arXiv:2603.01105v1 [quant-ph] 1 Mar 2026

多体奇偶性界与总关联

JAMES TIAN

摘要。本文研究由张量积希尔伯特空间上的局部自伴压缩算子之和构成的多体可观测量。此类和的平方具有奇偶结构：将每个局部乘积分解为对易子部分和反对易子部分后，奇数奇偶性的项相互抵消，仅剩偶数奇偶性贡献。由此可得到一个范数界，该界由一族基于局部对易子范数和反对易子范数构造的成对缺陷权重给出。这些缺陷权重还控制一个信息论估计。结果表明，可观测量期望值超过乘积态阈值的超额，必然携带一定量的总关联。在每个局部族均满足自然的 ℓ^2型界时，该乘积态阈值可显式表示，从而得到总关联的完全显式下界。一个简单的退极化示例说明了局部噪声下由此产生的衰减机制。

目录

1. 引言2. 多体奇偶性界 3. 静态关联界 1
4. 局部噪声下的关联衰减 5. 结论 参考文献 3
7
13
17
18

1. 引言

设 $H_1, \dots, H_n$ 为复希尔伯特空间，并设

$$a_1^{(r)}, \dots, a_m^{(r)} \in B(H_r), \qquad r \in \{1, \dots, n\},$$

为自伴压缩算子。我们研究多体求和

$$B = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_i^{(n)} \in B(H_1 \otimes \cdots \otimes H_n).$$

这类形式的算子自然会作为由局部可观测量构造的贝尔型算子出现，也更一般地可视为经典带符号和的张量值类比。由此便产生两个问题。首先，如何用局部对易子和反对易子结构来控制 $\|B\|$

2020 数学学科分类。 主要分类：81P40；次要分类：47N50、81P45、81Q10。关键词与短语。多方可观测量、总相关、算子不等式、张量积希尔伯特空间、奇偶性界、量子相对熵、退极化噪声。

？ 其次，当量子态 ρ满足

$$\operatorname{Tr}(\rho B) > \operatorname{Tr}(\sigma B)$$

对于每个乘积态 σ，这在多大程度上已经量化了总关联

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) := D\left(\rho \| \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n\right),$$

其中 ρ_r 表示 ρ 在 H_r上的边缘态?

这些问题的背景来自两条相关的研究脉络。一方面，研究者从优化、算子不等式和量子信息的角度，探讨了贝尔不等式、多体见证以及相关的正性问题；例如参见 [KMVccW24、ZLH22、GJLH22]。另一方面，相对熵、张量化以及量子马尔可夫演化的定量估计，推动了信息论与算子代数不等式领域不断涌现新的研究成果；例如参见 [BCR22、GR22、LaR22、GJLL25]。本文在这一图景中占据的位置有所不同。我们不试图对贝尔不等式进行分类，也不优化某个固定的多体关联不等式族。相反，我们提炼出 B 自身平方中的一种算子理论机制，并利用它从局部交换子和反对易子数据推导出总关联的显式下界。

起点在于， B^2 带有内建的奇偶结构。展开B^2之后，混合项并不会导向任意一族张量表达式。在每个位点，局部乘积 $a_i^{(r)} a_j^{(r)}$ 分解为其对易子部分与反对易子部分。将这些局部片段作张量积时，奇奇偶贡献相互抵消，仅有偶奇偶扇区得以保留。由此产生由无序对 $\{i,j\}$索引的一族典范缺陷权重 $\phi_{ij}^{(n)}$ ，并导出范数估计

$$\|B\|^2 \leq m + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \phi_{ij}^{(n)}$$

已在命题2.1中得到证明。这是本文的基本结构结果。

同一缺陷量随后进入论证的信息论部分。令 $\mathcal{P}$ 表示 $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ 上的乘积态集合，并定义乘积阈值

$$\Gamma_{\mathrm{prod}}(B) := \sup_{\sigma \in \mathcal{P}} \operatorname{Tr}(\sigma B).$$

对于量子态 ρ，超额

$$\Delta_B(\rho) := \left(\operatorname{Tr}(\rho B) - \Gamma_{\mathrm{prod}}(B)\right)_+$$

衡量 B 在 ρ 上的取值超出乘积阈值的程度。定理3.1 表明， $\Delta_B(\rho)$ 取正值并非没有代价：它既意味着在迹范数意义下与乘积态类相分离，也意味着具有确定数量的总关联。由此，控制 $\|B\|$ 的同一分母也控制着超出乘积阈值的信息代价。这部分论证在精神上接近近期关于非交换情形中准因子化、张量化与熵不等式的工作；例如参见 [BCR22、LaR22、GR22、JL22]。

要使这一结果具有实用性，还需要控制阈值本身。因此，我们接下来对与每个局部族相关联的期望向量施加一个简单的二次界 $\{a_i^{(r)}\}$。在这一假设下，定理3.4 给出

关于 $\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)$的显式上界。结合定理 3.1，可得显式的相关性估计

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) \geq \frac{1}{2} \frac{\left(\mathrm{Tr}(\rho B) - \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2}\right)_+^2}{m + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \phi_{ij}^{(n)}}$$

在推论 3.5中。在这种形式下，这两个结构量的作用变得清晰。分子度量的是超出显式乘积阈值的超额，而分母度量的是B的混合对易子/反对易子复杂度。

我们还给出一个简单的动力学示例。对于局部去极化半群，中心化观测量是海森堡演化的本征向量，因此多体可观测量 B 会按一个精确的标量因子衰减。这给出了一个具体模型，其中超额 Δ_B（ρ_t）超出乘积阈值的量，以及相应的总关联下界，都可以沿一条自然的局部噪声流被显式追踪。我们纳入该例子，主要是为了表明奇偶性缺陷分母在静态设定之外仍然可见。关于熵衰减、退相干率以及量子信道和量子马尔可夫半群之几何特征的近期相关工作，例如参见 [BJL+21, BR22, BCG+24, GR24]。

从这个角度看，本文的贡献在于分离出 B^2 的奇偶展开以及由此得到的缺陷权重 $\phi_{ij}^{(n)}$，并进而推导出随之而来的相关性界。一旦该展开确立，便可从算子控制过渡到信息论控制；在局部期望向量满足一致的ℓ^2 界时，即可得到总关联的完全显式下界。

本文据此组织如下：第2 节建立奇偶展开与范数界，而第3 节推导由此得到的静态关联估计，包括乘积阈值界以及总关联的显式下界。第4 节随后将这些估计应用于乘积量子马尔可夫半群与局部去极化噪声。最后一节包含若干简要结论。

2. 多体奇偶性界

我们从基本的多体范数估计入手。要点在于，在展开 B^2之后，混合项在各张量因子上允许一种典范的偶奇偶分解。这产生了一族自然的成对权重 $\phi_{ij}^{(n)}$，并将算子界化为对易子与反对易子缺陷的有限和。在二体情形 $n = 2$ 中，这恢复了来自 [Tia25],的完全图不等式，而此处我们在一般的多体设定下进行讨论。

命题 2.1。对于每个 $r \in \{1, \ldots, n\}$，设 H_r 为复希尔伯特空间。设

$$a_1^{(r)}, \ldots, a_m^{(r)} \in B(H_r)$$

为自伴压缩算子。令

$$\mathcal{H} := H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$$

并定义

$$B := \sum_{i=1}^{m} a_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_i^{(n)} \in B(\mathcal{H}).$$

对于 $1 \le i < j \le m$，定义

$$\phi_{ij}^{(n)} := 2^{1-n} \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |S| \ even}} \prod_{r \in S} \left\| \left[a_i^{(r)}, a_j^{(r)} \right] \right\| \prod_{r \notin S} \left\| \left\{ a_i^{(r)}, a_j^{(r)} \right\} \right\|.$$

Then

$$\|B\|^2 \le m + \sum_{1 \le i < j \le m} \phi_{ij}^{(n)}. \tag{2.1}$$

证明。对于每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，设

$$u_i := a_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_i^{(n)} \in B(\mathcal{H}).$$

由于每个 $a_i^{(r)}$ 都是自伴的，u_i 也是自伴的。由于每个 $a_i^{(r)}$ 都是压缩算子，我们还有

$$\|u_i\| = \prod_{r=1}^{n} \|a_i^{(r)}\| \le 1.$$

因此 $B = \sum_{i=1}^{m} u_i$ 和

$$B^2 = \sum_{i=1}^{m} u_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le m} (u_i u_j + u_j u_i).$$

取范数并使用三角不等式，得到

$$\|B\|^2 = \left\|B^2\right\| \le \left\| \sum\nolimits_{i=1}^{m} u_i^2 \right\| + \sum\nolimits_{1 \le i < j \le m} \|u_i u_j + u_j u_i\|.$$

由于 $\left\|u_i^2\right\| \le \|u_i\|^2 \le 1$，我们得到

$$\left\| \sum\nolimits_{i=1}^{m} u_i^2 \right\| \le \sum_{i=1}^{m} \left\|u_i^2\right\| \le m.$$

接下来只需估计混合项。

固定 $1 \le i < j \le m$。对于每个 $r \in \{1, \dots, n\}$，记

$$A_{ij}^{(r)} := \left\{ a_i^{(r)}, a_j^{(r)} \right\}, \qquad C_{ij}^{(r)} := \left[a_i^{(r)}, a_j^{(r)} \right].$$

Then

$$a_i^{(r)} a_j^{(r)} = \frac{1}{2} \left(A_{ij}^{(r)} + C_{ij}^{(r)} \right), \qquad a_j^{(r)} a_i^{(r)} = \frac{1}{2} \left(A_{ij}^{(r)} - C_{ij}^{(r)} \right).$$

因此

$$u_i u_j = 2^{-n} \bigotimes_{r=1}^{n} \left(A_{ij}^{(r)} + C_{ij}^{(r)} \right),$$

and

$$u_j u_i = 2^{-n} \bigotimes_{r=1}^{n} \left(A_{ij}^{(r)} - C_{ij}^{(r)} \right).$$

现在展开这两个张量积。对于每个子集 $S \subseteq \{1, \dots, n\}$，记

$$T_S := \bigotimes_{r=1}^{n} X_r^{(S)},$$

其中

$$X_r^{(S)} = \begin{cases} C_{ij}^{(r)}, & r \in S, \\ A_{ij}^{(r)}, & r \notin S. \end{cases}$$

Then

$$u_i u_j = 2^{-n} \sum_{S\subseteq\{1,\dots,n\}} T_S,$$

而

$$u_j u_i = 2^{-n} \sum_{S\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{|S|} T_S.$$

因此

$$u_i u_j + u_j u_i = 2^{-n} \sum_{S\subseteq\{1,\dots,n\}} \left(1 + (-1)^{|S|}\right) T_S.$$

若 $|S|$ 为奇数，则 $1+(-1)^{|S|}=0$。若 $|S|$ 为偶数，则 $1+(-1)^{|S|}=2$。因此

$$u_i u_j + u_j u_i = 2^{1-n} \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |S| \text{ even}}} T_S.$$

取范数并利用三角不等式可得

$$\|u_i u_j + u_j u_i\| \le 2^{1-n} \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |S| \text{ even}}} \|T_S\|.$$

由此可得

$$\|T_S\| = \prod_{r\in S} \|C_{ij}^{(r)}\| \prod_{r\notin S} \|A_{ij}^{(r)}\|.$$

代入 $A_{ij}^{(r)}$ 和 $C_{ij}^{(r)}$ 的定义，我们得到

$$\|u_i u_j + u_j u_i\| \le \phi_{ij}^{(n)}.$$

回到 B^2的展开式，我们得到（2.1）。 □

下面给出一个简单的三量子比特泡利字符串示例，说明即使在真正的三体情形下，（2.1）中的估计也可以达到紧界。

例 2.2。设 $n=3$，设 $H_1=H_2=H_3=\mathbb{C}^2$，并设

$$X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \qquad Y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \qquad Z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

为泡利矩阵。定义

$$u_1 := X\otimes Y\otimes X, \qquad u_2 := X\otimes Y\otimes Z, \qquad u_3 := Z\otimes Z\otimes Z,$$

并令

$$B := u_1+u_2+u_3.$$

每个 u_i 都是自伴酉算子，因此 $\|u_i\|=1$。

我们首先计算$\|B\|^2$。由于对每个 i都有 $u_i^2=I$，我们得到

$$B^2 = 3I + (u_1u_2+u_2u_1) + (u_1u_3+u_3u_1) + (u_2u_3+u_3u_2).$$

Now

$$u_1u_2 = (XX)\otimes(YY)\otimes(XZ) = I\otimes I\otimes(XZ),$$

而

$$u_2u_1 = (XX)\otimes(YY)\otimes(ZX) = I\otimes I\otimes(ZX).$$

由于 $XZ=-ZX$，因此可得

$$u_1u_2+u_2u_1=0.$$

类似地,

$$u_1u_3 = (XZ)\otimes(YZ)\otimes(XZ), \qquad u_3u_1 = (ZX)\otimes(ZY)\otimes(ZX),$$

并且由于 X, Z 彼此反对易，且 Y, Z 彼此反对易，这三次局部符号变化给出

$$u_1u_3 = -u_3u_1,$$

因此

$$u_1u_3 + u_3u_1 = 0.$$

对于剩余的一对，我们得到

$$u_2u_3 = (XZ)\otimes(YZ)\otimes(ZZ), \qquad u_3u_2 = (ZX)\otimes(ZY)\otimes(ZZ).$$

恰好有两个局部符号变化，因此 u_2 与 u_3 对易:

$$u_2u_3 = u_3u_2.$$

因此

$$B^2 = 3I + 2u_2u_3.$$

由于 u_2u_3 同样是自伴酉算子，其谱包含于 $\{-1, 1\}$。由此可得

$$\operatorname{spec}\left(B^2\right) = \{1, 5\}, \qquad \|B\|^2 = 5.$$

我们现在计算命题2.1中的缺陷权重。对于泡利矩阵，局部交换子-反交换子范数为

$$\|\{P, P\}\| = 2, \qquad \|i\,[P, P]\| = 0,$$

并且对于不同的泡利矩阵 $P \neq Q$,

$$\|\{P, Q\}\| = 0, \qquad \|i\,[P, Q]\| = 2.$$

对于数对(1，2)，局部数对为

$$\left(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}\right) = (X, X), \qquad \left(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}\right) = (Y, Y), \qquad \left(a_1^{(3)}, a_2^{(3)}\right) = (X, Z).$$

因此

$$\left\|\left\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}\right\}\right\| = 2, \qquad \left\|\left\{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}\right\}\right\| = 2, \qquad \left\|\left\{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}\right\}\right\| = 0,$$

and

$$\left\|i\left[a_1^{(1)}, a_2^{(1)}\right]\right\| = 0, \qquad \left\|i\left[a_1^{(2)}, a_2^{(2)}\right]\right\| = 0, \qquad \left\|i\left[a_1^{(3)}, a_2^{(3)}\right]\right\| = 2.$$

由于 $n = 3$, $\{1, 2, 3\}$ 的偶数子集为

$$\varnothing, \qquad \{1, 2\}, \qquad \{1, 3\}, \qquad \{2, 3\}.$$

因此， $\phi_{12}^{(3)}$ 的定义求和中的每一项都至少包含一个为零的因子:

$$\phi_{12}^{(3)} = 2^{-2}\left[(2\cdot 2\cdot 0) + (0\cdot 0\cdot 0) + (0\cdot 2\cdot 2) + (2\cdot 0\cdot 2)\right] = 0.$$

对于数对 (1，3)，局部数对为

$$(X, Z), \qquad (Y, Z), \qquad (X, Z),$$

因此所有反对易子范数均为零，且所有对易子范数均等于 2。同样，每个偶宇称项至少包含一个反对易子因子，因此

$$\phi_{13}^{(3)} = 0.$$

对于数对 (2,3)，局部数对为

$$(X,Z)\,,\qquad (Y,Z)\,,\qquad (Z,Z)\,.$$

因此

$$\left\|\left\{a_2^{(1)},a_3^{(1)}\right\}\right\|=0,\qquad \left\|\left\{a_2^{(2)},a_3^{(2)}\right\}\right\|=0,\qquad \left\|\left\{a_2^{(3)},a_3^{(3)}\right\}\right\|=2,$$

and

$$\left\|i\left[a_2^{(1)},a_3^{(1)}\right]\right\|=2,\qquad \left\|i\left[a_2^{(2)},a_3^{(2)}\right]\right\|=2,\qquad \left\|i\left[a_2^{(3)},a_3^{(3)}\right]\right\|=0.$$

所以

$$\phi_{23}^{(3)}=2^{-2}\left[(0\cdot 0\cdot 2)+(2\cdot 2\cdot 2)+(2\cdot 2\cdot 0)+(0\cdot 2\cdot 0)\right]=2.$$

我们得出结论

$$\sum_{1\le i<j\le 3}\phi_{ij}^{(3)}=0+0+2=2.$$

由于 $m=3$，命题 2.1 给出

$$\|B\|^2\le m+\sum_{1\le i<j\le 3}\phi_{ij}^{(3)}=3+2=5.$$

将其与上面的精确计算结合起来，我们得到

$$\|B\|^2=5=m+\sum_{1\le i<j\le 3}\phi_{ij}^{(3)}.$$

因此，在这个三部示例中，命题 2.1 中的估计是尖锐的。

3. 静态关联界

命题 2.1 中的范数估计立即导出一个信息论推论。一旦 $\|B\|$ 能够用奇偶缺陷 $\phi_{ij}^{(n)}$ 来控制，任何对 B 的期望值超过乘积阈值的量子态，都必定与乘积态集合保持定量的距离。特别地，若 $\Delta_B(\rho)$ 如（3.3）所示取正值，则总关联具有非零下界。

定理 3.1。 在命题 *2.1*的设定下，令

$$\mathcal{P}:=\left\{\sigma^{(1)}\otimes\cdots\otimes\sigma^{(n)}:\sigma^{(r)}\ \textit{is a state on}\ H_r\ \textit{for each}\ r\right\}\tag{3.1}$$

表示 $\mathcal{H}$ 上乘积态的集合。定义乘积阈值

$$\Gamma_{\mathrm{prod}}(B):=\sup_{\sigma\in\mathcal{P}}\mathrm{Tr}\,(\sigma B)\,,\tag{3.2}$$

并且，对于 $\mathcal{H}$ 上的量子态 ρ，超额为

$$\Delta_B(\rho):=\left(\mathrm{Tr}\,(\rho B)-\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)\right)_+.\tag{3.3}$$

则以下结论成立。

(1) 对于 $\mathcal{H}$ 上的每个量子态 ρ，

$$\inf_{\sigma\in\mathcal{P}}\|\rho-\sigma\|_1\ge\frac{\Delta_B(\rho)}{\left(m+\sum_{1\le i<j\le m}\phi_{ij}^{(n)}\right)^{1/2}}.\tag{3.4}$$

(2) 设 ρ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个量子态，并令 ρ_r 表示其在 H_r 上的边缘态。定义总关联

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) := D(\rho\|\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n),$$

其中 $D(\cdot\|\cdot)$ 表示以自然对数为底的量子相对熵。于是

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) \geq \frac{1}{2}\frac{\Delta_B(\rho)^2}{m + \sum_{1\leq i<j\leq m}\phi_{ij}^{(n)}}. \tag{3.5}$$

证明。我们先证明（1）。固定一个量子态 ρ 于 $\mathcal{H}$。若 $\Delta_B(\rho) = 0$ 则无需证明，因此假设 $\Delta_B(\rho) > 0$。对任意 $\sigma \in \mathcal{P}$ 根据定义（3.2），

$$\mathrm{Tr}(\rho B) - \Gamma_{\mathrm{prod}}(B) \leq \mathrm{Tr}(\rho B) - \mathrm{Tr}(\sigma B),$$

因此

$$\Delta_B(\rho) = (\mathrm{Tr}(\rho B) - \Gamma_{\mathrm{prod}}(B))_+ \leq |\mathrm{Tr}(\rho B) - \mathrm{Tr}(\sigma B)| = |\mathrm{Tr}((\rho-\sigma)B)|.$$

利用迹范数与算子范数之间的对偶关系可得

$$\Delta_B(\rho) \leq \|B\|\,\|\rho-\sigma\|_1.$$

对 $\sigma \in \mathcal{P}$ 取下确界可得

$$\Delta_B(\rho) \leq \|B\| \inf_{\sigma\in\mathcal{P}} \|\rho-\sigma\|_1.$$

将其与（2.1）结合可得（3.4）。

现在证明（2）。设 ρ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个量子态，ρ_r 是其在 H_r 上的边缘态。令

$$\sigma_* := \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n \in \mathcal{P}.$$

Then

$$\inf_{\sigma\in\mathcal{P}} \|\rho-\sigma\|_1 \leq \|\rho-\sigma_*\|_1.$$

自然对数形式的量子 Pinsker 不等式表明

$$D(\rho\|\sigma_*) \geq \frac{1}{2}\|\rho-\sigma_*\|_1^2.$$

由于

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) = D(\rho\|\sigma_*),$$

我们得到

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) \geq \frac{1}{2}\|\rho-\sigma_*\|_1^2 \geq \frac{1}{2}\left(\inf_{\sigma\in\mathcal{P}}\|\rho-\sigma\|_1\right)^2.$$

将（3.4）应用于右侧可得

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) \geq \frac{1}{2}\frac{\Delta_B(\rho)^2}{m + \sum_{1\leq i<j\leq m}\phi_{ij}^{(n)}},$$

这就证明了（3.5）。 □

例 3.2（CHSH 总关联界）。我们在二体情形下说明定理 3.1 $n = 2$ 使用标准 CHSH 算子。令 $H_1 = H_2 = \mathbb{C}^2$ 并令 X，Z 为泡利矩阵

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

定义局部可观测量

$$A_1 := Z, \qquad A_2 := X, \qquad B_1 := \frac{Z+X}{\sqrt{2}}, \qquad B_2 := \frac{Z-X}{\sqrt{2}}.$$

A_1， A_2， B_1， B_2 均为自伴酉算子，因此也是自伴压缩算子。

我们构造 CHSH 算子

$$\mathcal{B} := A_1 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_2 + A_2 \otimes B_1 - A_2 \otimes B_2$$

于 $H_1 \otimes H_2$。为将其写成命题 2.1 的形式，记

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{4} a_i^{(1)} \otimes a_i^{(2)},$$

令 $a_1^{(1)} = A_1$， $a_1^{(2)} = B_1$， $a_2^{(1)} = A_1$， $a_2^{(2)} = B_2$， $a_3^{(1)} = A_2$， $a_3^{(2)} = B_1$， $a_4^{(1)} = A_2$， $a_4^{(2)} = -B_2$。每个 $a_i^{(r)}$ 都是自伴压缩算子，因此命题 2.1 和定理 3.1 的条件成立，其中 $n = 2$ 和 $m = 4$ 和 $B = \mathcal{B}$。

(i) 乘积阈值。令 $\mathcal{P}$ 表示 $H_1 \otimes H_2$ 上如（3.1）所定义的乘积态集合。对于乘积态 $\sigma = \sigma^{(1)} \otimes \sigma^{(2)}$，令 $r = (r_x, r_y, r_z)$ 和 $s = (s_x, s_y, s_z)$ 分别为 $\sigma^{(1)}$ 和 $\sigma^{(2)}$的布洛赫向量，因此

$$\mathrm{Tr}\left(\sigma^{(1)} X\right) = r_x, \quad \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(1)} Z\right) = r_z,$$
$$\mathrm{Tr}\left(\sigma^{(2)} X\right) = s_x, \quad \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(2)} Z\right) = s_z,$$

其中 $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \le 1$ 和 $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 \le 1$。于是

$$\mathrm{Tr}\left(\sigma^{(2)} B_1\right) = \frac{s_z + s_x}{\sqrt{2}}, \qquad \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(2)} B_2\right) = \frac{s_z - s_x}{\sqrt{2}}.$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\sigma\mathcal{B}\right) &= \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(1)} A_1\right) \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(2)}\left(B_1 + B_2\right)\right) + \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(1)} A_2\right) \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(2)}\left(B_1 - B_2\right)\right) \\ &= r_z\sqrt{2}s_z + r_x\sqrt{2}s_x = \sqrt{2}\left(r_x s_x + r_z s_z\right).\end{aligned}$$

令 $r' = (r_x, r_z)$ 和 $s' = (s_x, s_z)$。由于 $|r'| \le 1$ 和 $|s'| \le 1$，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\left|\mathrm{Tr}\left(\sigma\mathcal{B}\right)\right| \le \sqrt{2}\left|r' \cdot s'\right| \le \sqrt{2}.$$

Thus

$$\Gamma_{\mathrm{prod}}(\mathcal{B}) = \sup_{\sigma \in \mathcal{P}} \mathrm{Tr}\left(\sigma\mathcal{B}\right) \le \sqrt{2}.$$

例如，当 r' 和 s' 是单位向量且在 x–z平面内平行时，等号成立，因此有

$$\Gamma_{\mathrm{prod}}(\mathcal{B}) = \sqrt{2}.$$

这里， $\Gamma_{\mathrm{prod}}(\mathcal{B})$ 是在固定这组局部可观测量时，对量子乘积态取上确界所得。

(ii) 具有严格正超额的量子态。众所周知（并且可以直接验证），存在一个双量子比特态 ρ_*，使得

$$\mathrm{Tr}\left(\rho_*\mathcal{B}\right) = 2\sqrt{2}$$

并且 $\|\mathcal{B}\| = 2\sqrt{2}$；一种选择是最大纠缠贝尔态 $\rho_* = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$，其中

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right).$$

对于这个量子态，

$$\Delta_{\mathcal{B}}(\rho_*) = \left(\mathrm{Tr}\left(\rho_*\mathcal{B}\right) - \Gamma_{\mathrm{prod}}(\mathcal{B})\right)_+ = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)_+ = \sqrt{2} > 0.$$

(*iii*) 缺陷分母。在此例中 $n=2$，因此对于 $1\le i<j\le 4$ 命题2.1 中的缺陷权重具有以下形式

$$\phi_{ij}^{(2)}=\frac{1}{2}\left\|\left\{a_i^{(1)},a_j^{(1)}\right\}\right\|\left\|\left\{a_i^{(2)},a_j^{(2)}\right\}\right\|+\frac{1}{2}\left\|\left[a_i^{(1)},a_j^{(1)}\right]\right\|\left\|\left[a_i^{(2)},a_j^{(2)}\right]\right\|.$$

利用泡利关系

$$\{P,P\}=2I,\quad [P,P]=0,\qquad \{P,Q\}=0,\quad [P,Q]\neq 0 \text{ for } P\neq Q,$$

以及 A_1、A_2、B_1、B_2 是 X 和 Z的线性组合这一事实，经过简短计算可得

$$\{B_1,B_2\}=0,\qquad \|[B_1,B_2]\|=2,$$

and

$$\phi_{14}^{(2)}=\phi_{23}^{(2)}=2,\qquad \phi_{12}^{(2)}=\phi_{13}^{(2)}=\phi_{24}^{(2)}=\phi_{34}^{(2)}=0.$$

因此

$$\sum_{1\le i<j\le 4}\phi_{ij}^{(2)}=4,\qquad m+\sum_{1\le i<j\le 4}\phi_{ij}^{(2)}=4+4=8.$$

(iv) 信息论下界。设 ρ_1 和 ρ_2 是 ρ_* 在H_1 和 H_2上的边缘态，并设

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho_*)=D\left(\rho_*\|\rho_1\otimes\rho_2\right)$$

为总关联。应用定理3.1 并结合 $B=\mathcal{B}$ 和 $\rho=\rho_*$ 可得

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho_*)\ge\frac{1}{2}\frac{\Delta_{\mathcal{B}}(\rho_*)^2}{m+\sum_{1\le i<j\le 4}\phi_{ij}^{(2)}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{8}=\frac{1}{8}.$$

因此，在这一 CHSH 构型中，ρ_* 超过乘积阈值 $\sqrt{2}$ 这一事实，已足以推出一个严格为正的显式下界

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho_*)\ge\frac{1}{8}$$

关于其总关联。

注3.3。示例 $n=2$ 中对 $n=2$ 的限制 $n=2$ 仅为便于明确表达。对于$n>2$，可以通过将 B 上的双部 CHSH 算子 $H_1\otimes H_2$ 替换为

$$\widetilde{B}:=B\otimes I_{H_3}\otimes\cdots\otimes I_{H_n},$$

然后考虑如下形式的量子态

$$\rho_*\otimes\tau_3\otimes\cdots\otimes\tau_n.$$

对于这一张量扩展构造，仍有 $\Delta_{\widetilde{B}}(\rho_*\otimes\tau_3\otimes\cdots\otimes\tau_n)>0$，且缺陷分母

$$m+\sum_{1\le i<j\le m}\phi_{ij}^{(n)}$$

与二体情形一致。构造真正的多体示例，使所有张量因子都非平凡地参与其中，并且乘积阈值和缺陷分母均可通过闭式形式求得，这需要对乘积态进行更复杂的优化，超出了本文的研究范围。

定理所给出的信息界3.1仍取决于乘积阈值$\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)$。下一个定理表明，在对局部期望向量施加简单的一致 ℓ^2 界的条件下，该阈值由一个纯局部量控制。

定理 3.4。 在命题 *2.1*的设定下，假设 $n \geq 2$。令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{H}$ 上的乘积态集合，定义如 (3.1)所示。假设对每个 $r \in \{1, \ldots, n\}$，都存在常数 $C_r \geq 0$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(r)} a_i^{(r)}\right) \right|^2 \leq C_r \tag{3.6}$$

对任意量子态 $\sigma^{(r)}$ 在 H_r上。因此，(3.2) 中的乘积阈值满足

$$\Gamma_{\mathrm{prod}}(B) \leq \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2}. \tag{3.7}$$

证明。令 $\sigma = \sigma^{(1)} \otimes \cdots \otimes \sigma^{(n)} \in \mathcal{P}$为一个乘积态。对每个 $r \in \{1, \ldots, n\}$和 $i \in \{1, \ldots, m\}$，令

$$x_i^{(r)} := \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(r)} a_i^{(r)}\right), \qquad x^{(r)} := \left(x_1^{(r)}, \ldots, x_m^{(r)}\right) \in \mathbb{C}^m.$$

Then

$$\mathrm{Tr}(\sigma B) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{r=1}^{n} x_i^{(r)}.$$

根据（3.6），每个 $x^{(r)}$ 均满足

$$\|x^{(r)}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_i^{(r)}|^2 \leq C_r, \qquad \text{so} \qquad \|x^{(r)}\|_2 \leq C_r^{1/2}.$$

我们估计多重线性形式的绝对值。对每个 i,

$$\left|\prod_{r=1}^{n} x_i^{(r)}\right| = |x_i^{(1)} x_i^{(2)}| \prod_{r=3}^{n} |x_i^{(r)}| \leq |x_i^{(1)} x_i^{(2)}| \prod_{r=3}^{n} \|x^{(r)}\|_2,$$

由于 $|x_i^{(r)}| \leq \|x^{(r)}\|_2$ 对每个 r都成立。对 i 求和可得

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\prod_{r=1}^{n} x_i^{(r)}\right| \leq \left(\prod_{r=3}^{n} \|x^{(r)}\|_2\right) \sum_{i=1}^{m} |x_i^{(1)} x_i^{(2)}|.$$

根据柯西-施瓦茨不等式,

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i^{(1)} x_i^{(2)}| \leq \|x^{(1)}\|_2 \|x^{(2)}\|_2,$$

因此总的来说

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\prod_{r=1}^{n} x_i^{(r)}\right| \leq \prod_{r=1}^{n} \|x^{(r)}\|_2 \leq \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2}.$$

由此可得

$$|\mathrm{Tr}(\sigma B)| \leq \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2}$$

对每个乘积态 $\sigma \in \mathcal{P}$均成立。特别是,

$$\Gamma_{\mathrm{prod}}(B) = \sup_{\sigma \in \mathcal{P}} \mathrm{Tr}(\sigma B) \leq \sup_{\sigma \in \mathcal{P}} |\mathrm{Tr}(\sigma B)| \leq \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2},$$

这就证明了该定理。 □

将乘积阈值估计与定理3.1 相结合，可得相关性界的显式形式。

推论 3.5。 在定理 *3.4*的设定下，设 ρ 是定义在 $\mathcal{H}$上的量子态。那么

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) \geq \frac{1}{2}\frac{\left(\mathrm{Tr}(\rho B) - \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2}\right)_+^2}{m + \sum_{1\leq i<j\leq m} \phi_{ij}^{(n)}}.$$

证明。 由定理 3.4,

$$\Gamma_{\mathrm{prod}}(B) \leq \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2}.$$

因此

$$\Delta_B(\rho) = (\mathrm{Tr}(\rho B) - \Gamma_{\mathrm{prod}}(B))_+ \geq \left(\mathrm{Tr}(\rho B) - \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2}\right)_+.$$

应用定理 3.1，我们得到

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) \geq \frac{1}{2}\frac{\Delta_B(\rho)^2}{m + \sum_{1\leq i<j\leq m} \phi_{ij}^{(n)}} \geq \frac{1}{2}\frac{\left(\mathrm{Tr}(\rho B) - \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2}\right)_+^2}{m + \sum_{1\leq i<j\leq m} \phi_{ij}^{(n)}},$$

这就证明了该推论。 □

例 3.6。 我们给出一个具体的族，其中位点条件（3.6）以一个尖锐且非平凡的常数成立，并且由此得到的乘积阈值和缺陷分母可以显式求出。

假设每个局部希尔伯特空间都是量子比特， $H_r = \mathbb{C}^2$, $r \in \{1, \ldots, n\}$，并令

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

为泡利矩阵。对于每个位点 r，令

$$a_1^{(r)} := X, \qquad a_2^{(r)} := Y, \qquad a_3^{(r)} := Z.$$

因此 $m = 3$，每个 $a_i^{(r)}$ 都是自伴酉算子，并且

$$B = \sum_{i=1}^{3} a_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_i^{(n)} = X^{\otimes n} + Y^{\otimes n} + Z^{\otimes n}.$$

我们首先验证（3.6）。令 $\sigma^{(r)}$ 为 H_r上的量子态。将 $\sigma^{(r)}$ 写成布洛赫形式,

$$\sigma^{(r)} = \frac{1}{2}\left(I + x_r X + y_r Y + z_r Z\right),$$

其中 $x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 \leq 1$，我们有

$$\mathrm{Tr}\left(\sigma^{(r)} X\right) = x_r, \qquad \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(r)} Y\right) = y_r, \qquad \mathrm{Tr}\left(\sigma^{(r)} Z\right) = z_r.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{3} \left|\mathrm{Tr}\left(\sigma^{(r)} a_i^{(r)}\right)\right|^2 = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 \leq 1.$$

因此，(3.6) 在每个位点上都以精确常数成立

$$C_r = 1, \qquad r \in \{1, \ldots, n\}.$$

由(3.7)可得

$$\Gamma_{\mathrm{prod}}(B) \le \prod_{r=1}^{n} C_r^{1/2} = 1.$$

另一方面，若 $\omega_0 := |0\rangle\langle 0|$ 表示投影到 Z 的 $+1$ 特征子空间上的秩一投影，则对于乘积态 $\sigma_0 := \omega_0^{\otimes n}$，我们有

$$\mathrm{Tr}\left(\sigma_0 X^{\otimes n}\right) = 0, \qquad \mathrm{Tr}\left(\sigma_0 Y^{\otimes n}\right) = 0, \qquad \mathrm{Tr}\left(\sigma_0 Z^{\otimes n}\right) = 1,$$

因此 $\mathrm{Tr}(\sigma_0 B) = 1$。所以 $\Gamma_{\mathrm{prod}}(B) = 1$。

接下来，我们根据命题 2.1计算缺陷分母。对于每一对$1 \le i < j \le 3$，局部对 $\left(a_i^{(r)}, a_j^{(r)}\right)$ 由两个不同的泡利矩阵组成。因此，对于每个位点 r，

$$\left\|\left\{a_i^{(r)}, a_j^{(r)}\right\}\right\| = 0, \qquad \left\|\left[a_i^{(r)}, a_j^{(r)}\right]\right\| = 2.$$

因此，在 $\phi_{ij}^{(n)}$ 的定义求和中，除非 $S = \{1, \dots, n\}$，否则每一项都为零。该子集的基数为偶数，当且仅当 n 为偶数。因此

$$\phi_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & n \text{ odd}, \\ 2^{1-n} \cdot 2^n = 2, & n \text{ even}, \end{cases} \qquad 1 \le i < j \le 3.$$

由于这样的数对有 $\binom{3}{2} = 3$ 个，我们得到

$$m + \sum_{1 \le i < j \le 3} \phi_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 3, & n \text{ odd}, \\ 9, & n \text{ even}. \end{cases}$$

因此，对于 $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ 上的任意量子态 ρ，

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) \ge \begin{cases} \frac{1}{6}\left(\mathrm{Tr}(\rho B) - 1\right)_+^2, & n \text{ odd}, \\ \frac{1}{18}\left(\mathrm{Tr}(\rho B) - 1\right)_+^2, & n \text{ even}, \end{cases}$$

由推论 3.5。

因此，这种泡利配置给出了一个具体的族，其中位点条件（3.6）、乘积阈值、奇偶缺陷分母以及由此得到的静态关联界都明确可见。

4. 局部噪声下的关联衰减

接下来，我们将静态估计转向动力学情形。前述关于总关联的下界表明，在乘积量子马尔可夫半群下，I_{tot} 的任何定量衰减都会转化为超额 $\Delta_B(\rho_t)$ 相对于乘积阈值的相应衰减估计。特别地，固定容差 $\varepsilon > 0$后，我们可以得到时间 t 的显式上界，使得在这些时间内，$\Delta_B(\rho_t)$仍可能超过 ε；我们将其称为超额高于乘积阈值的生存时间界。由此可得一个趋向阈值的衰减估计，该估计由半群速率以及定理 3.1中出现的同一奇偶缺陷分母给出，使我们的结果处于量子马尔可夫半群定量熵衰减与函数不等式的一般框架之中；例如参见 [BJL+21、BR22、BCG+24、GR24]。

命题 4.1。在命题*2.1* 和定理*3.1*的设定下，设$(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$是作用于 $\mathcal{H}$上的完全正保迹映射单参数半群，并记

$$\rho_t := \mathcal{T}_t(\rho_0)$$

对于初始态 ρ_0 的演化。假设存在常数 $\lambda > 0$，使得对于 $\mathcal{H}$ 上的每个初始态 ρ_0 以及每个 $t \geq 0$，总关联

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho) := D(\rho \| \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n)$$

满足

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho_t) \leq \mathrm{e}^{-2\lambda t} I_{\mathrm{tot}}(\rho_0). \tag{4.1}$$

令 B 为命题 *2.1*中的多体可观测量，并令 $\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)$、 $\Delta_B(\rho)$分别为定理 *3.1*中的相应乘积阈值和超额。则对于每个初始态，下列结论成立 ρ_0。

(1) 对于每个 $t \geq 0$,

$$\Delta_B(\rho_t) \leq \mathrm{e}^{-\lambda t} \left(2I_{\mathrm{tot}}(\rho_0)\right)^{1/2} \left(m + \sum_{1\leq i<j\leq m} \phi_{ij}^{(n)}\right)^{1/2}. \tag{4.2}$$

特别地，令 $\varepsilon > 0$ 并假设 $\Delta_B(\rho_0) > 0$。那么每当 $t \geq 0$满足

$$t \geq \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{\left(2I_{\mathrm{tot}}(\rho_0)\right)^{1/2} \left(m + \sum_{1\leq i<j\leq m} \phi_{ij}^{(n)}\right)^{1/2}}{\varepsilon} \right) \tag{4.3}$$

就有 $\Delta_B(\rho_t) \leq \varepsilon$。

(2) 超额量的平方关于时间可积，并满足

$$\int_0^\infty \Delta_B(\rho_t)^2 \, dt \leq \frac{1}{\lambda} I_{\mathrm{tot}}(\rho_0) \left(m + \sum_{1\leq i<j\leq m} \phi_{ij}^{(n)}\right). \tag{4.4}$$

也就是说，沿着轨道$(\rho_t)_{t\geq 0}$ ，由 B 可检测到的、超过乘积阈值的超额量的平方的总时间积分，受到初始总关联和奇偶缺陷分母的控制。

证明。 固定 $\mathcal{H}$ 上的一个初始态 ρ_0 ，并令 $\rho_t := \mathcal{T}_t(\rho_0)$。为简便起见，记

$$M := m + \sum_{1\leq i<j\leq m} \phi_{ij}^{(n)}.$$

我们首先证明（1）。根据定理3.1，将其应用于 ρ_t，可得

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho_t) \geq \frac{1}{2} \frac{\Delta_B(\rho_t)^2}{M}$$

对每个 $t \geq 0$ 都成立。等价地，

$$\Delta_B(\rho_t)^2 \leq 2M I_{\mathrm{tot}}(\rho_t).$$

利用衰减假设（4.1）可得

$$\Delta_B(\rho_t)^2 \leq 2M \mathrm{e}^{-2\lambda t} I_{\mathrm{tot}}(\rho_0),$$

再取平方根可得

$$\Delta_B\left(\rho_t\right) \leq \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(2 I_{\mathrm{tot}}\left(\rho_0\right)\right)^{1/2} M^{1/2},$$

即4.2。

对于生存时间的陈述，设 $\varepsilon>0$ 并假设 $\Delta_B(\rho_0)>0$。由 (4.2) 可得

$$\Delta_B\left(\rho_t\right) \leq \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(2 I_{\mathrm{tot}}\left(\rho_0\right)\right)^{1/2} M^{1/2}.$$

因此，满足以下条件的每个时刻 $t \geq 0$

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(2 I_{\mathrm{tot}}\left(\rho_0\right)\right)^{1/2} M^{1/2} \leq \varepsilon$$

满足 $\Delta_B(\rho_t) \leq \varepsilon$。对 t 求解该不等式可得

$$t \geq \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{\left(2 I_{\mathrm{tot}}\left(\rho_0\right)\right)^{1/2} M^{1/2}}{\varepsilon}\right),$$

即（4.3）。

现在证明（2）。再次从

$$\Delta_B\left(\rho_t\right)^2 \leq 2 M I_{\mathrm{tot}}\left(\rho_t\right),$$

并利用（4.1），可得

$$\Delta_B\left(\rho_t\right)^2 \leq 2 M \mathrm{e}^{-2 \lambda t} I_{\mathrm{tot}}\left(\rho_0\right), \qquad t \geq 0.$$

对 $t \in [0, \infty)$ 两边积分，得到

$$\int_0^{\infty} \Delta_B\left(\rho_t\right)^2 dt \leq 2 M I_{\mathrm{tot}}\left(\rho_0\right) \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2 \lambda t} dt.$$

由于 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2 \lambda t} dt=\frac{1}{2 \lambda}$，由此可得（4.4）。 □

对于局部去极化噪声，前述命题可以完全显式地表述。在这种情况下，海森堡演化在中心化观测量上呈对角作用，因此多体可观测量 B 会按一个精确的标量因子衰减。这给出了一个具体模型，其中超额 $\Delta_B(\rho_t)$ 以及总关联的相应下界都可以写成闭式。

例4.2。进一步假设每个 H_r 都是有限维的，并令

$$\tau_r(X):=\frac{1}{\dim H_r} \operatorname{Tr}(X), \qquad X \in B\left(H_r\right),$$

为 $B(H_r)$ 上的归一化迹。对于每个 $r \in\{1, \ldots, n\}$，令 $\left(\mathcal{T}_{(t}^{r}\right)_{t \geq 0})$ 为其海森堡作用为下式的去极化半群

$$\mathcal{T}_t^{(r)*}(X)=\mathrm{e}^{-t} X+\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right) \tau_r(X) I_{H_r}, \qquad X \in B\left(H_r\right).$$

Set

$$\mathcal{T}_t:=\mathcal{T}_t^{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_t^{(n)}$$

关于态

$$\mathcal{H}=H_1 \otimes \cdots \otimes H_n.$$

Let

$$B=\sum_{i=1}^m a_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_i^{(n)}$$

与命题2.1中的情况相同，并且还假设

$$\tau_r\left(a_i^{(r)}\right)=0 \qquad \text{for all } r\in\{1,\ldots,n\} \text{ and } i\in\{1,\ldots,m\}.$$

设 $\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)$ 与 Δ_B 如定理3.1所述。则下列结论成立。

(1) 可观测量 B 按如下精确公式演化

$$\mathcal{T}_t^*(B)=\mathrm{e}^{-nt}B.$$

因此，对任意初始态 ρ_0 及任意 $t\geq 0$，若 $\rho_t:=\mathcal{T}_t(\rho_0)$，则

$$\mathrm{Tr}(\rho_t B)=\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{Tr}(\rho_0 B).$$

(2) 对每个初始态 ρ_0 以及每个 $t\geq 0$,

$$\Delta_B(\rho_t)=\left(\mathrm{Tr}(\rho_t B)-\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)\right)_+=\left(\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{Tr}(\rho_0 B)-\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)\right)_+.$$

若 $\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)>0$ 且 $\mathrm{Tr}(\rho_0 B)>\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)$，则

$$\Delta_B(\rho_t)>0 \qquad \text{for all } 0\leq t<\frac{1}{n}\log\left(\frac{\mathrm{Tr}(\rho_0 B)}{\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)}\right).$$

若 $\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)\leq 0$ 且 $\mathrm{Tr}(\rho_0 B)>\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)$，则

$$\Delta_B(\rho_t)>0 \qquad \text{for all } t\geq 0.$$

(3) 对每个初始态 ρ_0 以及每个 $t\geq 0$,

$$I_{\mathrm{tot}}(\rho_t)\geq\frac{1}{2}\frac{\left(\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{Tr}(\rho_0 B)-\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)\right)_+^2}{m+\sum_{1\leq i<j\leq m}\phi_{ij}^{(n)}},$$

其中 $I_{\mathrm{tot}}(\rho_t)$ 是定理 3.1中的总关联。

证明。 对于每个 r 和 i，中心化假设给出

$$\mathcal{T}_t^{(r)*}\left(a_i^{(r)}\right)=\mathrm{e}^{-t}a_i^{(r)}$$

因为 $\tau_r\left(a_i^{(r)}\right)=0$。因此

$$\mathcal{T}_t^*\left(a_i^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_i^{(n)}\right)=\mathrm{e}^{-nt}a_i^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_i^{(n)},$$

并对 i 求和，得到

$$\mathcal{T}_t^*(B)=\mathrm{e}^{-nt}B.$$

因此，对于每个初始态 ρ_0,

$$\mathrm{Tr}(\rho_t B)=\mathrm{Tr}(\rho_0\mathcal{T}_t^*(B))=\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{Tr}(\rho_0 B),$$

这就证明了 (1)。

结论 (2) 可由定义直接得出

$$\Delta_B(\rho_t)=\left(\mathrm{Tr}(\rho_t B)-\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)\right)_+$$

以及由 (1) 得到的公式。如果 $\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)>0$，那么

$$\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{Tr}(\rho_0 B)>\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)$$

等价于

$$t<\frac{1}{n}\log\left(\frac{\mathrm{Tr}(\rho_0 B)}{\Gamma_{\mathrm{prod}}(B)}\right),$$

这给出了所述的正性区间。如果 $\Gamma_{\mathrm{prod}}(B) \leq 0$ 且 $\mathrm{Tr}(\rho_0 B) > \Gamma_{\mathrm{prod}}(B)$，那么对于每个 $t \geq 0$，我们有

$$\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{Tr}\left(\rho_0 B\right) \geq \min\left\{\mathrm{Tr}\left(\rho_0 B\right), 0\right\} > \Gamma_{\mathrm{prod}}\left(B\right),$$

因此，对所有 $t \geq 0$，$\Delta_B(\rho_t) > 0$。

最后，将恒等式 (2) 代入定理 3.1 的下界，即可得到 (3)。□

5. 结论

第 2 节的结果表明，多体求和

$$B = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_i^{(n)}$$

具有内在的奇偶结构。展开 B^2后，混合项不会产生任意的张量表达式族：奇奇偶贡献相互抵消，而剩余的偶奇偶扇区则给出缺陷权重 $\phi_{ij}^{(n)}$。这些缺陷权重以对易子和反对易子数据为依据，直接给出 B 的范数界，并提供了控制全文关联估计的分母。第2 节中的三体泡利示例表明，对于真正的多体构型，这个范数界已经可以是紧的。

同一个量将算子控制与总关联联系起来。一旦乘积阈值得到界定，B 的值只要超过该阈值，就会同时迫使其在迹范数意义下偏离乘积态类，并对 $I_{\mathrm{tot}}(\rho)$给出定量下界。在局部期望向量满足一致 ℓ^2 假设的条件下，这个下界可以完全明确地写出：分子为乘积阈值，分母为奇偶缺陷分母。第3 节中的 CHSH 构型和泡利位点族通过具体的二体和多体情形对此加以说明；在这些情形中，阈值、缺陷分母以及由此得到的总关联下界都可以用闭式计算。

第4 节的动力学结果表明，量子马尔可夫半群上 $I_{\mathrm{tot}}(\rho_t)$的任何定量衰减，都可以转化为超额 $\Delta_B(\rho_t)$高于乘积阈值时的逐点衰减界和时间积分界，且前因子中出现相同的奇偶缺陷分母。对于局部去极化噪声，可观测量 B 是海森堡演化的特征向量，因此 $\Delta_B(\rho_t)$以及总关联的相应下界都可以沿演化过程进行显式追踪。

一个自然的后续步骤是，找出这样一类算子族，使得这些常数C_r 能够通过更具内在性的方式来描述，例如借助正交关系、框架型条件，或每个位点上的克利福德型几何，并了解此类结构如何体现在缺陷权重 $\phi_{ij}^{(n)}$ 中。另一个值得探讨的问题是，其他局部半群能否导出B 或相关缺陷数据的显式演化公式，以及如何将 $\Delta_B(\rho_t)$ 的界与超越 I_{tot}指数衰减的函数不等式联系起来。关于熵衰减、此类可观测量的动力学以及量子信道几何特征的若干近期研究方向，可参见 [BCG+24，GR24、HRSF23、DPR22]。

参考文献

[BCG+24] Ivan Bardet、Ángela Capel、Li Gao、Angelo Lucia、David Pérez-García 和 Cambyse Rouzé, 《一维量子晶格上 Davies 半群的熵衰减》, 《数学物理通讯》405（2024）, 第 2 期, 论文编号 42, 51 页。MR 4703456[BCR22] Ivan Bardet、Ángela Capel 和 Cambyse Rouzé, 《非对易条件期望下相对熵的近似张量化》, 《亨利·庞加莱年鉴》23（2022）, 第 1 期, 101–140 页。MR 4361872[BJL+21] Ivan Bardet、Marius Junge、Nicholas Laracuente、Cambyse Rouzé 和 Daniel Stilck Fran¸ca, 《用于估计量子马尔可夫半群退相干时间与容量的群转移技术》, 《IEEE 信息论汇刊》67（2021）, 第 5 期, 2878–2909 页。MR 4282395[BR22] Ivan Bardet 和 Cambyse Rouzé, 《非本原量子马尔可夫半群的超收缩性与对数 Sobolev 不等式及退相干速率估计》, 《亨利·庞加莱年鉴》

23 2022 11, 3839 3903 4496596 ( ), 第 – [22]

期。MR DPR Giacomo De Palma 和 Cambyse Rouzé, 《量子集中不等式》, 《亨利 · 庞加莱年鉴》23（2022）, 第 9 期, 3391–3429 页。MR 4469657[GJLH22] Yu Guo、Yanping Jia、Xinping Li 和 Lizhong Huang, 《真正的多体纠缠度量》, 《物理学杂志 A》55（2022）, 第 14 期, 论文编号 145303, 18 页。MR 4411389[GJLL25] Li Gao、Marius Junge、Nicholas LaRacuente 和 Haojian Li, 《完全正性序与相对熵衰减》, 《Forum Mathematicum Sigma》13 31, 51 2025 4860032 ( ), 论文编号 e 。MR[GR22] Li Gao 和 Cambyse Rouzé, 《量子马尔可夫链的完全熵不等式》, 《数学力学与分析文献》

245 2022 1, 183 238 4444072 ( ), 第 [24] _____, **286** – 期。MR GR《量子信道的粗糙里奇曲率》, 《泛函分析杂志》（ 2024 ）, 第 8 期, 论文编号 110336, 57 页。MR 4704528[HRSF23] Christoph Hirche、Cambyse Rouzé 和 Daniel Stilck França, 《量子差分隐私：信息论视角》, 《IEEE 信息论汇刊》69（2023）, 第 9 期, 5771–5787 页（英文）。[JL22] Marius Junge 和 Nicholas LaRacuente, 《多元迹不等式、p-保真度及非迹情形下的普适恢复》, 《数学物理杂志》63（2022）, 第 12 期, 论文编号 122204, 43 页。MR 4520657[KMVccW24] Igor Klep、Victor Magron、Jurij Volˇ cič 和 Jie Wang, 《状态多项式：正性、优化与非线性贝尔不等式》, 《数学规划》207（2024）, 第 1–2 期, 645–691 页。MR 4783206[LaR22] Nicholas LaRacuente, 《子代数相对熵的准因子化与乘法比较》, 《数学物理杂志》63 122203, 37 2022 12, 4518485 ( ), 第 期, 论文编号 。MR[Tia25] James Tian, 《图结构算子不等式与 Tsirelson 型界》, arXiv.2511.01525（2025）。[ZLH22] Tinggui Zhang、Qiming Luo 和 Xiaofen Huang, 《在一类特殊双边测量下，高维量子态的量子贝尔非局域性无法共享》, 《量子信息处理》21（2022）, 第 10 期, 论文编号 350，13 页。MR 4496629

数学评论，535 W. WilliamSt，210室，安娜堡，MI48103，美国电子邮箱地址: james.ftian@gmail.com