arXiv:2603.01112v1 [math.NT] 1 Mar 2026

由和积恒等式产生的两类分拆中 t-钩个数的不等式

ARITRAM DHAR、BYUNGCHAN KIM、EUNMI KIM*与AE JA YEE

Abstract. 受近期关于由欧拉分拆恒等式产生的分拆中 t-钩个数研究的启发，我们研究来自第一罗杰斯-拉马努金恒等式与第一小G¨ollnitz恒等式的集合中的 t-钩个数。特别地，对于 $t = 1,2$，我们得到 t-钩个数的生成函数，并通过推导渐近公式证明 t-钩不等式。

1. Introduction

一个分拆 λ 是正整数的弱递减有限序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$。序列 λ 中出现的元素 λ_i 称为 λ的部件。 λ 的所有部件之和称为 λ 的大小，并记为 $|\lambda|$。若 λ的大小等于 n，则称 λ是 n 的一个分拆。

分拆理论中最基础、最简单的恒等式是欧拉提出的： n 的互异部分分拆数等于 n 的奇数部分分拆数 [2,推论 1.2]。这一恒等式在过去几个世纪里激发了大量研究，带来了各种推广与改进，其中包括 Glaisher [11] 和 Sylvester [19] 在 19 世纪末的工作、 Andrews [1], 的推广，以及 Andrews 、Kumar 和 YEE [5]近期的贡献。最近，Andrews 在证实 Beck [4, 20]的两个猜想时，从不同角度研究了欧拉恒等式。Andrews 的一项结果可改述如下 [4, 定理2]。

n 的互异部分分拆中，部分总数大于或等于 n 的奇数部分分拆中不同部分的总数。

这一不等式结果被 Ballantine、Burson、Craig、Folsom 和 Wen 推广为涉及分拆钩的不等式 [6]。

分拆 λ 的杨图 是一种图形表示方式，其中 λ 的部分 λ_i （称为格）排列成左对齐的行，第 i 行有 λ_i 个格。分拆$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_k)$ 的共轭分拆是 $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots\ldots, \lambda'_{\lambda_1})$，其杨图的列即为 λ 的行。对于分拆 λ 的杨图中位于第 i 行、第 j 列的格，其钩长 定义为 $h(i, j) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$。下方图 1 给出了一个分拆杨图及其钩长的示例。长度为 t 的钩称为 t-钩。

Date: 2026年3月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 11P82，05A17。
Key words and phrases. 整数分拆， t-钩，罗杰斯–拉曼努金恒等式，小 G¨ollnitz 恒等式，渐近公式。

* 通讯作者。

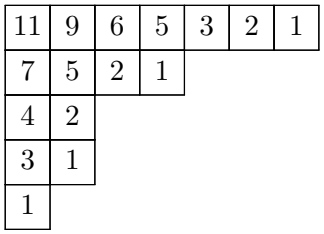

FIGURE 1. 分拆 $\lambda = (7, 4, 2, 2, 1)$ 的杨图及其钩长。

设 $a_t(n)$ 为所有将 n 拆分为奇数部分的分拆中 t-钩的总数， $b_t(n)$ 为所有将 n 拆分为互异部分的分拆中 t-钩的总数。安德鲁斯在 [4, 定理2] 中的结果表明

$$a_1(n) \geq b_1(n) \text{ for } n \geq 1. \tag{1.1}$$

注意到这个恒等式

$$\sum_{t\geq 1} a_t(n) = \sum_{t\geq 1} b_t(n) \text{ for } n \geq 1 \ ,$$

Ballantine、Burson、Craig、Folsom 和 Wen 猜想，当 $t > 1$ n 足够大时，Andrews 在 (1.1) 中给出的不等式反向成立 [6]。

猜想 1.1 (Ballantine–Burson–Craig–Folsom–Wen [6])。 对于每个整数 $t \geq 2$,

$$a_t(n) - b_t(n) \to \infty \ as \ n \to \infty. \tag{1.2}$$

该猜想中 $t = 2$，3 的情形由论文作者证明了 [6] ，其余情形则由 Craig、Dawsey 和 Han 解决 [9]。

欧拉恒等式将满足间隔条件（互异部分）的分拆与满足部分同余条件（奇数部分）的分拆联系起来，许多其他分拆恒等式也具有这一结构。本文的主要目标是将猜想 1.1 中关于钩偏差的问题推广到这类恒等式；更具体地说，我们将重点关注涉及间隔为2的条件的恒等式。

著名的罗杰斯–拉曼努金恒等式最初由罗杰斯证明，后来由拉马努金重新发现，是这类恒等式的典型例子，它将部分之间相差 2 的间隔条件与模 5 的同余条件联系起来。第一罗杰斯–拉曼努金恒等式指出， n 的部分之间相差 2 的分拆数，等于将 n 分拆为模 5 同余于 1 或 4 的部分所得的分拆数。

对于正整数 t，令 $r_{1,\ t}(n)$ 表示 n 的所有部分之间间隔至少为 2 的分拆中 t-钩的数量；令 $r_{2,\ t}(n)$ 表示 n 的所有部分同余于 1，4 模 5 的分拆中 t- 钩的数量。我们的第一个主要结果如下列不等式所示，它们与不等式 (1.1) 和 (1.2) 相当。

定理1.2. 当 n充分大时,

$$r_{1,1}(n) > r_{2,1}(n) \quad and \quad r_{1,2}(n) < r_{2,2}(n).$$

我们通过推导 $r_{1,\ 1}(n) r_{1,\ 2}(n) r_{2,\ 1}(n)$ 和 $r_{2,\ 2}(n)$ 的渐近公式来证明这些不等式，具体公式见以下定理。

定理 1.3。当 $n \to \infty$,

$$r_{1,1}(n) \sim r_{1,2}(n) \sim \frac{3^{\frac{1}{4}} \phi^{\frac{1}{2}} \log(\phi)}{2\pi} n^{-\frac{1}{4}} e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{15}}},$$

其中 ϕ是黄金比例。

定理 1.4。当 $n \to \infty$时，

$$r_{2,1}(n) \sim \frac{3^{\frac{1}{4}}\phi^{\frac{1}{2}}}{5\pi} n^{-\frac{1}{4}} e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{15}}} \qquad and \qquad r_{2,2}(n) \sim \frac{3^{\frac{5}{4}}\phi^{\frac{1}{2}}}{10\pi} n^{-\frac{1}{4}} e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{15}}}.$$

$r_{1,\ 1}(n) r_{1,\ 2}(n) r_{2,\ 1}(n)$ 和 $r_{2,\ 2}(n)$ 的生成函数要么是 Nahm 和的形式，要么是无穷乘积与有理函数的乘积。这里，Nahm 和是指： q-级数$\sum_{n\geq 0} A_n(q)$（其中 $A_{n+1}(q)/A_n(q)$是 q 的有理函数。Nahm 和在分拆理论、 q-级数和模形式 [8, 21, 22, 23]中发挥了重要作用。我们采用英厄姆陶伯定理（见第 2 节），因为这些 t钩数是弱递增的，而该方法只要求在 $q = 1$附近具有详细的渐近行为。尽管如此，研究 Nahm 和的渐近行为仍需要若干非平凡的估计。我们的证明思路类似于 Bringmann、Man、Rolen 和 Storzer 的思路 [8], ，但我们相应地简化了他们的证明，并给出了更多必要的细节。关于我们如何获得必要渐近分析的更多细节，见第 4 节。

我们的第二个例子是小格尔尼茨恒等式，它是模 8 [12] 的罗杰斯–拉曼努金恒等式的类似形式。第一个小格尔尼茨恒等式指出， n的部件之差为 2 且没有相差恰好为 2 的奇数部分的分拆数，等于 n 中部件同模 8 余 1、5 或 6 的分拆数。

对于正整数 t，令 $g_{1,t}(n)$ 表示所有部件间隔至少为 2 且不允许出现相差恰好为 2 的奇数部分的 n 分拆中 t-钩的数量。我们还令 $g_{2,t}(n)$ 表示所有部件同模 8 余 1、5、6 的 n 分拆中 t-钩的数量。我们的第二个结果是以下不等式。

定理 1.5。 当 n充分大时，

$$g_{1,1}(n) > g_{2,1}(n) \quad and \quad g_{1,2}(n) < g_{2,2}(n).$$

它们可由以下渐近公式推出。

定理 1.6。 当 $n \to \infty$，

$$g_{1,1}(n) \sim g_{1,2}(n) \sim \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2^{\frac{5}{4}}\pi} n^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}.$$

定理 1.7。当 $n \to \infty$，

$$g_{2,1}(n) \sim \frac{3}{2^{\frac{13}{4}}\pi} n^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \quad and \quad g_{2,2}(n) \sim \frac{1}{2^{\frac{5}{4}}\pi} n^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}.$$

相应的生成函数也不是纳姆和，就是一个无穷乘积与有理函数的乘积。由于生成函数更加复杂，因此还存在一些额外的技术难点。不过，证明的主要思路仍与之前相同。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾一些背景知识和文献中的必要结果。第 3 节和第 4 节分别给出第一类罗杰斯–拉马努金分拆的生成函数及其渐近分析。第 5 节和第 6 节研究第一个小 G¨ ollnitz 恒等式。最后一节则提出一些评论。

2. Preliminaries

对于复变量 a、 $a_1, a_2, \ldots, a_k$、 q 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$，常规的 q-Pochhammer 符号定义为

$$(a;q)_n := \prod_{i=0}^{n-1}(1-aq^i) \quad \text{and} \quad (a_1, a_2, \ldots, a_k; q)_n := \prod_{i=1}^{k}(a_i;q)_n.$$

在本文中，我们始终假设 $|q| < 1$。

我们需要推导 $1/(q;q)_n$ 的渐近公式，这可以借助 [8, 中的两个引理来实现：引理 2.1 和引理 2.2]。特别地， [8] 中的引理 2.2 是 Zagier 先前关于 $\zeta = 1$ 的结果 [10, 引理 2.1] 的复变量推广。

T在本文中，我们令 $q = e^{-z}$，其中 $z = \varepsilon(1+iy)$，且 $\varepsilon > 0$ 和 $y \in \mathbb{R}$.

引理 2.1 （[8,引理 引理 2.2])。 设 $z, w \in \mathbb{C}$ 满足 $\mathrm{Re}(z) > 0$, $|w| < 1$，且 $\nu \in \mathbb{C}$ 满足 $\nu z = o(1)$。那么

$$\mathrm{Log}\left((we^{-\nu z}q;q)_\infty\right) = -\mathrm{Li}_2(w)\frac{1}{z} - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}(1-w) - \frac{\nu^2 z}{2}\frac{w}{1-w} + \psi_w(\nu, z),$$

w这里，对于 $R \in \mathbb{N}$， $\psi_w(\nu, z)$在 $z \to 0$ 时有渐近展开，满足 $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\psi_w(\nu, z) = -\sum_{r=2}^{R-1}\left(B_r(-\nu) - \delta_{r,2}\nu^2\right)\mathrm{Li}_{2-r}(w)\frac{z^{r-1}}{r!} + O\left(z^{R-1}\right) \tag{2.1}$$

其中， $B_r(x)$是伯努利多项式，$\delta_{i,\ j}$ 是克罗内克 δ 符号。特别地，对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$， ν^n 的系数为 $O\left(z^{\frac{2n}{3}}\right)$。 —

引理 2.2 ([8,引理 引理 2.1])。 假设对于某个 $\delta > 0$， $y \ll \varepsilon^{-\frac{1}{2}+\delta}$成立。那么当 $z \to 0$时，我们有：

$$-\mathrm{Log}\left((q;q)_\infty\right) = \frac{\pi^2}{6z} + \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{z}{2\pi}\right) - \frac{z}{24} + O(z^L)$$

对于任意 $L \in \mathbb{N}$。

接下来，我们回顾欧拉-麦克劳林求和公式。

命题 2.3 ([8, 命题 2.3])。 设 $a, z \in \mathbb{C}$。若 f 在$\{tz + a : \ t \in \mathbb{R}_0^+\}$上全纯且快速衰减，则对所有 $R \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n\geq 0} f(nz+a) = \frac{1}{z}\int_a^{a+z\infty} f(x)dx + \frac{f(a)}{2} - \sum_{r=1}^{R}\frac{B_{2r}z^{2r-1}}{(2r)!}f^{(2r-1)(a)} + O(1)z^{2R}\int_a^{a+z\infty}\left|f^{(2R+1)}(x)\right|dx,$$

其中 B_r 是伯努利数。

我们还回顾 Ingham 的陶伯定理。

定理 2.4 ([7, 定理 1.1])。 设 $B(q) = \sum_{n\geq 0} b_n q^n$ 是一个系数为非负实数且收敛半径至少为 *1* 的幂级数。若 α, β和 γ 是满足 $\gamma > 0$的实数，使得

$$B\left(e^{-t}\right) \sim \alpha t^\beta e^{\frac{\gamma}{t}} \quad as\ t \to 0^+, \qquad B\left(e^{-z}\right) \ll |z|^\beta e^{\frac{\gamma}{|z|}} \quad as\ z \to 0,$$

其中 $z = x + iy$，其中 $x, y \in \mathbb{R}$ 与 $x > 0$，且在每个形如 $y \leq \Delta x$ 的区域中， $\Delta > 0$，则

$$\sum_{n=0}^{N} b_n \sim \frac{\alpha\gamma^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}N^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}}e^{2\sqrt{\gamma N}} \qquad as\ N \to \infty.$$

此外，如果 $\{b_n\}$ 是弱递增的，则

$$b_n \sim \frac{\alpha\gamma^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{\beta}{2}+\frac{3}{4}}}e^{2\sqrt{\gamma n}} \qquad as\ n \to \infty.$$

3. t-HOOKS IN TWO PARTITION SETS FROM THE FIRST ROGERS–RAMANUJAN IDENTITY

让我们先回顾第一罗杰斯–拉曼努金恒等式：

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}.$$

为方便起见，令

$$\mathcal{R}_1 := \{\lambda : \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_2 := \{\lambda : \lambda_i \equiv 1,4 \pmod 5\}.$$

对于 $j = 1,2$，回顾引言中的内容：

$$r_{j,t}(n) := \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{R}_j \\ |\lambda|=n}} \widetilde{r}_{j,t}(\lambda),$$

其中 $\widetilde{r}_{j,t}(\lambda)$ 是 $\lambda \in \mathcal{R}_j$ 中 t-钩的数量。

为了研究 $r_{j,t}(n)$，我们首先需要求出 $\mathcal{R}_j$ 的双变量生成函数：

$$R_{j,t}(x,q) := \sum_{n\geq 0} x^{r_{j,t}(n)}q^n.$$

然后，对 $R_{j,t}(x, q)$ 关于 x 在 1 处求导，即可得到 $r_{j,t}(n)$ 的生成函数。也就是说，

$$S_{j,t}(q) := \frac{\partial}{\partial x}R_{j,t}(x,q)\Big|_{x=1} = \sum_{n\geq 0} r_{j,t}(n)q^n.$$

3.1. $t = 1$ 情形。 我们首先从 t-钩的定义注意到，1-钩是杨图中的角格，因此 1-钩的数量等于不同部分的数量。因此，

$$\widetilde{r}_{1,1}(\lambda) = \ell(\lambda) \quad \text{and} \quad \widetilde{r}_{2,1}(\lambda) = d(\lambda),$$

其中 $\ell(\lambda)$ 和 $d(\lambda)$ 分别表示部分的数量和不同部分的数量。$\mathcal{R}_1$ 中分拆的生成函数为

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n},$$

而求和项中的指标 n 统计部件的数量，由此可知

$$R_{1,1}(x,q) = \sum_{n\geq 0} x^{r_{1,1}(n)}q^n = \sum_{\lambda\in\mathcal{R}_1} x^{\ell(\lambda)}q^{|\lambda|} = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n q^{n^2}}{(q;q)_n}.$$

此外，我们看到

$$\begin{aligned} R_{2,1}(x,q)=\sum_{n\geq 0}x^{r_{2,1}(n)}q^n &= \sum_{\lambda\in\mathcal{R}_2}x^{d(\lambda)}q^{|\lambda|} \\ &= \prod_{n\equiv 1,4 \pmod 5}(1+xq^n+xq^{2n}+xq^{3n}+\cdots) \\ &= \prod_{n\equiv 1,4 \pmod 5}\left(1+\frac{xq^n}{1-q^n}\right) \\ &= \prod_{n\equiv 1,4 \pmod 5}\frac{1-(1-x)q^n}{1-q^n}. \end{aligned}$$

现在我们可以给出 $S_{j,1}(q)$ 的生成函数，它对应于 $j=1,2$。

命题 3.1. 我们有

$$\begin{aligned} S_{1,1}(q)&=\sum_{n\geq 0}r_{1,1}(n)q^n=\sum_{n\geq 0}\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n}, \\ S_{2,1}(q)&=\sum_{n\geq 0}r_{2,1}(n)q^n=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}\frac{q+q^4}{1-q^5}. \end{aligned}$$

证明。对于每个 $S_{j,1}(q)$，$j=1,2$，我们对 $R_{j,1}(x,q)$ 关于 x 在 $x=1$ 处求导。于是，$S_{1,1}(q)$ 显然成立。对于 $S_{2,1}(q)$，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}R_{2,1}(x,q) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{((1-x)q,(1-x)q^4;q^5)_\infty}{(q,q^4;q^5)_\infty} \\ &= \frac{((1-x)q,(1-x)q^4;q^5)_\infty}{(q,q^4;q^5)_\infty}\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv 1,4 \pmod 5}}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Log}(1-(1-x)q^n) \\ &= \frac{((1-x)q,(1-x)q^4;q^5)_\infty}{(q,q^4;q^5)_\infty}\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv 1,4 \pmod 5}}\frac{q^n}{1-(1-x)q^n}, \end{aligned}$$

由此可得

$$S_{2,1}(q)=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv 1,4 \pmod 5}}q^n=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}\frac{q+q^4}{1-q^5},$$

如所期望的。 □

3.2. $t=2$ **情形**。本节将研究 2-钩子的数量。根据 2-钩子的定义，很容易得出，2-钩子的数量等于 λ_i 满足 $\lambda_i-\lambda_{i+1}>1$ 的部件数量，加上至少出现两次的部件数量。这里，我们假设 $\lambda_{\ell(\lambda)+1}=0$。因此，

$$\widetilde{r}_{1,2}(\lambda)=\ell_{>1}(\lambda) \quad \text{and} \quad \widetilde{r}_{2,2}(\lambda)=d_{>1}(\lambda)+m_{>1}(\lambda),$$

其中，$\ell_{>1}(\lambda)$ $d_{>1}(\lambda)$ 和 $m_{>1}(\lambda)$ 分别表示大于 1 的部分数量、大于 1 的不同部分数量，以及重数大于 1 的部分数量。

首先，对于 $\mathcal{R}_1$ 中的分拆，我们可以将其分成两组：包含或不包含大小为 1 的部分的分拆。然后

$$R_{1,2}(x,q)=\sum_{n\geq 0}x^{r_{1,2}(n)}q^n=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n-1}q^{n^2}}{(q;q)_{n-1}}+\sum_{n\geq 0}\frac{x^nq^{n^2+n}}{(q;q)_n},$$

其中，第一个求和生成包含大小为1的部分的分拆，第二个求和生成不包含大小为1的部分的分拆。

此外，对于 $\mathcal{R}_2$，运用第3.1节中的同样分析，我们可以得到

$$R_{2,2}(x,q)=\sum_{n\geq 0}x^{r_{2,2}(n)}q^n=\left(1+q+\frac{xq^2}{1-q}\right)\prod_{\substack{n\equiv 1,4\pmod 5\\ n>1}}\left(1+xq^n+\frac{x^2q^{2n}}{1-q^n}\right).$$

与命题 3.1 类似，我们可以根据上述生成函数推导出 $r_{1,\ 2}(n)$ 和 $r_{2,\ 2}(n)$ 的生成函数。此处省略细节。

命题 3.2。我们有

$$S_{1,2}(q)=\sum_{n\geq 0}r_{1,2}(n)q^n=\sum_{n\geq 1}\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n}-\sum_{n\geq 1}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{n-1}},$$
$$S_{2,2}(q)=\sum_{n\geq 0}r_{2,2}(n)q^n=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}\left(\frac{q^4+q^6}{1-q^5}+\frac{q^2+q^8}{1-q^{10}}\right).$$

4. Asymptotics for hook numbers arising from the first Rogers–Ramanujan identity

本节中，我们推导定理1.3和定理1.4中的渐近公式。由于定理1.3的证明包含若干步骤，我们先概述证明的关键步骤和主要思路。

回顾命题 3.1 中$r_{1,1}(n)$的生成函数:

$$S_{1,1}(q)=\sum_{n\geq 0}r_{1,1}(n)q^n=\sum_{n\geq 0}\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n}.$$

注意到求和项 $\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n}$ 本质上是单峰的，因此峰值附近的贡献将主导$S_{1,1}(q)$的渐近行为。当

$$\frac{(n+1)q^{(n+1)^2}}{(q;q)_{n+1}}\Big/\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n}\approx 1,$$

也就是说，$q^n\approx\phi^{-1}$，其中 ϕ 是黄金比例。因此，对$S_{1,1}(q)$的主要贡献来自 n处于

$$\mathcal{N}_\varepsilon:=\left\{n:\left|n-\frac{\log(\phi)}{\varepsilon}\right|\leq\varepsilon^{-\frac{3}{5}}\right\},$$

并将其分解为

$$S_{1,1}(q)=\mathcal{S}_{1,1}(q)+\mathcal{E}_{1,1}(q):=\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n}+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n}.\tag{4.1}$$

备注。在 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 的定义中，为了计算简便，我们选择 ε 的指数。我们可以选择 $\lambda\in(-5/8,\ -1/2)$ 并考虑

$$\mathcal{N}_{\varepsilon,\lambda}:=\left\{n:\left|n-\frac{\log(\phi)}{\varepsilon}\right|\leq\varepsilon^{\lambda}\right\}.$$

为了应用英厄姆陶伯定理，我们需要估计有界锥 $|y| \ll 1$ 中，当 $1+iy$ 趋于 $\to 0$ 时的 $S_{1,\ 1}(q)$。在第4.1节中，我们首先得到峰值附近求和项在 y 的一个较窄范围内的渐近行为。尽管 y 的这一范围不足以应用陶伯定理，但这个渐近公式便于运用鞍点法推导

$$\mathcal{S}_{1,1}(q) \sim \frac{\sqrt{\phi}}{5^{1/4}} \log(\phi) z^{-1} e^{\frac{\pi^2}{15z}} \tag{4.2}$$

如 $z \to 0$。在第4.2节中，我们将证明，正如预期的那样，$\mathcal{E}_{1,\ 1}(q)$ 的贡献可以忽略不计。在第4.3节中，我们证明上述式 (4.2) 中的渐近公式可以扩展到更大的范围$y \ll 1$。最后，我们在第4.4节和第4.5节中给出定理1.3和定理1.4的证明。

4.1. 在较窄范围内的 $\mathcal{S}_{1,\ 1}(q)$关于 y 的渐近分析。 我们首先证明峰值附近较窄范围内的估计。

命题 4.1。 设 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 和 $u \in \mathbb{C}$ 满足

$$n = \frac{\log(\phi)}{z} + \frac{u}{\sqrt{z}}. \tag{4.3}$$

如果 $y \ll \varepsilon^{\frac{1}{3}+\delta}$ 对某个 $\delta > 0$ 成立，则我们有关于 u 的一致估计，

$$\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{\phi \log(\phi)}{\sqrt{2\pi z}} \exp\left(\frac{\pi^2}{15z} - \frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2\right) + O\left(\varepsilon^{3\delta_1}\right) \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left(\frac{\pi^2}{15z} - \frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2\right),$$

其中 $\delta_1 = \text{最小值}\{\delta, \frac{1}{15}\}$。

证明。 我们看到

$$q^n = \exp(-nz) = \exp\left(-\log(\phi) - u\sqrt{z}\right) = \phi^{-1} e^{-u\sqrt{z}}.$$

设 $\nu := \frac{u}{\sqrt{z}}$。 当 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 时，我们观察到

$$\nu = n - \frac{\log(\phi)}{z} = \left(\frac{\log(\phi)}{\varepsilon} + \mu\right) - \frac{\log(\phi)}{\varepsilon(1+iy)} = \frac{iy}{1+iy}\frac{\log(\phi)}{\varepsilon} + \mu \ll \varepsilon^{\delta - \frac{2}{3}} + \varepsilon^{-\frac{3}{5}} \tag{4.4}$$

对于某个满足 $|\mu| < \epsilon^{-3/5}$ 的 μ。因此， $\nu z = o(1)$ 即得所求。接着，我们应用引理 2.1，其中 $w = \phi^{-1}$，并应用引理 2.2，推得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Log}\left(\frac{1}{(q;q)_n}\right) = \operatorname{Log}\left(\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\right) \\
&= -\operatorname{Li}_2(\phi^{-1})\frac{1}{z} - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\log(1-\phi^{-1}) - \frac{\nu^2 z}{2}\frac{\phi^{-1}}{1-\phi^{-1}} + \psi_{\phi^{-1}}(\nu, z) + \frac{\pi^2}{6z} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{z}{2\pi}\right) - \frac{z}{24} + \mathcal{E} \\
&= \left(\frac{\pi^2}{6} - \operatorname{Li}_2(\phi^{-1})\right)\frac{1}{z} + \left(\frac{2u}{\sqrt{z}} + 1\right)\log(\phi) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{z}{2\pi}\right) - \frac{\phi u^2}{2} - \frac{z}{24} + \xi\left(\frac{u}{\sqrt{z}}, z\right),
\end{aligned}$$

其中 $\xi(\nu,\ z) := \psi_{\phi^{-1}}(\nu,\ z) + \mathcal{E}$。这里， $\xi(\nu,\ z)$ 与 $\psi_{\phi^{-1}}(\nu,\ z)$ 具有相同的渐近展开，因为 $\mathcal{E} \ll z^L$ 对任意 $L \in \mathbb{N}$ 均成立，即当 $z \to 0$ 时， $R \in \mathbb{N}$，且 $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\xi(\nu, z) = -\sum_{r=2}^{R-1} \left(B_r(-\nu) - \delta_{r,2}\nu^2\right) \operatorname{Li}_{2-r}(\phi^{-1}) \frac{z^{r-1}}{r!} + O\left(z^{R-1}\right). \tag{4.5}$$

由引理 2.1 可知，对于每个 $n \geq 0$，(4.5) 中 ν^n 的系数为 $O\left(z^{2n/3}\right)$。对于 q^{n^2}，我们有

$$-n^2 z = -\left(\frac{\log(\phi)}{z} + \frac{u}{\sqrt{z}}\right)^2 z = -\frac{\log^2(\phi)}{z} - \frac{2\log(\phi)}{\sqrt{z}}u - u^2.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} &= \left(\frac{\log(\phi)}{z}+\frac{u}{\sqrt{z}}\right)\exp\left(-\frac{\log^2(\phi)}{z}-\frac{2\log(\phi)}{\sqrt{z}}u-u^2\right)\\ &\quad\times\phi\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\exp\left(\frac{\frac{\pi^2}{15}+\log^2(\phi)}{z}+\frac{2\log(\phi)}{\sqrt{z}}u-\frac{\phi}{2}u^2\right)\exp\left(-\frac{z}{24}+\xi\left(\frac{u}{\sqrt{z}},z\right)\right)\\ &= \left(\frac{\phi\log(\phi)}{\sqrt{2\pi z}}+\frac{\phi}{\sqrt{2\pi}}u\right)\exp\left(\frac{\pi^2}{15z}-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2\right)\exp\left(-\frac{z}{24}+\xi\left(\frac{u}{\sqrt{z}},z\right)\right),\end{aligned}$$

其中我们使用

$$\frac{\pi^2}{6}-\mathrm{Li}_2(\phi^{-1})=\frac{\pi^2}{15}+\log^2(\phi).$$

当 $y\ll\varepsilon^{\frac{1}{3}+\delta}$ 时，我们有 $z\asymp\varepsilon$。由于 $n\in\mathcal{N}_\varepsilon$，我们有 $\frac{u}{\sqrt{z}}\ll\varepsilon^{-\frac{3}{5}}$，由（4.4）可得

$$u\ll\varepsilon^{-\frac{1}{6}+\delta_1}. \tag{4.6}$$

因此，（4.5）给出

$$-\frac{z}{24}+\xi\left(\frac{u}{\sqrt{z}},z\right)=O(z)+O\left(u\sqrt{z}\right)+\max_{n\geq 3}O\left(u^nz^{n/6}\right)=O\left(\varepsilon^{3\delta_1}\right),$$

由于误差项中的常数与 u 无关，该结果关于 u 一致成立。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} &= \left(\frac{\phi\log(\phi)}{\sqrt{2\pi z}}+\frac{\phi}{\sqrt{2\pi}}u\right)\left(1+O\left(\varepsilon^{3\delta_1}\right)\right)\exp\left(\frac{\pi^2}{15z}-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2\right)\\ &= \frac{\phi\log(\phi)}{\sqrt{2\pi z}}\exp\left(\frac{\pi^2}{15z}-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2\right)+O\left(\varepsilon^{3\delta_1}\right)\frac{1}{\sqrt{z}}\exp\left(\frac{\pi^2}{15z}-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2\right).\end{aligned}$$

□

我们首先推导 $S_{1,1}(q)$ 在 y 较小时的渐近式。

命题 4.2. 若对某个 $\delta>0$ 有 $y\ll\varepsilon^{\frac{2}{5}+\delta}$，则当 $z\to 0$ 时，我们有：

$$\mathcal{S}_{1,1}(q)=\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{\sqrt{\phi}}{5^{1/4}}\log(\phi)z^{-1}e^{\frac{\pi^2}{15z}}+O\left(\varepsilon^{-\frac{9}{10}}e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}\right).$$

为证明命题 4.2，我们需要以下引理，它们是 [8, 引理 5.2 和引理 5.3] 的类似结果。由于证明只需作直接修改，这里省略证明。令 $\mathcal{U}_\varepsilon$ 为 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 在映射下的双射像

$$n\mapsto u=-\frac{\log(\phi)}{\sqrt{z}}+n\sqrt{z}$$

该映射见式 (4.3)。

引理 4.3. 若对某个 $\delta>0$ 有 $y\ll\varepsilon^{\frac{2}{5}+\delta}$，且 $P(u)$ 是关于 u 的多项式，则当 $z\to 0$，

$$\int_{\left(-\frac{\log(\phi)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}\right)\setminus\mathcal{U}_\varepsilon}\left|P(u)e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2}\right|=O\left(u^L\right),$$

对所有 $L\in\mathbb{N}$。

引理 4.4。若 $y \ll \varepsilon^{\frac{2}{5}+\delta}$对于某个 $\delta > 0$，且 $u \in \mathcal{U}_\varepsilon$，则当 $z \to$时，我们有 0,

$$\left| e^{\frac{\pi^2}{15z} - \frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} \right| \leq e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}.$$

现在给出命题 4.2 的证明。

命题 *4.2* 的证明。由命题 4.1，取 $\delta_1 = \frac{1}{15}$，

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon} \frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{\phi\log(\phi)}{\sqrt{2\pi z}} e^{\frac{\pi^2}{15z}} \sum_{u\in\mathcal{U}_\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{5}}\right) \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{u\in\mathcal{U}_\varepsilon} e^{\frac{\pi^2}{15z} - \frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2}.$$

由于对 $\mathcal{U}_\varepsilon$ 的求和包含 $\ll \varepsilon^{-\frac{3}{5}}$ 项，由引理 4.4 可知，误差项有如下界：

$$\varepsilon^{\frac{1}{5}} \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{u\in\mathcal{U}_\varepsilon} e^{\frac{\pi^2}{15z} - \frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} \ll \varepsilon^{\frac{1}{5}-\frac{3}{5}-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}} = \varepsilon^{-\frac{9}{10}} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}.$$

应用命题 2.3，取 $a = -\frac{\log(\phi)}{\sqrt{z}}$、$z \to \sqrt{z}$和 $R = 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{u\in\mathcal{U}_\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} =& \frac{1}{\sqrt{z}} \int_{-\frac{\log(\phi)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}} e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} du + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}\phi\log(\phi)}{12}\right) e^{-\frac{\sqrt{5}\phi\log^2(\phi)}{2z}} \\ &+ O(1)z \int_{-\frac{\log(\phi)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}} \left| \left(15\phi^2 u - 5\sqrt{5}\phi^3 u^3\right) e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} \right| du.\end{aligned}$$

由于第一个积分中的被积函数是全纯的且快速衰减，我们可以移动路径，从而得到

$$\int_{-\frac{\log(\phi)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}} e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} du = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{5^{\frac{1}{4}}\phi^{\frac{1}{2}}}.$$

对于第二个积分，我们利用引理 4.3 得到，对于所有的 $L \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\frac{\log(\phi)}{\sqrt{z}}+\mathbb{R}\sqrt{z}} \left| \left(15\phi^2 u - 5\sqrt{5}\phi^3 u^3\right) e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} \right| du = \int_{\mathcal{U}_\varepsilon} \left| \left(15\phi^2 u - 5\sqrt{5}\phi^3 u^3\right) e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} \right| du + O\left(\varepsilon^L\right).$$

由于 $u \in \mathcal{U}_\varepsilon$，由 (4.6) 可得 $|u| \ll \varepsilon^{-\frac{1}{10}}$,且截断线段 $\mathcal{U}_\varepsilon$ 的长度为 $\ll \varepsilon^{-\frac{1}{10}}$。因此，根据引理 4.4,

$$e^{\frac{\pi^2}{15z}} \int_{\mathcal{U}_\varepsilon} \left| \left(15\phi^2 u - 5\sqrt{5}\phi^3 u^3\right) e^{-\frac{\sqrt{5}\phi}{2}u^2} \right| du \ll \varepsilon^{-\frac{2}{5}} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}.$$

因此，如果 $y \ll \varepsilon^{\frac{2}{5}+\delta}$对某个 $\delta > 0$成立，则当 $z \to 0$时，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon} \frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} &= \frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}} \log(\phi) z^{-1} e^{\frac{\pi^2}{15z}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{z}} e^{\frac{\pi^2}{15z} - \frac{\sqrt{5}\phi\log^2(\phi)}{2z}}\right) \\ &\quad + O\left(\sqrt{z}\varepsilon^{-\frac{2}{5}} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}\right) + O\left(\varepsilon^{L+\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi^2}{15z}}\right) + O\left(\varepsilon^{-\frac{9}{10}} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}\right) \\ &= \frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}} \log(\phi) z^{-1} e^{\frac{\pi^2}{15z}} + O\left(\varepsilon^{-\frac{9}{10}} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}\right).\end{aligned}$$

□

4.2. 远离峰值处的误差估计。 在本小节中，我们给出远离峰值处的求和项之和的误差估计。

命题 4.5. 对于每个 $L \in \mathbb{N}$，当 $\mathrm{Re}(z) \to 0$ 位于右半平面时，

$$|\mathcal{E}_{1,1}(q)| = \left| \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{N}_\varepsilon} \frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} \right| \ll \varepsilon^{L-1} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}.$$

证明。由于

$$\left| \frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} \right| \leq \frac{n|q|^{n^2}}{(|q|;|q|)_n},$$

只需考虑 z 为实数的情形。因此，设 $z = \varepsilon$ 为实数，即 $y = 0$。固定 $n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{N}_\varepsilon$，并令 $\mu \in \mathbb{R}$ 满足 $n = \log(\phi)/\varepsilon + \mu$。于是我们观察到 $q^n = \frac{1}{\phi} e^{-\mu\varepsilon}$，并且

$$\log\left((q^{n+1};q)_\infty\right) = \sum_{m \geq 1} \log\left(1 - q^{n+m}\right) = -\sum_{m \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{q^{k(n+m)}}{k} = -\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k \cdot \phi^k} \frac{e^{-k\mu\varepsilon}}{e^{k\varepsilon} - 1}.$$

由于对所有 $x \neq 0$ 都有 $e^x > 1 + x$，且当 $x > 0$ 时有 $\frac{1}{e^x - 1} > \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$，因此

$$\frac{e^{-k\mu\varepsilon}}{e^{k\varepsilon} - 1} > (1 - k\mu\varepsilon)\left(\frac{1}{k\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k\varepsilon} - \left(\mu + \frac{1}{2}\right) + \frac{k\mu\varepsilon}{2},$$

这意味着

$$\log\left((q^{n+1};q)_\infty\right) < -\frac{\mathrm{Li}_2(\phi^{-1})}{\varepsilon} + \log(\phi)(2\mu + 1) - \frac{\phi}{2}\mu\varepsilon.$$

因此，结合引理 2.2，我们得到

$$\log\left(\frac{1}{(q;q)_n}\right) = \log\left(\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\right) < \left(\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{Li}_2(\phi^{-1})\right)\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\phi^2\varepsilon}{2\pi}\right) - \frac{\varepsilon}{24} + 2\log(\phi)\mu - \frac{\phi}{2}\mu\varepsilon + O(\varepsilon^L).$$

利用

$$-n^2\varepsilon = -\left(\frac{\log(\phi)}{\varepsilon} + \mu\right)^2 \varepsilon = -\frac{\log^2(\phi)}{\varepsilon} - 2\log(\phi)\mu - \mu^2\varepsilon,$$

我们得到

$$\log\left(\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}\right) < \frac{\pi^2}{15\varepsilon} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{2\pi}{\phi^2\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon}{24} - \frac{\phi}{2}\mu\varepsilon - \mu^2\varepsilon + O(\varepsilon^L).$$

若 $\delta > 0$、$\ell < -\frac{1}{2} - \delta$ 和 $|\mu| > \varepsilon^\ell$，则存在一个与 ℓ 无关的 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于 $\varepsilon < \varepsilon_0$，

$$-\frac{1}{2}\log\left(\frac{2\pi}{\phi^2\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon}{24} - \frac{\phi}{2}\mu\varepsilon - \mu^2\varepsilon + O(\varepsilon^L) < -\frac{1}{2}\varepsilon^{2\ell+1}.$$

因此，对于 $\varepsilon < \varepsilon_0$，

$$\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} < e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{2\ell+1}}{2}}. \tag{4.7}$$

现在，我们考虑这个和

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{N}_\varepsilon} \frac{\varepsilon n q^{n^2}}{(q;q)_n} = \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{N}_\varepsilon \\ \varepsilon^{-r+1} < |\mu| \leq \varepsilon^{-r}}} \frac{\varepsilon n q^{n^2}}{(q;q)_n} := \sum_{r \geq 1} A(r).$$

对于 $A(1)$，求和遍及满足 $\varepsilon^{-\frac{3}{5}} < |\mu| \le \varepsilon^{-1}$ 的 $n \in \mathbb{N}$。此外，$\varepsilon n = \log(\phi) + \mu\varepsilon \ll 1$。由于 $A(1)$ 有 $O(\varepsilon^{-1})$ 项，由 (4.7) 可得

$$A(1) \ll \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{-\frac{1}{5}}}{2}}.$$

接下来，我们考虑 $r \ge 2$ 时 $A(r)$ 的求和项。当 $|\mu| > \varepsilon^{-r+1}$ 时，由 (4.7) 得

$$\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} < e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{3-2r}}{2}}.$$

当 $|\mu| \le \varepsilon^{-r}$ 时，$\varepsilon n = \log(\phi) + \mu\varepsilon \ll \varepsilon^{1-r}$。由于 $A(r)$ 含有 $O(\varepsilon^{-r})$ 项，我们得到

$$A(r) \ll \frac{1}{\varepsilon^{2r-1}} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{3-2r}}{2}}.$$

因此，我们得出结论：对所有 $L \in \mathbb{N}$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{N}_\varepsilon} \frac{\varepsilon n q^{n^2}}{(q;q)_n} = \sum_{r \ge 1} A(r) \ll e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}} \left(\frac{e^{-\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{5}}}{2}}}{\varepsilon} + \sum_{r \ge 2} \frac{e^{-\frac{\varepsilon^{3-2r}}{2}}}{\varepsilon^{2r-1}} \right) \ll \varepsilon^L e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}. \qquad \square$$

4.3. 的渐近式 $S_{1,\ 1}(q)$。 现在我们证明，命题 4.2 中 $S_{1,\ 1}(q)$ 的渐近式对 $|y| \ll 1$ 成立。为此，我们首先推导求和项的渐近公式，该公式在必要范围内成立。

命题 4.6。 设 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 和 $v \in \mathbb{C}$ 满足

$$n = \frac{\log(\phi)}{\varepsilon} + \frac{v}{\sqrt{z}}.$$

若 $y \ll 1$，则关于 v，我们有一致的：

$$\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{\log(w^{-1})}{\sqrt{2\pi z(1-w)}} \exp\left(\frac{\Lambda(y)}{z} + \operatorname{Log}\left(\frac{w^2}{1-w}\right) \frac{v}{\sqrt{z}} - \frac{2-w}{2(1-w)} v^2 \right) + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{5}}\right) \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left(\frac{\Lambda(y)}{z} + \operatorname{Log}\left(\frac{w^2}{1-w}\right) \frac{v}{\sqrt{z}} - \frac{2-w}{2(1-w)} v^2 \right),$$

其中 $w := \phi^{-1-iy}$ 且

$$\Lambda(y) := \frac{\pi^2}{6} - \log^2(\phi)(1+iy)^2 - \operatorname{Li}_2(\phi^{-(1+iy)}). \tag{4.8}$$

证明。我们首先注意到

$$q^n = \exp(-nz) = \exp\left(-\log(\phi)(1+iy) - v\sqrt{z}\right) = \phi^{-(1+iy)} e^{-v\sqrt{z}}.$$

根据 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 的定义，我们有 $\nu := \frac{v}{\sqrt{z}} \ll \varepsilon^{-\frac{3}{5}}$。由于 $y \ll 1$，可见 $|z| = \varepsilon\sqrt{1+y^2} \ll \varepsilon$。因此，$\nu z = o(1)$。由于 $|w| = |\phi^{-1-iy}| < 1$，根据引理 2.1 和 2.2，

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Log}\left(\frac{1}{(q;q)_n}\right) = \operatorname{Log}\left(\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\right) \\
&= -\operatorname{Li}_2(w)\frac{1}{z} - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(1-w) - \frac{\nu^2 z}{2}\frac{w}{1-w} + \psi_w(\nu, z) + \frac{\pi^2}{6z} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{z}{2\pi}\right) - \frac{z}{24} + \mathcal{E} \\
&= \left(\frac{\pi^2}{6} - \operatorname{Li}_2(w)\right)\frac{1}{z} - \left(\frac{v}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(1-w) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{z}{2\pi}\right) - \frac{w}{2(1-w)}v^2 - \frac{z}{24} + \xi_y\left(\frac{v}{\sqrt{z}}, z\right),
\end{aligned}$$

其中 $\xi_y(\nu,\ z) := \psi_w(\nu,\ z)+\mathcal{E}$ 与 $\psi_w(\nu,\ z)$ 具有相同的渐近展开，因为对于任意$L \in \mathbb{N},\ \mathcal{E} \ll z^L$，即对于 $R \in \mathbb{N}$，当 $z \to 0$ 且 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时

$$\xi_y(\nu, z) = -\sum_{r=2}^{R-1} \left(B_r(-\nu) - \delta_{r,2}\nu^2\right) \mathrm{Li}_{2-r}(\phi^{-1-iy}) \frac{z^{r-1}}{r!} + O\left(z^{R-1}\right),$$

其中，(4.5) 中 ν^n 的系数对每个 $n \geq 0$ 均为 $O\left(z^{2n/3}\right)$。对于 q^{n^2},

$$-n^2 z = -\left(\frac{\log(\phi)}{\varepsilon} + \frac{v}{\sqrt{z}}\right)^2 z = -\frac{\log^2(\phi)(1+iy)^2}{z} - 2\log(\phi)(1+iy)\frac{v}{\sqrt{z}} - v^2.$$

综上所述，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} &= \left(\frac{\log(\phi)}{\varepsilon} + \frac{v}{\sqrt{z}}\right) \exp\left(-\frac{\log^2(\phi)(1+iy)^2}{z} - 2\log(\phi)(1+iy)\frac{v}{\sqrt{z}} - v^2\right) \\
&\quad \times \sqrt{\frac{z}{2\pi(1-w)}} \exp\left(\frac{\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{Li}_2(w)}{z} - \mathrm{Log}(1-w)\frac{v}{\sqrt{z}} - \frac{w}{2(1-w)}v^2 - \frac{z}{24} + \xi_y\left(\frac{v}{\sqrt{z}}, z\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\phi^{-1-iy})}} \left(\frac{\log(\phi)(1+iy)}{\sqrt{z}} + v\right) \\
&\quad \times \exp\left(\frac{\Lambda(y)}{z} + \mathrm{Log}\left(\frac{w^2}{1-w}\right)\frac{v}{\sqrt{z}} - \frac{2-w}{2(1-w)}v^2\right) \exp\left(-\frac{z}{24} + \xi_y\left(\frac{v}{\sqrt{z}}, z\right)\right).
\end{aligned}$$

由于 $y \ll 1$，我们有 $z \ll \varepsilon$。由 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon$，我们有 $v \ll \varepsilon^{-\frac{1}{10}}$。因此，由 $\xi_y(\nu, z)$ 的展开，我们得到

$$-\frac{z}{24} + \xi_y\left(\frac{v}{\sqrt{z}}, z\right) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{5}}\right),$$

该式一致成 立于 v，因为误差项中的常数与 v 无关。因此 e,

$$\exp\left(-\frac{z}{24} + \xi_y\left(\frac{v}{\sqrt{z}}, z\right)\right) = 1 + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{5}}\right)$$

得到了所需的渐近式。 □

在下面的引理中，我们证明 $\Lambda(y)$ 的贡献被 $\frac{\pi^2}{15}$ 所支配，其中 $\Lambda(y)$ 在 (4.8) 中定义。

引理 4.7. 设 $s(y)$：$=$实部 $\left(\Lambda\left(\frac{y}{-1+iy}\right) - \frac{\pi^2}{15}\right)$。则有如下结论。

(1) $s(y) \leq 0$ 对所有 $y \in \mathbb{R}$ 均成立，且等号成立当且仅当 $y = 0$。

(2) 当 $y \to 0$ 时，

$$s(y) = -\left(\frac{\pi^2}{15} + \left(3 - \frac{\phi}{2}\right)\log^2(\phi)\right) y^2 + O\left(y^4\right).$$

证明。(1) 回顾一下，$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{Li}_2(\phi^{-1}) = \frac{\pi^2}{15} + \log^2(\phi)$，并且

$$\Lambda(y) = \mathrm{Li}_2(1) - \log^2(\phi)(1+iy)^2 - \mathrm{Li}_2(\phi^{-(1+iy)}).$$

由于

$$\mathrm{Li}_2(\phi^{-1-iy}) = \sum_{n\geq 1} \frac{(1/\phi)^{(1+iy)n}}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(1/\phi)^{iyn}}{\phi^n n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\exp\left(-\log(\phi)iyn\right)}{\phi^n n^2},$$

我们得到

$$s(y) = -\frac{\pi^2}{6}\frac{y^2}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n n^2} + \frac{y}{1+y^2}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n n^2} + \mathrm{Li}_2(\phi^{-1}).$$

由于 $s(-y) = s(y)$ 且 $s(0) = 0$，因此只需证明 $f(y) := (1+y^2)s(y) \leq 0$ for $y > 0$。

首先，利用以下事实：对所有 $x \in \mathbb{R}$，$|\sin(x)| \leq 1$、$|\cos(x)| \leq 1$、$\sin(x) \leq x$ 和 $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$，我们观察到

$$\begin{aligned}
f(y) &= -\frac{\cos(\log(\phi)y)}{\phi} - \sum_{n\geq 2}\frac{\cos\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n n^2} + y\frac{\sin(\log(\phi)y)}{\phi} + y\sum_{n\geq 2}\frac{\sin\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n n^2} \\
&\quad - \frac{\pi^2}{6}y^2 + \mathrm{Li}_2(\phi^{-1})(1+y^2) \\
&\leq -\frac{1}{\phi}\left(1 - \frac{\log^2(\phi)}{2}y^2\right) + \sum_{n\geq 2}\frac{1}{\phi^n n^2} + \frac{\log(\phi)}{\phi}y^2 + y\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\phi^n n^2} - \frac{\pi^2}{6}y^2 + \mathrm{Li}_2(\phi^{-1})(1+y^2) \\
&= (2+y)\left(\mathrm{Li}_2(\phi^{-1}) - \frac{1}{\phi}\right) - y^2\left(\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{Li}_2(\phi^{-1}) - \frac{\log^2(\phi)}{2\phi} - \frac{\log(\phi)}{\phi}\right),
\end{aligned}$$

它在 $y \geq 1$ 时为负。我们还有

$$\begin{aligned}
f'(y) &= \log(\phi)\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n n} + \sum_{n\geq 1}\frac{\sin\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n n^2} + y\log(\phi)\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n n} \\
&\quad - 2y\left(\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{Li}_2(\phi^{-1})\right),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
f''(y) &= \log^2(\phi)\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n} + 2\log(\phi)\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n n} - y\log^2(\phi)\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\left(\log(\phi)yn\right)}{\phi^n} \\
&\quad - 2\left(\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{Li}_2(\phi^{-1})\right) \\
&\leq \log^2(\phi)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\phi^n} + 2\log(\phi)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\phi^n n} + y\log^2(\phi)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\phi^n} - 2\left(\frac{\pi^2}{15} + \log^2(\phi)\right) \\
&= y\phi\log^2(\phi) + (\phi+2)\log^2(\phi) - \frac{2\pi^2}{15}.
\end{aligned}$$

因此，对于 $0 < y \leq 1$,

$$f''(y) \leq y\phi\log^2(\phi) + (\phi+2)\log^2(\phi) - \frac{2\pi^2}{15} < 0,$$

由此可推出

$$f(y) < f(0) + f'(0)y = 0.$$

(2) 这可以通过在 $y = 0$ 处的泰勒级数展开得到。 □

现在，我们已准备好证明当 $z = \varepsilon(1+iy) \to 0$ 在有界锥$|y| \ll 1$中时，$S_{1,1}(q)$ 的渐近式。

命题 4.8。 若 $y \ll 1$，则当 $z \to 0$ 时，我们有：

$$S_{1,1}(q) = \frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}} \log(\phi) z^{-1} e^{\frac{\pi^2}{15z}} + O\left(\varepsilon^{-\frac{9}{10}} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}\right).$$

证明。 由命题 4.5 可知，对所有 $L \in \mathbb{N}$，当 $z \to 0$ 时，

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{N}_\varepsilon} \frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} \right| \ll \varepsilon^{L-1} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}.$$

因此，所需的渐近式可由以下断言推出：

$$ze^{-\frac{\pi^2}{15\varepsilon}} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon} \frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} - \frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}} \log(\phi) z^{-1} e^{\frac{\pi^2}{15z}} \right) \ll \varepsilon^{\frac{1}{10}}.$$

我们将 y 的范围分成两部分 $y \ll \varepsilon^{\frac{2}{5}+\delta}$ 和 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll 1$，以验证这一断言。通过选取足够小的 $\delta > 0$，这两部分可以覆盖所有必要的范围 $y \ll 1$。首先注意到，对于某个 $\delta > 0$，有 $y \ll \varepsilon^{\frac{2}{5}+\delta}$；于是由命题 4.2 可得

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon} \frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} - \frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}} \log(\phi) z^{-1} e^{\frac{\pi^2}{15z}} \ll \varepsilon^{-\frac{9}{10}} e^{\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}.$$

对于剩余范围 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll 1$，其中某个 $\delta > 0$，我们将证明对所有 $L \in \mathbb{N}$，

$$ze^{-\frac{\pi^2}{15\varepsilon}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon} \frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} = O\left(\varepsilon^L\right). \tag{4.9}$$

若 $y \ll 1$，由命题 4.6 可得，

$$ze^{-\frac{\pi^2}{15\varepsilon}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon} \frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} = \log(w^{-1}) \sqrt{\frac{z}{2\pi(1-w)}} e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy} - \frac{\pi^2}{15}\right)} \sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon} e^{-\frac{2-w}{2(1-w)}v^2 + \frac{v}{\sqrt{z}} \operatorname{Log}\left(\frac{w^2}{1-w}\right)}$$
$$+ O\left(\varepsilon^{\frac{1}{5}}\right) \sqrt{z} e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy} - \frac{\pi^2}{15}\right)} \sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon} e^{-\frac{2-w}{2(1-w)}v^2 + \frac{v}{\sqrt{z}} \operatorname{Log}\left(\frac{w^2}{1-w}\right)},$$

w这里是 $w = \phi^{-1-iy}$。因此，要证明 (4.9)，只需证明指数 t

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy} - \frac{\pi^2}{15}\right) - \frac{2-w}{2(1-w)}v^2 + \frac{v}{\sqrt{z}} \operatorname{Log}\left(\frac{w^2}{1-w}\right) \tag{4.10}$$

的实部为负，大小为 $\gg \varepsilon^{-\delta_0}$，对某个 $\delta_0 > 0$ 成立，因为其他项均为 $z \to 0$ 阶有界。

若对某个 $\delta > 0$ 有 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll 1$，则 $\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy} - \frac{\pi^2}{15}\right)$ 的实部为 $\frac{s(y)}{\varepsilon}$，由引理 4.7 (1) 可知其为负。我们还得到，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\frac{s(y)}{\varepsilon} \gg \frac{y^2}{\varepsilon} \gg \varepsilon^{-2\delta}$$

由引理 4.7 (2)。根据泰勒级数展开，当 $y \to 0$ 时，

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{Log}\left(\frac{w^2}{1-w}\right)\right) = \log\left|\frac{w^2}{1-w}\right| = -\frac{2+\sqrt{5}}{2}\log^2(\phi)y^2 + O\left(y^4\right) \ll y^2.$$

当 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 时，我们有 $\left|\frac{v}{\sqrt{z}}\right| \le \varepsilon^{-\frac{3}{5}}$，这意味着

$$\mathrm{Re}\left(\frac{v}{\sqrt{z}}\,\mathrm{Log}\left(\frac{w^2}{1-w}\right)\right) \ll \varepsilon^{-\frac{3}{5}} y^2.$$

由于 $\frac{y^2}{\varepsilon} \gg \varepsilon^{-\frac{3}{5}} y^2$，$s(y,\varepsilon)$ 支配 $\mathrm{Re}\left(\frac{v}{\sqrt{z}}\,\mathrm{Log}\left(\frac{w^2}{1-w}\right)\right)$。对于项 $2\frac{2-w}{1-w}v^2$，我们考虑以下两种情况。

(1) 设 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll \varepsilon^{\frac{1}{4}}$。由于 v 是 $\sqrt{z}$ 和 $y \ll \varepsilon^{\frac{1}{4}}$ 的实倍数，我们有，对于 $y \ll \varepsilon^{\frac{1}{4}}$，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2-w}{1-w}(1+iy)\right) = \frac{2+\phi^{-2}-3\phi^{-1}\cos\left(y\log(\phi)\right)+y\phi^{-1}\sin\left(y\log(\phi)\right)}{|1-w|^2} > 0.$$

因此，当 $z \to 0$ 时，$-2\frac{2-w}{1-w}v^2$ 的实部为负。

(2) 如果 $\varepsilon^{\frac{1}{3}} \ll y \ll 1$，那么 $|z| \ll \varepsilon$。由于 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon$，我们有 $|v| \ll \varepsilon^{-\frac{1}{10}}$。因此，结合事实 $\left|2\frac{2-w}{1-w}\right| \le 2\frac{2-\phi^{-1}}{1-\phi^{-1}}$，可得 $-2\frac{2-w}{1-w}v^2 \ll \varepsilon^{-\frac{1}{5}}$。

在任一情形下，指数 $s(y,\varepsilon)$ 的大小为 $\gg \varepsilon^{-2\delta}$，并支配 (4.10) 中其他具有正实部的指数。因此，我们通过取 $\delta_0 = 2\delta$ 来证明断言 (4.9)。

接下来，在表达式 $\frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}}\log(\phi)e^{\frac{\pi^2}{15z}-\frac{\pi^2}{15\varepsilon}}$ 中，指数部分具有负实部，其大小为

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\pi^2}{15z}-\frac{\pi^2}{15\varepsilon}\right) = -\frac{\pi^2}{15\varepsilon}\frac{y^2}{1+y^2} \gg \varepsilon^{-2\delta}$$

对于 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll 1$。因此，由此可得，对于 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll 1$，对所有 $L \in \mathbb{N}$，我们有

$$\frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}}\log(\phi)e^{\frac{\pi^2}{15z}-\frac{\pi^2}{15\varepsilon}} \ll \varepsilon^L.$$

□

4.4. 定理 1.3 的证明。 在本小节中，我们证明定理 1.3。

定理 1.3 的证明。 设 $q = e^{-z}$。由命题 4.8，当 $z = \varepsilon(1+iy) \to 0$（对于 $\varepsilon > 0$ 和 $y \ll 1$）时，我们有

$$S_{1,1}(q) = \sum_{n\ge 0} r_{1,1}(n)q^n \sim \frac{\sqrt{\phi}}{5^{1/4}}\log(\phi)z^{-1}e^{\frac{\pi^2}{15z}}.$$

接下来，我们回顾命题 3.2：

$$S_{1,2}(q) = \sum_{n\ge 0} r_{1,2}(n)q^n = \sum_{n\ge 1}\frac{nq^{n^2}}{(q;q)_n} - \sum_{n\ge 1}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{n-1}} = S_{1,1}(q) - \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty} + \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}.$$

根据 [14, 推论 1.4], ，当 $z \to 0$ 位于右半平面时，

$$\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty} \sim \frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}}e^{\frac{\pi^2}{15z}} \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty} \sim \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}\phi^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{\pi^2}{15z}}.$$

因此，$S_{1,2}(q)$ 与 $S_{1,1}(q)$ 具有相同的渐近式。

由命题 3.1 和命题 3.2 可得

$$(1-q)S_{1,1}(q) = \sum_{n\ge 1}\frac{nq^{n^2}}{(q^2;q)_{n-1}} \qquad \text{and} \qquad (1-q)S_{1,2}(q) = \sum_{n\ge 1}\frac{nq^{n^2+n}}{(q^2;q)_{n-1}} + \sum_{n\ge 2}\frac{(n-1)q^{n^2}}{(q^2;q)_{n-2}},$$

由此可见，$r_{1,\ 1}(n)$ 和 $r_{1,\ 2}(n)$ 弱递增。因此，我们应用定理 2.4 得到

$$r_{1,1}(n) \sim r_{1,2}(n) \sim \frac{3^{\frac{1}{4}}\phi^{\frac{1}{2}}\log(\phi)}{2\pi} n^{-\frac{1}{4}} e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{15}}}$$

当 $n \to \infty$ 时。 □

4.5. 定理 1.4 的证明。 在本小节中，我们证明定理 1.4。

定理 1.4 的证明。 我们回顾命题 3.1 和命题 3.2 中 $r_{2,1}(n)$ 和 $r_{2,2}(n)$ 的生成函数：

$$S_{2,1}(q) = \sum_{n\geq 0} r_{2,1}(n)q^n = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}\frac{q+q^4}{1-q^5},$$
$$S_{2,2}(q) = \sum_{n\geq 0} r_{2,2}(n)q^n = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}\left(\frac{q^4+q^6}{1-q^5} + \frac{q^2+q^8}{1-q^{10}}\right).$$

令 $q = e^{-z}$。根据 [14, 推论 1.4], , 当 $z \to 0$ 位于右半平面时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty} &= \frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{\pi^2}{15z}-\frac{z}{60}} \frac{1}{\left(e^{-\frac{4\pi^2}{5z}+\frac{2\pi i}{5}}, e^{-\frac{4\pi^2}{5z}-\frac{2\pi i}{5}}; e^{-\frac{4\pi^2}{5z}}\right)_\infty} \\ &= \frac{\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{\pi^2}{15z}-\frac{z}{60}} \left(1 + O\left(e^{-\frac{4\pi^2}{5z}}\right)\right).\end{aligned}$$

我们还得到，当 $z \to 0$ 时，

$$\frac{q+q^4}{1-q^5} = \frac{2}{5z} + O(z) \qquad \text{and} \qquad \frac{q^4+q^6}{1-q^5} + \frac{q^2+q^8}{1-q^{10}} = \frac{3}{5z} - 1 + O(z).$$

因此，当 $z \to 0$ 位于右半平面时，

$$S_{2,1}(q) = \frac{2\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{4}}z} e^{\frac{\pi^2}{15z}} (1 + O(z)) \qquad \text{and} \qquad S_{2,2}(q) = \frac{3\phi^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{4}}z} e^{\frac{\pi^2}{15z}} (1 + O(z)).$$

由于我们有

$$(1-q)S_{2,1}(q) = \frac{1}{(q^6,q^4;q^5)_\infty}\frac{q+q^4}{1-q^5},$$
$$(1-q)S_{2,2}(q) = \frac{1}{(q^6,q^4;q^5)_\infty}\left(\frac{q^4+q^6}{1-q^5} + \frac{q^2+q^8}{1-q^{10}}\right),$$

上面右侧的 q 级数具有非负系数，因此 $r_{2,1}(n)$ 和 $r_{2,2}(n)$ 弱递增。因此，根据定理 2.4，得到了所需的渐近分析。□

5. t-hooks in two partition sets from the first little Göllnitz Identity

现在我们回顾第一个小戈尔尼茨恒等式：

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = \frac{1}{(q,q^5,q^6;q^8)_\infty}.$$

为方便起见，令

$$\mathcal{G}_1 := \{\lambda : \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2,\ \ \lambda_i - \lambda_{i+1} > 2 \text{ if } \lambda_i \equiv 1 \pmod 2\}$$

and

$$\mathcal{G}_2 := \{\lambda : \lambda_i \equiv 1, 5, 6 \pmod 8\}.$$

对于 $j = 1,2$，回顾引言中的结论：

$$g_{j,t}(n) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{G}_j \\ |\lambda| = n}} \widetilde{g}_{j,t}(\lambda),$$

其中，$\widetilde{g}_{j,t}(\lambda)$ 是 $\lambda \in \mathcal{G}_j$ 中 t-钩的数量。

本节研究以下关于 $t = 1,2$ 的生成函数：

$$G_{j,t}(x,q) := \sum_{n \geq 0} x^{g_{j,t}(n)} q^n$$

and

$$H_{j,t}(q) := \frac{\partial}{\partial x} G_{j,t}(x,q)\Big|_{x=1} = \sum_{n \geq 0} g_{j,t}(n) q^n.$$

5.1. $t = 1$ **情形**。由于 $\mathcal{G}_j$ 中关于 $j = 1,2$ 的部件差条件，我们很容易看出

$$\widetilde{g}_{1,1}(\lambda) = \ell(\lambda) \quad \text{and} \quad \widetilde{g}_{2,1}(\lambda) = d(\lambda).$$

在 [3, 公式 (2.20)], 中，安德鲁斯给出了生成函数 $G_{1,1}(x,q)$：

$$G_{1,1}(x,q) = \sum_{n \geq 0} x^{g_{1,1}(n)} q^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{G}_1} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n q^{n^2+n} (-q^{-1}; q^2)_n}{(q^2; q^2)_n}.$$

此外，应用第 3 节中使用的相同方法，我们得到

$$G_{2,1}(x,q) = \sum_{n \geq 0} x^{g_{2,1}(n)} q^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{G}_2} x^{d(\lambda)} q^{|\lambda|} = \prod_{n \equiv 1,5,6 \pmod 8} \frac{1 - (1-x)q^n}{1 - q^n}.$$

对 $G_{j,1}(x,q)$ 关于 x 在 $x = 1$处求导，我们得到 $g_{j,1}(n)$ 在 $j = 1,2$ 时的生成函数。细节略去。

命题 5.1。我们有

$$H_{1,1}(q) = \sum_{n \geq 0} g_{1,1}(n) q^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n q^{n^2+n} (-q^{-1}; q^2)_n}{(q^2; q^2)_n},$$

$$H_{2,1}(q) = \sum_{n \geq 0} g_{2,1}(n) q^n = \frac{1}{(q, q^5, q^6; q^8)_\infty} \frac{q + q^5 + q^6}{1 - q^8}.$$

5.2. $t = 2$ **情形**。注意到 $\widetilde{g}_{1,2}(\lambda) = \ell_{>1}(\lambda)$。由安德鲁斯的结果 [3, 式 (2.19)、(2.20)] 可得

$$G_{1,2}(x,q) = \sum_{n \geq 0} x^{g_{1,2}(n)} q^n = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n q^{n^2+n} (-q; q^2)_{n+1}}{(q^2; q^2)_n}.$$

此外，如第3.2节所示，

$$\widetilde{g}_{2,2}(\lambda) = d_{>1}(\lambda) + m_{>1}(\lambda).$$

因此，我们有

$$G_{2,2}(x,q)=\left(1+q+\frac{xq^2}{1-q}\right)\prod_{n\geq 1}\left(1+xq^{8n+1}+\frac{x^2q^{2(8n+1)}}{1-q^{8n+1}}\right)\prod_{n\geq 0}\left(1+xq^{8n+5}+\frac{x^2q^{2(8n+5)}}{1-q^{8n+5}}\right.$$
$$\left.+xq^{8n+6}+\frac{x^2q^{2(8n+6)}}{1-q^{8n+6}}+xq^{16n+11}\frac{1-(1-x)q^{8n+5}}{1-q^{8n+5}}\frac{1-(1-x)q^{8n+6}}{1-q^{8n+6}}\right).$$

由上述生成函数，我们随即得到如下结果。

命题 5.2. 我们有

$$H_{1,2}(q)=\sum_{n\geq 0}g_{1,2}(n)q^n=\sum_{n\geq 1}\frac{nq^{n^2+n}(-q;q^2)_{n+1}}{(q^2;q^2)_n},$$
$$H_{2,2}(q)=\sum_{n\geq 0}g_{2,2}(n)q^n=\frac{1}{(q,q^5,q^6;q^8)_\infty}\left(\frac{q^5+q^6+q^9}{1-q^8}+\frac{q^2+q^{10}-q^{11}+q^{12}}{1-q^{16}}\right).$$

6. Asymptotics for hook numbers arising from Little Göllnitz identity

在本节中，我们推导定理 1.6 和 1.7 中的渐近公式。在以下各小节中，我们给出$g_{1,1}(n)$的渐近式的证明。其他渐近分析可类似地推导。与上一节一样，我们首先研究生成函数中求和项的量级何时较大。回顾命题 5.1：

$$H_{1,1}(q)=\sum_{n\geq 0}g_{1,1}(n)q^n=\sum_{n\geq 0}\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}.$$

峰值出现在 $q^{2n}\approx\sqrt{2}-1$ 处，当

$$\frac{(n+1)q^{(n+1)^2+(n+1)}(-q^{-1};q^2)_{n+1}}{(q^2;q^2)_{n+1}}\Big/\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}\approx 1.$$

因此，我们考虑

$$\mathcal{N}_\varepsilon:=\left\{n:\left|n-\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2\varepsilon}\right|\leq\varepsilon^{-\frac{3}{5}}\right\}.$$

与 (4.1) 类似，我们将生成函数分解为

$$H_{1,1}(q)=\mathcal{H}_{1,1}(q)+\mathcal{E}_{1,1}(q):=\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}.$$

我们首先在一个较窄的 y 范围内推导 $\mathcal{H}_{1,1}(q)$ 的渐近公式，随后将其推广到所需范围。由于证明过程与定理 1.3 的证明类似，我们简要概述总体思路，并在出现技术差异时提供更多计算细节。

6.1. $\mathcal{H}_{1,1}(q)$ 和 $\mathcal{E}_{1,1}(q)$ 的首个渐近估计。

我们首先证明 $\mathcal{H}_{1,1}(q)$ 在较窄范围内的估计。

命题 6.1。设 $n\in\mathcal{N}_\varepsilon$ 和 $u\in\mathbb{C}$ 满足

$$n=\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2z}+\frac{u}{\sqrt{z}}.$$

若对于某个 $\delta > 0$ 有 $y \ll \varepsilon^{\frac{1}{3}+\delta}$，则关于 u 一致地有，

$$\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\pi z}} \exp\left(\frac{\pi^2}{16z} - 2u^2\right) + O\left(\varepsilon^{3\delta_1}\right) \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left(\frac{\pi^2}{16z} - 2u^2\right),$$

其中 $\delta_1 = \text{最小值}\{\delta, \frac{1}{15}\}$。

证明。 我们看到

$$q^{2n} = \exp(-2nz) = \exp\left(-\log(\sqrt{2}+1) - 2u\sqrt{z}\right) = (\sqrt{2}-1)e^{-2u\sqrt{z}}.$$

令 $\nu := \frac{u}{\sqrt{z}}$。 由于 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon$，我们观察到

$$\nu = n - \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2z} = \left(\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\varepsilon} + \mu\right) - \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\varepsilon(1+iy)} = \frac{iy}{1+iy}\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\varepsilon} + \mu \ll \varepsilon^{\delta-\frac{2}{3}} + \varepsilon^{-\frac{3}{5}}$$

对于某个满足 $|\mu| \le \epsilon^{-3/5}$ 的 μ。因此， $\nu z = o(1)$ 即得所需结论。我们设 $\bar{w} = \sqrt{2}-1$。于是，$|w| < 1$，从而由引理 2.1 和 2.2，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}\left(\frac{1}{(q^2;q^2)_n}\right) &= \operatorname{Log}\left(\frac{(q^{2n+2};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\right) \\
&= \left(\frac{\pi^2}{6} - \operatorname{Li}_2(\sqrt{2}-1)\right)\frac{1}{2z} - \left(\frac{u}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2}\right)\log(2-\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{z}{\pi}\right) \\
&\quad - \frac{u^2}{\sqrt{2}} - \frac{z}{12} + \psi_{\sqrt{2}-1}\left(\frac{u}{\sqrt{z}}, 2z\right) + O\left(z^L\right)
\end{aligned}$$

对所有 $L \in \mathbb{N}$ 均成立。类似地，令 $\nu := \frac{u}{\sqrt{z}} - \frac{3}{2}$，并利用

$$(-q^{-1};q^2)_\infty = (1+q^{-1})\frac{(q^2;q^2)_\infty^2}{(q;q)_\infty(q^4;q^4)_\infty},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(-q^{-1};q^2)_n &= \operatorname{Log}\left(\frac{(-q^{-1};q^2)_\infty}{(-q^{2n-3+2};q^2)_\infty}\right) \\
&= \left(\operatorname{Li}_2(1-\sqrt{2}) + \frac{\pi^2}{12}\right)\frac{1}{2z} + \left(\frac{u}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{2}\right)\log(2) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{z}} - \frac{3}{2}\right)^2 z \\
&\quad + \frac{11z}{24} - \psi_{1-\sqrt{2}}\left(\frac{u}{\sqrt{z}} - \frac{3}{2}, 2z\right) - \sum_{m\ge 1}\frac{\operatorname{Li}_{1-2m}(-1)}{(2m)!}z^{2m} + O\left(z^L\right).
\end{aligned}$$

对于 q^{n^2+n}，我们有

$$-(n^2+n)z = -\frac{\log^2(\sqrt{2}+1)}{4z} - \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2} - \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{z}}u - \sqrt{z}u - u^2.$$

总之，利用 [15, 式（11）]

$$\operatorname{Li}_2(\sqrt{2}-1) - \operatorname{Li}_2(1-\sqrt{2}) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\log^2(\sqrt{2}+1)}{2},$$

我们得到

$$\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = \left(\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2z} + \frac{u}{\sqrt{z}}\right)2^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{z}{\pi}}\exp\left(\frac{\pi^2}{16z} - 2u^2 + \mathcal{E} + O\left(z^L\right)\right),$$

其中

$$\mathcal{E}=-\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\sqrt{z}u-\frac{15-9\sqrt{2}}{8}z+\psi_{\sqrt{2}-1}\left(\frac{u}{\sqrt{z}},2z\right)-\psi_{1-\sqrt{2}}\left(\frac{u}{\sqrt{z}}-\frac{3}{2},2z\right)-\sum_{m\geq 1}\frac{\mathrm{Li}_{1-2m}(-1)}{(2m)!}z^{2m}.$$

当 $y\ll\varepsilon^{\frac{1}{3}+\delta}$时，我们有 $z\asymp\varepsilon$。由 $n\in\mathcal{N}_\varepsilon$，我们有 $u\ll\varepsilon^{-\frac{1}{6}+\delta_1}$。因此，由(2.1)，我们发现 $\mathcal{E}\ll\varepsilon^{3\delta_1}$ 在 u 上一致成立，因为误差项中的常数与 u无关。因此，我们得出

$$\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}=\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\pi z}}\left(1+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}+\delta_1}\right)\right)\exp\left(\frac{\pi^2}{16z}-2u^2\right)\left(1+O\left(\varepsilon^{3\delta_1}\right)\right).\qquad\square$$

利用双射

$$n\mapsto u=-\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{z}}+n\sqrt{z},$$

我们可以推导出当 y 较小时$H_{1,1}(q)$的渐近式。由于证明过程与定理4.2类似，此处省略证明。

命题 6.2. 若对某个 $\delta>0$有 $y\ll\varepsilon^{\frac{2}{5}+\delta}$，则当 $z\to 0$时，我们有

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}=\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2^{5/4}}z^{-1}e^{\frac{\pi^2}{16z}}+O\left(\varepsilon^{-\frac{9}{10}}e^{\frac{\pi^2}{16\varepsilon}}\right).$$

现在我们给出远离峰值的求和项之和的误差估计。

命题 6.3。 对于每个 $L\in\mathbb{N}$，当 $\mathrm{Re}(z)\to 0$ 位于右半平面时，

$$|\mathcal{E}_{1,1}(q)|=\left|\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}\right|\ll\varepsilon^{L-1}e^{\frac{\pi^2}{16\varepsilon}}.$$

证明。由于

$$\left|\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}\right|\leq\frac{n|q|^{n^2+n}(-|q|^{-1};|q|^2)_n}{(|q|^2;|q|^2)_n},$$

因此只需考虑 z 为实数的情形。于是，假设 $z=\varepsilon$ 为实数，即 $y=0$。固定$n\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{N}_\varepsilon$，并令 $\mu\in\mathbb{R}$ 满足 $n=\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2\varepsilon}+\mu$。

首先，我们考虑对满足 $\mu>0$ 的 n 求和。于是 $q^{2n}=(\sqrt{2}-1)e^{-2\mu\varepsilon}$，并且

$$\log\left((q^{2n+2};q^2)_\infty\right)=\sum_{m\geq 1}\log\left(1-q^{2n+2m}\right)=-\sum_{m\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{q^{k(2n+2m)}}{k}=-\sum_{k\geq 1}\frac{(\sqrt{2}-1)^k}{k}\frac{e^{-2k\mu\varepsilon}}{e^{2k\varepsilon}-1}.$$

由于对所有 $x\neq 0$ 都有 $e^x>1+x$，且当 $x>0$时有$\frac{1}{e^x-1}>\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$，因此

$$\frac{e^{-2k\mu\varepsilon}}{e^{2k\varepsilon}-1}>(1-2k\mu\varepsilon)\left(\frac{1}{2k\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2k\varepsilon}-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)+k\mu\varepsilon,$$

这意味着

$$\log\left((q^{2n+2};q^2)_\infty\right)<-\frac{\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1)}{2\varepsilon}-\log(2-\sqrt{2})\left(\mu+\frac{1}{2}\right)-\frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

结合引理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{(q^2;q^2)_n}\right) &= \log\left(\frac{(q^{2n+2};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\right)\\ &< \left(\frac{\pi^2}{6}-\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1)\right)\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\varepsilon}{\pi(2-\sqrt{2})}\right)\\ &\quad -\frac{\varepsilon}{12}-\log(2-\sqrt{2})\mu-\frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{2}}+O\left(\varepsilon^L\right).\end{aligned} \tag{6.1}$$

我们还有

$$-\log\left((-q^{2n-3+2};q^2)_\infty\right)=\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k(\sqrt{2}-1)^k}{k}\frac{e^{-2k\mu\varepsilon+3k\varepsilon}}{e^{2k\varepsilon}-1}=:\Sigma_1+\Sigma_2,$$

其中

$$\Sigma_1:=-\sum_{\substack{k\geq 1\\ k:\text{odd}}}\frac{(\sqrt{2}-1)^k}{k}\frac{e^{-2k\mu\varepsilon+3k\varepsilon}}{e^{2k\varepsilon}-1}\qquad\text{and}\qquad\Sigma_2:=\sum_{\substack{k\geq 1\\ k:\text{even}}}\frac{(\sqrt{2}-1)^k}{k}\frac{e^{-2k\mu\varepsilon+3k\varepsilon}}{e^{2k\varepsilon}-1}.$$

对于奇数 k 的求和，我们得到

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &< -\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{\substack{k\geq 1\\ k:\text{odd}}}\frac{(\sqrt{2}-1)^k}{k^2}-(1-\mu)\sum_{\substack{k\geq 1\\ k:\text{odd}}}\frac{(\sqrt{2}-1)^k}{k}+\varepsilon\left(\frac{3}{2}-\mu\right)\sum_{\substack{k\geq 1\\ k:\text{odd}}}(\sqrt{2}-1)^k\\ &= -\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{\substack{k\geq 1\\ k:\text{odd}}}\frac{(\sqrt{2}-1)^k}{k^2}+\frac{1}{2}(1-\mu)\log(\sqrt{2}-1)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{3}{2}-\mu\right).\end{aligned}$$

对于较小的 ε，有 $\mu>\frac{3}{2}$。因此，我们使用 $e^{k(-2\mu+3)\varepsilon}<1$ 和 $e^{2k\varepsilon}-1>2k\varepsilon$ 得到

$$\Sigma_2<\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{\substack{k\geq 1\\ k:\text{even}}}\frac{(\sqrt{2}-1)^k}{k^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\log\left((-q^{-1};q^2)_n\right) &= \log\left(\frac{(-q^{-1};q^2)_\infty}{(-q^{2n-3+2};q^2)_\infty}\right)\\ &< \frac{\mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2})}{2\varepsilon}+\frac{1}{2}(1-\mu)\log(\sqrt{2}-1)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{3}{2}-\mu\right)\\ &\quad +\frac{\pi^2}{24\varepsilon}+\log(2)+\frac{11\varepsilon}{24}-\sum_{m\geq 1}\frac{\mathrm{Li}_{1-2m}(-1)}{(2m)!}\varepsilon^{2m}+O\left(\varepsilon^L\right).\end{aligned} \tag{6.2}$$

对于 q^{n^2+n}，我们有

$$-(n^2+n)\varepsilon=-\frac{\log^2(\sqrt{2}+1)}{4\varepsilon}-\log(\sqrt{2}+1)\left(\mu+\frac{1}{2}\right)-\mu^2\varepsilon-\mu\varepsilon. \tag{6.3}$$

因此，将 (6.1)、(6.2) 和 (6.3) 合并起来，我们发现对于 $\mu > 0$,

$$\log\left(\frac{q^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}\right) < \frac{\pi^2}{16\varepsilon} - \frac{1}{2}\log(2\sqrt{2}-2)\mu - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{\varepsilon(4-2\sqrt{2})}\right) - \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\mu - \frac{9}{8}\right)\varepsilon - \mu^2\varepsilon - \sum_{m\geq 1}\frac{\mathrm{Li}_{1-2m}(-1)}{(2m)!}\varepsilon^{2m} + O\left(\varepsilon^L\right).$$

若 $\delta > 0$、$\ell < -\frac{1}{2} - \delta$ 和 $|\mu| > \varepsilon^\ell$，则存在一个与 ℓ 无关的 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于 $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\log\left(\frac{q^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}\right) < \frac{\pi^2}{16\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon^{2\ell+1}.$$

如命题 4.5 的证明中所示，我们得到

$$\sum_{n>\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2\varepsilon}+\varepsilon^{-\frac{3}{5}}} \frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} \ll \varepsilon^{L-1}e^{\frac{\pi^2}{16\varepsilon}}$$

对所有 $L \in \mathbb{N}$，当 $\varepsilon \to 0$ 时。

接下来，我们考虑满足 $\mu < 0$ 的 n 之和。令 $a_n := \frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}$。那么峰值出现在 $q^{2n} \approx \sqrt{2}-1$，并且

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{q^{2n+2}(1+q^{2n-1})}{1-q^{2n+2}} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1+q^{-1}\exp(-2n\varepsilon)}{q^{-2}\exp(2n\varepsilon)-1} \approx \frac{1+\exp(-2n\varepsilon)}{\exp(2n\varepsilon)-1},$$

对于固定的 $\varepsilon > 0$，该值随 n 增大而递减。因此，对于

$$n < \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2\varepsilon} - \varepsilon^{-\frac{3}{5}},$$

我们可以找到 $\rho \in (0, 1)$，使得

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{1+(\sqrt{2}-1)\exp(-2\varepsilon^{\frac{2}{5}})}{(\sqrt{2}+1)\exp(2\varepsilon^{\frac{2}{5}})-1} \geq \frac{1}{\rho}.$$

因此，令 峰值处 a_n 的值为 M，我们得到对于所有 $L \in \mathbb{N}$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\sum_{n<\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2\varepsilon}-\varepsilon^{-\frac{3}{5}}} a_n \leq \sum_{n<\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2\varepsilon}-\varepsilon^{-\frac{3}{5}}} \rho^{\varepsilon^{-\frac{3}{5}}}\rho^n M \ll \varepsilon^L e^{\frac{\pi^2}{16\varepsilon}},$$

其中我们使用了命题 6.1 中的 $M \ll \varepsilon^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi^2}{16\varepsilon}}$。 □

6.2. **的渐近式**$H_{1,\ 1}(q)$。下面的命题给出了峰值附近更大范围的估计，此处省略证明。

命题 6.4。设 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 和 $v \in \mathbb{C}$ 满足

$$n = \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2\varepsilon} + \frac{v}{\sqrt{z}}.$$

假设 $y \ll 1$。那么我们有

$$\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = \frac{\log(w^{-1})}{(1+w)}\sqrt{\frac{w}{\pi z(1-w)}}\exp\left(\frac{\Lambda(y)}{2z}+\mathrm{Log}\left(\frac{w(1+w)}{1-w}\right)\frac{v}{\sqrt{z}}-\left(1+\frac{2w}{1-w^2}\right)v^2\right)$$
$$+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{5}}\right)\frac{1}{\sqrt{z}}\exp\left(\frac{\Lambda(y)}{2z}+\mathrm{Log}\left(\frac{w(1+w)}{1-w}\right)\frac{v}{\sqrt{z}}-\left(1+\frac{2w}{1-w^2}\right)v^2\right),$$

其中 $w := (\sqrt{2}-1)^{1+iy}$ 且

$$\Lambda(y) := \frac{\pi^2}{4} - \mathrm{Li}_2(w) + \mathrm{Li}_2(-w) - \frac{1}{2}(1+iy)^2\log^2(\sqrt{2}+1).$$

接下来，我们证明命题 6.2 中 $H_{1,1}(q)$ 的渐近式对 $|y| \ll 1$ 也成立。为此，我们需要证明以下引理，其证明方法与引理 4.7 类似。

引理 6.5。 设 $s(y) := \mathrm{Re}\left(2^{\frac{\Lambda(y)}{(1+iy)}} - \frac{\pi^2}{16}\right)$。则有以下结论。

(1) $s(y) \le 0$ 对所有 $y \in \mathbb{R}$ 均成立，且等号成立当且仅当 $y = 0$。

*(2) </style>*当 $y \to 0$ 时，

$$s(y) = \left(-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\log^2(\sqrt{2}+1)\right)y^2 + O\left(y^4\right).$$

现在，我们可以证明当 $z = \varepsilon(1+iy) \to 0$ 时，$H_{1,1}(q)$ 在有界锥$|y| \ll 1$中的渐近式。

命题 6.6。 若 $y \ll 1$，则当 $z \to 0$ 时，我们有，

$$H_{1,1}(q) = \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2^{5/4}}z^{-1}e^{\frac{\pi^2}{16z}} + O\left(\varepsilon^{-\frac{9}{10}}e^{\frac{\pi^2}{16\varepsilon}}\right).$$

证明。 由命题 6.3，所需的渐近式可由以下断言推出：

$$ze^{-\frac{\pi^2}{16\varepsilon}}\left(\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} - \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2^{5/4}}z^{-1}e^{\frac{\pi^2}{16z}}\right) \ll \varepsilon^{\frac{1}{10}}.$$

由命题 6.2，只需证明：若 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll 1$ 对某个 $\delta > 0$ 成立，则对所有$L \in \mathbb{N}$，我们有，

$$ze^{-\frac{\pi^2}{16\varepsilon}}\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = O\left(\varepsilon^L\right). \tag{6.4}$$

若 $y \ll 1$，由命题 6.4，

$$ze^{-\frac{\pi^2}{16\varepsilon}}\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon}\frac{nq^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = \frac{\log(w^{-1})}{1+w}\sqrt{\frac{wz}{\pi(1-w)}}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy}-\frac{\pi^2}{8}\right)}\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon}e^{-\left(1+\frac{2w}{1-w^2}\right)v^2+\frac{v}{\sqrt{z}}\mathrm{Log}\left(\frac{w(1+w)}{1-w}\right)}$$
$$+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{5}}\right)\sqrt{z}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy}-\frac{\pi^2}{8}\right)}\sum_{n\in\mathcal{N}_\varepsilon}e^{-\left(1+\frac{2w}{1-w^2}\right)v^2+\frac{v}{\sqrt{z}}\mathrm{Log}\left(\frac{w(1+w)}{1-w}\right)},$$

其中 $w = (\sqrt{2}-1)^{1+iy}$。因此，要证明 (6.4)，只需证明指数 ent

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\Lambda(y)}{1+iy}-\frac{\pi^2}{8}\right) - \left(1+\frac{2w}{1-w^2}\right)v^2 + \frac{v}{\sqrt{z}}\mathrm{Log}\left(\frac{w(1+w)}{1-w}\right) \tag{6.5}$$

对于某个 $\delta_0 > 0$，其负实部的大小为 $\gg \varepsilon^{-\delta_0}$，因为其他项均有界，如 $z \to 0$ 所示。

如果对于某个 $\delta > 0$ 有 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll 1$，那么 $\frac{1}{2\varepsilon}\left(\Lambda\left(\frac{y}{1+iy} - \frac{\pi^2}{8}\right)\right)$ 的实部为 $s(y)\varepsilon$，根据引理 6.5 (1)，该值为负。我们还得到，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\frac{s(y)}{\varepsilon} \gg \frac{y^2}{\varepsilon} \gg \varepsilon^{-2\delta}$$

由引理 6.5 (2) 得。根据泰勒级数展开，当 $y \to 0$ 时，

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{Log}\left(\frac{w(1+w)}{1-w}\right)\right) = \log\left|\frac{w(1+w)}{1-w}\right| = -\frac{\log^2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}y^2 + O\left(y^4\right) \ll y^2.$$

由于 $|\nu| = \left|\frac{v}{\sqrt{z}}\right| \ll \varepsilon^{-\frac{3}{5}}$，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{v}{\sqrt{z}}\mathrm{Log}\left(\frac{w(1+w)}{1-w}\right)\right) \ll \varepsilon^{-\frac{3}{5}}y^2.$$

由于 $\frac{y^2}{\varepsilon} \gg \varepsilon^{-\frac{3}{5}}y^2$，$s(y)y$ 大于 $\mathrm{Re}\left(\frac{v}{\sqrt{z}}\mathrm{Log}\left(\frac{w(1+w)}{1-w}\right)\right)$。对于项 $\left(1+\frac{2w}{1-w^2}\right)v^2$，我们考虑以下两种情况。

(1) 假设 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll \varepsilon^{\frac{1}{4}}$。由于 v 是 $\sqrt{z}$ 和 $y \ll \varepsilon^{\frac{1}{4}}$ 的实数倍，因此对于 $y \ll \varepsilon^{\frac{1}{4}}$，

$$\mathrm{Re}\left(\left(1+\frac{2w}{1-w^2}\right)(1+iy)\right) > 0.$$

因此，$-\left(1+\frac{2w}{1-w^2}\right)v^2$ 的实部为负，因为 $z \to 0$。

(2) 若 $\varepsilon^{\frac{1}{3}} \ll y \ll 1$，则 $|z| \ll \varepsilon$。由于 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon$，我们有 $|v| \ll \varepsilon^{-\frac{1}{10}}$。因此，结合事实 $\left|1+\frac{2w}{1-w^2}\right| \leq 2$，可得 $-\left(1+\frac{2w}{1-w^2}\right)v^2 \ll \varepsilon^{-\frac{1}{5}}$。

无论哪种情况，指数 $s(y)\varepsilon$ 的大小为 $\gg \varepsilon^{-2\delta}$，并且其主导了(6.5)中其他实部为正的指数。因此，取 $\delta_0 = 2\delta$即可证明断言(6.4)。

接下来，在表达式 $\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2^{5/4}}e^{\frac{\pi^2}{16z}-\frac{\pi^2}{16\varepsilon}}$ 中，指数部分具有 si 的负实部 ze

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\pi^2}{16z} - \frac{\pi^2}{16\varepsilon}\right) = \frac{\pi^2}{16\varepsilon}\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+iy}\right) - 1\right) = -\frac{\pi^2}{16\varepsilon}\frac{y^2}{1+y^2} \gg \varepsilon^{-2\delta}.$$

对于 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll 1$。由此可得，对于 $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \ll y \ll 1$，

$$\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2^{5/4}}e^{\frac{\pi^2}{16z}-\frac{\pi^2}{16\varepsilon}} \ll \varepsilon^L \quad \text{for all } L \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

6.3. **Th 的证明 eorems 1.6 与 1.7**。在本小节中，我们最终证明渐近公式 .

定理 *1.6* 的证明。由命题 6.6，当 $z = \varepsilon(1+iy) \to 0$ 时，我们有，其中 $\varepsilon > 0$ 且 $y \ll 1$，

$$H_{1,1}(q) \sim \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{2^{\frac{5}{4}}}z^{-1}e^{\frac{\pi^2}{16z}}.$$

与 命题 6.6 类似，我们可以证明 $H_{1,2}(q)$ 与 $H_{1,1}(q)$ 具有相同的渐近式 .

由于 $g_{1,1}(n)$ 和 $g_{2,2}(n)$ 显然是弱递增的，我们可以应用定理 2.4，得到当 $n \to \infty$ 时 $g_{2,1}(n)$ 和 $g_{1,2}(n)$ 的渐近分析。□

现在我们来证明定理 1.7。

定理 *1.7* 的证明。回顾命题 5.1 和 5.2：

$$H_{2,1}(q)=\sum_{n\geq 0} g_{2,1}(n)q^n=\frac{1}{(q,q^5,q^6;q^8)_\infty}\frac{q+q^5+q^6}{1-q^8},$$

$$H_{2,2}(q)=\sum_{n\geq 0} g_{2,2}(n)q^n=\frac{1}{(q,q^5,q^6;q^8)_\infty}\left(\frac{q^5+q^6+q^9}{1-q^8}+\frac{q^2+q^{10}-q^{11}+q^{12}}{1-q^{16}}\right).$$

与命题 6.6 类似，我们可以发现，当 $z=\varepsilon(1+iy)\to 0$ 时，

$$\frac{1}{(q,q^5,q^6;q^8)_\infty}=\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}(-q^{-1};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}\sim\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}e^{\frac{\pi^2}{16z}},$$

其中 $\varepsilon>0$ 和 $y\ll 1$。此外，利用渐近分析

$$\frac{q+q^5+q^6}{1-q^8}\sim\frac{3}{8z}\qquad\text{and}\qquad\frac{q^5+q^6+q^9}{1-q^8}+\frac{q^2+q^{10}-q^{11}+q^{12}}{1-q^{16}}\sim\frac{1}{2z}\qquad\text{as } z\to 0,$$

我们有，当 $z=\varepsilon(1+iy)\to 0$ 时，其中 $\varepsilon>0$ 和 $y\ll 1$，

$$H_{2,1}(q)\sim\frac{3}{2^{\frac{13}{4}}z}e^{\frac{\pi^2}{16z}}\qquad\text{and}\qquad H_{2,2}(q)\sim\frac{1}{2^{\frac{5}{4}}z}e^{\frac{\pi^2}{16z}}.$$

由于 $g_{2,\ 1}(n)$ 和 $g_{2,\ 2}(n)$ 显然是弱递增的，因此我们可以运用定理 2.4，得到 $g_{2,\ 1}(n)$ 和 $g_{2,\ 2}(n)$ 在 $n\to\infty$ 时的渐近分析。□

7. Final Remarks

本文研究了源自第一罗杰斯–拉曼努金恒等式和第一小 G¨ollnitz 恒等式的两个等势集合之间的 t-钩不等式。这一分析可扩展至第二罗杰斯–拉曼努金恒等式和第二小 G¨ollnitz 恒等式。第一和第二个恒等式之间的差异如下：对于部件差条件，所有部件均大于 1；对于部分同余条件，第二罗杰斯–拉曼努金恒等式中的部件模 5 同余于 2,3，而第二小 G¨ollnitz 恒等式中的部件模 8 同余于 2,3,7。另一个具有间隔为 2 的条件的例子是 G¨ollnitz–Gordon 恒等式 [12, 13]。第一 G¨ollnitz–Gordon 恒等式指出，n 的满足部件之差为 2 且没有两个偶部件之差恰为 2 的分拆数量，等于 n 的部件模 8 同余于 1,4 或 7 的分拆数量。由于这些具有间隔条件的分拆集合所对应的生成函数很可能是 Nahm 和，我们希望本文采用的渐近方法能为进一步分析此类生成函数提供指引。例如，第二罗杰斯–拉曼努金恒等式中满足间隔为 2 条件的分拆的 1-钩数量由 $\sum_{n\geq 1}{}^{nq^{n^2+n}}_{q\ q\ n}{}_{(;)}$生成，我们的方法可应用于此。

证明中的关键因素之一是计算 t-钩数量的生成函数。对于较大的 t，似乎很难找到生成函数。根据对较小t 和 n所做的数值实验，我们观察到，当 n 足够大时，满足某些间隔条件的 n的所有分拆中，1-钩的数量多于满足相应同余条件的 n 的所有分拆；而当 $t>1$ 时，不等式反向，且满足同余条件的分拆拥有更多t-钩。特别地，我们猜想，对于 $t>2$,

$$r_{1,t}(n)<r_{2,t}(n)\quad\text{and}\quad g_{1,t}(n)<g_{2,t}(n)$$

对所有充分大的整数 n均成立。

Acknowledgments

Aritram Dhar 谨向 George E. Andrews 致谢，感谢他于2025年5月7日至6月25日在宾夕法尼亚州立大学接待自己担任访问研究学者。本项目正是在那里与 Ae Ja Yee 讨论后开始的。Byungchan Kim 获得了韩国国家研究基金会（NRF）通过科学技术信息通信部资助的基础科学研究计划（RS-2025-16065347）支持。Eunmi Kim 获得了韩国国家研究基金会（NRF）通过教育部资助的基础科学研究计划（RS-2023- 00244423）支持。Ae Ja Yee 获得了西蒙斯基金会拨款（# 633963）的部分资助。

References

[1] G. E. Andrews, *Two theorems of Euler and a general partition theorem*, 《美国数学会会刊》20（1969），499–502。[2] G. E. Andrews, 《分拆理论》，艾迪生-韦斯利，雷丁，1976（重印版：剑桥大学出版社，剑桥，1985）。[3] G. E. Andrews, *Applications of basic hypergeometric functions*, 《工业与应用数学学会评论》16（1974），441–484。[4] G. E. Andrews, *Euler's partition identity and two problems of George Beck*, 《数学学生》86（2017），115–119。[5] G. E. Andrews、R. Kumar 和 A. J. Yee, *On Euler's partition theorem*, 《组合学与数论前沿》第1卷，2026年，第26–30页。doi:10.3934/fcnt.2026003[6] C. Ballantine、H. Burson、W. Craig、A. Folsom 和 B. Wen, *Hook length biases and general linear partition inequal-ities*, 《数学研究科学》10（2023），论文编号41，共36页。[7] K. Bringmann、C. Jennings-Shaffer 和 K. Mahlburg, *On a Tauberian theorem of Ingham and Euler–Maclaurin summation*, 《拉马努金杂志》61（2023），55–86。[8] K. Bringmann、S. H. Man、L. Rolen 和 M. Storzer, *Asymptotics of parity biases for partitions into distinct partsvia Nahm sums*, 《伦敦数学会会刊》（第3辑）129（2024），第6期，论文编号e70010，共40页。[9] W. Craig、M. L. Dawsey 和 G.-N. Han, *Inequalities and asymptotics for hook numbers in restricted partitions*, 预印本 arXiv:2311.15013v1。[10] S. Garoufalidis 和 D. Zagier, *Asymptotics of Nahm sums at roots of unity*, 《拉马努金杂志》55（2021），219–238。[11] J. W. L. Glaisher, *A theorem in partitions*, 《数学信使》12（1883），158–170。[12] H. G· *Partitionen mit differenzenbedingungen*, 《克雷尔数学杂志》225（1967），154–190。[13] B. Gordon, *Some continued fractions of the Rogers–Ramanujan type*, 《杜克数学杂志》32（1965），741–748。[14] M. Katsurada, *Asymptotic expansions of certain q-series and a formula of Ramanujan for specific values of the Riemann zeta function*, 《算术学报》107（2003），269–298。[15] F. M. S. Lima, *New definite integrals and a two-term dilogarithm identity* , 《数学研究》23（2012），1–9。[16] S. Ramanujan, *Proof of certain identities in combinatory analysis*, 《剑桥哲学学会会刊》19（1919），214–216。[17] L. J. Rogers, *Second memoir on the expansion of certain infinite products*, 《伦敦数学会会刊》25（1894），318–343。[18] I. J. Schur, *Zur additiven Zahlentheorie*, 《柏林科学院院报》，（1926）488–495。[19] J. J. Sylvester, *A constructive theory of partitions arranged in three acts an interact and an exodion*, 《美国数学杂志》5（1882），251-330及6（1884），334-336（或《詹姆斯·约瑟夫·西尔维斯特数学论文集》第4卷第1–83页，剑桥大学出版社，剑桥，1912）。[20] 在线整数数列百科全书，数列 A090867 和 A265251，https://oeis.org。[21] M. Vlasenko、S. Zwegers, *Nahm's conjecture: asymptotic computations and counterexamples*, 《数论与物理通信》5（2011），617–642。[22] L. Wang, *Explicit forms and proofs of Zagier's rank three examples for Nahm's problem*, 《数学进展》450（2024），论文编号109743。[23] D. Zagier, *The dilogarithm function*, 载于：《数论、物理与几何前沿 II》，P. Cartier、B. Julia、P. Monsia、P. Vanhove（编），施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约（2006），3–65。

Department of Mathematics, University of Florida, Gainesville, FL 32601, USA
Email address: aritramdhar@ufl.edu

School of Natural Sciences, Seoul National University of Science and Technology, 232 Gongneung-ro, Nowon-gu, Seoul, 01811, Republic of Korea*Email address*: bkim4@seoultech.ac.kr

Institute of Mathematical Sciences, Ewha Womans University, 52 Ewhayeodae-gil, Seodaemun-gu,Seoul 03760, Republic of Korea
Email address: ekim67@ewha.ac.kr; eunmi.kim67@gmail.com

Department of Mathematics, The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA
Email address: yee@psu.edu