退相干量子比特中的几何相位所产生的烟

Fernando C. Lombardo[1,2] 和 Paula I. Villar[1,2]1 *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina*
[2] *Instituto de Física de Buenos Aires (IFIBA), CONICET, Universidad de Buenos Aires, Argentina*

我们分析了量子比特通过纯退相位与环境耦合时获得的几何相位和动力学相位，建立了相位积累与烟之间的直接联系。我们表明，动力学相位仅取决于非相干烟，反映了其纯粹的能量起源。相比之下，几何相位对总烟中的相干贡献和非相干贡献均呈现非平凡依赖，从而体现了相干性、耗散与能量提取之间的相互作用。通过对量子比特—环境耦合强度进行微扰展开，我们证明，在弱耦合和长时间区间内，几何相位完全由非相干烟决定，而非相干烟恰好等于退相干过程中总烟达到的渐近值。这些结果清晰地区分了开放量子系统中的动力学相位和几何相位，并表明几何相位可作为探测能量资源的灵敏探针。此外，在超导电路实现中，我们的研究结果表明，可利用量子态层析等标准技术，通过几何相位测量间接推断二能级系统的烟。

arXiv:2603.01129v1 [quant-ph] 1 Mar 2026

一、引言

在量子热力学中，烟是指通过适当的量子操作从量子系统中提取的最大功量 [1–3]。它是衡量系统将内能转化为可用功的能力的指标 [4] ，并在优化量子过程中发挥着关键作用。通过优化量子操作，可以实现最大可提取功，因此烟是量子热力学研究以及量子系统能量管理中的一个基本概念。与经典热力学中仅由状态间的能量差决定功提取不同，烟提供了更广阔的视角。它不仅考虑能量差，还考虑由量子相干性带来的功提取潜力。量子相干性是指系统保持叠加态的能力，而这种能力可用于提取功。因此，烟对量子系统提取功的能力提供了更全面的衡量 [5]。这一指标兼顾状态间的能量差以及量子相干性的影响。由于几乎不可能将量子系统与环境隔离，研究开放量子系统中的功提取至关重要 [6]。在大多数关于开放量子系统功提取的研究中，通常假设系统相互作用的环境处于平衡态，并具有大量自由度 [7]。

最近，文献 [8] 的作者研究了从非平衡环境中的量子相干性提取功的问题，重点关注烟。作者分析了系统在马尔可夫和非马尔可夫两种机制下的动力学，并考察了非平稳环境相互作用的影响。 [8] 的一项重要发现是，与热平衡条件相比，非平衡环境能增强功提取。该研究区分了烟中的相干贡献与非相干贡献，并证明环境偏离平衡时，相干部分会增加。这表明，当系统处于波动或随时间变化的环境中时，可以更有效地利用量子相干性来提取功。在文献 [9], 中，研究者基于利用辅助量子比特测量烟的方法，成功测量了非平衡态烟中的相干与非相干分量。通过改变状态的相干性，研究者观察到系统相干性的增加会使烟增大。

在 [10], 中，作者利用三种不同的功提取方案，在超导跨单量子比特中实验测量了相干烟和非相干烟。结果表明，尽管量子相干性不会影响态的能量，却从根本上决定了可提取功的大小。通过改变初态的拉比角，他们观察到相干性与相干烟之间存在明显的正相关，而相干性与非相干烟之间存在负相关。这表明，可以根据量子电池的退相干特性优化初态的选择，例如，储存相干烟以防止能量弛豫，或储存非相干烟以避免退相位。

这些结果为理解环境动力学在量子热力学中的作用提供了宝贵见解，并凸显了其在设计能效高、可在现实非平衡条件下运行的量子技术方面的潜在应用。

此外，得益于 Berry 的开创性工作 [11], ，几何相位（GP）被理解为量子系统在演化过程中累积的相位。此后，它在量子信息及其他物理学分支中引起了广泛关注。Berry 证明，量子系统能够获得几何性质的相位：在绝热演化过程中，除了传统的动力学相位之外，还会产生一个与态空间几何性质相关的附加相位。这一思想最初针对孤立系统的绝热循环演化提出，随后得到了广泛推广。尽管许多推广都聚焦于纯态，但对混合态中几何相位的研究也日益受到关注，尤其是因为它们有望在现实物理条件下用于实现量子逻辑门。在此背景下，研究者基于量子干涉测量为非简并密度算符引入了一种几何相位的替代定义 [12]。随后，研究者提出了混合态几何相位的运动学描述，将其定义扩展至简并密度算符 [13]。近年来，开放量子系统中的几何相位也得到了研究，结果揭示，这些看似迥异的方法在统一框架下彼此关联 [14]。研究者还分析了退相位和自发衰减等多种退相干机制对几何相位的影响 [15]。此外，研究表明，只需改变与小型子系统相互作用的储库，就能产生几何相位 [16]。

几何相位在量子计算中至关重要，为实现容错提供了一条途径。然而，量子计算的实际实现不可避免地会受到退相干的影响。因此，将几何相位从幺正演化恰当地推广到非幺正演化，对于评估几何量子计算的鲁棒性至关重要。为此，人们提出了几何相位的泛函表示：通过规范变换，从系统获得的总相位中去除动力学相位 [17]。

沿量子轨迹研究几何相位的工作也已有报道 [18]。研究表明，在经历循环演化的受监测量子系统中，累积几何相位取决于具体的量子轨迹，并受到幺正动力学和环境相互作用的共同影响。因此，随机量子跃迁会使

几何相位呈现随机性。相关研究分析了此类系统中几何相位的分布，着重揭示非绝热效应与环境影响之间的相互作用。例如，在慢驱动系统中，由于发生多次随机跃迁，相位分布较为宽广。随着驱动加快，跃迁次数减少，分布逐渐集中于无跃迁轨迹附近；不过，非绝热修正和非厄米漂移项仍会导致相位偏离贝里相位。这些发现可由相关研究加以说明：研究对象是处于时变磁场中并与外部环境相互作用的自旋1/2粒子。

几何相位不仅已成为研究量子力学基本方面的富有成果的课题，也日益受到技术领域的关注。由于几何相位对系统状态在物理态空间中所经历路径的依赖关系非平凡，因此它们对特定环境或参数变化可能表现出很高的灵敏度，同时对其他变化保持稳健。因此，几何相位可作为高效的量子传感资源。例如，有研究报告称，对于一个与涂层硅圆盘保持固定距离、且该圆盘安装在旋转平台上的氮空位中心，累积几何相位存在与速度相关的修正，从而实现了对卡西米尔摩擦力的间接探测 [19]。参考文献 [20], 实验展示了人工跨蒙原子中真空诱导贝里相位的出现，随后参考文献 [21]解释了这种几何相位的稳健性。在超导电路中也观测到了几何相位，其中谐振器与三能级量子比特的能级色散耦合；此外，在五个量子比特可控地耦合至谐振器的架构中也观测到了几何相位 [22]。后一种情况下，研究者报告了一种基于该几何相位的量子门协议。更多关于几何相位的实验观测可见参考文献 [23, 24]。

超越贝里的原始表述，量子力学中的相位积累具有更为广泛且历史悠久的结构，尤其与量子态的时间—能量性质及波包的演化密切相关。Kennard [25], 提供了一个早期且颇具启发性的例子：他指出，对于一些简单类型的运动，例如均匀电场或磁场中的电子，或谐振子，相位演化中真正的量子力学内涵可以追溯到正则共轭变量之间的不确定性关系，以及薛定谔波包的概率诠释。从这一视角来看，相位积累是量子波包动力学的内在特征，而不只是参数空间中绝热输运的结果。

这一观点在现代波包演化研究中重新受到重视，因为振幅与相位之间的相互作用蕴含着非平凡的物理信息。特别是，Rozenman 等人近期的研究 [26] 表明，在线性势中演化的波包具有丰富的相位结构，超越了标准的贝里相位框架，并揭示了与动力学内在时间—能量结构相关的额外相位贡献。这些进展为早期量子相位演化表述与干涉测量、量子控制和相位敏感协议中的当代应用搭建了自然的概念桥梁。

在这一更广阔的背景下，本文讨论的几何相位可视为对早期相位积累概念的补充，并将其拓展至开放量子系统的情形，在这种情形中，退相干和耗散发挥着核心作用。

从能量角度出发，是进一步分析现实情形下几何相位行为的一种自然视角。在开放量子系统中，退相干通过影响系统能量中的相干与非相干贡献，改变了累积相位的结构。在这一框架下，几何相位可直接与系统烟的相干部分联系起来，而动力学相位则由非相干的、与布居相关的贡献决定。退相干过程（如退相位）会逐渐抑制相干烟，导致几何相位逐步减弱，同时使动力学相位基本不受影响。这种能量分解清晰地阐释了几何相位在环境噪声下的稳健性与脆弱性，并凸显了它们与量子系统中能量流动及其可及性的密切联系。

下面我们将研究二能级系统在退相位演化过程中获得的几何相位。我们还将探讨几何相位与系统烟之间的关系。最后，我们将分析所获得的几何相位与近期在耗散量子电池中观察到的动力学相位之间的关系。这类量子电池由二能级量子系统的最简模型构成，例如可在跨蒙的最低能级中实现 [27]。

II. 退相干量子比特的几何相位与烟

非幺正演化下混合态的几何相位定义如下 [17]:

$$\Phi_g = \arg\left\{\sum_k \sqrt{\lambda_k(0)\lambda_k(\tau)}\langle\Psi_k(0)|\Psi_k(\tau)\rangle\right\}\exp\left[-\int_0^T dt\langle\Psi_k|\dot{\Psi}_k\rangle\right], \tag{1}$$

其中， $\lambda_k(t)$ 是约化密度矩阵的本征值， $|\Psi_k\rangle$ 是约化密度矩阵 ρ_{r} 的本征态（对储库的自由度求迹后得到）。在此定义中， τ 表示总系统若与环境隔离，将完成一次循环演化所需的时间。考虑到环境效应，系统不再经历循环演化。不过，我们考虑一条准循环路径 $\mathcal{P}$： $t \in [0,\tau]$，其中 $\tau = 2\pi/\Omega$（Ω 为系统的频率） [17]。值得注意的是，方程（1）中的相位明显具有规范不变性，仅取决于态空间中的路径；尽管该相位定义于非简并混合态，但在纯态（封闭系统）的情况下，它对应于幺正几何相位 [12, 13]。

预计可以在这样的实验时间尺度上观测到几何相位：时间足够长，以忽略非绝热修正；同时又足够短，以避免退相干破坏干涉图样 [28]。我们不仅分析了环境对几何相位的影响及其抵御退相干的稳健性，还探讨了测量几何相位所需满足的条件 [24, 29]。

在这项工作中，我们旨在研究并确立退相位开放量子系统中㶲与几何相位之间的定量关系。㶲量化了从量子系统中可提取的最大功，而几何相位则编码了系统演化的信息，尤其是在存在耗散和退相干效应时。为此，我们将引入一个简单的自旋-玻色子模型，并计算幺正几何相位的修正。此外，我们将研究几何相位与系统㶲之间的关系，重点揭示开放量子环境中相干性、耗散与可提取功之间的相互作用。

我们将分析退相位如何影响这两个量，并探究从系统中提取功的能力与几何相位的积累之间是否存在某种基本联系。通过考察不同的退相位区间，我们将研究㶲中的相干贡献和非相干贡献如何演变，以及这些贡献是否与几何相位的变化相关。

我们的研究结果将为量子热力学与几何效应之间的相互作用提供新的见解，并有望为优化噪声量子系统中的功提取开辟新途径。

下文将研究一个精确模型：二态量子系统 [或量子比特（qubit）] 与谐振子热浴耦合，且退相干是作用于系统粒子的唯一效应。自旋-玻色子模型是其中的典型例子。在这种情况下，二能级量子系统的约化密度矩阵，即约化密度矩阵（ρ_r），可写为

$$\rho_r(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{10}(t) \\ \rho_{01}(t) & \rho_{00}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{10}(0)e^{-i\Omega t}e^{-\Gamma(t)} \\ \rho_{01}(0)e^{i\Omega t}e^{-\Gamma(t)} & \rho_{00}(0) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

在退相干模型中，演化过程中布居数保持不变，而相干性则会在一个称为退相干时间 t_D的特征时间尺度内衰减。退相干因子 $\Gamma(t)$ 定义为

$$\Gamma(t) = \int_0^t dt' \ \mathcal{D}(t') \tag{3}$$

其中， $\mathcal{D}(t)$ 是描述特定模型的扩散项（并出现在描述系统量子演化的林德布拉德主方程中）。对于自旋-玻色子模型（见 [29]），

$$\mathcal{D}(t) = \int_0^t ds \int_0^\infty d\omega J(\omega)\cos(\omega s)\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right), \tag{4}$$

其中， $\beta = 1/k_B T$ （k_B 为玻尔兹曼常数）， $J(\omega)$ 是由表达式 $J(\omega) = \sum_n \lambda_n^2 \delta(\omega - \omega_n)/2m_n\omega_n$ 定义的环境谱密度。

在图1中，我们给出了所研究退相位模型的退相位因子 $F(t) = \exp\{-\Gamma(t)\}$ 。可以看到，它是一个单调衰减函数，从1（幺正值）开始，并在长时间下趋于零（取决于热浴的强度 γ_0/Ω）。左图展示了热浴耦合强度与主系统固有频率（γ_0/Ω）之间不同比率下的退相位因子，此时θ的初始值固定，它定义了系统的初态。右图绘制了相干㶲 $\mathcal{E}_c(t)$ 随时间的变化。随着退相干效应破坏系统中的相干性，相干㶲逐渐消失。

为了研究退相干模型下几何相位的行为，我们需要计算方程（2）中约化密度矩阵的本征值和特征向量。该密度矩阵的本征值可写为

$$\lambda_\pm(t) = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \sqrt{(\rho_{00} - \rho_{11})^2 + 4\rho_{01}(t)\rho_{10}(t)},\Big). \tag{5}$$

对于纯初态，我们有 $\lambda_+(0) = 1$ 且 $\lambda_-(0) = 0$，因此，所关注的本征态为（见方程（1））

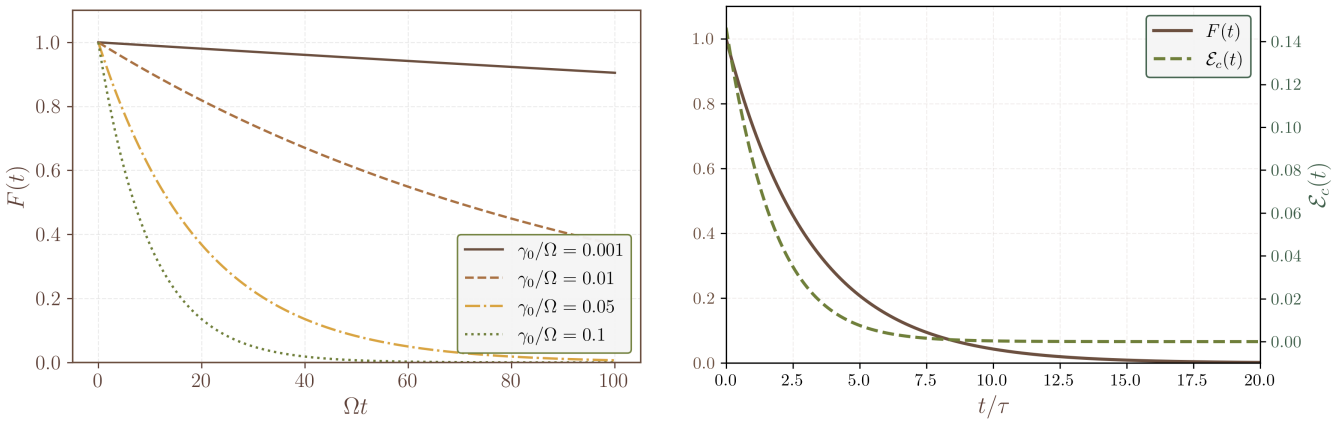

图1. 退相干模型的退相干因子 $F(t)$。左图中，对于固定的初始量子态（$\theta = \pi/3$），我们改变了速率 γ_0/Ω。右图中：我们还展示了相干烟 $\mathcal{E}_c(t)$，并将其与初始角度下、固定环境耦合（$\gamma_0/\Omega = 0.05$）时的退相干因子进行比较。

$$|\Psi_+(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{(\rho_{11} - \lambda_+(t))^2 + |\rho_{10}(t)|^2}} \Big((\rho_{11} - \lambda_+(t))|0\rangle - \rho_{10}(t)|1\rangle \Big). \tag{6}$$

代入方程（1），纯初态的几何相位可精确写为

$$\Phi_g(t) = \arg\{\langle\Psi_+(0)|\Psi_+(t)\rangle\} - \int_0^T dt \frac{\mathrm{Im}(\dot{\rho}_{10}(t)\rho_{10}^*(t))}{(\rho_{11} - \lambda_+(t))^2 + |\rho_{10}(t)|^2}. \tag{7}$$

为了计算几何相位（GP），我们进一步假设初态定义为

$$|\Psi(0)\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)|1\rangle.$$

这也将初始约化密度矩阵定义为 $\rho_r(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$。因此，几何相位可精确表示为

$$\Phi_g = -\int_0^T dt \frac{\Omega F^2 \sin^2\theta}{\left[\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + F^2\sin^2\theta}\right]^2 + F^2\sin^2\theta}. \tag{8}$$

很容易证明，当量子比特与其环境之间不存在相互作用（$F = 1$）时，该相位会化为众所周知的贝里相位表达式 $\Phi_B = \pi(1 - \cos\theta)$，其中 $T = \tau$。

图2展示了退相位演化过程中获得的几何相位（GP）。左图展示了对于热浴的不同耦合强度 γ_0/Ω 和固定初始角度，几何相位随演化周期数的变化。右图展示了对于不同初始态和固定耦合强度 γ_0/Ω，所获得的几何相位。

对于小角度 $\theta \ll 1$，几何相位非常小；而对于 $\theta = \pi/2$，系统在每个时间周期演化 $\tau = 2\pi/\Omega$ 时都会获得 π 的几何相位。

A. 几何相位与烟

烟是指通过循环幺正过程从量子系统中提取的最大能量。该循环幺正过程可由幺正变换操作 U 表征。总功率可表示为

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho H) - \min_U \mathrm{Tr}(HU\rho U^\dagger),$$

其中，H 是系统的哈密顿量，最小值取遍所有幺正变换的集合。已有研究证明，对于任意给定的状态，都存在一个使上述方程取最大值的唯一状态。该状态称为被动态 P。因此，完整的烟可表示为

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}\left(\hat{H}\left(\hat{\rho} - \hat{P}\rho\right)\right).$$

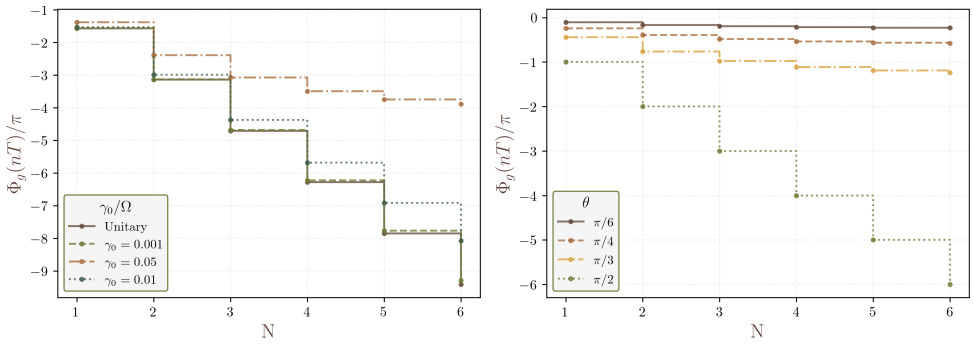

图2. 不同退相干环境下不同初态的几何相位。左图展示了在退相干模型下，取不同的 γ_0 时，初态为具有 $\theta = \pi/3$ 的叠加态所获得的几何相位随若干周期的变化。可以很容易看出，几何相位具有鲁棒性，因为所有曲线都重合。右图展示了系统在 $\gamma_0/\Omega = 0.05$ 的退相干模型下，不同初始角度所获得的几何相位。

Cons　　考虑密度矩阵 ρ_r 和哈密顿量 H 的谱分解：

$$\begin{aligned} \rho_r &= \sum_n r_n |r_n\rangle\langle r_n| \qquad r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n \\ H &= \sum_m \epsilon_m |\epsilon_m\rangle\langle\epsilon_m| \quad \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \cdots \leq \epsilon_m \end{aligned} \tag{9}$$

因此，烟 $\mathcal{E}(\rho_r)$ 可表示为

$$\mathcal{E}(\rho_r) = \sum_{r_n,\epsilon_m} r_n \epsilon_m \left(|\langle r_n|\epsilon_m\rangle|^2 - \delta_{m,n} \right)$$

接下来，我们将考察烟的非相干部分这一概念。首先，我们探讨烟的非相干分量 $\mathcal{E}_i(\rho_r)$。 $\mathcal{E}_i(\rho_r)$ 可视为在不改变其相干性的情况下，从 ρ_r中提取的最大功。实际上， $\mathcal{E}_i(\rho_r)$ 表示通过退相干映射消除态的所有相干性后，可从 ρ_r 中提取的最大功。 $\mathcal{E}_i(\rho_r)$ 可视为非相干态的烟；该态与 ρ_r 具有相同的能量分布，但相干性为零。为计算非相干烟，我们需要先确定与退相干态 δ_{ρ_r} 相对应的被动态，记为 P_δ。因此，烟的非相干部分可表示为

$$\mathcal{E}_i(\rho_r) = \mathcal{E}(\delta) = \mathrm{Tr}\left\{H(\delta_{\rho_r} - P_\delta)\right\}.$$

一旦非　　相干部分的烟确定后，便可轻松得到相干部分：

$$\mathcal{E}_c(\rho_r) = \mathcal{E}(\rho_r) - \mathcal{E}_i(\rho_r).$$

总烟取决于量子系统的量子相干性和内能。如前所述，总烟包含相干部分和非相干部分的贡献。于是，对于由方程（2）的约化密度矩阵给出的一般量子比特态，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho_r)(t) &= \frac{1}{2}\left((\rho_{11} - \rho_{00}) + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{00})^2 + 4\rho_{10}(t)\rho_{01}(t)} \right) \\ \mathcal{E}_c(\rho_r)(t) &= \frac{1}{2}\left(-(\rho_{11} - \rho_{00}) + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{00})^2 + 4\rho_{10}(t)\rho_{01}(t)} \right), \end{aligned}$$

这意味着非相干部分由 $\mathcal{E}_i(\rho_r) = \rho_{11} - \rho_{00}$ 给出，它仅取决于在退相干模型中保持恒定的量子系统布居数。已证明，在退相干开始之后，相干烟趋于零，并且对于 $0 < \theta < \pi/2$ 和 $\Omega t \gg 1$，有 $\mathcal{E}(\rho_r) \to \mathcal{E}_i(\rho_r)$。这显示在图1的右侧。因此，我们特别关注 $\mathcal{E}_c$、 $\mathcal{E}_i$ 与由环境引起的几何相位非幺正修正之间的关系。我们指出，在非幺正演化下，几何相位可以表示为

$\Phi_g = \Phi_g^u + \delta\Phi(\theta, \gamma_0, t)$，其中 $\delta\Phi$ 表示对幺正几何相位的修正，并编码了系统和环境的特征。

在我们所研究的特定退相干模型中，对于上述一般初态，可以计算得到非相干烳为 $\mathcal{E}_i(\rho_r) = \cos\theta$。总烳和相干烳相应地可明确写为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho_r)(t) &= \frac{1}{2}\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + F(t)^2\sin^2\theta}\right) \\ \mathcal{E}_c(\rho_r)(t) &= \frac{1}{2}\left(-\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + F(t)^2\sin^2\theta}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

有趣的是，可以用系统的烳来表示几何相位（方程 (8)）。在任何退相干模型中，布居数都保持不变，非相干烳也保持恒定，其数值由系统的初态决定。

为方便起见，我们引入

$$R(t) \equiv \sqrt{\cos^2\theta + F(t)^2\sin^2\theta}, \tag{11}$$

它与约化量子比特态的布洛赫矢量的模相同（$R(t) = |\vec{r}(t)|$）。正如预期的那样，纯退相干会使纵向分量保持不变，同时抑制横向分量，从而使布洛赫球半径单调收缩。 $R(t)$ 衡量态的纯度（$R = 1$ 对纯态而言）。由方程 (10) 可立即得出

$$R(t) = \mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_c(t). \tag{12}$$

利用这些关系，公式（8）分子中出现的组合可写为 $F(t)^2\sin^2\theta = R^2 - \cos^2\theta$

$$\begin{aligned} &= (\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_c(t))^2 - (\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}_c(t))^2 \\ &= 4\,\mathcal{E}(t)\,\mathcal{E}_c(t). \end{aligned} \tag{13}$$

类似地，分母变为

$$\begin{aligned} \left[\cos\theta + R(t)\right]^2 + F(t)^2\sin^2\theta &= (2\mathcal{E}(t))^2 + 4\mathcal{E}(t)\mathcal{E}_c(t) \\ &= 4\mathcal{E}(t)(\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_c(t)). \end{aligned} \tag{14}$$

将公式（13）和（14）代入公式（8）后，被积函数大幅简化，几何相位可写成紧凑的形式

$$\Phi_g = -\int_0^T dt\,\Omega\left(\frac{\mathcal{E}_c(t)}{2\mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_i}\right). \tag{15}$$

公式（15）是精确的，并以烳量重新表述了几何相位。具体而言，相位累积率与相干烳成正比，并受到非相干贡献的明确调制；后者作为由初态决定的静态背景项。该表达式清楚地表明，相干性是产生几何相位的核心动力学资源，而非相干烳仅通过与相干分量的相互作用影响这一过程。在不存在退相干的情况下， $F = 1$，系统保持纯态，

$$\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_c(t) = 1, \qquad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta). \tag{16}$$

公式（15）化简为

$$\Phi_g(T, F = 1) = \Omega T\,\mathcal{E}_c = n\pi(1 - \cos\theta) \tag{17}$$

对于具有 $T = n\tau$ 的循环演化，经过 n 个自然周期后，恢复二能级系统的标准贝里相位。一般而言，几何相位并非拓扑量，但在相干极限下会呈现立体角特征，此时它完全由状态可获得的相干烳决定。公式（15）表明，在纯退相干模型中（无论环境的物理特性如何），几何相位都可以精确地完全表示为热力学量，即烳的相干贡献和非相干贡献。在当前的量子情形中，非相干烳由

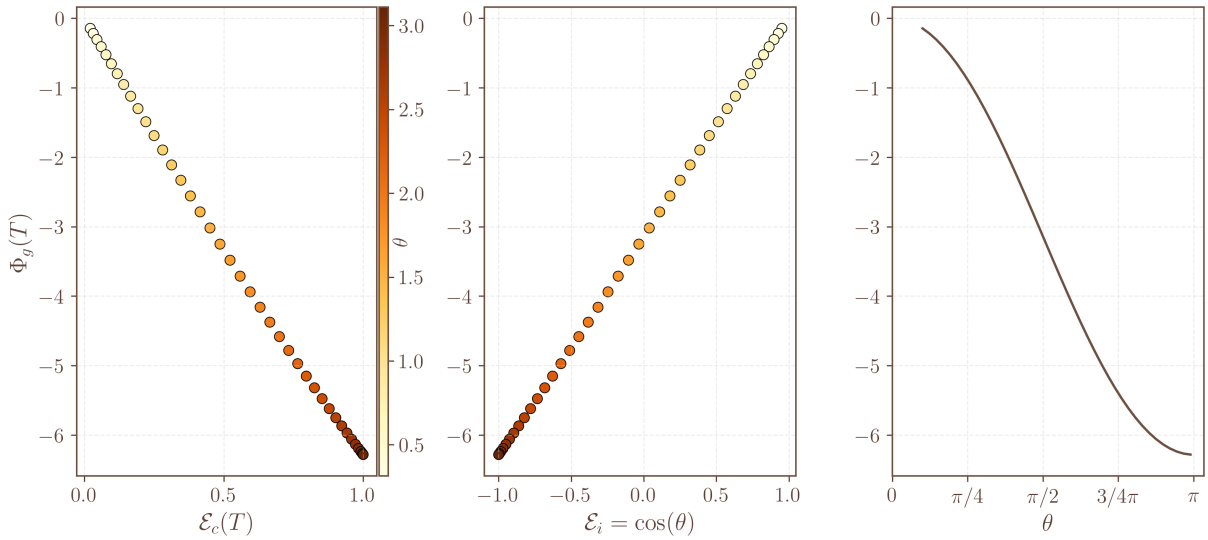

图 3. 一个周期（$T = 2\pi/\Omega$）中获得的几何相位，展示了不同的依赖关系：左图和中图分别显示了不同角度下几何相位与相干烟、非相干烟之间的关系（侧边栏显示 θ 对应的颜色）。右图显示了单周期演化中几何相位随角度的变化。所用参数如下： $\gamma_0/\Omega = 0.05$, $\theta_0 = \pi/3$。

初态通过极角 θ 确定，且不受退相位影响；而相干烟则成为一种随时间变化、不断被环境消耗的资源。因此，几何相位的积累直接受相干烟与总烟之比支配，从而为相位动力学提供了清晰的热力学解释。在没有退相干时，相干烟保持恒定，几何相位退化为贝里相位，由此恢复其纯粹的几何特性，以及幺正绝热演化所具有的稳健性。存在退相干时，随着相干烟减少，几何相位逐渐受到抑制；当相干性完全丧失时，几何相位最终消失，而非相干贡献仅提供静态背景，本身不会产生相位积累。需要强调的是，这一精确关系是在纯退相干动力学的假设下推导的，将其推广至更一般的系统—环境耦合超出了本文的讨论范围。下一节中，我们将应用这一形式体系，评估与欧姆环境相互作用的双量子能级系统的几何相位，并考虑平衡浴构型。

图 3 的左图和中图分别展示了几何相位与相干烟、非相干烟之间的关系。从这些图中可以看出，这种关系近似线性；当系统与环境之间的耦合非常小时，关系几乎呈线性。右图仅展示了几何相位对初始布洛赫角 θ 的依赖关系。

图 4 左图展示了不同初始角度下相干烟随时间的变化。可以注意到，由于 $\mathcal{E}_c(0) = 0.5(1 - \cos\theta)$，对于角度 $\theta \sim \pi/2$，初始相干烟较大。在所有情况下，当 $0 < \theta < \pi/2$ 时，较长时间下 $\mathcal{E}_c(t) \to 0$ 。右图展示了相干烟、非相干烟和几何相位随初始角度 θ 的变化。绿色柱表示非相干烟，棕色柱表示演化时间为 $T = 20\tau$ 时的相干烟。灰色柱表示幺正演化（$F = 1$）下的相干烟，作为参照。虚线表示经过 20 个周期后获得的幺正几何相位，棕色圆点表示退相位作用下经过 20 个周期获得的几何相位。可以注意到，幺正几何相位与非相干烟之间存在直接关系。我们可以注意到 $\mathcal{E}_c$ 对于 $\theta = \pi/2$ 的强度，这与几何相位的情况类似。

B. 退相位模型中几何相位的修正

对于高温下的欧姆环境，谱密度具有特定形式 $J(\omega) = \gamma_0/4\ \omega e^{-\omega/\Lambda}$ $\hbar\omega << 2k_BT$ $\beta\hbar\omega/2$ 4 $2k_BT/\hbar\omega$)。在这种情况下，，我们可以用 ( ) 近似方程 ( ) 中的 coth( )，退相干系数 Γ 变为 $\Gamma = (\gamma_0\pi k_BT)t/\hbar$，在极限 $\Lambda t \gg 1$ 下。

公式（15）中的积分可以精确求得，结果如下

$$\Phi_g = \frac{\Omega}{2\gamma}\left(\log[2\cos^2(\theta/2)] - \log[\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta\exp\{\{-4\pi\gamma/\Omega\}\}}]\right). \tag{18}$$

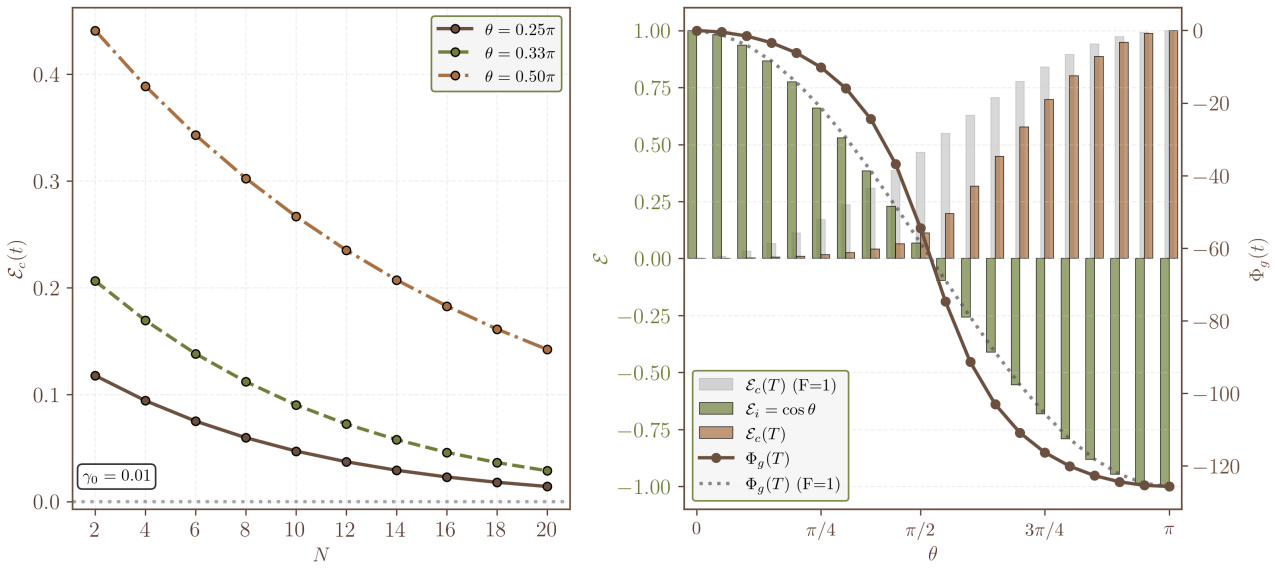

图 4. 左图：展示 $\mathcal{E}_c(t)$ 随经过的周期数变化的函数关系，针对 $\gamma_0/\Omega = 0.01$ 和不同初态。右图：展示经过 20 个周期后（$T = 20\tau$）的相干烟（棕色柱）（ $\mathcal{E}(T)$，对应左侧纵轴）以及获得的几何相位（对应右侧纵轴）。两者均以初态为函数绘制（θ）。对于所有 T， $\mathcal{E}_c(T) = 1$，因为没有可被破坏的相干性。绿色柱表示非相干烟（不受环境影响），灰色柱表示幺正演化下的相干烟。作为基准，我们用灰色小点表示幺正几何相位。$\gamma_0/\Omega = 0.01$。

其中我们定义了 $\gamma \equiv \gamma_0 \pi k_B T/\hbar$， γ_0 为包含系统与环境之间耦合的耗散常数。

假设满足式（18）中的弱耦合极限，我们将按耗散常数 γ_0 的幂进行级数展开，因此，幺正相位 Φ^u 会因环境的存在而修正为

$$\Phi_g = \Phi_g^u + \delta\Phi \approx \pi(1 - \cos\theta) - \pi^2\gamma_0\left(\frac{k_B T}{\hbar\Omega}\right)\sin^2\theta\cos\theta. \tag{19}$$

在最后一个方程中可以看到，展开式的第一项是我们先前在假设演化为幺正演化时得到的解，即 $\Phi_g^u = \pi(1 - \cos\theta)$（见方程（17））。第二项是本文所考虑的与热奥姆浴相互作用所产生的几何相位修正 [29]。

如果假设相同的欧姆环境处于零温，那么相位的修正方式会截然不同，这正如预期，因为此时少了一个时间尺度。在这种情况下，定义 $\Gamma(t)$（方程（4））中的因子 $\coth(\beta\hbar\omega/2)$ 可以近似为 1，修正项则可近似为 $\delta\Phi \approx \pi^2\gamma_0 \log(\Lambda/\Omega)\sin^2\theta\cos\theta$；这在低频率 $\Omega \ll \Lambda$ 时确实成立。

我们可以用烟来改写这些表达式。因此，方程（18）可以用烟表示为

$$\Phi_g = \frac{\Omega}{2\gamma}\log\left[\frac{1 + \mathcal{E}_i(\theta)}{2\mathcal{E}(\theta)}\right]. \tag{20}$$

a上述几何相位作为烟的函数，可由方程（20）展开：

$$\Phi_g \approx \Phi_g^u - \frac{\pi^2}{\hbar\Omega}k_B T\gamma_0\mathcal{E}_i(\theta)(1 - \mathcal{E}_i^2(\theta)), \tag{21}$$

由此可见，几何相位的幺正部分与非相干烟呈线性关系，但修正项并非如此。在零温情况下，修正项可改写为

$$\Phi_g \approx \Phi_g^u - \pi^2\gamma_0\log(\Lambda/\Omega)\mathcal{E}_i(\theta)(1 - \mathcal{E}_i^2(\theta)). \tag{22}$$

因此，只有在幺正演化区间内，累积几何相位才与瞬时非相干烟成正比。退相位通过引入依赖于状态的几何因子，打破了这种正比关系。

值得强调的是，几何相位看似仅取决于非相干烟，这种现象只有在采用额外近似时才会出现。具体而言，当对几何相位按系统–环境耦合强度的

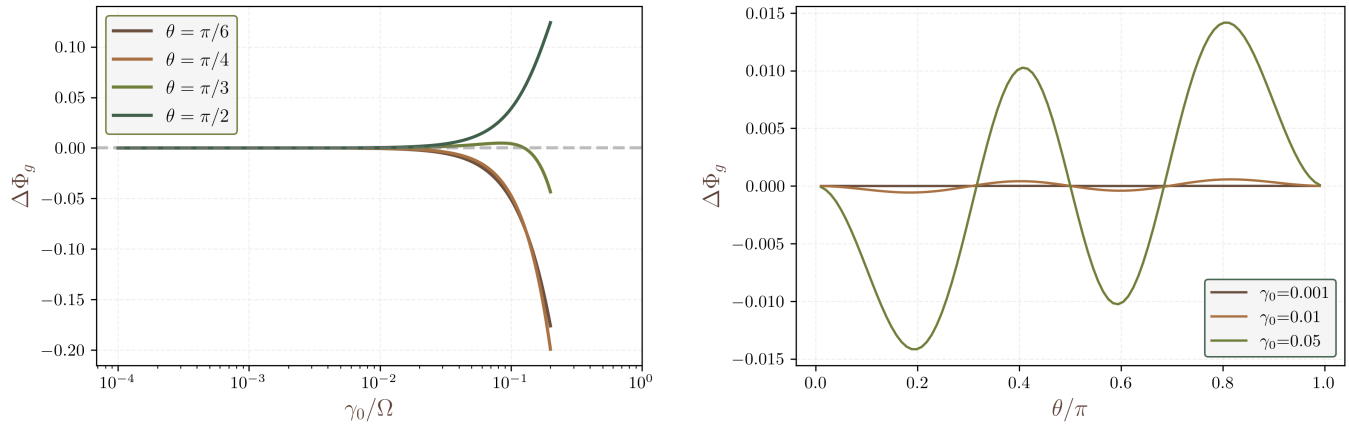

图5. $\Delta\Phi_g(T) = \Phi_{\text{exact}} - \Phi_{\text{approxo}}$ 左图：零温退相干模型下的 $\Delta\Phi_g(T)$，作为不同速率γ_0/Ω的函数，对应不同的初始角。右图：零温退相干模型下的 $\Delta\Phi_g(T)$，作为初始角的函数，对应不同的 γ_0/Ω。

幂次进行微扰展开，并在对应单个周期的固定演化时间后计算相位时，最低阶贡献与时变相干烟无关。在这一弱耦合固定时间极限下，非相干烟在纯退相干过程中保持不变，因此决定了相位修正的主要贡献。然而，超出这一微扰区间后，完整表达式表明，几何相位积累由相干烟与非相干烟之间的相互作用所支配，而相干性仍是具有真正动力学意义的资源（见公式（15））。

在图5中，左图显示精确几何相位与近似表达式之差随速率 γ_0/Ω的变化。在弱耦合下，近似表达式能很好地再现精确几何相位。对于更强的耦合，初态起着重要作用。右图显示该差值随初始角θ的变化。我们也可以针对零温非欧姆环境计算这些修正。然而，修正的几何结构始终相同，仅修正项前的系数会随所考虑的环境类型而变化 [29]。因此，退相干时间将随每种环境类型而变化，相干烟发生变化的时间亦然。

C. 几何相位与动力学相位

回顾一下，$E(t) = \text{Tr}[\rho(t)H] = \Omega/2\langle\sigma_z\rangle = \Omega/2\cos\theta$,

$$\Phi_{\text{dyn}}(t) = -\int_0^T dt\ E(t) \sim -\Omega\mathcal{E}_i\ t\,, \tag{23}$$

衡量系统储存的能量。这是一种广延性质，不受退相位影响。我们可以注意到，几何相位是演化过程中可获取的相干能量的积分度量，而动力学相位则计算总能量，不论其相干性如何。

考察不同相位之间的比率

$$\frac{d\Phi_g}{d\Phi_{\text{dyn}}} = \frac{2}{\mathcal{E}_i}\frac{(2\mathcal{E}_c+\mathcal{E}_i)^2 - \mathcal{E}_i^2}{4(\mathcal{E}_c+\mathcal{E}_i)^2 + (2\mathcal{E}_c+\mathcal{E}_i)^2 - \mathcal{E}_i^2}, \tag{24}$$

我们可以研究小角度这一特例：

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(t) &\simeq \frac{1}{2}\left[\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}(F(t)^2-1)\theta^2\right] \sim \frac{F(t)^2}{4}\theta^2 \\ 2\mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_i &\simeq 1 + \mathcal{O}(\theta^3). \end{aligned} \tag{25}$$

最后，对于小角度，我们得到线性关系

$$\Phi_g^u \approx \frac{F(t)^2\theta^2}{2}\Phi_{\text{dyn}}, \tag{26}$$

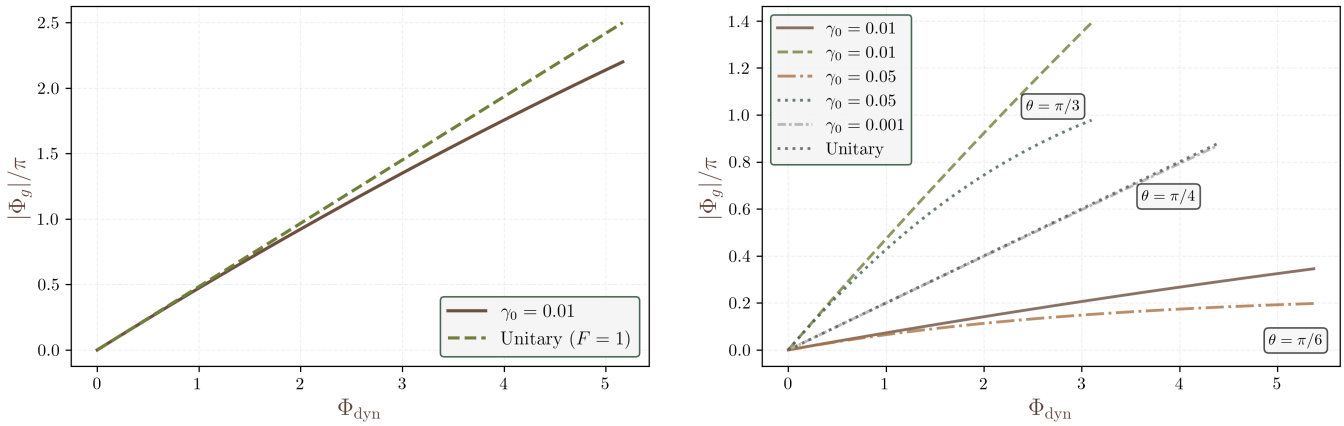

图6。左图：经过5个周期后，在固定的小初始角（$\theta_0 = \pi/8$）下， $|\Phi_g|$ 随动力学相位 Φ_{dyn} 的变化，并与幺正几何相位进行比较。右图：几何相位 $|\Phi_g|$ 随动力学相位 Φ_{dyn} 的变化，展示不同耦合速率（γ_0/Ω）和不同初始角的情况。

这表明系统获得的几何相位与动力学相位之间存在直接关系。对于幺正演化， $F(t) = 1$，比例常数由初态确定。环境效应较弱时，也就是说耦合较弱时，两种相位之间呈线性关系，其斜率由γ_0 和 θ决定。最后，对于强退相位环境，$F(t) \to 0$ 会在退相干时间 t_D 内发生，几何相位将被破坏。然而，动力学相位会随时间增长。

从图6可以看出，对于较小的角度和较低的退相干速率 γ_0/Ω，线性关系能够维持更长时间。图6左图展示了幺正演化和非幺正演化期间几何相位与动力学相位之间的关系。右图则表明，当 γ_0/Ω较小时，线性关系能够维持更长时间。值得注意的是，对于超导平台上的跨蒙特量子比特，退相干系数的量级为兆赫兹，而跨蒙量子比特的频率为吉赫兹，因此满足这一关系。几何相位与动力学相位之间近似线性关系在较小初始极角和较弱退相干下维持更久这一结论，应从定量的数量级角度来理解。对于较小的 θ，非相干烟接近其最大值，且在演化的大部分过程中，相干贡献仍占主导地位，从而推迟几何相位中非线性修正的出现。同样，弱退相干意味着 $\gamma_0/\Omega \ll 1$，因此偏离幺正关系的情况只会在约为 $1/\gamma_0$的时间尺度上逐渐积累，这一时间远长于量子比特进动周期 $2\pi/\Omega$。对于典型的跨蒙参数，Ω处于吉赫兹范围，而纯退相干速率处于兆赫兹范围，两者的时间尺度分离确保线性关系能在多个进动周期内成立，且完全处于实验相关的时间范围内。近似线性关系的失效 $\Phi_g \sim \Phi_{dyn}$ 应被理解为一种交叉过渡，而非突变。一个自然的无量纲控制参数是比值 γ_0/Ω，它量化了退相干与相位积累之间的时间尺度分离；另一个参数是初始极角 θ，它决定相干烟和非相干烟的相对权重。同样，对于 $\gamma_0/\Omega \ll 1$且 θ较小的情况，相干烟在多个进动周期内仍占主导地位，几何相位也紧随动力学相位。偏差会在 $t \sim 1/\gamma_0$这一时间尺度上变得明显，此时相干烟已大幅耗尽，几何相位中的非线性修正也逐渐累积。较大的初始角会降低初始相干贡献，从而加速这一交叉过渡，并降低线性关系失效的阈值。

在耗散型二能级量子电池的充电协议中，也观察到了这一现象 [27]。量子电池被提出作为一种能够通过相干操控量子系统来储存和释放能量的装置，并利用叠加和纠缠等现象。相位积累的几何特性也在弱值的研究中得到了广泛探索。具体而言，研究表明，一般可观测量弱值的辐角可以通过射影希尔伯特空间中的轨迹得到明确的几何解释，这一结论适用于二能级和多能级量子系统 [30]。后来，这种几何观点被拓展至开放量子系统，人们分析了耗散动力学和非幺正演化下弱值的行为，并着重揭示了几何、退相干与测量反作用之间的相互作用 [31]。

在双态矢量形式中，弱值也已在散射和反射率场景中得到研究；研究表明，其相位和振幅具有直接的实验相关性和预测能力 [32, 33]。尽管这些工作确立了弱值相位在几何和操作层面的重要意义，但它们主要关注信息和测量相关的方面。相比之下，在本文中，系统自身获得的几何相位被证明能够编码热力学资源的耗减，具体而言，即相干贡献

对开放系统动力学下炯的贡献，从而直接建立几何相位与量子电池性能之间的联系。

然而，要更深入地理解其行为，不仅需要刻画相关的能级，还需要刻画态空间的几何与拓扑结构 [34]。在此背景下，对几何相位的研究提供了仅凭能谱无法获得的信息：能量描述系统的局部和瞬时性质，而几何相位取决于参数空间中的路径，并揭示量子态之间的全局连通性。特别是，当系统具有拓扑结构时，几何相位能够帮助识别稳健不变量，从而刻画那些在微扰下受到保护的态类别。因此，几何与拓扑分析提供了与能量分析互为补充的视角，有助于更深入地理解可能影响量子电池稳定性、相干性和集体性质的量子机制。此前已有研究采用过这一方法。例如，文献 [19] 提出利用几何相位探测介电表面前方 NV中心中的量子力迹象。此外，文献 [35] 还提出利用该方法探测引力波。

III. 结论

在本研究中，我们探讨了开放量子系统中几何相位与炯之间的相互作用，并着重指出非相干贡献在决定量子系统可提取的渐近功方面发挥着根本作用。我们的结果表明，尽管炯同时包含相干和非相干成分，但几何相位仅对非相干炯敏感；在退相干和耗散的影响下，非相干炯会在长时间极限中显现。

几何相位可以被视为一种刻画量子系统的资源工具，也就是说，它与系统的量子特性相关。只要几何相位不为零，系统就保有其量子相干性。由于量子电池的效率从根本上受其炯限制，即受幺正操作所能提取的功限制，因此，任何能够可靠编码这一物理量的可观测量，都是强有力的诊断工具 [27, 36]。总功率取决于系统的量子相干性和内能，因此兼具几何相位与能量的特征。可以证明，在长时间极限下，系统累积的几何相位完全由炯的非相干部分决定（该部分源于量子相干性），且在退相位作用下保持稳健。这一联系为量子电池的非侵入式表征开辟了新途径，尤其适用于超导电路等能够实现完整态重构的平台。

这一发现在几何相位与炯这一关键热力学量之间建立起一种新颖且具有实验意义的联系；几何相位传统上被认为在本质上纯粹是几何的、全局的。特别是，它提示了一条通过测量几何相位来估计量子电池炯的实用途径，尤其是在超导电路等平台中，量子态层析已可常规进行。

最后值得强调的是，本文推导出的几何相位与炯之间的精确关系，依赖于纯退相干动力学这一假设；在这种情况下，系统与环境之间不存在能量交换，非相干炯则由初态决定并保持不变。若存在涉及能量交换的耗散性系统–环境耦合，情形可能会呈现更丰富的定性特征：炯的相干贡献和非相干贡献都可能随时间变化。在此类情况下，几何相位积累很可能不仅反映相干性的消退，也反映真实的能量弛豫过程，从而可能模糊几何贡献与热力学贡献之间的界限。对于耗散模型，能否建立几何相位与热力学资源之间同样简洁的关系，仍是一个悬而未决的问题，有待未来研究探讨。

[1] Brand ˜ *Proc. Natl.* ao, F.; *Acad. Sci. USA* **2015** *112* 3275
Horodecki, M.; Ng, N.; Oppenheim, J.; Wehner, S. 量子热力学第二定律。, , 。[2] ´Cwikli´nski, P.; Studzi´nski, M.; Horodecki, M.; Oppenheim, J. 量子相干性演化的限制：迈向完全量子的热力学第二定律。 *Phys. Rev. Lett.* **2015**, *115*, 210403。[3] Allahverdyan, A.E.; Balian, R.; Nieuwenhuizen, T.M. 从有限量子系统中提取最大功。
Europhys. , , 。[4] ˇSafr´anek, D.; *Lett.* **2004** *67* 565
Rosa, D.; Binder, F.C. 量子功提取与关联的作用。 *Phys. Rev. Lett.* **2023**, *130*, 210401。[5] Lostaglio, M.; Jennings, D.; Rudolph, T. 热力学过程中量子相干性的描述。 *Phys. Rev. X* , , 。
2015 *5* 021001

[6] Francica, G.; Goold, J.; Plastina, F.; Paternostro, M. 恶魔遍历功：从量子关联中增强功提取。 *npj Quantum Inf.* **2017**, 3, 12. [7] Binder, F.C.; Vinjanampathy, S.; Modi, K.; Goold, J. Quantacell：量子电池的强力充电。 *New J. Phys.* , , . **2015** *17* 075015
[8] Hadipour, M.; Haseli, S. 从非平衡环境中的量子相干性提取功。 *Sci. Rep.* **2024**, 14 24876, . [9] Niu, Z.; Wu, Y.; Wang, Y.; Rong, X.; Du, J. 单自旋系统中相干烟的实验研究。*Phys. Rev. Lett.* **2024**, 133, 180401. [10] Li, L.; Zhao, S.; Xu, K.; Fan, H.; Zheng, D.; Xiang, Z. 超导量子比特中相干烟的实验提取及其能量代价。 *Phys. Rev. Res.* **2025**, 7, 043236. [11] Berry, M.V. 绝热变化伴随的量子相位因子。 *Proc. R. Soc. Lond. A* **1984**, 392, 45. [12] Sj¨oqvist, E.; Pati, A.K.; Ekert, A.; Anandan, J.S.; Ericsson, M.; Oi, D.K.L.; Vedral, V. 干涉测量中混合态的几何相位。 *Phys. Rev. Lett.* **2000**, 85, 2845. [13] Singh, K.; Dong, D.M.; Basu, K.; Chen, J.L.; Du, J.F. 非幺正演化中的量子混合态几何相位。*Phys. Rev. A* **2003**, 67, 032106. [14] Rezakhani, A.T.; Zanardi, P. 量子态的可区分性与量子演化几何。 *Phys. Rev. A* **2006**, 73 012107, . [15] Carollo, A.; Fuentes-Guridi, I.; Santos, M.F.; Vedral, V. 表征开放量子系统的几何相位。 *Phys.* , , . *Rev. Lett.* **2004** *92* 020402
[16] Carollo, A.; Fran.ca Santos, M.; Vedral, V. 开放量子系统中的几何相位。 *Phys. Rev. Lett.* **2006**, 96, 020403. [17] Tong, D.M.; Sj¨oqvist, E.; Kwek, L.C.; Oh, C.H. 非幺正演化中混合态几何相位的运动学方法。 *Phys. Rev. Lett.* **2004**, 93, 080405. [18] Viotti, L.; Gramajo, A.L.; Villar, P.I.; Lombardo, F.C.; Fazio, R. 沿量子轨迹的几何相位。 *Quantum* , , . **2023** *7* 1029

[19] Far´ıas, M.B.; Lombardo, F.C.; Soba, A.; Villar, P.I.; Decca, R.S. 探测累积几何相位修正中非接触量子摩擦痕迹的探索。 *npj Quantum Inf.* **2020**, 6, 25. [20] Gasparinetti, S.; Berger, S.; Abdumalikov, A.A.; Pechal, M.; Filipp, S.; Wallraff, A.J. 超导量子比特的几何相位与非绝热控制。 *Sci. Adv.* **2016**, 2, e1501732. [21] Viotti, L.; Lombardo, F.C.; Villar, P.I. 耗散Jaynes–Cummings模型中的几何相位：共振稳健性的理论解释。 *Phys. Rev. A* **2022**, 105, 022218. [22] Zhang, L.; Song, C.; Wang, H.; Zheng, S.-B. 色散耦合谐振器–三能级量子比特系统中的几何相位观测。 *Chin. Phys. B* **2018**, 27, 070303. [23] Song, C.; Zheng, S.-B.; Zhang, P.; Xu, K.; Zhang, L.; Guo, Q.; Liu, W.; Xu, D.; Deng, H.; Huang, K.; et al. 超导量子比特几何量子门的演示。 *Nat. Commun.* **2017**, 8, 1061. [24] Cucchietti, F.M.; Zhang, J.F.; Lombardo, F.C.; Villar, P.I.; Laflamme, R. 量子临界浴存在时非幺正演化下的几何相位。 *Phys. Rev. Lett.* **2010**, 105, 240406. [25] Kennard, E.H. 简单运动类型的量子力学。 *Z. Phys.* **1927**, 44, 326-352. [26] Rozenman, G.G.; Zimmermann, M.; Efremov, M.A.; Schleich, W.P.; Shemer, L.; Arie, A. 线性势中的波包振幅与相位。 *Phys. Rev. Lett.* **2019**, 122, 124302. [27] Cristiano, C.; Viotti, L.; Villar, P.I. 耗散量子电池中的几何相位。 *Phys. Rev. A* **2025**, 112, 062234. [28] Whitney, R.S.; Makhlin, Y.; Shnirman, A.; Gefen, Y. 环境诱导的Berry相位与几何退相干的几何本质。 *Phys. Rev. Lett.* **2005**, 94, 070407. [29] Lombardo, F.C.; Villar, P.I. 开放系统中的几何相位：研究退相干如何修正几何相位的模型。*Phys. Rev. A* **2006**, 74, 042311. [30] Ballesteros Ferraz, L.; Lambert, D.L.; Caudano, Y. N能级量子系统中一般可观测量弱值辐角的几何解释。 *Quantum Sci. Technol.* **2022**, 7, 045028. https://doi.org/10.1088/2058-9565/ ac8bf1.[31] Ballesteros Ferraz, L.; Martin, J.; Caudano, Y. 弱测量与耗散量子系统的相关性。*Quantum Sci. Technol.* **2024**, 9, 035029. https://doi.org/10.1088/2058-9565/ad420b. [32] Chatzidimitriou-Dreismann, C.A. 基本散射与反射中的弱值与双态矢量形式——一种新效应。 *Universe* **2019**, 5, 58. https://doi.org/10.3390/universe5020058. [33] Chatzidimitriou-Dreismann, C.A. 弱值理论的预测能力与实验相关性的证据。*Quantum Rep.* **2021**, 3, 286–315. https://doi.org/10.3390/quantum3020018. [34] Viotti, L.; Lombardo, F.C.; Villar, P.I. 耗散量子电路中跨蒙的几何相位。 *Entropy* **2024**, 26 89, . [35] Nandi, P.; Pal, S.; Pal, S.K.; Majhi, B.R. 通过贝里相位探测低频引力波。 *Phys. Rev. D* **2023**, 108 124069, . [36] Alicki, R.; Fannes, M. 量子电池系综可提取功的纠缠增强。 *Phys. Rev. E* **2013**, 87 042123, .