) = w_2 \psi'(h(\mathbf{x})), \\
&\phi_2(\mathbf{x}) = -w_1 \psi'(h(\mathbf{x})).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

类似地，通过选择 $\psi' = \rho$，RaNN 函数

$$\mathbf{u}_\rho = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \boldsymbol{\phi}^j$$

是无散的，其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\phi}^j = (\phi_1^j, \phi_2^j)^T, \\
&\phi_1^j(\mathbf{x}) = w_2^j \rho^j(h^j(\mathbf{x})), \\
&\phi_2^j(\mathbf{x}) = -w_1^j \rho^j(h^j(\mathbf{x})), \\
&h^j(\mathbf{x}) = w_1^j x + w_2^j y + b_i, \quad \text{for } j = 1, \cdots, m.
\end{aligned}$$

二维和三维无散 RaNN 的结构如图 2 所示。输入层与隐藏层1之间的权重是随机选取并固定的，而隐藏层1与隐藏层2之间的权重则相应确定。在图 2 (a) 中，相应的权重（颜色相同的实线）相等。图 2 (b) 中也如此，不过为清晰起见省略了一些细节。第二个隐藏层中的偏置为零，且该层中的激活函数为恒等映射。连接第二个隐藏层与输出层的权重可通过最小二乘法确定，颜色相同的虚线表示权重相等。

注1 此前，我们假设二维和三维情况下输入层中的神经元数量分别为 *2* 和 *3*。然而，对于时变问题，该数量可能分别增加到 *3* 和 *4*。由于无散性质与时间无关，构造 *SP-RaNN* 结构的策略仍然适用。

注2 在数值实验中，对于三维情形，我们选择所有 ρ_i^j 为同一个函数；对于二维情形，选择所有 ρ^j 相同。如果已知解的某些特征，则可以选择不同的 ρ_i^j 或 ρ^j，以更好地逼近该解。

4 SP-RaNN用于MHD方程

本节展示如何应用 SP-RaNN方法求解三维 MHD方程。首先，我们使用非线性迭代方法对方程 (2.3) 进行线性化。本文重点介绍皮卡德和牛顿迭代方法，其形式如下:

$$\begin{cases}
\frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{B}^{n+1}) \times \mathbf{B}^n = \mathbf{f}, \\
\frac{\partial \mathbf{B}^{n+1}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma\mu}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}^{n+1}) - \left(\mathbf{u}^n(\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1}) - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^n(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) + (\mathbf{B}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1}\right) = \mathbf{g}, \\
\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \ \nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = 0, \\
\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_D, \ \mathbf{B}^{n+1} \times \mathbf{n} = \mathbf{B}_D, \qquad \text{on } \partial\Omega \times I, \\
\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_0, \ \mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}_0, \qquad \text{on } \Omega \times \{0\}.
\end{cases} \tag{4.9}$$

$$
\begin{cases}
\frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial t} + ((\mathbf{u}^{n+1}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n} + (\mathbf{u}^{n}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n+1}) + \nabla p^{n+1} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{\mu}((\nabla\times\mathbf{B}^{n+1})\times\mathbf{B}^{n} \\
\qquad +(\nabla\times\mathbf{B}^{n})\times\mathbf{B}^{n+1}) = \mathbf{f} + (\mathbf{u}^{n}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n} - \frac{1}{\mu}(\nabla\times\mathbf{B}^{n})\times\mathbf{B}^{n}, \\
\frac{\partial \mathbf{B}^{n+1}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma\mu}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}^{n+1}) - \big((\mathbf{u}^{n}(\nabla\cdot\mathbf{B}^{n+1}) + \mathbf{u}^{n+1}(\nabla\cdot\mathbf{B}^{n})\big) - \big((\mathbf{u}^{n+1}\cdot\nabla)\mathbf{B}^{n} + (\mathbf{u}^{n}\cdot\nabla)\mathbf{B}^{n+1}\big) \\
\qquad -(\mathbf{B}^{n}(\nabla\cdot\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{B}^{n+1}(\nabla\cdot\mathbf{u}^{n})) + \big((\mathbf{B}^{n+1}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n} + (\mathbf{B}^{n}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n+1})\big) \\
\qquad = \mathbf{g} - (\mathbf{u}^{n}(\nabla\cdot\mathbf{B}^{n}) - (\mathbf{u}^{n}\cdot\nabla)\mathbf{B}^{n} - \mathbf{B}^{n}(\nabla\cdot\mathbf{u}^{n}) + (\mathbf{B}^{n}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n}), \\
\nabla\cdot\mathbf{u}^{n+1} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{B}^{n+1} = 0, \\
\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_{D},\ \mathbf{B}^{n+1}\times\mathbf{n} = \mathbf{B}_{D}, \qquad \text{on } \partial\Omega\times I, \\
\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_{0},\ \mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}_{0}, \qquad \text{on } \Omega\times\{0\}.
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

在实施 RaNN 方法时，我们采用时空方法，将时间变量和空间变量同等对待。这样无需进行时间步进迭代，并可减少误差累积。在时空区域中，初始条件被视为边界条件。我们分别使用两个 SP-RaNN 来近似 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{B}$，并使用另一个 RaNN 来近似 p。为简单起见，我们假设所有网络具有相同数量的基函数。根据第 3.2 节的推导，我们定义：

$$
\mathbf{u}_{\rho} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}^{u}\boldsymbol{\phi}_{i}^{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}_{\rho} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}^{B}\boldsymbol{\phi}_{i}^{B}(\mathbf{x}), \quad p_{\rho} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}^{p}\phi_{i}^{p}(\mathbf{x}). \tag{4.11}
$$

自由度总数为 $3m$。将 $\mathbf{u}^{n+1}$, $\mathbf{B}^{n+1}$, 以及 p^{n+1} 代入 (4.9)（或 (4.10)），并使用它们在 (4.11) 中对应的表达式，我们在 N_c 个配点处对方程进行离散，其中包括 N_1 个内部点和 N_2 个边界点。这得到一个用于求解 $X = (\alpha_1^u,\ldots,\alpha_m^u,\alpha_1^B,\ldots,\alpha_m^B,\alpha_1^p,\ldots,\alpha_m^p)^T$ 的线性方程组：

$$
\begin{gathered}
A^1X = F^1,\ A^2X = F^2,\ A^3X = F^3, \\
C^1X = G^1,\ C^2X = G^2,\ C^3X = G^3, \\
B^1X = b^1,\ B^2X = b^2,\ B^3X = b^3, \\
B^4X = b^4,\ B^5X = b^5,\ B^6X = b^6, \\
D^1X = d^1,\ D^2X = d^2,\ D^3X = d^3, \\
D^4X = d^4,\ D^5X = d^5,\ D^6X = d^6,
\end{gathered}
\tag{4.12}
$$

其中，A^i，C^i ($i=1,2,3$) 是 $N_1\times 3m$ 矩阵，B^j 和 D^j ($j=1,\ldots,6$) 是 $\frac{N_2}{7}\times 3m$ 矩阵，分别对应于 (4.9) 中的前两个方程、边界条件和初始条件。矩阵元素由 (4.9) 和 (4.10) 推导得到。

采样策略的设计旨在使采样点比例与测量比大致一致。例如，在三维情况下，我们在每个边界面上采样 N^2 个点，并在 Ω 内采样 N^3 个点。时变问题被视为 $(d+1)$ 维问题，其中初始条件被视为边界条件。更多详情请参见 [34]。

我们使用有限差分格式来近似线性方程组中的导数。具体而言，采用二阶中心差分格式：

$$
\frac{\partial u_{\rho}(x,y)}{\partial x} = \frac{u_{\rho}(x+h_1,y) - u_{\rho}(x-h_1,y)}{2h_1}, \tag{4.13}
$$

$$
\frac{\partial^2 u_{\rho}(x,y)}{\partial^2 x} = \frac{u_{\rho}(x+h_2,y) - 2u_{\rho}(x,y) + u_{\rho}(x-h_2,y)}{h_2^2}. \tag{4.14}
$$

使用初始向量 $X = (0,...,0)^T$，并在每个迭代步采用最小二乘法求解线性方程组。最后一次迭代得到的最终 X 为SP-RaNN和RaNN提供权重。

注3 为确保 p的唯一性，必须施加附加条件$\int_\Omega p\, d\mathbf{x} = c$，其中 c 为常数。施加该约束通常有两种方法。一种方法是对近似压力和精确压力同时进行平移，使其均值与常数 c *([30])*一致。本文使用*RaNN*直接求解积分方程。具体而言，采用高斯-勒让德数值积分：

$$\int_\Omega p\, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^p \int_\Omega \rho_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^p \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \rho_i(\mathbf{x}_j) \right),$$

其中 n 为高斯-勒让德点的数量， β_j 为积分权重。该方法可获得更精确的结果。对于稳态问题，这会在线性方程组中增加一个方程。对于非稳态问题，时间切片会生成与时间切片数量相同的方程。

注4 无散条件对于准确表示*MHD*系统的物理和数学性质至关重要。满足 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 可确保数值稳定性、物理真实性和可靠性，使这些条件成为任何稳健的*MHD*方程计算框架的基本要求。在*SP-RaNN*方法中，这些无散条件得到了内在满足，因为第*3.2*节中构造的基函数在构造时即被设计为无散的。因此，无需施加 $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = 0$ 等显式约束。此外，在使用相同数量的基函数和配点时，*SP-RaNN*系统比标准*RaNN*在计算上更高效，因为所得线性方程组的行数和列数更少。

备注 5 为在训练期间强调边界与初始条件，我们可以将相应方程（$B^i X = b^i$、 $D^i X = d^i$、 $i = 1$、.....、6）的两边乘以一个正数 γ，该数通常大于 *1*。这样可以确保 *RaNN* 优先考虑边界与初始条件，这对于解的精度至关重要，尤其是对于狄利克雷边界条件。不过，必须注意避免过拟合，因为 γ 过大可能会降低整体精度。

备注 6 对于长时间模拟，可根据解的时间正则性采用不同的时间策略。当解随时间的演化较为平滑时，可以直接采用时空*SP-RaNN*表述，并恰当选择网络尺度参数 r （*[7]*），从而有效捕捉耦合的时空行为，同时避免引入额外的时间步进误差。

当动力学表现出快速或局部的时间变化时，建议将 *SP-RaNN* 空间近似与时间离散格式结合起来。可以采用自适应时间步进策略——在平滑区间使用较大的步长，在急剧瞬变附近使用较小的步长——以兼顾效率和精度。还可以根据局部时间复杂度或残差大小，在每个时间层自适应地更新参数 r，从而增强网络在时间快速变化区域的近似能力。为进一步降低计算成本，可以采用 *[20, 55]* 中提出的线性外推格式，避免在每个时间步内进行非线性迭代。

5 数值算例

本节中，我们将 SP-RaNN 应用于若干问题，包括斯托克斯方程（[36]）、纳维–斯托克斯（N-S）方程（[30]）、麦克斯韦方程（[50]）和 MHD方程（[20, 54]）。数值结果展示了所提方法的性能。所有算法均使用 Python 实现，最小二乘问题通过“scipy.linalg.lstsq”提供的 QR方法求解。SP-RaNN 的数值实验在一台配备第 13 代 Intel(R) Core(TM) i7-13700KF CPU @3.40GHZ 处理器和 32GB 内存的计算机上进行。

在数值实验中，除非另有明确说明，RaNN 与 SP-RaNN 均使用激活函数 $\rho = \tanh$。有限差分步长分别设为 $h_1 = 10^{-6}$和 $h_2 = 5 \times 10^{-4}$，对应于 (4.13) 和 (4.14) 中的格式。初始权重和偏置从均匀分布 $U(-r, r)$ 中采样。在所有算例中，RaNN 与 SP-RaNN 的基函数个数记为 m，自由度（DoFs）指 RaNN 与 SP-RaNN 两个模型中未知量的总数。

为量化区域 Ω 上的误差，我们采用 L^2范数、半H^1范数和 H^1 范数，分别记为 $\|\cdot\|_0$、 $|\cdot|_1$和$\|\cdot\|_1$。此外，对于时空区域 $\Omega \times I$，我们定义相应的时空范数：$\|\cdot\|_0^{st}$对应 L^2 范数，$|\cdot|_1^{st}$对应半H^1 范数，$\|\cdot\|_1^{st}$对应完整 H^1 范数。给定函数 v 的相对 L^2误差与时空相对 L^2 误差定义如下：

$$e_v = \frac{\|v - v_\rho\|_0}{\|v\|_0}, \qquad e_v^{st} = \frac{\|v - v_\rho\|_0^{st}}{\|v\|_0^{st}},$$

其中， v 可以是标量值函数或向量值函数。误差通过高斯–勒让德数值积分进行计算。对于例5.1（$d = 2$）和例 5.6（$d = 3$），我们使用 20^d 个高斯–勒让德求积点；对于例 5.2、例 5.4 和例5.7（$d = 4$），我们使用 10^d 个求积点。所有结果均为十次实验的平均值。

例5.1（稳态二维斯托克斯方程） 在此例中，我们考虑稳态二维斯托克斯方程：

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \text{ in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}_D, \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.15}$$

其中，*Re* 表示雷诺数。我们测试与 *[36]* （例 *5.2*）中相同的例子，其中 $\Omega = (0,1)^2$，精确解为：

$$\begin{cases} u &= x^2y^2(1-x)^2(2y-2) + 2x^2y(1-x)^2(1-y)^2, \\ v &= -x^2y^2(1-y)^2(2x-2) - 2xy^2(1-x)^2(1-y)^2, \\ p &= x^3 + y^3 - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

我们使用 RaNN 和 SP-RaNN（采用相同的参数）来近似此问题中的$\mathbf{u}$ 。在 RaNN 中，使用两个 RaNN 分别近似 $\mathbf{u}$ 和 p；而在 SP-RaNN 中，使用一个 SP-RaNN 近似$\mathbf{u}$，并使用一个 RaNN 近似 p。我们为用于近似$\mathbf{u}$的 SP-RaNN（和 RaNN）设置 $r_1 = 1$，为用于近似 p 的 RaNN 设置$r_2 = 0.5$，并设置 $N_c = 5180$ ($N_1 = 4900$, $N_2 = 280$)。

方法	m (自由度)	$\|\mathbf{u} -\mathbf{u}_\rho\|_1$	$\|\mathbf{u} -\mathbf{u}_\rho\|_0$	$\|p-p_\rho\|_0$	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_0$
RaNN	100 (300)	2.09E-03	1.50E-04	2.57E-03	1.83E-03
	200 (600)	2.70E-05	1.65E-06	3.51E-05	2.13E-05
	400 (1200)	3.91E-06	2.25E-07	4.81E-06	3.10E-06
	800 (2400)	1.27E-06	7.47E-08	1.56E-06	9.63E-07
SP-RaNN	100 (200)	2.09E-05	9.40E-07	2.35E-05	1.46E-12
	200 (400)	8.02E-07	3.00E-08	1.00E-06	5.73E-13
	400 (800)	1.79E-07	6.32E-09	1.87E-07	2.63E-13
	800 (1600)	7.39E-08	3.07E-09	7.09E-08	1.76E-13

表1：不同 m下 RaNN 和 SP-RaNN 的数值误差，其中 $N_c = 5180,\ \ r_1 = 1,\ \ r_2$ =0。5，$\gamma = 500$，例5.1中 Re$= 1$ ）。

方法	m (自由度)	$\|\mathbf{u} -\mathbf{u}_\rho\|_1$	$\|\mathbf{u} -\mathbf{u}_\rho\|_0$	$\|p-p_\rho\|_0$	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_0$
RaNN	100 (300)	1.61E-03	1.20E-04	1.03E-06	1.29E-05
	200 (600)	4.16E-05	2.34E-06	2.28E-08	5.14E-07
	400 (1200)	1.24E-05	6.43E-07	6.01E-09	1.94E-07
	800 (2400)	5.86E-06	2.86E-07	3.04E-09	1.14E-07
SP-RaNN	100 (200)	4.24E-06	1.80E-07	3.43E-09	1.73E-12
	200（400）	2.29E-07	9.36E-09	2.68E-10	5.84E-13
	400（800）	8.13E-08	3.91E-09	1.22E-10	3.06E-13
	800 (1600)	4.21E-08	2.46E-09	7.48E-11	2.11E-13

表2：例5.1中不同 m条件下 RaNN 和 SP-RaNN 的数值误差，其中 $N_c = 5180,\ r_1 = 1,\ r_2$ =0.5, $\gamma = 1$, Re$= 1000$ 。

不同雷诺数下的结果见表 1 和表 2。图 3 展示了精确解、数值解和绝对误差。这些结果表明，SP-RaNN 能够获得精度很高的数值解。值得注意的几点如下：与 RaNN 相比，SP-RaNN 始终能以更少的自由度获得更准确的结果，因为它严格满足无散度约束。此外，从表 1 和表 2 可以看出，SP-RaNN 在高雷诺数和低雷诺数下的表现同样出色，表明其对雷诺数具有鲁棒性。

我们还将所提出的方法与传统数值方法进行了比较。在 [36], 中，通过修正检验函数提出了一种压力稳健有限元方法，从而确保速度逼近误差与压力逼近无关。该方法提高了$\mathbf{u}$的精度，尤其是在较高雷诺数下。在非结构化各向同性Delaunay网格上，来自 [36] 的数值结果列于表3，摘自 [36]中的表4和表6。显然，所提出的SP-RaNN方法在精度和效率上均优于 [36]中的有限元方法。

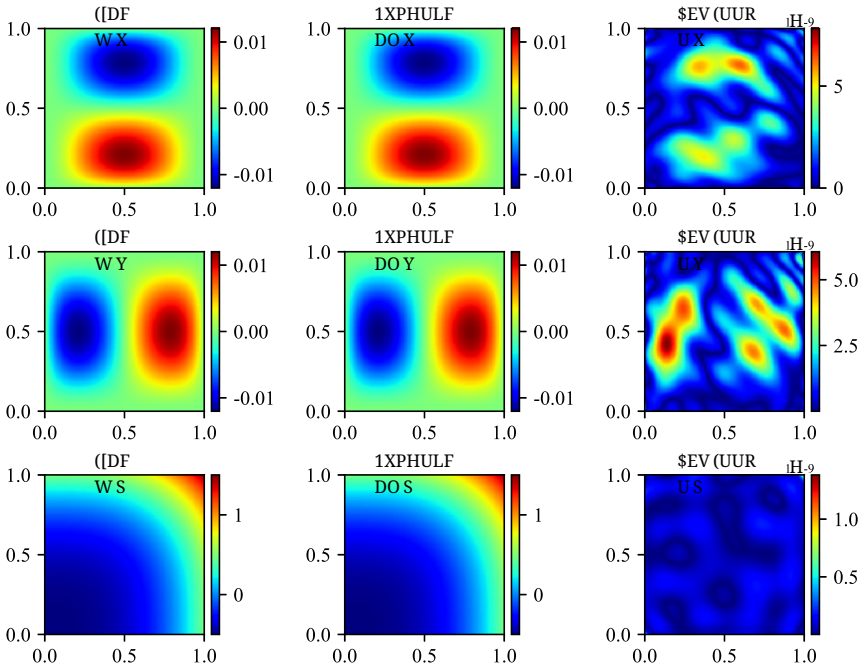


图3：精确解、SP-RaNN的近似解，以及$\mathbf{u} = (u, v)^T$和 p的绝对误差，其中 $m = 800,\ \gamma = 1,\ N_c = 5180,$ $r_1 = 1,\ r_2 = 0.5$ ，雷诺数$= 1000$ ，例5.1。

Re	DoFs	$\lvert\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\rvert_1$	$\lVert\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\rVert_0$	$\lVert p - p_h\rVert_0$
1	102414	1.98E-03	5.91E-06	4.0E-03
1000	102414	1.98E-03	5.91E-06	3.98E-03

表3：例5.1中使用修正的 Crouzeix–Raviart 元的混合有限元法（[36]）的数值结果。

例 5.2（非定常三维 Beltrami 流）在本例中，我们按照 *[30],* 中例 *3.3* 的设置，求解非定常三维纳维–斯托克斯方程(2.1)，其中 $\Omega = (-1,1)^3$ 和$I = (0,1)$。精确解如下：

$$\begin{cases} u = -(e^x\sin(y+z) + e^z\cos(x+y))e^{-t}, v = - (e^y\sin(z+x) \\ \\ +e^x\cos(y+z))e^{-t}, w = - (e^z\sin(x+y) + e^y\cos(z+x))e^{-t}, \\ p = -\frac{1}{2}e^{-2t}[e^{2x} + e^{2y} + e^{2z} + 2 x + y\sin(\ )\cos(\\ z + x\ e^{y+z})\ \sin()\cos(\ )\ \sin(\ )\cos()e^{x+y}]. \end{cases}$$

$$+2 \quad y+z \quad x+y\ e^{z+x} + 2 \quad z+x \quad y+z$$

我们采用 SP-RaNN 与牛顿迭代相结合的方法求解该问题。使用 SP-RaNN 近似 $\mathbf{u}$，并使用单独的 RaNN 近似 p，其参数为 $r_1 = r_2 = 0.2, m = 3200, N_c = 6144(N_1 = 4800, N_2 = 1344)$、 $\gamma = 100$ 和 $\mathrm{Re} = 1$。对于这一非定常问题，采用 3 个非线性迭代步。由于该问题与时间有关，我们按照注3中的说明，在多个时间点对 p 施加约束。这些点从 I中随机均匀选取，共有 200 个时间点。

方法	e	$t=0$	$t=0.25$	$t=0.5$	$t=0.75$	$t=1$
SP-RaNN	e_{u_1}	7.39E-06	1.65E-06	1.38E-06	2.00E-06	1.31E-05
	e_{u_2}	7.01E-06	1.61E-06	1.37E-06	1.93E-06	1.21E-05
	e_{u_3}	6.08E-06	1.48E-06	1.31E-06	2.15E-06	1.17E-05
	e_p	4.83E-05	1.48E-05	2.21E-05	3.92E-05	2.25E-04
	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_0$	2.05E-11	2.08E-11	2.09E-11	2.11E-11	2.09E-11
NSFnets-VP	e_{u_1}	1.10E-04	4.08E-04	5.94E-04	9.08E-04	1.63E-03
	e_{u_2}	1.19E-04	5.48E-04	9.17E-04	1.31E-03	2.19E-03
	e_{u_3}	1.14E-04	6.36E-04	9.87E-04	1.32E-03	1.78E-03
	e_p	9.43E-03	8.98E-03	8.66E-03	8.56E-03	8.93E-03
NSFnets-VV	e_{u_1}	7.40E-05	1.67E-04	2.23E-04	2.94E-04	4.35E-04
	e_{u_2}	7.10E-05	1.53E-04	2.10E-04	3.02E-04	4.52E-04
	e_{u_3}	7.40E-04	1.85E-04	2.43E-04	2.91E-03	4.09E-04

表4：NSFnets（ [30]中的表4）与 SP-RaNN 的比较，其中 $m=3200,\quad N_c=6144,\quad r_1=r_2=0.2,$ $\gamma=100,$ 在例 5.2 中雷诺数$=1$ 。

Re	m (自由度)	e_p^{st}	e_u^{st}	e_v^{st}	e_w^{st}
1	100 (200)	2.91E-01	1.17E-01	1.08E-01	1.33E-01
	200 (400)	1.61E-01	3.67E-02	3.84E-02	3.99E-02
	400 (800)	2.37E-02	5.50E-03	5.68E-03	5.41E-03
	800 (1600)	2.67E-03	4.48E-04	4.47E-04	4.40E-04
	1600 (3200)	1.49E-04	2.16E-05	2.18E-05	2.00E-05
1000	100 (200)	1.91E-01	1.10E-01	1.17E-01	1.18E-01
	200 (400)	5.58E-02	3.31E-02	3.16E-02	3.53E-02
	400 (800)	1.00E-02	5.22E-03	5.22E-03	4.96E-03
	800 (1600)	9.62E-04	4.49E-04	4.66E-04	4.56E-04
	1600 (3200)	7.22E-05	2.68E-05	2.60E-05	2.60E-05

表5：SP-RaNN在不同 m下的时空相对 L^2 误差，其中 $N_c=6144,\quad r_1=r_2=0.2,\quad \gamma=$100，对应雷诺数 $=1$，以及 $N_c=6144,\quad r_1=r_2=0.2,\quad \gamma=10,$ 对应雷诺数 $=1000$ ，见例 5.2。

我们在表4中将 SP-RaNN 与 NSFnets ([30]) 的性能进行比较，并在图 4 中展示$\mathbf{u}$ 的快照以及其在平面 $z=0$ 上 $t=1$ 处的绝对误差。NSFnets 的参数和结果见 $[30]$, 中的表4，其中 NN 的规模为 7×50，配点数量为 15766。从表4可以看出，SP-RaNN 得到的近似更加准确，而最小二乘法提升了有效性。表5显示，随着 SP-RaNN 神经元数量的增加，精度显著提升。Re $=1000$ 的结果进一步凸显了 SP-RaNN方法的鲁棒性。这些结果验证了 SP-RaNN 的效率和鲁棒性。

例5.3（顶盖驱动方腔流）在本例中，我们将所提出的方法应用于顶盖驱动

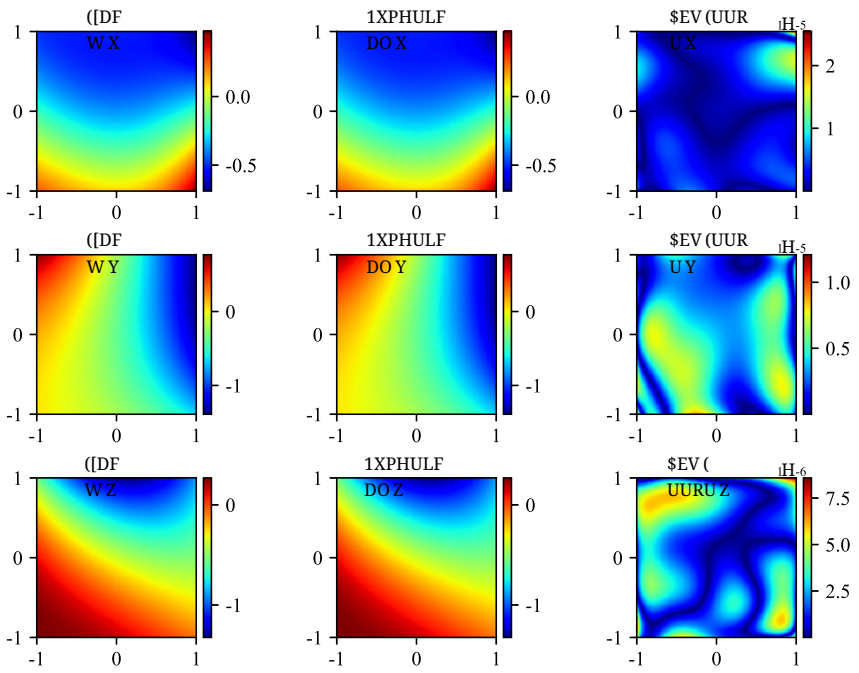


图 4：例 5.2 中，当 Re $= 1$ 时，平面 $z = 0$上 $t = 1$ 处的 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ 的精确解、近似解和绝对误差，其中 $m = 3200,\ \gamma = 100,\ N_c = 6144,\ r_1 = r_2 = 0.2$。

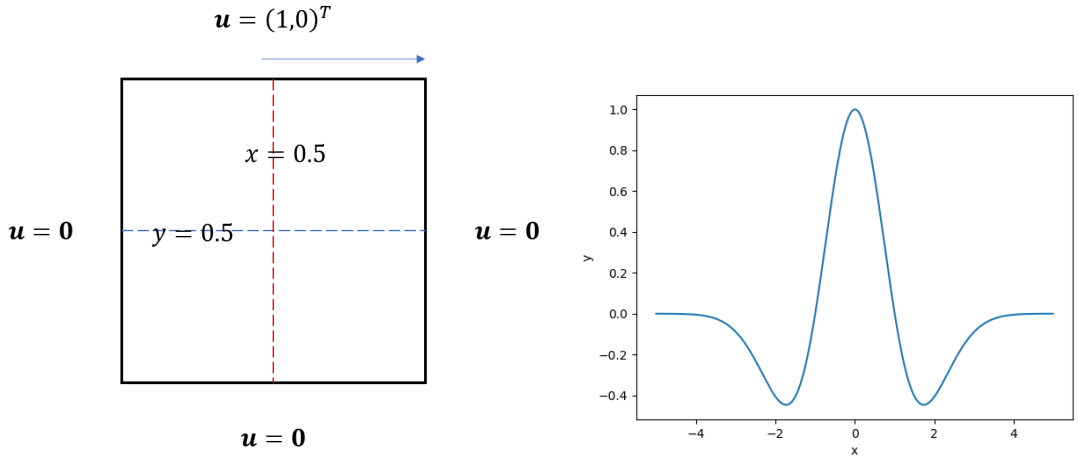
方腔流问题：

$$\begin{cases} (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}, & \text{in } \Omega, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{5.16}$$

区域为 $\Omega = (0,\ 1)^2,$，边界条件为 $\mathbf{u}(x,\ 1) = (1,\ 0)^T$，$\mathbf{u}(x,\ 0) = \mathbf{u}(0,\ y) = \mathbf{u}(1,\ y) = \mathbf{0}$。为避免左上角和右上角出现不连续性，我们设 $\mathbf{u}(x,\ 1) = \left(1 - \cosh(50(x-0.5))\cosh(25)^{-1}\ 0\right)^T$。垂直中心线（红色虚线）上的水平速度 u 以及水平中心线（蓝色虚线）上的垂直速度 v 是测试目标。该设置如图 *5 (a)* 所示。

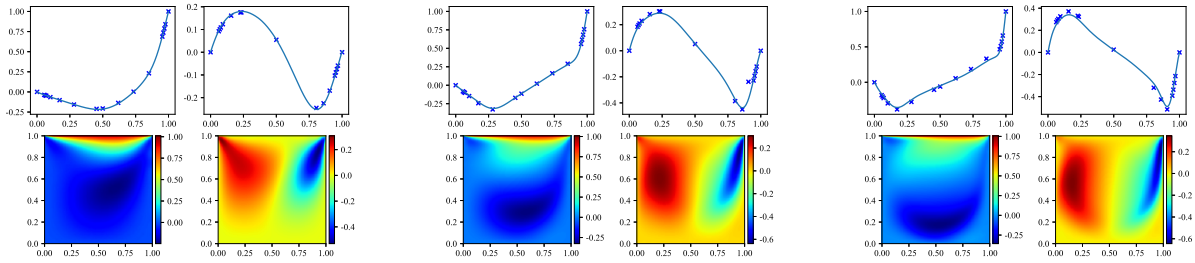
在此示例中，我们使用墨西哥帽小波 $\rho = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$ 作为激活函数。这个局部函数（图5 (b)）有助于 SP-RaNN 更有效地捕捉流动特性。我们使用参数为 r_1 的 SP-RaNN 近似速度 $\mathbf{u}$，并使用参数为 r_2 的 RaNN 近似压力 p。参数设为 $m = 1000,\ N_c = 5180,\ \gamma = 10$，并采用牛顿迭代。不同雷诺数下的结果如图6所示。左侧图展示水平速度u，右侧图展示垂直速度 v；模拟结果（蓝色曲线）与参考值（以“×”标示）进行了比较。不同雷诺数下的流线如图7所示， [16] 中的表1和表2用作参考。

对于 Re $= 100,\ 400,\ 1000$，迭代步数分别为 10、15 和 25。雷诺数越高，方程的非线性越强，因此需要更多迭代。我们采用 [7] 中的初始化策略来确定偏置。该方法使用权重矩阵 $W \in \mathbb{R}^{m\times 2}$，并生成随机矩阵 $B \in \mathbb{R}^{m\times 2}$，使 Ω 内的基函数分布更密集。随后将偏置 $\mathbf{b}$ 选为$\mathbf{b} = -(W \odot B)\cdot \mathbf{1}_{2\times 1}$，其中 $\odot$ 表示逐元素乘法。



(a) 物理设置　　(b) 墨西哥帽小波

图5:　　例5.3中顶盖驱动方腔流的物理设置和激活函数。



(a) 雷诺数 $= 100$　　(b) 雷诺数 $= 400$　　(c) 雷诺数 $= 1000$

图6: 数值解 u 及其在垂直中心线上的值、数值解 v 及其在水平中心线上的值，其中 $r_1 = 6,\ \ r_2 = 3$ 对应雷诺数$= 100,\ \ r_1 = 10,\ \ r_2 = 5$ 对应雷诺数$= 400$，而 $r_1 = 15,\ \ r_2 = 10$对应例5.3中的雷诺数$= 1000$。

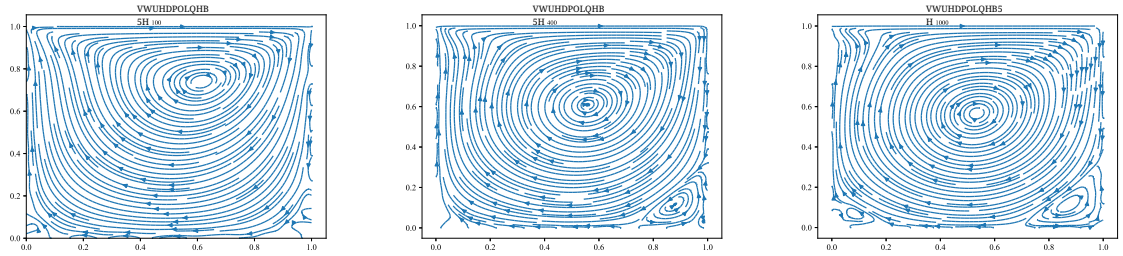
例 5.4（非定常三维麦克斯韦方程）在本例中，我们使用 *SP-RaNN* 求解非定常三维麦克斯韦方程(2.2)。区域设为$\Omega = (0,1)^3$, $I = (0,1)$，其中 $\epsilon = \mu = 1$。精确解如下:

$$\begin{cases} E_1 &= (y-y^2)(z-z^2)t\cos(t+x+y+z), \\ E_2 &= (x-x^2)(z-z^2)t\cos(t+x+y+z), \\ E_3 &= (x-x^2)(y-y^2)t\cos(t+x+y+z), \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} H_1 &= (y-z)t\cos(t+x+y+z), \\ H_2 &= (z-x)t\cos(t+x+y+z), \\ H_3 &= (x-y)t\cos(t+x+y+z). \end{cases}$$

此前已采用时空间断伽辽金（ST-DG）方法处理该例



(a) 雷诺数=100　　(b) 雷诺数=400　　(c) 雷诺数=1000

图7:　　例5.3中不同雷诺数对应的数值解流线　　.

并使用 [50] 中的均匀笛卡尔网格（例4.2）。在我们的方法中，采用具有 $r_1 = 0.5$ 的 RaNN 来近似 $\mathbf{E}$，并采用具有 $r_2 = 0.2$ 的 SP-RaNN 来近似 $\mathbf{H}$。参数设为$N_c = 6144$ ($N_1 = 4800$, $N_2 = 1344$)和 $\gamma = 100$。表6展示了$\mathbf{E}$ 和$\mathbf{H}$ 在不同自由度下的绝对误差，并比较了 SP-RaNN 与 ST-DG 方法在不同时间和空间离散多项式阶数（$r = k = 1$ 和 $r = k = 2$）下的表现。结果表明，SP-RaNN 在保持无散条件的同时，以更少的自由度实现了更准确的近似。图8和图9展示了精确解、数值近似和绝对误差。

方法	DoFs	$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_\rho\|_0$	$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_\rho\|_0$	$\|\nabla \cdot \mathbf{H}_\rho\|_0$
SP-RaNN	400	1.76E-02	6.54E-02	4.23E-14
	800	1.05E-02	2.23E-02	1.97E-13
	1600	2.15E-03	2.19E-03	1.00E-12
	3200	3.78E-04	2.35E-04	6.42E-12
	6400	5.27E-05	1.26E-05	7.46E-12
		$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_0$	$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_h\|_0$	$\|\nabla \cdot \mathbf{H}_h\|_0$
ST-DG-P_1	147456	1.16E-02	1.44E-02	-
	2359296	2.95E-03	3.90E-03	-
ST-DG-P_2	746496	9.89E-04	1.06E-03	-
	11943936	1.23E-04	1.38E-04	-

Tab表 6:　L^2 在 $t = 1$处的误差，其中 $N_c = 6144$，　$r_1 = 0.5$，　$r_2 = 0.2$，　$\gamma = 100$ 在例 5.4 中　　.

例5.5（三维简化麦克斯韦方程和磁流体力学方程） 在本例中，我们比较所提出的方法与预条件有限元法求解简化麦克斯韦方程的计算效率：

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} &= \mathbf{f}, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{A} \times \mathbf{n} &= \mathbf{g} \times \mathbf{n}, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.17}$$

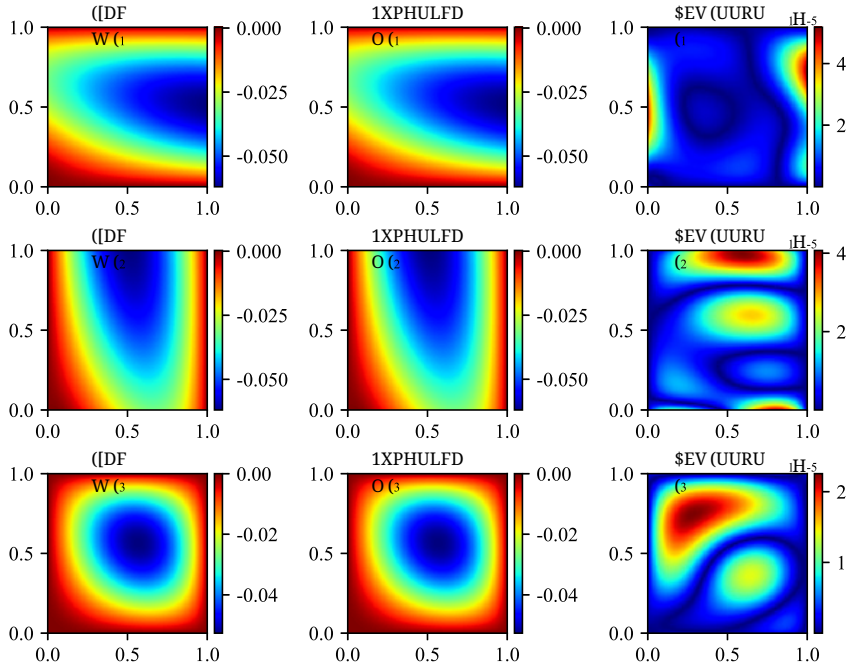


图 8：例 5.4 中，$t = 1$ 在平面 $z = 0.5$ 上的电场和绝对误差，其中 $m = 1600$，$\gamma = 100$，N_c =6144，$r_1 = 0.5$ 和 $r_2 = 0.2$ 。

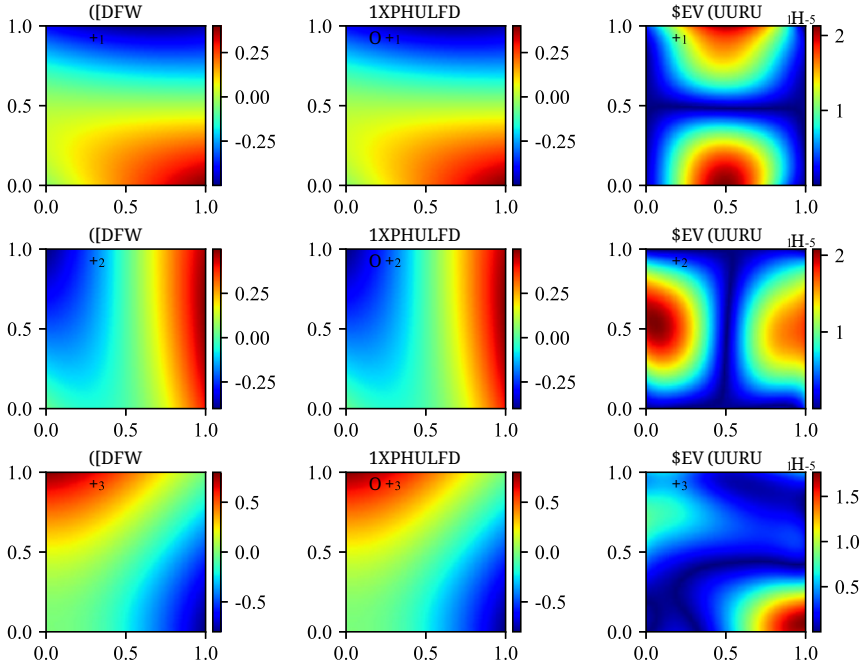


图 9：例 5.4 中，$t = 1$ 在平面 $z = 0.5$ 上的磁场和绝对误差，其中 $m = 1600$，$\gamma = 100$，N_c =6144，$r_1 = 0.5$ 和 $r_2 = 0.2$ 。

以及简化磁流体动力学方程

$$\left\{\begin{array}{rcll} \nabla p-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u}-\mathrm{S}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} & = & \mathbf{f}, & \text{in }\Omega,\\ \frac{1}{\mathrm{R_m}}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})-\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) & = & \mathbf{g}, & \text{in }\Omega,\\ \nabla\cdot\mathbf{u}\quad=\quad 0,\quad \nabla\cdot\mathbf{B} & = & 0, & \text{in }\Omega,\\ \mathbf{u}\quad=\quad\mathbf{u}_D,\quad \mathbf{B}\times\mathbf{n} & = & \mathbf{B}_D, & \text{on }\partial\Omega, \end{array}\right. \tag{5.18}$$

其中 $\Omega=(0,1)^3$, 雷诺数 $=\mathrm{R_m}=\mathrm{S}=1$。

- 简化麦克斯韦方程 (5.17)

精确解为

$$\mathbf{A}=\big((y^2+z^2)\sin(\pi x),\ (x^2+z^2)\sin(\pi y),\ (x^2+y^2)\sin(\pi z)\big)^T.$$

参考有限元法计算采用四面体网格，并使用一阶 N´ed´elec 边元（II 型）对 $\mathbf{A}$ 进行离散。所得线性方程组通过预条件共轭梯度法结合 Hiptmair–Xu 辅助空间预条件子 ([21]) 求解；该方法被广泛认为是针对 H (curl)协调问题的最优求解器。

作为对比，采用单个 RaNN 近似 $\mathbf{A}$，参数为 $r=1$、 $N_c=4725$ 和$\gamma=100$。尽管有限元法使用了先进的预条件技术，RaNN 仍以低得多的计算成本达到相当或更高的精度，如表 7 所示。

方法	DoFs	$\|一个-一个_\rho\|_0$	运行时间（秒）
FEM	8368	1.12E-02	0.12
	62048	2.80E-03	1.02
	477376	6.98E-04	8.51
	3744128	1.74E-04	76.53
RaNN	300	2.76E-02	0.14
	600	1.90E-03	0.29
	1200	2.45E-05	0.78
	2400	1.94E-06	2.44

表 7：方程（5.17）的预条件有限元法与 RaNN 对比。报告了不同自由度下的数值误差和运行时间，其中 $N_c=4725$、 $r=1$ 和 $\gamma=100$。

- 简化磁流体动力学方程（5.18）

精确解为

$$\mathbf{u}=\big(\sin(z),\ 2\cos(x),\ 0\big)^T,\quad p=\sin(y)-1+\cos(1),\quad \mathbf{B}=\big(\cos(y),0,0\big)^T.$$

对于有限元法基准，我们引入拉格朗日乘子 r ，以数值方式强制磁场$\mathbf{B}$满足无散度约束。对$\mathbf{u}$采用二阶拉格朗日单元，对 p采用一阶拉格朗日单元，对$\mathbf{B}$采用一阶N´ed´elec棱单元，对 r采用二阶拉格朗日单元。所得大规模鞍点系统使用柔性广义最小残差算法并结合块预条件子求解，遵循 [33]„ 与当前最先进的磁流体动力学求解器一致。

在所提出的方法中，采用两个SP-RaNN逼近**u**和**B**，并采用一个RaNN逼近 p，参数为 $r_1 = r_2 = r_3 = 1$、$N_c = 1600$和 $\gamma = 100$。表 8表明，SP-RaNN方法在达到相当精度的同时，比预条件有限元基准方法快几个数量级，凸显了其效率。

方法	DoFs	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\rho\|_1$	$\|p - p_\rho\|_0$	$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_\rho\|_{\mathrm{H(curl)}}$	$\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_0$	$\|\nabla \cdot \mathbf{B}\|_0$	N	运行时间（秒）
FEM	4249	2.90E-03	1.84E-03	4.81E-02	-	-	8	1.72
	28749	7.08E-04	3.90E-04	2.38E-02	-	-	8	15.12
	210709	1.75E-04	9.07E-05	1.18E-02	-	-	8	135.46
	1611813	4.34E-05	2.21E-05	5.89E-03	-	-	7	981.22
SP-RaNN	300	1.39E-02	1.43E-02	6.55E-03	5.22E-16	2.10E-16	5	0.60
	600	1.56E-03	1.78E-03	5.58E-04	9.35E-16	4.12E-16	5	1.39
	1200	6.75E-05	7.98E-05	2.27E-05	1.24E-16	5.15E-16	5	2.96
	2400	1.39E-06	2.72E-06	5.20E-07	1.89E-16	6.46E-16	5	9.46
	4800	1.56E-08	5.08E-08	8.34E-09	2.07E-15	1.02E-15	5	63.83

表 8：方程（5.18）的预条件有限元法与 SP-RaNN 对比。报告了不同自由度下的数值误差和运行时间，其中 $N_c = 1600$、 $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ 和 $\gamma = 100$。此处，N 表示 Picard 迭代次数。

例 5.6（稳态二维磁流体动力学方程） 在本例中，我们将方法与 *[54],* 中提出的稳健、全局无散弱 *Galerkin* 有限元法（*WG-FEM*）进行比较，该方法保证速度和磁场近似无散。我们考虑稳态不可压缩磁流体动力学方程 (5.19)：

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mathrm{H_a^2}}\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{N}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{\mathrm{R_m}}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} &= \mathbf{f}, \\ \frac{1}{\mathrm{R_m}}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}) - \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{g}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0, \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0, \end{cases} \tag{5.19}$$

其中 $\mathrm{H_a}$、N、$\mathrm{R_m}$ 分别表示哈特曼数、相互作用参数和磁雷诺数。

- 情形 1：单连通区域

我们采用与 [54] (示例 7.1) 相同的测试案例，其中区域为 $\Omega = (0,1)^2$, ，参数为$H_a = N = R_m = 1$。精确解为：

$$\begin{cases} u = x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1),\ v = y^2(y-1)^2x(x-1)(2x-1), \\ B_1 = x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1),\ B_2 = y^2(y-1)^2x(x-1)(2x-1), \\ p = x(x-1)(x-\frac{1}{2})y(y-1)(y-\frac{1}{2}). \end{cases}$$

我们分别采用 SP-RaNN，并使用皮卡德迭代（SP-RaNN-P）和牛顿迭代（SP-RaNN-N）。使用两个参数分别为 $r_1 = 1$ 和 $r_2 = 1$ 的 SP-RaNN，以及一个参数为 $r_3 = 0.5$ 的 RaNN，分别近似**u**、**B**和 p。参数设置为 $N_c = 5180$ $(N_1 = 4900,\ N_2 = 280)$ 和 $\gamma = 100$。我们采用 3 步迭代来处理非线性项。表 10 展示了 WG-FEM 得到的结果，其中

$k=1$ 和 $k=2$，在规则三角形网格上，以及采用两种非线性迭代方法的 SP-RaNN。两种方法在保持精确无散条件的同时，取得了几乎相同的结果；与 WG-FEM 相比，它们以更少的自由度实现了更高的精度。图 10 展示了 $\mathbf{u}$ 和 p 的精确解、模拟结果及绝对误差。

为进一步验证边界鲁棒性，我们施加法向分量磁边界条件$\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}=0$，而非切向条件$\mathbf{B}\times\mathbf{n}$，并使用相同的网络架构和参数（$r_1=r_2=1,\ r_3=0.5,\ N_c=5180$）评估 SP-RaNN-P 方法。表 9 报告了若干不同 γ 取值下的结果，表明该方法能够有效施加 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}=0$，且对 γ 的选择不敏感。增大边界条件权重和初始条件权重通常会提高精度，但 γ 过大可能导致过拟合并降低整体性能。

γ	DoFs	$e_{\mathbf{u}}$	$e_{\nabla\mathbf{u}}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_0$	$e_{\mathbf{B}}$	$e_{\nabla\mathbf{B}}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{B}\|_0$	e_p
10	300	1.03E-03	2.48E-03	6.71E-13	1.35E-02	1.02E-02	9.18E-13	5.67E-02
	600	5.68E-05	1.74E-04	3.39E-13	1.65E-03	1.20E-03	3.24E-13	4.93E-03
	1200	8.75E-06	2.95E-05	1.16E-13	3.65E-04	2.66E-04	1.28E-13	7.83E-04
	2400	2.84E-06	9.97E-06	9.30E-14	9.25E-05	6.85E-05	9.53E-14	2.68E-04
10^2	300	1.28E-04	3.87E-04	8.89E-13	3.29E-03	2.42E-03	7.46E-13	1.03E-02
	600	4.13E-06	1.49E-05	2.88E-13	6.16E-05	4.60E-05	2.92E-13	4.50E-04
	1200	8.40E-07	3.11E-06	1.56E-13	3.22E-05	2.43E-05	1.61E-13	7.34E-05
	2400	3.78E-07	1.28E-06	9.02E-14	2.57E-05	1.90E-05	9.08E-14	2.73E-05
10^3	300	2.03E-05	6.49E-05	9.86E-13	5.17E-04	3.95E-04	9.75E-13	1.28E-03
	600	1.02E-06	3.44E-06	2.43E-13	1.74E-05	1.33E-05	3.15E-13	5.47E-05
	1200	3.77E-07	1.10E-06	1.39E-13	7.27E-06	5.49E-06	1.62E-13	1.78E-05
	2400	2.63E-07	5.39E-07	9.46E-14	3.45E-06	2.84E-06	1.09E-13	8.76E-06
10^4	300	5.41E-05	1.35E-04	1.10E-12	4.49E-04	3.50E-04	1.21E-12	1.84E-03
	600	1.47E-06	4.39E-06	3.07E-13	1.59E-05	1.25E-05	3.26E-13	5.97E-05
	1200	4.18E-07	1.16E-06	1.40E-13	6.63E-06	5.36E-06	1.58E-13	1.87E-05
	2400	2.75E-07	6.53E-07	1.06E-13	4.39E-06	3.70E-06	9.60E-14	1.08E-05

表 9：例 5.6 中，边界条件为 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}=0$且 N_c =5180, $r_1=r_2=1,\ r_3=0.5$ 时，不同 γ 对应的数值误差。

此外，我们使用参数 $r_1=r_2=1, r_3=0.5, N=\mathrm{R_m}=1$，通过 10 次牛顿迭代测试了该算例在不同哈特曼数下的表现。结果见表 11。

方法	DoFs	$e_{\mathbf{u}}$	$e_{\nabla\mathbf{u}}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_0$	$e_{\mathbf{B}}$	$e_{\nabla\mathbf{B}}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{B}\|_0$	e_p
SP-RaNN-P	300	9.92E-05	3.10E-04	8.36E-13	7.70E-05	2.45E-04	8.63E-13	8.81E-03
	600	3.53E-06	1.28E-05	2.62E-13	3.11E-06	9.07E-06	2.75E-13	3.34E-04
	1200	8.31E-07	3.30E-06	1.26E-13	1.31E-06	3.19E-06	1.82E-13	8.41E-05
	2400	3.52E-07	1.19E-06	8.44E-14	8.61E-07	1.19E-06	9.87E-14	2.72E-05
SP-RaNN-N	300	9.30E-05	2.75E-04	4.80E-13	8.97E-05	2.77E-04	1.12E-12	7.50E-03
	600	3.66E-06	1.26E-05	2.59E-13	4.11E-06	9.87E-06	2.75E-13	3.63E-04
	1200	7.41E-07	2.69E-06	1.58E-13	1.19E-06	2.83E-06	1.71E-13	5.69E-05
	2400	4.13E-07	1.34E-06	9.13E-14	8.74E-07	1.32E-06	1.18E-13	3.05E-05
WG-FEM ($k=1$)	148992	2.59E-03	4.02E-02	3.42E-14	4.63E-03	3.69E-02	2.09E-14	3.01E-02
	592896	6.52E-04	2.01E-02	2.96E-13	1.18E-03	1.83E-02	2.98E-13	1.50E-02
WG-FEM ($k=2$)	223448	1.47E-05	9.65E-04	5.22E-14	7.82E-05	5.39E-03	6.05E-14	2.78E-04
	889344	1.84E-06	2.41E-04	6.99E-13	9.90E-06	1.35E-03	6.79E-13	6.96E-05

表 10：在例 5.6 中，对 WG-FEM（ [54] 中的表4）和 SP-RaNN 进行比较，其中 $N_c = 5180,\quad r_1 = r_2 = 1,$ $r_3 = 0.5$和 $\gamma = 100$ 。

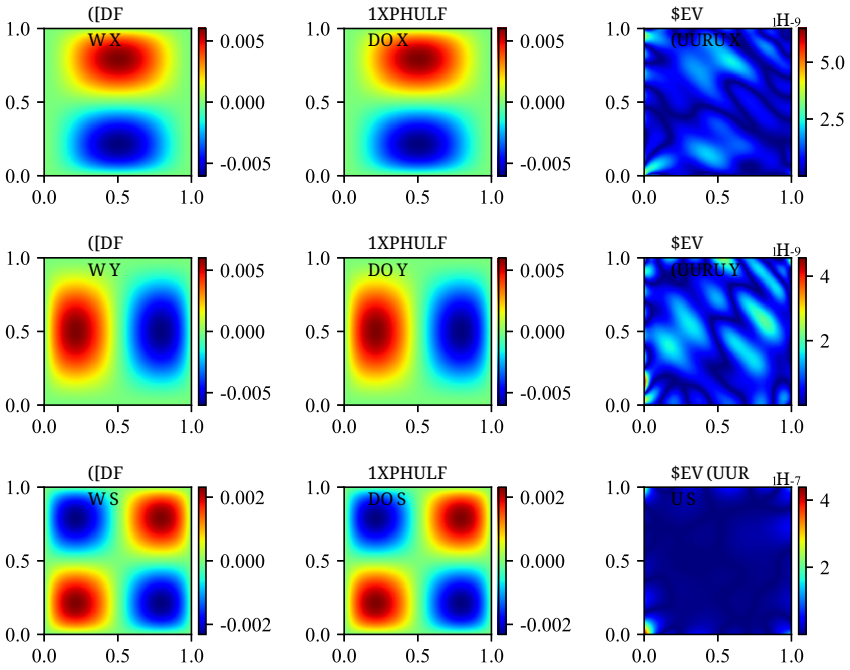


图 10：速度场、压力场和绝对误差，其中 $m = 800,\quad \gamma = 100,\quad N_c = 5180,\quad r_1 = r_2 = 1$和 $r_3 = 0.5$ 为例 5.6 的情形 1。

H_a	DoFs	$e_{\mathbf{u}}$	$e_{\nabla\mathbf{u}}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_0$	$e_{\mathbf{B}}$	$e_{\nabla\mathbf{B}}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{B}\|_0$	e_p
10	2400	5.72E-07	1.26E-06	2.08E-13	8.50E-07	1.14E-06	1.10E-13	1.10E-06
100	2400	5.08E-04	8.91E-04	4.49E-11	8.94E-07	1.37E-06	9.19E-14	8.39E-06
1000	2400	4.81E-03	7.89E-03	4.95E-11	1.05E-06	1.38E-06	1.01E-13	8.42E-05

表 11：例 5.6 中使用 SP-RaNN-N，在 $N_c = 5180,\ r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = 0.5$和 $\gamma = 100$ 条件下不同哈特曼数的误差。

- 案例 2：环形域

我们考虑一个非单连通域 $\Omega = \{\mathbf{x} \mid 0.5 < |\mathbf{x}| < 1\}$。精确解和参数与情形 1 相同，并采用 SP-RaNN-P 方法求解此问题。与之前一样，我们使用两个 $r_1 = r_2 = 1$ 的 SP-RaNN 来求解 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{B}$，并使用一个 $r_3 = 0.5$ 的 RaNN 来求解 p。我们设定 $N_c = 5460(N_1 = 4900, N_2 = 560)$、$\gamma = 100$，并执行 3 个迭代步。数值结果汇总于表 12。

在本案例中，使用均方误差 (5.20) 进行数值积分，积分点数 N_{int} 设为 10,000。$\mathbf{u}$ 和p的精确解、数值解及绝对误差如图 11 所示。

$$\|v - v_\rho\|_0 = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{int}}}\sum_{i=1}^{N_{\text{int}}}(v(\mathbf{x}_i) - v_\rho(\mathbf{x}_i))^2}. \tag{5.20}$$

表 12 列出了使用 SP-RaNN-P 方法时不同自由度下的误差。在这里，$N_c = 5460$、$r_1 = r_2 = 1$、$r_3 = 0.5$ 和 $\gamma = 100$。结果表明，速度$\mathbf{u}$、磁场$\mathbf{B}$ 和压力 p具有较高的精度，且误差随自由度增加而减小。图 11 展示了 $m = 800$、$\gamma = 100$、$N_c = 5460$、$r_1 = r_2 = 1$和 $r_3 = 0.5$时的速度场、压力场和误差分布。可视化结果进一步展示了所提方法的优异性能。此示例证明了 SP-RaNN-P 方法处理非单连通域的有效性。

方法	DoFs	$e_{\mathbf{u}}$	$e_{\nabla\mathbf{u}}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_0$	$e_{\mathbf{B}}$	$e_{\nabla\mathbf{B}}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{B}\|_0$	e_p
SP-RaNN-P	300	7.89E-05	4.60E-03	2.94E-12	1.38E-04	1.62E-04	2.88E-12	1.70E-04
	600	3.46E-07	6.40E-07	1.40E-12	6.83E-07	5.45E-07	1.75E-12	2.80E-05
	1200	6.03E-08	9.54E-08	4.56E-13	5.91E-07	2.97E-07	5.90E-13	4.27E-06
	2400	2.31E-08	3.78E-08	2.66E-13	6.79E-07	3.13E-07	3.41E-13	1.93E-06

表 12：在例 5.6 中使用 SP-RaNN-P 时，不同 m 的误差，其中 $N_c = 5460$、$r_1 = r_2 = 1$、$r_3 = 0.5$ 以及 $\gamma = 100$。

- 案例 3：L形区域

我们考虑一个 L 形 aped区域$\Omega = (-1,\ 1)^2 \setminus \big((0,\ 1) \times (-1,\ 0)\big)$，其中 $H_a = N = R_m = 1$。精确

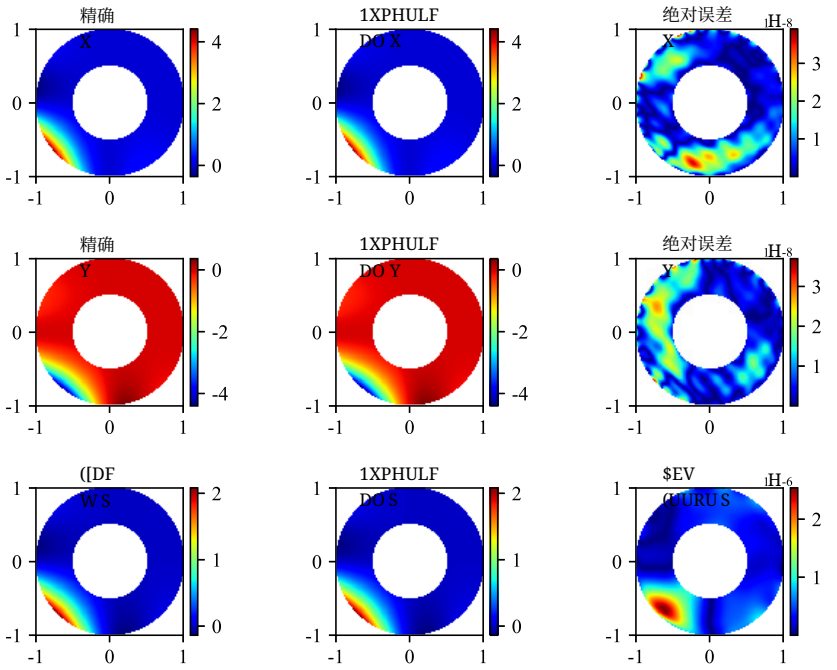


图 11：案例 2 中的速度场、压力场和绝对误差（例 5.6），其中 $m = 800$, $\gamma = 100$, $N_c = 5460$, $r_1 = r_2 = 1$和 $r_3 = 0.5$ 。

解由下式给出

$$\begin{cases} u = x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1), \quad v = y^2(y-1)^2x(x-1)(2x-1), \\ B_1 = \dfrac{5}{3}r^{\frac{2}{3}}\sin\left(\dfrac{2}{3}\theta\right), \quad B_2 = \dfrac{5}{3}r^{\frac{2}{3}}\cos\left(\dfrac{2}{3}\theta\right), \\ p = x(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)y(y-1)\left(y-\dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

对于这种配置，采用节点有限元的传统有限元方法可能会产生伪解。相比之下，我们提出的方法保持稳定，不会出现此类伪影。然而，由于解析解在再入角附近的正则性较低，强形式的数值精度略有下降。为进一步提高精度，可以采用 [43]和 [47]中提出的弱形式。

为解决这一问题，我们按照 [9], 采用区域分解策略，将区域 Ω 划分为三个互不重叠的子区域:

$$\Omega_1 = (0,1)^2, \quad \Omega_2 = (-1,0)\times(0,1), \quad \Omega_3 = (-1,0)^2.$$

在每个子区域中，采用两个 SP-RaNN，$\mathbf{u}_\rho^i$ 和$\mathbf{B}_\rho^i$，分别近似局部速度和磁场，$\mathbf{u}^i$ 和 $\mathbf{B}^i$ ($i = 1,2,3$)。通过在子区域的公共边界上施加 C^1-连续性条件，确保界面处的连续性。采用单个全局 RaNN（p_ρ）近似整个区域 Ω 上的压力 p 。$\mathbf{u}_\rho^i$ 和 $\mathbf{B}_\rho^i$ 的网络参数分别设为 $r_\mathbf{u} = 1$ 和 $r_\mathbf{B} = 4$ （ $i = 1,2,3$ ），每个网络包含 $r_p = 0.5$ 和 $m = 400$ 个神经元。共进行了八次皮卡德

迭代。所得磁场分布及绝对误差如图 12 所示。

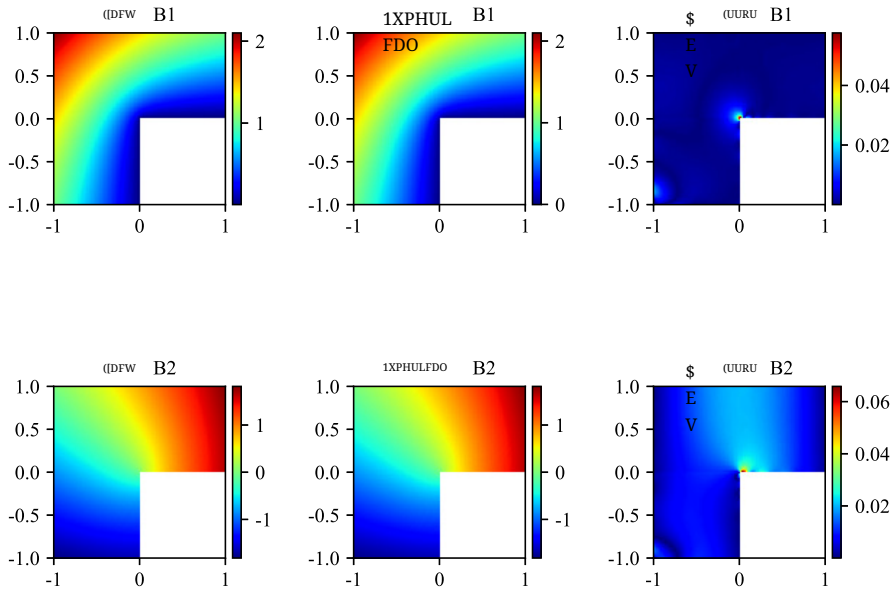


图 12：案例 3 中例 5.6 的磁场分量和绝对误差，其中 $m = 400$, $\gamma = 100$, $N_c = 5200$, $r_{\mathbf{u}} = 1$, $r_{\mathbf{B}} = 4$, $r_p = 0.5$ 。

例5.7（非定常三维磁流体力学方程）本例着重求解非定常三维 *MHD* 方程(2.3)。在 *[20],* 中，介绍了一种完全无散有限元方法来求解这些方程。我们测试与例 *5.2* 相同的案例，见 *[20],*，其中雷诺数 $= \sigma = \mu = 1$, 区域$\Omega = (0, 1)^3$，时间区间为 $I = (0, 5)$。解析解为：

$$\mathbf{u} = (\sin(t)\sin(y), 0, 0)^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{B} = (0, 0, \cos(\mathrm{t} + \mathrm{x}))^{\mathrm{T}}, \ \mathrm{p} = \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} - 1.5.$$

为评估 SP-RaNN 的性能，我们将其与 [20] 在时间区间 $I = (0, 0.2)$上的完全无散有限元方法进行比较。我们使用两个 SP-RaNN 来近似$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{B}$，并单独使用一个 RaNN 来处理 p，参数设为 $r_1 = r_2 = r_3 = 0.1$ 和 $N_c = 3072$ （包含$N_1 = 2400$ 个内部点和 $N_2 = 672$ 个边界点）。我们使用 SP-RaNN 方法进行三次非线性迭代步，采用皮卡德方法或 Newton 方法。表 13 给出了 SP-RaNN 在 $t = 0.2$处的数值误差，表 14 则给出了采用四面体网格的完全无散有限元方法在 $t = 0.2$处的数值误差。在该方法中，$\mathbf{u}$ 使用 $H(\mathrm{div}, \Omega)$-协调有限元进行近似， p由完全不连续有限元表示，磁势$\mathbf{A}$ 使用 $H(\mathrm{curl}, \Omega)$-协调边元进行近似，磁场则计算为$\mathbf{B}_h = \mathrm{curl}\mathbf{A}_h$。值得注意的是，SP-RaNN 采用时空方法，而完全无散有限元方法采用 Crank-Nicolson 格式。此外， [20] 采用线性外推格式来处理非线性项。从表 13 和表 14 的结果可以看出，与有限元方法相比，SP-RaNN 以更少的自由度实现了更高的精度。

方法	DoFs	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\rho\|_0$	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\rho\|_1$	$\|p-p_\rho\|_0$	$\|\mathbf{B}-\mathbf{B}_\rho\|_0$	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}_\rho\|_0$	$\|\nabla\cdot\mathbf{B}_\rho\|_0$	时间（s）
皮卡德	300	3.73E-04	3.61E-03	4.19E-03	5.07E-04	1.31E-14	2.16E-14	0.84
	600	1.55E-04	1.31E-03	1.79E-03	2.04E-04	2.51E-13	4.03E-13	1.48
	1200	4.10E-06	3.66E-05	8.35E-05	3.56E-06	7.84E-13	1.03E-12	3.39
	2400	8.93E-07	8.75E-06	1.96E-05	6.76E-07	1.54E-12	2.47E-12	10.72
	4800	5.31E-07	4.79E-06	1.12E-05	4.06E-07	1.13E-12	1.88E-12	51.24
牛顿	300	3.88E-04	3.49E-03	4.46E-03	5.02E-04	1.55E-14	2.45E-14	1.05
	600	1.78E-04	1.43E-03	2.15E-03	2.28E-04	2.47E-13	4.22E-13	1.82
	1200	3.84E-06	3.47E-05	8.14E-05	3.33E-06	7.49E-13	1.25E-12	4.01
	2400	9.28E-07	8.99E-06	2.04E-05	8.91E-07	1.55E-12	2.67E-12	12.84
	4800	4.02E-07	3.81E-06	8.91E-06	3.69E-07	1.11E-12	1.82E-12	55.78

表 13：SP-RaNN 在 $t=0.2$ 处的误差和 CPU 时间，其中 $N_c=3072$，$r_1=r_2=r_3=0.1$ 和 $\gamma=100$见例5.7。

	$(\tau,\ h)$	DoFs	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_0$	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{1,\ h}$	$\|p-p_h\|_0$	$\|\mathbf{B}-\mathbf{B}_h\|_0$	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}_h\|_0$	$\|\nabla\cdot\mathbf{B}_h\|_0$
k=1	$(\tau_0,\ h_0)$	604	3.87E-04	1.29E-02	1.77E-01	7.50E-02	1.71E-09	0
	$(\tau_0,\ h_0)/2$	4184	1.02E-04	6.23E-03	8.86E-02	3.69E-02	5.28E-10	0
	$(\tau_0, h_0)/4$	31024	2.83E-05	3.04E-03	4.43E-02	1.83E-02	7.27E-11	0
	$(\tau_0,\ h_0)/8$	238688	7.84E-06	1.50E-03	2.21E-02	9.08E-03	5.18E-10	0
k=2	$(\tau_0,\ h_0)$	1062	3.71E-04	1.28E-02	1.77E-01	5.14E-03	1.19E-09	4.43E-16
	$(\tau_0,\ h_0)/2$	7380	9.61E-05	6.19E-03	8.84E-02	1.26E-03	3.40E-10	1.33E-15
	$(\tau_0,\ h_0)/4$	54792	2.69E-05	3.02E-03	4.42E-02	3.12E-04	1.23E-10	5.42E-15
	$(\tau_0,\ h_0)/8$	421776	7.49E-06	1.48E-03	2.21E-02	7.75E-05	7.61E-10	2.12E-14

表 14：完全无散有限元方法（[20]）在 $t=0.2$ 下，采用不同时间步长 τ 和网格尺寸 h 时的误差。此处，k 表示用于近似 $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B}_h$ = 旋度$\mathbf{A}_h$) 的分段多项式的阶数，而使用一阶元和分段常数函数分别近似$\mathbf{u}$ 和 p。

我们还评估了 SP-RaNN 在更长时间区间 $I=(0,\ 5)$上的性能。与前文相同，我们使用两个 SP-RaNN 来近似$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{B}$，并单独使用一个 RaNN 来处理 p，参数为 $r_1=r_2=r_3=0.3$和 $N_c=3072$。表 15 展示了 SP-RaNN 的时空 L^2 和半-H^1 误差，证明了该方法在长时间模拟中的效率和精度。

方法	DoFs	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\rho\|_0^{st}$	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\rho\|_1^{st}$	$\|p-p_\rho\|_0^{st}$	$\|\mathbf{B}-\mathbf{B}_\rho\|_0^{st}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{u}_\rho\|_0^{st}$	$\|\nabla\cdot\mathbf{B}_\rho\|_0^{st}$	时间（秒）
皮卡德	300	7.51E-02	3.25E-01	2.81E-01	1.32E-01	4.23E-15	6.91E-15	0.83
	600	1.52E-02	9.88E-02	9.87E-02	2.94E-02	1.29E-14	1.97E-14	1.57
	1200	2.13E-03	1.48E-02	1.56E-02	4.17E-03	2.37E-14	3.89E-14	3.49
	2400	3.30E-04	2.50E-03	2.94E-03	7.42E-04	7.77E-14	1.28E-13	11.45
	4800	3.96E-05	3.50E-04	3.40E-04	1.39E-04	2.76E-13	4.66E-13	52.64
牛顿	300	7.29E-02	3.39E-01	2.57E-01	1.24E-01	4.75E-15	6.58E-15	1.08
	600	1.55E-02	9.72E-02	9.37E-02	3.21E-02	1.32E-14	2.00E-14	1.87
	1200	2.12E-03	1.43E-02	1.50E-02	4.87E-03	2.44E-14	4.04E-14	4.09
	2400	3.30E-04	2.54E-03	2.89E-03	7.77E-04	7.59E-14	1.26E-13	12.46
	4800	5.18E-05	4.28E-04	4.48E-04	1.53E-04	2.60E-13	5.09E-13	57.26

表15：SP-RaNN 在 $(0,1)^3\times(0,5)$ 上的时空误差和 CPU 时间，其中 $N_c=3072$, $r_1=r_2=r_3=0.3$ 和 $\gamma=100$，见例5.7。

6 总结

通过将无散条件直接嵌入随机神经网络的结构中，我们提出了一种用于求解不可压缩磁流体动力学问题的结构保持随机神经网络方法。这种特殊设计确保 SP-RaNN 在每个点上天然满足无散条件，从而保留问题的物理和数学结构。

SP-Ra NN 方法因其保结构特性而具有若干显著优势：

自动无散： 该方法无需额外约束，从而确保物理一致性，并以更少的自由度实现更高的精度。

高效优化： 由于训练过程仅涉及求解线性优化问题，与标准神经网络方法相比，SP-RaNN 可降低优化误差和计算成本。

减少误差累积： 采用时空框架，SP-RaNN 可避免迭代时间步进方案通常引入的误差累积。

鲁棒性： 对于雷诺数和哈特曼数较高的问题，SP-RaNN 仍能保持稳定且有效。

未来的研究方向包括：

1. 将 [7]中提出的自适应增长 RaNN 框架与 SP-RaNN 相结合，进一步提升效率。2. 对收敛速度开展理论分析，以建立严格的性能保证。3. 设计针对特定物理问题的其他保结构神经网络，确保不同应用中的数学结构一致性。

这种保结构方法不仅提升了数值解的准确性和效率，还为解决复杂物理问题奠定了基础，同时遵循这些问题固有的数学结构。

参考文献

[1] A. R. Barron，S形函数叠加的通用逼近界，*IEEE* 信息论汇刊**39**（1993），930-945。[2] J. Chen、X. Chi、W. E 和 Z. Yang，连接传统算法与基于机器学习的偏微分方程求解算法：随机特征方法，机器学习杂志**1** （2022），268-298。[3] T. Chen 和 H. Chen，具有任意激活函数的神经网络对非线性算子的通用逼近及其在动力系统中的应用，*IEEE* 神经网络汇刊**6**（1995），911–917。[4] B. Cockburn、G. Kanschat 和 D. Sch¨otzau，关于纳维–斯托克斯方程的间断伽辽金无散解的注记，《科学计算杂志》**31**（2007），61-73。[5] B. Cockburn、F. Li 和 C. Shu，麦克斯韦方程的局部无散间断Galerkin方法，计算物理学杂志**194**（2004），588-610。[6] H. Dang 和 F. Wang，结合混合间断 Petrov-Galerkin 方法求解斯托克斯–达西流的局部随机神经网络，流体物理学**36** （2024），087138。[7] H. Dang、F. Wang 和 S. Jiang，用于求解偏微分方程的自适应增长随机神经网络，（2024），arXiv:2408.17225v2[8] P. A. Davidson，《磁流体动力学导论》，剑桥：剑桥大学出版社，2001。[9] S. Dong 和 Z. Li，局部极限学习机与区域分解：求解线性和非线性偏微分方程，《应用力学与工程中的计算机方法》**387**（2021），114129。[10] S. Dong 和 Y. Wang。利用随机权重神经网络求解逆参数偏微分方程问题的方法。计算物理学杂志**489**（2023），112263。[11] X. Dong 和 Y. He，三维不可压磁流体动力学的克兰克–尼科尔森外推格式的最优收敛性分析，计算机与应用数学**76**（2018），2678–2700。[12] W. E 和 B. Yu，深度 Ritz 方法：一种用于求解变分问题的基于深度学习的数值算法，数学与统计学通讯**6** （2017），6–12。[13] H. Gao 和 W. Qiu。一种用于动力学不可压磁流体动力学方程的半隐式能量守恒有限元方法，《应用力学与工程中的计算机方法》**346**（2019），982-1001。[14] J. F. Gerbeau，一种用于不可压磁流体动力学方程的稳定化有限元方法，数值数学**87** （2000），83-111。

[15] J. F. Gerbeau、C. L. Bris 和 T. Leli`evre，《液态金属磁流体动力学的数学方法》，《数值数学与科学计算》，牛津大学出版社，纽约，2006。[16] U. Ghia、K.N. Ghia 和 C.T. Shin，利用纳维–斯托克斯方程和多重网格方法求解不可压流的高雷诺数解，《计算物理学杂志》48（1982），387-411。[17] C. Greif、D. Li、D. Sch¨otzau 和 X. Wei，一种速度场严格无散的不可压磁流体动力学混合有限元方法，《应用力学与工程中的计算机方法》199（2010），2840-2855。[18] J. L. Guermond 和 P. D. Minev，涉及导电区域和绝缘区域的磁流体动力学问题的混合有限元逼近：三维情形，《偏微分方程数值方法》19（2003），709-731。[19] M.D. Gunzburger、A.J. Meir 和 J.S. Peterson，定常不可压磁流体动力学方程解的存在性、唯一性及有限元逼近，《计算数学》56（1991），523-563。[20] R. Hiptmair、L. Li、S. Mao 和 W. Zheng，一种用于磁流体动力学方程的完全无散有限元方法，《应用科学中的数学模型与方法》28（2018），659-695。[21] R. Hiptmair 和 J. Xu，H(curl) 和 H(div)空间中的节点辅助空间预条件，SIAM数值分析杂志45（2007），2483-2509。[22] Kaibo Hu 和 Jinchao Xu，定常磁流体动力学模型的保结构有限元方法，《计算数学》88（2015），553-581。[23] Kaibo Hu、Yicong Ma 和 Jinchao Xu，精确保持 $\nabla \cdot \mathrm{B} = 0$ 的磁流体动力学模型稳定有限元方法，《数值数学》135（2017），371-396。[24] G. Huang、D. Wang 和 Y. Lan，极限学习机：综述，《国际机器学习与控制论杂志》2（2011），107–122。[25] G. Huang、Q. Zhu 和 C. K. Siew，极限学习机：理论与应用，《神经计算》70（2006），489–501。[26] J. Huang 和 S. Zhang，一种用于某类三维麦克斯韦方程的无散有限元方法，《应用数值数学》62（2012），802-813。[27] B. Igelnik 和 Y.H. Pao，自适应函数逼近中基函数的随机选择与函数连接网络，IEEE 神经网络汇刊6（1995），1320–1329。[28] S. Jardin，《等离子体物理计算方法》，CRC出版社，2010。[29] B-N. Jiang、J. Wu 和 LA. Povinelli，计算电磁学中伪解的起源，《计算物理学杂志》125（1996），104-123。[30] X. Jin、S. Cai、H. Li 和 G. E. Karniadakis，NSFnets（纳维–斯托克斯流网络）：用于不可压纳维–斯托克斯方程的物理信息神经网络，《计算物理学杂志》426（2021），109951。[31] V. John、A. Linke、C. Merdon、M. Neilan 和 L. G. Rebholz，关于不可压流混合有限元方法中的散度约束，SIAM评论59（2017），492-544。

[32] L. Li、D. Zhang 和 W. Zheng, 《一种用于不可压缩MHD方程的约束传输无散度有限元方法》, 计算物理学杂志 428（2021）, 109980。[33] L. Li 和 W. Zheng, 《一种用于三维定常不可压缩MHD方程有限元逼近的稳健求解器》, 计算物理学杂志 351（2017）, 254-270。[34] Y. Li 和 F. Wang, 《用于界面问题的结合有限差分法的局部随机神经网络》, 计算物理学杂志 529（2025）, 113847。[35] Linke A, 《十字形区域中的碰撞——一个稳态二维 Navier–Stokes 示例，展示了质量守恒在计算流体力学中的重要性》, 《应用力学与工程中的计算机方法》198（2009）, 3278-3286。[36] A. Linke, 《亥姆霍兹分解在不可压流混合方法中的作用及一种新的变分犯罪》, 《应用力学与工程中的计算机方法》268（2014）, 782-800。[37] U. M¨uller 和 L. B¨uhler, 《通道与容器中的磁流体动力学》, 施普林格出版社，柏林, 2001。[38]A. Neufeld 和 P. Schmocker, 《随机神经网络的通用逼近性质》, arXiv:2312.08410。[39] Y. Pao、G. Park 和 D. Sobajic, 《随机向量函数链接网络的学习与泛化特性》, 《神经计算》6（1994）, 163–180。[40] C. Pozrikidis, 《理论与计算流体动力学导论》, 牛津大学出版社，1997。[41] M. Raissi、P. Perdikaris 和 G. E. Karniadakis, 《物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题与反问题的深度学习框架》, 计算物理学杂志 378（2019）, 686–707。[42] D. Sch¨otzau, 《定常不可压磁流体动力学的混合有限元方法》, 《数值数学》96（2004）, 771-800。[43] Y. Shang、F. Wang 和 J. Sun, 《结合 Petrov–Galerkin 方法求解线性和非线性偏微分方程的随机神经网络》, 《非线性科学与数值模拟通讯》127（2023）, 107518。[44] Y. Shang 和 F. Wang, 《结合 Petrov–Galerkin 方法求解线弹性方程与 Navier–Stokes 方程的随机神经网络》, 《工程力学杂志》150（2024）, 04024010。[45] J. Sirignano 和 K. Spiliopoulos, 《DGM：一种求解偏微分方程的深度学习算法》, 计算物理学杂志 375（2018）, 1339–1364。[46] H. Su、S. Mao 和 X. Feng, 《不同黏度条件下稳态不可压缩磁流体动力学方程的基于罚函数的迭代方法的最优误差估计》, 《科学计算杂志》79（2019）, 1078-1110。[47] J. Sun、S. Dong 和 F. Wang, 《结合间断伽辽金方法求解偏微分方程的局部随机神经网络》, 《计算与应用数学杂志》445（2024）, 115830。[48]J. Sun 和 F. Wang, 《结合间断伽辽金方法求解扩散黏性波动方程的局部随机神经网络》, 《计算机与数学及其应用》154（2024）, 128-137。

[49] G. T´oth, 《激波捕捉磁流体力学代码中的 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 约束》，计算物理学杂志 **161**（2000），605-652。[50] Z. Xie、B. Wang 和 Z. Zhang, 《麦克斯韦方程的时空间断伽辽金方法》，计算物理通讯 **14** （2013），916–939。[51] X. Xu 和 S. Zhang, 《一种新的无散插值算子及其在 Darcy-Stokes-Brinkman 方程中的应用》，*SIAM*科学计算杂志 **32** （2010），855-874。[52] G. Zhang、Y. He 和 Y. Zhang, 《三维不可压缩磁流体力学方程欧拉半隐式格式的无条件收敛性》，*IMA*数值分析杂志 **35**（2015），767- 801。[53] G. Zhang、Y. He 和 Y. Zhang, 《定常不可压磁流体动力学的流线扩散有限元方法》，偏微分方程数值方法 **30**（2014），1877-1901。[54] M. Zhang、T. Zhang 和 X. Xie, 《用于不可压缩磁流体流动的稳健的全局无散弱 Galerkin 有限元方法》，《非线性科学与数值模拟通讯》 **131**（2024），107810。[55] Y. Zhang 和 Y. Hou, 《磁流体流动克兰克–尼科尔森外推时间离散格式的数值分析》，偏微分方程数值方法 **31**（2015），2169- 2208。