arXiv:2603.01136v1 [math.AP] 1 Mar 2026

¨具有两个临界指数的局部—非局部薛定谔方程的基态解

Yu Su[1], Hichem Hajaiej[2,*], Hongxia Shi[3],

1. 安徽理工大学数学与大数据学院，中国安徽淮南 232001 yusumath@qq.com 2. 加州州立大学洛杉矶分校数学系，美国加利福尼亚州 hhajaie@calstatela.edu 3. 湖南第一师范学院数学与计算科学学院，中国湖南长沙 410205 shihongxia5617@163.com

Abstract. 本文研究了在局部算子和非局部算子作用下，并且每个算子均伴有两个临界非线性项时，薛¨定谔方程基态解的存在性。在局部和非局部情形下，临界情形均已得到完全解决。然而，当存在两个临界幂非线性项时，这些情形下发展出的方法无法推广到局部—非局部算子。这一偏微分方程中的前所未有的情形带来了一些挑战，而解决这一问题将为处理类似问题打开大门。我们的方法本质上基于 Lieb 平移定理的一个精细推广。我们还将讨论基态的正性及其正则性。

1. Introduction

我们研究如下带有局部-非局部算子的Schr¨odinger方程

$$-\lambda\Delta u+\mu(-\Delta)^s u=f(u),\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{$S_{\lambda,\mu}$}$$

S

其中 $N\geqslant 3$ 且 $0<s<1$。而 $(-\Delta)^s$ 是所谓的分数阶拉普拉斯算子，对于任意 $u:\ \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 足够光滑时，可通过令 $\mathcal{F}((-\Delta)^s u)(\xi)=|\xi|^{2s}\mathcal{F}(u)(\xi),\xi\in\mathbb{R}^N$来定义，其中 $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换，参见 [41]。

对于 $\lambda,\ \mu>0$，方程 $(S_{\lambda,\ \mu})$ 出现在同时具有经典扩散与非局部扩散的种群动力学模型中，Dipierro-Lippi-Valdinoci [24], 对此进行了讨论，其动机来自如下具有生物学意义的情形：种群在小尺度上交替采用长跳跃觅食模式与集中搜索策略。此外，Biagi-Dipierro-Valdinoci-Vecchi [6] 指出，方程 $(S_{\lambda,\ \mu})$ 可用于研究减少大流行病传播的不同类型“区域性”或“全局性”限制。进一步，Dipierro-Valdinoci [23] 在描述混合局部与非局部扩散的生态位时引入了 $(S_{\lambda,\ \mu})$。关于更多应用，请读者参阅Bernstein型正则性结果 [11], 关于不同分数阶拉普拉斯算子之和的Aubry-Mather理论 [21], 数值计算 [8], 概率论与随机学 [13, 40]。

对于 $\lambda=1$ 并且 $\mu=0$，方程 $(S_{\lambda,\ \mu})$ 变为经典的非线性薛定谔方程

$$-\Delta u=f(u),\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{S}$$

S1

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35J10; 35J20.*Key words and phrases.* 薛定谔方程；局部算子与非局部算子；Lieb平移定理；存在性；正则性。Yu Su 受到安徽省教育厅自然科学研究项目（项目编号：2023AH040155）的资助。

它出现在量子力学和量子场论中。回顾一下，索об列夫临界指数定义为

$$2^* := \frac{2N}{N-2}.$$

对于次临界非线性项，有两个著名的经典条件可保证解的存在性：Ambrosetti-Rabinowitz 型条件（简称 A-R 条件）和 Berestycki-Lions 型条件（简称 B-L 条件）。1973年，Ambrosetti-Rabinowitz [2] 证明了对方程（S）在 A-R 条件下解的存在性。1983年，对于次临界情形，Berestycki-Lions [5]证明了 B-L 条件几乎是方程（S）的基态解存在性的充要条件。此外，唯一性结果在 [42] 中得到了研究。对于临界情形 $f(u) = |u|^{2^*-2}u$，Aubin [1] 和 Talenti [45]研究了存在性结果以及径向对称正基态解的精确公式。关于更多相关工作，请读者参阅 [38]。

当 $\lambda = 0$ 且 $\mu = 1$时，方程（$S_{\lambda,\mu}$）化为分数阶薛定谔方程

$$(-\Delta)^s u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{FS}$$

FS

当 $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时，它是一个分数阶薛定谔方程，用于描述非相对论分数阶量子力学粒子的能量和动量 [35,36]。分数阶索об列夫临界指数定义如下

$$2_s^* := \frac{2N}{N-2s}.$$

对于次临界情形（A-R 条件和 B-L 条件），方程（FS）的解的存在性可通过变分论证得到。Caffarelli-Silvestre [12] 提出了一种强有力的延拓方法，可将非局部问题（FS）转化为半空间上的局部问题。受众多不同应用的推动，相关研究取得了许多重要进展。例如，[29–31]研究了极小化子的存在性和对称性，而[18,19] 研究了柯西问题。对于临界情形，Lieb [37] 和 Cotsiolis-Tavoularis [20]研究了径向对称正基态解的存在性及其精确公式。更多相关研究，请参阅 [22,33]。

Luo-Hajaiej [39] 研究了以下具有混合分数阶拉普拉斯算子的非线性薛定谔方程（$0 < s_1 < s_2 \leqslant 1$）

$$(-\Delta)^{s_1} u + (-\Delta)^{s_2} u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{MFS}$$

MFS

当 $s_2 = 1$ 且 $\lambda = 0$时，方程（MFS）化为方程（$S_{\lambda,\mu}$）。对于 λ未知的情况，存在两个质量临界指数

$$2 + \frac{s_1}{N} \quad \text{and} \quad 2 + \frac{s_2}{N}.$$

Luo-Hajaiej [39] 研究了在适当的 L^2 范数下，$p \in (2, 2+\frac{s_1}{N})$、$p = 2 + \frac{s_1}{N}$和 $p \in (2 + \frac{s_1}{N}, 2 + \frac{s_2}{N})$ 的基态归一化解的存在性，以及 $p = 2+\frac{s_2}{N}$的基态归一化解的不存在性。对于 $p \in (2+\frac{s_2}{N}, \frac{2N}{N-2s_2})$，Chergui-Gou-Hajaiej[17] 研究了方程（MFS）的存在性及动力学结果。Su-Valdinoci-Wei-Zhang [43,44] 和 Dipierro-Su-Valdinoci-Zhang [25] 展示了方程（MFS）在 $s_2 = 1$条件下的正则性结果。Biagi-Dipierro-Valdinoci-Vecchi [7] 为 $s_2 = 1$建立了一个 Brezis-Nirenberg 型结果。关于更多相关工作，我们还可参见 [4,14–16,26,32]。

回顾情形 $\lambda = \mu = 1$ 和 $f(u) = |u|^{p-2}u$。于是方程 ($S_{\lambda,\mu}$) 为

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u = |u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{P}$$

P

定理1.1

定理 1.1. [3,17] 设 $N \geqslant 3$ 和 $0 < s < 1$。则有以下结果。

(i) 若 $p = 2_s^*$ 或 $p = 2^*$，则方程 (P) 没有非平凡解。*(ii)* 若 $p \in (2_s^*, 2^*)$，则方程 (P) 有一个径向基态解。

注 1.1. 由定理 1.1 可知， 2_s^* 和 2^* 分别是下临界指数和上临界指数。这是偏微分方程中的一种新现象，需要我们在本文中发展新的工具。

更具体地说，我们将研究在下临界指数和上临界指数存在的情况下，方程 ($S_{\lambda,\mu}$) 的解的存在性。

也就是说，我们将关注非线性项 :

$$f(u) = |u|^{2_s^*-2}u + \beta|u|^{p-2}u + |u|^{2^*-2}u$$

当 $p \in (2_s^*, 2^*)$ 时，方程 ($S_{\lambda,\mu}$) 为

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u = |u|^{2_s^*-2}u + \beta|u|^{p-2}u + |u|^{2^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{D}$$

D

定理 1.2

定理 1.2。 设 $N \geqslant 3$、 $0 < s < 1$ 和 $p \in (2_s^*, 2^*)$。那么存在 $\beta \in (0, +\infty)$ 使得对于任意 $\beta > \beta$，方程 (D) 都有一个径向基态解。

此外，我们还建立了关于非负解的 L^∞ 估计结果

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{F}$$

F

其中，非线性项 $f(\cdot)$ 满足以下条件

(F_1) 存在 $C > 0$，使得对任意 $t \in \mathbb{R}$，都有

$$|f(t)t| \leqslant C(t^{2_s^*} + t^{2^*}).$$

定理1.3

定理 1.3. 设 $N \geqslant 3$, $0 < s < 1$ 和 (F_1) 成立。则方程 (F) 的非负解属于 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$。

本文结构安排如下。第 2 节介绍泛函分析框架。第 3 节证明 Lieb 平移定理。第 4 节展示山路几何和 Nehari 流形。第 5 节证明定理 1.2，即基态解的存在性。第 6 节证明定理 1.3，即解的正则性。

2. Sobolev Space

我们如下定义齐次 Sobole夫空间

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) | |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

其半范数取为

$$\|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

对于 $N \geqslant 3$ 和 $s \in (0,1)$，令 $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ 为齐次分数阶 Sobole夫空间，它是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在半范数下的完备化

$$\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

混合 Sobole夫空间 X 定义为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在半范数下的完备化

$$\|u\|^2_X := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引理 2.1

引理 2.1. $X \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 与 $X \hookrightarrow D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.

证明。 显然,

$$\|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|u\|^2_X,$$

and

$$\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|u\|^2_X.$$

这些表明 $X \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$和 $X \hookrightarrow D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$。 □

引理2.2 **引理2.2.** X 连续嵌入 $L^t(\mathbb{R}^N)$，其中 $t\in[2_s^*,2^*]$，且 $2_s^*:=\frac{2N}{N-2s}$ 和$2^*:=\frac{2N}{N-2}$。

证明。 利用 H¨older 不等式，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^t\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(tN-2N-2t)(N-2s)}{4N(s-1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(tN-2N-2ts)(N-2)}{4N(1-s)}}.$$

由引理2.1可知

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2_s^*}}\leqslant\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\leqslant\|u\|_X^2,$$

and

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}\leqslant\|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\leqslant\|u\|_X^2.$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^t\mathrm{d}x\leqslant&\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(tN-2N-2t)(N-2s)}{4N(s-1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(tN-2N-2ts)(N-2)}{4N(1-s)}}\\&\leqslant\|u\|_X^t<\infty.\end{aligned}$$

证明完成。 □

引理 2.3 **引理 2.3.** [41] 设 $s\in(0,1]$ 且 $N>2s$。则存在常数 $S_s>0$，使得对任意 $u\in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u\|^2_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)}\leqslant S_s^{-1}\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}.$$

3. Lieb's translation theorem

本节中，我们回顾 Lieb 平移定理，并证明它的一个推广。

引理 3.1 **引理 3.1.** 设 $N\geqslant3$, $s\in(0,1)$ 且 $q\in(2_s^*,2^*)$。则下列不等式成立

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\mathrm{d}x\leqslant2C(N+1)^2\left(\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-2}{q}}\|u\|_X^2,$$

对所有 $u\in X$ 均成立。

证明。 设 $u\in X$ 和 $q\in(2_s^*,2^*)$。由引理 2.3，可得

$$\begin{aligned}&\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\\\leqslant&\left(\int_{B(z,1)}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-q}{2^*-2_s^*}}\left(\int_{B(z,1)}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-2_s^*}{2^*-2_s^*}}\\\leqslant&\left(S_s^{-1}\int_{B(z,1)}\int_{B(z,1)}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{2_s^*}{2}\frac{2^*-q}{2^*-2_s^*}}\left(S_1^{-1}\int_{B(z,1)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}\frac{q-2_s^*}{2^*-2_s^*}}\qquad(3.1)\\\leqslant&S_s^{-\frac{2_s^*}{2}\frac{2^*-q}{2^*-2_s^*}}S_1^{-\frac{2^*}{2}\frac{q-2_s^*}{2^*-2_s^*}}\left(\int_{B(z,1)}\int_{B(z,1)}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{B(z,1)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2}}.\end{aligned}$$

3.1

应用（3.1），可知

$$\begin{aligned}
&\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\\
=&\left(\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}}\left(\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-2}{q}}\\
\leqslant& C\left(\int_{B(z,1)}\int_{B(z,1)}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{B(z,1)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-2}{q}}.
\end{aligned}$$

用半径为 1 的球覆盖 $\mathbb{R}^N$，使得 $\mathbb{R}^N$ 中的每个点最多包含在 $N+1$ 个球中。我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\mathrm{d}x\leqslant C(N+1)\left(\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-2}{q}}\|u\|_X^2.$$

□

定理3.1

定理 3.1. **(Lieb平移定理)** 设 $N\geqslant 3$, $0<s<1$, $q\in(2_s^*,2^*)$，且 $\{u_n\}$ 是 X 中满足以下条件的有界序列：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^q\mathrm{d}x>0.$$

那么存在 $\{z_n\}\subset\mathbb{R}^N$，使得 $\{\bar{u}_n:=u_n(x+z_n)\}$ 强收敛到 $\bar{u}\neq 0$，在 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 中。

证明。注意到 $\{u_n\}$ 是 X 中的有界序列。取一个子列后，我们假设

$$u_n\rightharpoonup u\text{ in }X,\ u_n\to u\text{ a.e. in }\mathbb{R}^N, u_n\to u\text{ in }L^q_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

应用引理3.1 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^q\mathrm{d}x>0$，存在 $C>0$ 使得

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\geqslant C>0.$$

注意到 $\{u_n\}$ 在 X 中有界，且 $X\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^q\mathrm{d}x\leqslant C.$$

因此，存在 C_0 使得

$$C_0\leqslant\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B(z,1)}|u|^q\mathrm{d}x\leqslant C_0^{-1}.$$

由上述不等式，存在 $z_n\in\mathbb{R}^N$ 使得

$$\int_{B(z_n,1)}|u_n|^q\mathrm{d}x\geqslant\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B(z,1)}|u_n|^q\mathrm{d}x-\frac{C}{2n}\geqslant C_1>0.$$

令 $\bar{u}_n:=u_n(x+z_n)$。则 $\|\bar{u}_n\|_X=\|u_n\|_X$ 且

$$\int_{B(0,1)}|\bar{u}_n|^q\mathrm{d}x\geqslant C_1>0.$$

取一个子列后，存在 $\bar{u}$使得

$$\bar{u}_n\rightharpoonup\bar{u}\text{ in }X,\ \ \bar{u}_n\to\bar{u}\text{ a.e. in }\mathbb{R}^N.$$

由于嵌入 $X\hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 是紧的，我们可得 $\bar{u}\neq 0$。

□

3.1. Lieb平移定理的推广版本。令 $q \in [1,\infty)$ 和 $\varpi \in (0, N]$，通常的齐次 Morrey 空间定义为

$$\mathcal{M}^{q,\varpi}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) | \|u\|^q_{\mathcal{M}^{q,\varpi}(\mathbb{R}^N)} < +\infty\}$$

配备范数

$$\|u\|^q_{\mathcal{M}^{q,\varpi}(\mathbb{R}^N)} := \sup_{R>0, x\in\mathbb{R}^N} R^{\varpi-N} \int_{B(x,R)} |u(y)|^q \mathrm{d}y.$$

引理3.2

引理 3.2. [34] 对于 $N \geqslant 3$ 和 $s \in (0,1]$，存在 $C > 0$ 使得对于 ι 和 ϑ 满足 $\frac{2}{2^*_s} \leqslant \iota < 1$ 和 $1 \leqslant \vartheta < 2^*_s$，我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*_s} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*_s}} \leqslant C\|u\|^{\iota}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\iota}_{\mathcal{M}^{\vartheta,\frac{\vartheta(N-2s)}{2}}(\mathbb{R}^N)}$$

对于 $u \in D^{s,\,2}(\mathbb{R}^N)$。

由引理 3.2，我们证明 Lieb平移定理的一个推广版本。

定理3.2

定理 3.2. 假设 $N \geqslant 3$ 和 $s \in (0,1)$ 成立。令 $\{u_n\} \subset X$ 为任意满足以下条件的有界序列：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*_s} \mathrm{d}x > 0 \text{ and } \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x > 0.$$

那么存在 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 使得 $\{\bar{u}_n := u_n(x + x_n)\}$ 在$L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$中强收敛到 $\bar{u} \neq 0$。

证明. 我们将证明分为三个步骤。

步骤 1. 由于 $\{u_n\} \subset X$ 是一个有界序列，取一个子列后，我们假设

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } X, \quad u_n \to u \text{ a.e. in } \mathbb{R}^N, \quad u_n \to u \text{ in } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

由引理 3.2 以及 $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x > 0$ 可知存在 $C > 0$ 使得

It t

$$\|u_n\|_{\mathcal{M}^{2,N-2}(\mathbb{R}^N)} \geqslant C > 0.$$

我们有如下推导链

$$X \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{M}^{2,N-2}(\mathbb{R}^N).$$

Then

$$\|u_n\|_{\mathcal{M}^{2,N-2}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C.$$

因此，

$$C_0 \leqslant \|u_n\|_{\mathcal{M}^{2,N-2}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_0^{-1}.$$

其中，C_0 与 n无关。由后一个不等式可推出，存在 $\sigma_n > 0$和 $x_n \in \mathbb{R}^N$ 使得

$$\sigma_n^{-2} \int_{B(x_n,\sigma_n)} |u_n(y)|^2 \mathrm{d}y \geqslant \|u_n\|^2_{\mathcal{M}^{2,N-2}(\mathbb{R}^N)} - \frac{C}{2n} \geqslant C_1 > 0, \tag{3.2}$$ 3.2

其中，C_1 与 n无关。

步骤 2. 首先，我们证明 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq \infty$。我们用反证法，假设 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$.。利用 $\{u_n\}$的有界性，我们得到

$$0 < \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*_s} \mathrm{d}y \leqslant C.$$

对于 $N \geqslant 3$ 和 $s \in (0,\ 1)$，可得

$$-2 + N(1 - \frac{2}{2^*_s}) < 0. \tag{3.3}$$ 3.3

利用（3.2）和（3.3），可得

$$\begin{aligned}0<C_1 \leqslant & \sigma_n^{-2} \int_{B(x_n,\sigma_n)} |u_n(y)|^2 \mathrm{d}y \\ \leqslant & \sigma_n^{-2} \left(\int_{B(0,\sigma_n)} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2_s^*-2}{2_s^*}} \left(\int_{B(x_n,\sigma_n)} |u_n(y)|^{2_s^*} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \\ = & \sigma_n^{-2} \left(\frac{\omega_{N-1}}{N} \sigma_n^N \right)^{\frac{2_s^*-2}{2_s^*}} \left(\int_{B(x_n,\sigma_n)} |u_n(y)|^{2_s^*} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \\ \leqslant & C \sigma_n^{-2+N(1-\frac{2}{2_s^*})} \to 0, \text{ as } n \to \infty.\end{aligned}$$

这就导出了矛盾。根据波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理，取一个子列（仍记为 $\{\sigma_n\}$），存在 $\bar{\sigma} \in [0, \infty)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \bar{\sigma}.$$

其次，我们证明 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \bar{\sigma} \neq 0$。反设 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \bar{\sigma} = 0$。利用 $\{u_n\}$ 的有界性，我们得到

$$C \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_X^2 \leqslant \bar{C}.$$

由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\sigma_n)} |u_n|^{2_s^*} \mathrm{d}y \leqslant & \left(\int_{B(0,\sigma_n)} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2^*-2_s^*}{2^*}} \left(\int_{B(0,\sigma_n)} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2_s^*}{2^*}} \\ \leqslant & S_1^{-\frac{2_s^*}{2}} \left(\int_{B(0,\sigma_n)} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2^*-2_s^*}{2^*}} \left(\int_{B(0,\sigma_n)} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}y \right)^{\frac{2_s^*}{2}} \\ \leqslant & S_1^{-\frac{2_s^*}{2}} \left(\int_{B(0,\sigma_n)} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2^*-2_s^*}{2^*}} \|u_n\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{2_s^*-2} \int_{B(0,\sigma_n)} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}y \\ \leqslant & C S_1^{-\frac{2_s^*}{2}} \left(\int_{B(0,\sigma_n)} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2^*-2_s^*}{2^*}} \int_{B(0,\sigma_n)} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

类似地，对于每个 $z \in \mathbb{R}^N$，我们有

$$\int_{B(z,\sigma_n)} |u_n|^{2_s^*} \mathrm{d}y \leqslant C S_1^{-\frac{2_s^*}{2}} \left(\int_{B(0,\sigma_n)} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2^*-2_s^*}{2^*}} \int_{B(z,\sigma_n)} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}y.$$

用半径为 σ_n 的球覆盖 $\mathbb{R}^N$，使得 $\mathbb{R}^N$ 的每个点至多包含在 $N+1$ 个球中，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} \mathrm{d}y \leqslant & C(N+1) S_1^{-\frac{2_s^*}{2}} \left(\int_{B(0,\sigma_n)} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2^*-2_s^*}{2^*}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}y \\ \leqslant & C(N+1) S_1^{-\frac{2_s^*}{2}} \left(\int_{B(0,\sigma_n)} \mathrm{d}y \right)^{\frac{2^*-2_s^*}{2^*}} \\ \leqslant & C(N+1) S_1^{-\frac{2_s^*}{2}} \sigma_n^{N(1-\frac{2_s^*}{2^*})}.\end{aligned}$$

根据我们的假设 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0$，可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}y\leqslant C(N+1)S_1^{-\frac{2_s^*}{2}}\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{N(1-\frac{2_s^*}{2^*})}=0,$$

这与以下事实矛盾：$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x>0$。

步骤 3. 利用 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\bar{\sigma}\neq 0$，取一个子列后，我们有 $\{\sigma_n\}\subset(\frac{\bar{\sigma}}{2},\ 2\bar{\sigma})$ 且

$$\frac{2^2}{\bar{\sigma}^2}\int_{B(x_n,2\bar{\sigma})}|u_n(y)|^2\mathrm{d}y\geqslant C_1>0,$$

这给出：

$$\int_{B(x_n,2\bar{\sigma})}|u_n(y)|^2\mathrm{d}y\geqslant\frac{C_1\bar{\sigma}^2}{2^{2s}}>0. \tag{3.4}$$ 3.4

令 $\bar{u}_n:=u_n(x+x_n)$。则 $\{u_n\}\subset X$ 是一个满足以下条件的有界序列：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x>0\ \text{and}\ \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}_n|^{2^*}\mathrm{d}x>0.$$

并由（3.4），

$$\int_{B(0,2\bar{\sigma})}|\bar{u}_n(y)|^2\mathrm{d}y\geqslant\frac{C_1\bar{\sigma}^2}{2^{2s}}>0. \tag{3.5}$$ 3.5

结合嵌入 $X\hookrightarrow D^{1,\ 2}(\mathbb{R}^N)\ \hookrightarrow L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 和 3.5，我们得到$\bar{u}_n\rightharpoonup\bar{u}\neq 0$。 □

4. Mountain pass geometry and Nehari manifold

与方程 (*D*) 相对应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|_X^2-\frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

对于任意 $\phi\in X$， I 的临界点满足

$$\begin{aligned}0=\langle I'(u),\phi\rangle=&\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\phi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*-1}\phi\mathrm{d}x-\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-1}\phi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*-1}\phi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

引理 4.1 **引理 4.1**。 设 $N\geqslant 3$ 和 $0<s<1$。则泛函 I 具有山路几何结构。

证明。 利用引理2.2，可得

$$I(u)\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_X^2-C\|u\|_X^p-C\|u\|_X^{2_s^*}-C\|u\|_X^{2^*}.$$

回想，使得 $2<2_s^*<p<2^*$。存在一个充分小的正数 ρ，使得 t

$$\varsigma:=\inf_{\|u\|_X=\rho}I(u)>0=I(0).$$

对于 $u\in X\setminus\{0\}$，我们有

$$I(tu)=\frac{t^2}{2}\|u\|_X^2-\beta\frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\frac{t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

由 $2<2_s^*<p<2^*$ 可得 $I(tu)<0$，当 t 充分大时。

由上可知，我们可以选择与 u 对应的 $t_0>0$，使得对于 $t>t_0$ 和 $\|t_0u\|_X>\rho$， $I(t_0u)<0$。

□

我们将山路通达水平设为

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) > 0,$$

and

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X)\,|\gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}.$$

我们回顾如下的（PS）$_c$ 序列。

定义 4.1. 若序列 $\{u_n\} \subset X$ 满足条件

$$I(u_n) \to c \text{ and } I'(u_n) \to 0 \text{ in } X^{-1}, \text{ as } n \to \infty.$$

则称 $\{u_n\}$ 为关于 c的 I 的 ***Palais-Smale*** 序列，简称为（PS）$_c$ 序列，其中 X^{-1} 是 X的对偶空间。

由山路通达定理 [2] 和引理 4.1 可知，存在一个（PS）$_c$序列。

现在我们定义 Nehari 流形如下

$$\mathcal{N} = \{u \in X \setminus \{0\}|\langle I'(u), u\rangle = 0\}.$$

引理 4.2

引理 4.2. 设 $N \geqslant 3$ 和 $0 < s < 1$。那么，对任意 $u \in X \setminus \{0\}$，存在唯一的$t_u > 0$ 使得 $t_u u \in \mathcal{N}$ 且 $I(t_u u) = \max_{t>0} I(tu)$。

证明。 对于任意 $u \in X \setminus \{0\}$ 和 $t \in (0, \infty)$，我们定义

$$f_1(t) = I(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|_X^2 - \beta\frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

我们计算得

$$f_1'(t) = t\|u\|_X^2 - \beta t^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x - t^{2_s^*-1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x - t^{2^*-1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

我们知道，$f_1'(\cdot) = 0$ 当且仅当

$$\|u\|_X^2 = \beta t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x + t^{2_s^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x + t^{2^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

Let

$$f_2(t) = \beta t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x + t^{2_s^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x + t^{2^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

显然，$\lim_{t\to 0} f_2(t) \to 0$，$\lim_{t\to+\infty} f_2(t) \to +\infty$。利用介值定理，我们知道存在一个 $0 < t_u < \infty$ 使得

$$f_2(t_u) = \|u\|_X^2.$$

此外，容易看出，$f_2(\cdot)$ 在 $(0, \infty)$ 上严格递增。因此，我们得到 t_u 的唯一性。接着，

$$\|u\|_X^2 = \beta t_u^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x + t_u^{2_s^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x + t_u^{2^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x,$$

这意味着

$$\|t_u u\|_X^2 = \beta\int_{\mathbb{R}^N}|t_u u|^p\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}|t_u u|^{2_s^*}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}|t_u u|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

这意味着 $t_2 u \in \mathcal{N}$。 □

引理 4.3

引理 4.3. 设 $N \geqslant 3$ 和 $0 < s < 1$。那么我们有

$$\bar{c} = \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) > 0.$$

证明. 通过应用 $\langle I'(u)\ u\rangle = 0$，我们知道

$$0 = \langle I'(u), u\rangle \geqslant \|u\|_X^2 - C\|u\|_X^p - C\|u\|_X^{2_s^*} - C\|u\|_X^{2^*},$$

这意味着

$$C\|u\|_X^{p-2} + C\|u\|_X^{2_s^*-2} + C\|u\|_X^{2^*-2} \geqslant 1,$$

and

$$\|u\|_X^2 \geqslant C.$$

于是，对于 $u \in \mathcal{N}$，我们得到

$$\begin{aligned} I(u) =& I(u) - \frac{1}{2_s^*}\langle I'(u), u\rangle \\ =& \frac{1}{2}\|u\|_X^2 - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\mathrm{d}x - \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\mathrm{d}x - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\mathrm{d}x \\ & - \frac{1}{2_s^*}\left(\|u\|_X^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\mathrm{d}x - \beta\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\mathrm{d}x\right) \\ =& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\|u\|_X^2 + \beta\left(\frac{1}{2_s^*} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2_s^*} - \frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\mathrm{d}x \\ \geqslant& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\|u\|_X^2 \geqslant C. \end{aligned}$$

因此， I 在 $\mathcal{N}$ 上有下界。进而， $\bar{c} > 0$。 □

Set

$$\bar{\bar{c}} := \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{t\geqslant 0} I(tu).$$

由 [46],我们得到以下引理。

引理4.4

引理4.4。 设 $N \geqslant 3$ 和 $0 < s < 1$。则有 $c = \bar{c} = \bar{\bar{c}}$。

证明。 由引理4.2，可直接得到以下结果

$$\bar{c} = \bar{\bar{c}}.$$

对于任意 $u \in X \setminus \{0\}$，存在某个足够大的 $\tilde{t} > 0$，使得 $I(\tilde{t}u) < 0$。定义一条路径γ：令 $[0,1] \to X$ 由 $\gamma(t) = t\tilde{t}u$给出。显然， $\gamma \in \Gamma$ 且

$$c \leqslant \bar{\bar{c}}.$$

另一方面，对于每条路径 $\gamma \in \Gamma$，令 $g(t) := \langle I'(\gamma(t))\ \gamma(t)\rangle$。则，当 $t > 0$ 足够小时， $g(0) = 0$ 且$g(t) > 0$。直接计算得到

$$I(\gamma(1)) - \frac{1}{2_s^*}\langle I'(\gamma(1)), \gamma(1)\rangle \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\|\gamma(1)\|_X^2 \geqslant 0,$$

这意味着

$$\langle I'(\gamma(1)), \gamma(1)\rangle \leqslant 2_s^* \cdot I(\gamma(1)) = 2_s^* \cdot I(\tilde{t}u) < 0.$$

因此，存在 $\tilde{t} \in (0,1)$，使得 $g(\tilde{t}) = 0$，即 $\gamma(\tilde{t}) \in \mathcal{N}$ 且 $c \geqslant \bar{c}$。这表明 $c = \bar{c} = \bar{\bar{c}}$。 □

引理 4.5

引理 4.5. 设 $N \geqslant 3$ 和 $0 < s < 1$。对于 $u \in \mathcal{N}$，有 $\Phi'(u) \neq 0$，其中

$$\Phi(u) = \langle I'(u), u\rangle = \|u\|_X^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\mathrm{d}x - \beta\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\mathrm{d}x, \tag{4.1}$$

4.1

and

$$\langle \Phi'(u), u\rangle = 2\|u\|_X^2 - 2_s^*\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\mathrm{d}x - p\beta\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\mathrm{d}x - 2^*\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

4.2

此外，若 $\bar{u} \in \mathcal{N}$ 且 $I(\bar{u}) = c$，则 u 是方程 (D的基态解).

证明。 对于 $u \in \mathcal{N}$，由（4.1）和（4.2）可得

$$\begin{aligned}\langle \Phi'(u), u\rangle =&\langle \Phi'(u), u\rangle - 2_s^*\Phi(u)\\ =&2\|u\|_X^2 - 2_s^*\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x - p\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x - 2^*\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\\ &-2_s^*\left(\|u\|_X^2 - \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x - \beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)\\ =&(2-2_s^*)\|u\|_X^2 + (2_s^*-p)\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x + (2_s^*-2^*)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\\ \leqslant&(2-2_s^*)\|u\|_X^2 < 0.\end{aligned}$$

因此， $\Phi'(u) \neq 0$ 对于 $u \in \mathcal{N}$。

如果 $u \in \mathcal{N}$和 $I(u) = \bar{c}$，由于 $\bar{c}$ 是 $\mathcal{N}$上 I 的最小值，根据拉格朗日乘数定理，我们知道存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $I'(u) = \lambda\Phi'(u)$。因此

$$\langle \lambda\Phi'(u), u\rangle = \langle I'(u), u\rangle = \Phi(u) = 0.$$

T这表明 $\lambda = 0$和 $I'(u) = 0$。因此， u 是方程（ D）. □

5. Proof of Theorem 1.2

引理 5.1

引理 5.1. 设 $N \geqslant 3$ 和 $0 < s < 1$。则存在一个有界的 $(PS)_c$ 序列$\{u_n\} \subset \mathcal{N}$，使得

$$I(u_n) \to c \text{ and } \|I(u_n)\|_{X^{-1}} \to 0, \text{ as } n \to \infty.$$

证明. 由引理 4.2，我们知道 $\mathcal{N} \neq \emptyset$ 且 $\inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) = \bar{c} = c$。根据 Ekeland变分原理，存在 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$和 $\lambda_n \in \mathbb{R}$，使得

$$I(u_n) \to \bar{c} \text{ and } I'(u_n) - \lambda_n\Phi'(\bar{u}_n) \to 0 \text{ in } X^{-1}, \text{ as } n \to \infty.$$

So

$$\begin{aligned}\bar{c} = I(u_n) =&J(u_n) - \frac{1}{2_s^*}\langle I'(u_n), u_n\rangle\\ \geqslant&\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\|u_n\|_X^2 + \beta\left(\frac{1}{2_s^*} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^p\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2_s^*} - \frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2^*}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这意味着 $\{u_n\}$在 X中有界。

取 $n \to \infty$，我们有

$$|\langle I'(u_n), u_n\rangle - \langle \lambda_n\Phi'(u_n), u_n\rangle| \leqslant \|I'(u_n) - \lambda_n\Phi'(u_n)\|_{X^{-1}}\|u_n\|_X \to 0,$$

由此可得

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle - \lambda_n\langle \Phi'(u_n), u_n\rangle \to 0, \text{ as } n \to \infty. \tag{5.1}$$ 5.1

注意 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$。由引理 4.5，我们有

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = 0, \tag{5.2}$$ 5.2

and

$$\langle \Phi'(u_n), u_n\rangle \neq 0. \tag{5.3}$$ 5.3

结合（5.1）-（5.3），我们得出 $\lambda_n \to 0$。

根据 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式，我们知道

$$\begin{aligned}
&\|I'(u_n)\|_{X^{-1}}\\
=&\sup_{\varphi\in X,\|\varphi\|_X=1}|\langle\Phi'(u_n),\varphi\rangle|\\
=&\sup_{\varphi\in X,\|\varphi\|_X=1}\left|2\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right.\\
&\left.-2_s^*\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2_s^*-2}u_n\varphi\mathrm{d}x-p\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p-2}u_n\varphi\mathrm{d}x-2^*\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2^*-2}u_n\varphi\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&C.
\end{aligned}$$

Then

$$\|I'(u_n)\|_{X^{-1}}\leqslant\|I'(u_n)-\lambda_n\Phi'(u_n)\|_{X^{-1}}+|\lambda_n|\|\Phi'(u_n)\|_{X^{-1}}=o(1),$$

这意味着 $I'(u_n)\to 0$ 属于 X^{-1}。因此，$\{u_n\}$ 是 I的一个（PS）$_c$ 序列。 □

引理5.2

引理 5.2。在定理 1.2 的假设成立的条件下，存在 $\beta\in(0,+\infty)$ 使得对任意 $\beta>\beta$，都有

$$c\in(0,c^*),$$

其中

$$c^*:=\min\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_s^*}\right)S_s^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}},\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)S_1^{\frac{2^*}{2^*-2}}\right\}$$

其中 S_1 是 *Sobolev*不等式的最佳常数，见引理 2.3。

证明。我们选择 $w\in X$ 如下

$$\|w\|_X=1\quad\text{and}\quad\int_{\mathbb{R}^N}|w|^p\mathrm{d}x>0.$$

由山路几何结构可知

$$\lim_{t\to+\infty}I(tw)=-\infty,$$

且 $t_{w,\ \beta}>0$ 使得 $t_{w,\ \beta}w\in\mathcal{N}$

$$\sup_{t\geqslant 0}I(tw)=I(t_{w,\beta}w).$$

因此，$t_{w,\ \beta}$ 满足

$$t_{w,\beta}^2\|w\|_X^2=t_{w,\beta}^{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{2^*}\mathrm{d}x+\beta t_{w,\beta}^p\int_{\mathbb{R}^N}|w|^p\mathrm{d}x+t_{w,\beta}^{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{2_s^*}\mathrm{d}x.\tag{5.4}$$

5.4

此外，

$$t_{w,\beta}^2\|w\|_X^2\geqslant t_{w,\beta}^{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

这意味着 $\{t_{w,\beta}\}_\beta$ 有界。

我们断言 $t_{w,\ \beta}\to 0$ 当 $\beta\to+\infty$。通过反证法，我们可以假设存在 $t_1>0$ 以及一个 $\{\beta_n\}$，满足 $\beta_n\to\infty$，使得 $t_{w,\ \beta_n}\to t_1$ 当 $n\to+\infty$。于是有

$$\beta_n t_{w,\beta_n}^p\int_{\mathbb{R}^N}|w|^p\mathrm{d}x\to+\infty,\quad\text{as}\quad n\to+\infty.$$

将其代入（5.4），我们得到

$$t_1^2\|w\|_E^2=+\infty.$$

这与 $\|w\|_E=1$ 矛盾。

通过应用 $t_{w,\ \beta}\to 0$ 作为 $\beta\to+\infty$，我们得到

$$\lim_{\beta\to+\infty}\sup_{t\geqslant 0}I(tw)=\lim_{\beta\to+\infty}I(t_{w,\beta}w)=0.$$

于是存在 $\beta \in (0, +\infty)$，使得对任意 $\beta > \beta$ 均有

$$\sup_{t\geqslant 0} I(tw) < c^*.$$

对任意 $\beta > \beta$，我们构造一条山路路径如下：取 $e = Tw$ 和 $\gamma(t) = te$，其中 T足够大以满足 $J(e) < 0$，则

$$c \leqslant \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)).$$

因此，$c \leqslant \sup_{t\geqslant 0} I(tw) < c^*$。 □

引理 5.3

引理 5.3. 设 $N \geqslant 3$、$0 < s < 1$ 和 $\{u_n\} \subset \mathcal{M}$ 是一个有界的$(PS)_c$ 序列。则存在 $y_n \subset \mathbb{R}^N$，使得 $\bar{u}_n := u_n(x + y_n)$ 在 X中趋于 $u \neq 0$。此外，$J(u) = c$。

证明。 由引理 5.1可知，存在一个有界的$(PS)_c$ 序列 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$在水平 $c \in (0, c^*)$。若$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x = 0$，则

$$c = J(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_X^2 - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} \mathrm{d}x,$$

and

$$0 = \langle J'(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|_X^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} \mathrm{d}x, \tag{5.5}$$ 5.5

这意味着

$$c = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\|u_n\|_X^2. \tag{5.6}$$ 5.6

由（5.5）和引理2.3 可知

$$\|u_n\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} \mathrm{d}x \leqslant S_s^{-\frac{2_s^*}{2}} \|u_n\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{2_s^*} \leqslant S_s^{-\frac{2_s^*}{2}} \|u_n\|_X^{2_s^*},$$

这表明

$$S_s^{\frac{2_s^*}{2}} \leqslant \|u_n\|_X^{2_s^*-2} \Rightarrow \|u_n\|_X^2 \geqslant S_s^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}. \tag{5.7}$$ 5.7

结合（5.6）和（5.7），

$$c \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right) S_s^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}.$$

因此，我们得到 $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x > 0$。

如果 $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} \mathrm{d}x = 0$，则

$$c = J(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_X^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x,$$

and

$$0 = \langle J'(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|_X^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x, \tag{5.8}$$ 5.8

由此可得

$$c = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\|u_n\|_X^2. \tag{5.9}$$ 5.9

由（5.8）和引理2.3 可知

$$\|u_n\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \mathrm{d}x \leqslant S_1^{-\frac{2^*}{2}} \|u_n\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} \leqslant S_1^{-\frac{2^*}{2}} \|u_n\|_X^{2^*},$$

这表明

$$\|u_n\|_X^2 \geqslant S_1^{\frac{2^*}{2^*-2}}. \tag{5.10}$$ 5.10

结合式（5.9）和式（5.10），

$$c \geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right) S_1^{\frac{2^*}{2^*-2}}.$$

因此，我们得到 $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x>0$。

利用定理 3.2，存在 $y_n\subset\mathbb{R}^N$ 使得 $\bar{u}_n:=u_n(x+y_n)\rightharpoonup u\neq 0$ 属于$L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$，并且

$$c=J(\bar{u}_n),\quad \text{and}\quad 0=\langle J'(\bar{u}_n),\varphi\rangle=\langle J'(u),\varphi\rangle.$$

利用 Br´ezis-Lieb 引理 [9], 可推得

$$\begin{aligned}
\bar{c}\leqslant J(u)=&J(u)-\frac{1}{2_s^*}\langle J'(u),u\rangle\\
=&\frac{1}{2}\|u\|_X^2-\frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{2_s^*}\left(\|u\|_X^2-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x-\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x\right)\\
=&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_s^*}\right)\|u\|_X^2+\left(\frac{1}{2_s^*}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{2_s^*}-\frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\\
\leqslant&\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_s^*}\right)\|\bar{u}_n\|_X^2+\left(\frac{1}{2_s^*}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}_n|^p\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{2_s^*}-\frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}_n|^{2^*}\mathrm{d}x\right]\\
=&\lim_{n\to\infty}J(\bar{u}_n)-\frac{1}{p}\lim_{n\to\infty}\langle J'(\bar{u}_n),\bar{u}_n\rangle\\
=&\lim_{n\to\infty}J(\bar{u}_n)\\
=&c=\bar{c}.
\end{aligned}$$

由此得到 $\lim_{n\to\infty}\|\bar{u}_n\|_X^2=\|u\|_X^2$和 $J(u)=\bar{c}=c$。 □

现在我们可以证明定理1.2。

定理 *1.2*的证明。 **步骤1**。由 引理 5.3 与 4.5，我们证明方程（D）存在一个基态解。现在我们证明方程（D）存在一个非负基态解。对任意 $u\in\mathcal{N}$，容易看出

$$\begin{aligned}
&\int_{u(y)\geqslant 0}\int_{u(x)<0}\frac{||u(x)|-|u(y)||^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{u(y)\geqslant 0}\int_{u(x)<0}\frac{||u(x)|-|u(y)||^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\leqslant&\int_{u(y)\geqslant 0}\int_{u(x)<0}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{u(y)\geqslant 0}\int_{u(x)<0}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

由此可得

$$\|\,|u|\,\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\leqslant\|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}.$$

于是,

$$J(t|u|)\leqslant J(tu),\quad t>0.$$

注意，$u\neq 0$。于是存在$t_{1,\,u}>0$ 使得$t_{1,\,u}|u|\in\mathcal{N}$。并且

$$\|\,|u|\,\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}+\|\,|u|\,\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}=t_{1,u}^{2_s^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x+t_{1,u}^{p-2}\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x+t_{1,u}^{2^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

由 $u\in\mathcal{N}$ 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x+\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\\=&\|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}+\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\\\geqslant&\|\ |u|\ \|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}+\|\ |u|\ \|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\\=&t_{1,u}^{2_s^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x+t_{1,u}^{p-2}\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x+t_{1,u}^{2^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此可得

$$t_{1,u}\in(0,1].$$

我们进一步有

$$\bar{c}_*=J(t_{1,u}|u|)\leqslant J(t_{1,u}u)\leqslant\max_{t\geqslant0}J(tu)=J(u)=\bar{c}_*.$$

于是我们知道 $J(t_{1,\ u}|u|)\ =\ c_{*}$。由引理4.5，$t_{1,\ u}|u|$ 是方程 (*D*) 的非负基态解。

步骤 2。在这一步中，我们证明方程 (*D*) 存在径向基态解。我们令 v^* 为 v 的对称递减重排：$=t_{1,\ u}|u|_{*}$。根据重排不等式 [10,27,28], ，我们有

$$\begin{aligned}\|v^*\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}&\leqslant\|v\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)},\\\|v^*\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}&\leqslant\|v\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)},\\\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^{2_s^*}\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{2_s^*}\mathrm{d}x,\\\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^p\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^N}|v|^p\mathrm{d}x,\\\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^{2^*}\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{2^*}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这意味着:

$$I_{2^*}(t|v^*|)\leqslant I_{2^*}(tv),\quad t>0.$$

注意到 $v\not\equiv0$。那么存在 $t_{1,\ v^*}>0$ 使得 $t_{1,\ v^*}v^*\in\mathcal{M}$。并且

$$\|v^*\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}+\|v^*\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}=t_{1,v^*}^{2_s^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^{2_s^*}\mathrm{d}x+t_{1,v^*}^{p-2}\beta\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^p\mathrm{d}x+t_{1,v^*}^{2^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

由 $v\in\mathcal{N}$ 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^{2_s^*}\mathrm{d}x+\beta\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^{2^*}\mathrm{d}x\\=&\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{2_s^*}\mathrm{d}x+\beta\int_{\mathbb{R}^N}|v|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{2^*}\mathrm{d}x\\=&\|v\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}+\|v\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\\\geqslant&\|v^*\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}+\|v^*\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\\=&t_{1,v^*}^{2_s^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^{2_s^*}\mathrm{d}x+t_{1,v^*}^{p-2}\beta\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^p\mathrm{d}x+t_{1,v^*}^{2^*-2}\int_{\mathbb{R}^N}|v^*|^{2^*}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这给出

$$t_{1,v^*}\in(0,1].$$

and

$$\bar{c}_*=J(t_{1,v^*}|v^*|)\leqslant J(t_{1,v^*}v)\leqslant\max_{t\geqslant0}J(tv)=J(v)=\bar{c}_*.$$

于是我们知道 $J(t_{1,\ v^*}v^*)\ =c_{*}$。根据引理4.5 再次可知，$t_{1,\ v^*}v^*$ 是一个径向基态解。□

6. L^∞ ESTIMATE

在本节中，我们给出定理1.3的证明，即 L^∞ 非负解估计，针对方程（F）。

引理 6.1

引理 6.1. 设 $N \geqslant 3$、 $s \in \in(0,1)$ 且 $u \in X$ 为非负。对每个 $L > 2$，我们定义

$$u_L(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } u(x) \leqslant L, \\ L & \text{if } u(x) > L. \end{cases}$$

则对 $\mu > 1$有 $\bar{u}_L = u u_L^{2(\mu-1)} \in X$ 。

证明。 对 $0 \leqslant u \in X$，由直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(u u_L^{2(\mu-1)}\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_L^{2(\mu-1)}\nabla u + u\nabla\left(u_L^{2(\mu-1)}\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_L^{2(\mu-1)}\nabla u + 2(\mu-1)u u_L^{2(\mu-1)-1}\nabla u_L\right|^2 \mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathbb{R}^N} |u_L|^{4(\mu-1)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + 4(\mu-1)^2\int_{\{u(x)\leqslant L\}} |u|^2|u_L|^{4(\mu-1)-2}|\nabla u_L|^2\mathrm{d}x \\
&+4(\mu-1)\int_{\{u(x)\leqslant L\}} u u_L^{4(\mu-1)-1}\nabla u\nabla u_L\mathrm{d}x \\
\leqslant& L^{4(\mu-1)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + L^{4(\mu-1)}\int_{\{u(x)\leqslant L\}}|\nabla u_L|^2\mathrm{d}x + L^{4(\mu-1)}\int_{\{u(x)\leqslant L\}}\nabla u\nabla u_L\mathrm{d}x \\
=&L^{4(\mu-1)}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + 2\int_{\{u(x)\leqslant L\}}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right] \\
\leqslant&3L^{4(\mu-1)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这表明 $\bar{u}_L = u u_L^{2(\mu-1)} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$。

现在我们证明 $\bar{u}_L = u u_L^{2(\mu-1)} \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$，如下所示

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u u_L^{2(\mu-1)}(x) - u u_L^{2(\mu-1)}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\int_{u(x)\leqslant L}\int_{u(x)\leqslant L}\frac{|u u_L^{2(\mu-1)}(x) - u u_L^{2(\mu-1)}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+\int_{u(x)>L}\int_{u(x)>L}\frac{|u u_L^{2(\mu-1)}(x) - u u_L^{2(\mu-1)}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+2\int_{u(x)\leqslant L}\int_{u(x)>L}\frac{|u u_L^{2(\mu-1)}(x) - u u_L^{2(\mu-1)}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=:&A_1 + A_2 + 2A_3.
\end{aligned}$$

为了计算 A_1，我们需要

$$\begin{aligned}
&|u^{2\mu-1}(x) - u^{2\mu-1}(y)|^2 - |u(x)-u(y)|^2 \\
=&|u|^2(|u|^{4\mu-4}-1)(x) - 2u(x)u(y)(|u|^{2\mu-2}(x)|u|^{2\mu-2}(y)-1) + |u|^2(|u|^{4\mu-4}-1)(y) \\
\leqslant&(L^{4\mu-4}-1)(|u|^2(x) - 2u(x)u(y) + |u|^2(y)),
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&|u|^{2(2\mu-1)}(x)-2|u|^{2\mu-1}(x)|u|^{2\mu-1}(y)+u^{2(2\mu-1)}(y)\\ \leqslant&L^{4\mu-4}|u|^2(x)-2L^{4\mu-4}u(x)u(y)+L^{4\mu-4}|u|^2(y).\end{aligned}$$

可分为两种情形：情形（i） $u(x)\geqslant u(y)$；情形（ii） $u(x)\leqslant u(y)$。下面给出情形（i）的证明

$$\begin{aligned}&|u|^2(x)[L^{4\mu-4}-|u|^{4\mu-4}(x)]-2u(x)u(y)[u^{2\mu-2}(x)u^{2\mu-2}(y)-L^{4\mu-4}]+|u|^2(y)[L^{4\mu-4}-|u|^{4\mu-4}(y)]\\ \geqslant&|u|^2(x)[L^{4\mu-4}-|u|^{4\mu-4}(x)]-2u(x)u(y)[u^{4\mu-4}(x)-L^{4\mu-4}]+|u|^2(y)[L^{4\mu-4}-|u|^{4\mu-4}(x)]\\ =&[L^{4\mu-4}-|u|^{4\mu-4}(x)](u(x)+u(y))^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

类似地，对于情形（ii），

$$\begin{aligned}&|u|^2(x)[L^{4\mu-4}-|u|^{4\mu-4}(x)]-2u(x)u(y)[u^{2\mu-2}(x)u^{2\mu-2}(y)-L^{4\mu-4}]+|u|^2(y)[L^{4\mu-4}-|u|^{4\mu-4}(y)]\\ \geqslant&[L^{4\mu-4}-|u|^{4\mu-4}(y)](u(x)+u(y))^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

结合上述两种情形，我们得到

$$\begin{aligned}A_1=&\int_{u(x)\leqslant L}\int_{u(x)\leqslant L}\frac{|uu_L^{2(\mu-1)}(x)-uu_L^{2(\mu-1)}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\int_{u(x)\leqslant L}\int_{u(x)\leqslant L}\frac{|u^{2\mu-1}(x)-u^{2\mu-1}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\int_{u(x)\leqslant L}\int_{u(x)\leqslant L}\frac{|u|^{2(2\mu-1)}(x)-2|u|^{2\mu-1}(x)|u|^{2\mu-1}(y)+u^{2(2\mu-1)}(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \leqslant&\bar{C}\int_{u(x)\leqslant L}\int_{u(x)\leqslant L}\frac{|u|^2(x)-2u(x)u(y)+|u|^2(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\bar{C}\int_{u(x)\leqslant L}\int_{u(x)\leqslant L}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{6.1}$$

6.1

容易看出 A_2，

$$\begin{aligned}A_2=&\int_{u(x)>L}\int_{u(x)>L}\frac{|uu_L^{2(\mu-1)}(x)-uu_L^{2(\mu-1)}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\int_{u(x)>L}\int_{u(x)>L}\frac{|uL^{2(\mu-1)}(x)-uL^{2(\mu-1)}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&L^{4(\mu-1)}\int_{u(x)>L}\int_{u(x)>L}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{6.2}$$

6.2

显然，对于 A_3，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{u(y)\leqslant L}\int_{u(x)>L}\frac{|uu_L^{2(\mu-1)}(x)-uu_L^{2(\mu-1)}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\int_{u(y)\leqslant L}\int_{u(x)>L}\frac{|u|^2|u_L|^{4(\mu-1)}(x)+|u|^2|u_L|^{4(\mu-1)}(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \leqslant&L^{4(\mu-1)}\int_{u(y)\leqslant L}\int_{u(x)>L}\frac{|u|^2(x)+|u|^2(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&L^{4(\mu-1)}\int_{u(y)\leqslant L}\int_{u(x)>L}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{6.3}$$

6.3

由（6.1）-（6.3），可知

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|uu_L^{2(\mu-1)}(x)-uu_L^{2(\mu-1)}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这表明 $\bar{u}_L=uu_L^{2(\mu-1)}\in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$。 □

引理 6.2

引理 6.2。设 $N\geqslant 3$, $s\in(0,1)$, $2_s^*<p<2^*$ 和 $u\in X$ 是方程 (F) 的非负非平凡解。则有

$$\|uu_L^{\mu-1}\|_{L^t(\mathbb{R}^N)}^2\leqslant C\mu^2\left[\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}|u_L|^{2(\mu-1)}\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}|u_L|^{2(\mu-1)}\mathrm{d}x\right],$$

其中 $t\in[2_s^*,2^*]$。

证明。设 u 是方程 (F) 的非负解。则

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\phi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^N}f(u)\phi\mathrm{d}x.\tag{6.4}$$

6.4

由引理6.1可知

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\bar{u}_L\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))(\bar{u}_L(x)-\bar{u}_L(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^N}f(u)\bar{u}_L\mathrm{d}x.\tag{6.5}$$

6.5

定义

$$\Lambda:=\frac{|t|^2}{2}\text{ and }Y(t):=\int_0^t(\bar{u}_L'(\tau))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau.$$

由 $\bar{u}_L$ 是递增函数可知

$$(a-b)(\bar{u}_L(a)-\bar{u}_L(b))\geqslant 0\text{ for any }a,b\in\mathbb{R}^N.$$

利用詹森不等式，得到

$$\Lambda'(a-b)(\bar{u}_L(a)-\bar{u}_L(b))\geqslant|Y(a)-Y(b)|^2\text{ for any }a,b\in\mathbb{R}^N,$$

由此可得

$$|Y(u)(x)-Y(u)(y)|^2\leqslant(u(x)-u(y))((uu_L^{2(\mu-1)})(x)-(uu_L^{2(\mu-1)})(y)).$$

注意到 $Y(u)\geqslant\frac{1}{\mu}uu_L^{\mu-1}$。由引理 2.3可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\bar{u}_L\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))(\bar{u}_L(x)-\bar{u}_L(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \geqslant&\|Y(u)\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2+\|Y(u)\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^2\\ \geqslant&C\|Y(u)\|_{L^t(\mathbb{R}^N)}^2\\ \geqslant&\frac{C}{\mu^2}\|uu_L^{\mu-1}\|_{L^t(\mathbb{R}^N)}^2.\end{aligned}\tag{6.6}$$

6.6

根据（6.5）、（6.6）和（F_1），我们得到

$$\begin{aligned}\|uu_L^{\mu-1}\|_{L^t(\mathbb{R}^N)}^2\leqslant&C\mu^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\bar{u}_L\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))(\bar{u}_L(x)-\bar{u}_L(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\ =&C\mu^2\int_{\mathbb{R}^N}f(u)\bar{u}_L\mathrm{d}x\\ \leqslant&C\mu^2\left[\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}|u_L|^{2(\mu-1)}\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}|u_L|^{2(\mu-1)}\mathrm{d}x\right].\end{aligned}$$

证明完毕。 □

现在我们可以证明解 u 的 L^∞ 估计。

定理 *1.3* 的证明。 **步骤 1**。 由引理6.2，我们有

$$\|uu_L^{\mu-1}\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\mu^2 \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}|u_L|^{2(\mu-1)}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}|u_L|^{2(\mu-1)}\mathrm{d}x\right].$$

令 $\bar{d} \in \mathbb{R}^+$ 稍后选定。利用 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2}|uu_L^{\mu-1}|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\int_{\{u(x)\leqslant\bar{d}\}} |u|^{2^*-2}|uu_L^{\mu-1}|^2\mathrm{d}x + \int_{\{u(x)>\bar{d}\}} |u|^{2^*-2}|uu_L^{\mu-1}|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\bar{d}^{2^*-2_s^*}\int_{\{u(x)\leqslant\bar{d}\}} |u|^{2_s^*-2}|uu_L^{\mu-1}|^2\mathrm{d}x + \int_{\{u(x)>\bar{d}\}} |u|^{2^*-2}|uu_L^{\mu-1}|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\bar{d}^{2^*-2_s^*}\int_{\{u(x)\leqslant\bar{d}\}} |u|^{2_s^*-2}|uu_L^{\mu-1}|^2\mathrm{d}x + \left(\int_{\{u(x)>\bar{d}\}} |u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}\left(\int_{\{u(x)>\bar{d}\}} |uu_L^{\mu-1}|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}.
\end{aligned}$$

¯我们可以固定 d 使得

$$\left(\int_{\{u(x)>\bar{d}\}} |u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \leqslant \frac{1}{2C\mu^2}.$$

于是我们得到

$$\|uu_L^{\mu-1}\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\mu^2(1+\bar{d}^{2^*-2_s^*})\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}|u_L|^{2(\mu-1)}\mathrm{d}x.$$

在上述不等式中令 $L\to\infty$ 趋于极限，我们推得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*\mu}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant C\mu^2(1+\bar{d}^{2^*-2_s^*})\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*+2\mu-2}\mathrm{d}x. \tag{6.7}$$ 6.7

步骤 2. 令 $\mu_1 - 1 = \frac{2^*-2_s^*}{2}$。那么由（6.7），我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*\mu_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant C\mu_1^2(1+\bar{d}^{2^*-2_s^*})\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\mathrm{d}x < +\infty,$$

由此得到

$$\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*\mu_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(\mu_1-1)}} < +\infty.$$

步骤 3. 我们选取 $\mu_2 - 1 = \frac{2^*}{2}(\mu_1-1)$。于是

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*\mu_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant C\mu_2^2\left[\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*+2\mu_2-2}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*+2\mu_2-2}\mathrm{d}x\right].$$

Let

$$a = \frac{2^*(2^*-2_s^*)}{2(\mu_2-1)},\quad b = 2_s^*+2\mu_2-2-a.$$

于是 $\frac{2^*b}{2^*-a} = 2^*+2\mu_2-2$。应用杨氏不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*+2\mu_2-2}\mathrm{d}x \leqslant&\frac{a}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\mathrm{d}x + \frac{2^*-a}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*+2\mu_2-2}\mathrm{d}x\\
\leqslant&C\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*+2\mu_2-2}\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

Thus

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*\mu_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant C\mu_2^2\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*+2\mu_2-2}\mathrm{d}x\right).$$

利用 $\mu_2 > 1$，我们推出

$$\begin{aligned}\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\mu_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant & 1+\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\mu_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \\ \leqslant & C\mu_2^2\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*+2\mu_2-2}\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\mu_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(\mu_2-1)}} \leqslant & (C\mu_2^2)^{\frac{1}{\mu_2-1}}\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*+2\mu_2-2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\mu_2-1}} \\ \leqslant & (C\mu_2)^{\frac{2}{\mu_2-1}}\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\mu_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(\mu_1-1)}}\end{aligned}$$

步骤 4. 重复这一过程，并回想

$$\mu_{i+1}-1=\frac{2^*}{2}(\mu_i-1),$$

and

$$\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\mu_{i+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(\mu_{i+1}-1)}} \leqslant (C\mu_{i+1})^{\frac{2}{\mu_{i+1}-1}}\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\mu_i}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(\mu_i-1)}}.$$

记 $C_{i+1} := C\mu_{i+1}$ 和 $K_i = \left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\mu_i}\mathrm{d}x\right)^{2^*\ \ 2\ \ (\mu_i-1)}$，我们知道存在一个与 i 无关的常数 $C>0$，使得

$$K_{m+1} \leqslant \prod_{i=1}^{m} C_{i+1}^{\frac{2}{\mu_{i+1}-1}} K_1 \leqslant CK_1 < +\infty.$$

因此，

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant CK_1 < +\infty.$$

□

Conflict of interest

作者声明，他没有已知的可能影响本文所报告研究工作的竞争性经济利益或个人关系。

Data availability statement

本文所述研究未使用任何数据。

References

Aubin1976JDG [1] T. Aubin，《等周问题与 Sobolev 空间》，《微分几何杂志》，`第´´11 （**1976**），**573–598**。 2

nowitz1973JFA [2] A. Ambrosetti、P. Rabinowitz，《临界点理论中的对偶变分方法及其应用》，《泛函分析杂志》，**14** （1973），349–381。2，9

2024马来西亚 [3] Q. Bao，具有临界指数的局部-非局部薛定谔¨方程：零质量情形，《马来西亚数学科学学会通报》47（2024），163。2

Hajaiej2025《渐近分析》 [4] A. Bahrouni、Q. Guo、H. Hajaiej，具有势和一般非线性项的混合分数阶薛定谔方程的归一化解¨，《渐近分析》，**144** (2025)，1177-1208。2

Lions1983ARMA [5] H. Berestycki、P. Lions，非线性标量场方程 I：基态的存在性，《理性力学与分析档案》，**17** (1983年)，319-327。 2

ecchi2021CPDE [6] S. Biagi、S. Dipierro、E. Valdinoci、E. Vecchi，混合局部与非局部椭圆算子：正则性与极大值原理，《偏微分方程通讯》，**47** (2021)，585-629。 1

cchi2025NoDEA [7] S. Biagi、S. Dipierro、E. Valdinoci、E. Vecchi，混合局部与非局部算子的 Brezis-Nirenberg 型结果，非线性微分方程与应用 NoDEA，**32** (2025)，62。2

010SIAM-J-N-A [8] I. Biswas、E. Jakobsen、K. Karlsen，非线性退化抛物型积分偏微分方程的差分求积格式，SIAM 数值分析杂志，**48** (2010)，1110-1135。1

Lieb1983年PAMS [9] H. Br´ezis，E. Lieb，函数的逐点收敛与泛函收敛之间的关系，美国数学会会刊，**88** (1983年)，486-490。14

jaiej2006JFA [10] A. Burchard，H. Hajaiej，具有单调被积函数的泛函的重排不等式，《泛函分析杂志》，233（2006），561-582。15

ci2022ARMA [11] X. Cabr´e, S. Dipierro, E. Valdinoci, 积分微分方程的 Bernstein 技巧，《理性力学与分析档案》，**243** (2022), 1597-1652.1

2007偏微分方程 [12] L. Caffarelli, L. Silvestre，与分数阶拉普拉斯算子相关的延拓问题，《偏微分方程通讯》，**32** (2007), 1245-1260. 2

cek2012TAMS [13] Z. Chen、P. Kim、R. Song、Z. Vondracek， $\nabla+\nabla^{\alpha/2}$《美国数学会会刊》，**364** (2012), 4169-4205. 1

o2023米兰 [14] N. Cangiotti、M. Caponi、A. Maione、E. Vitillaro，Klein-Gordon-Maxwell 方程，受混合局部-非局部算子驱动，《米兰数学杂志》，**91** (2023), 375-403. 2

o2024FFAC [15] N. Cangiotti、M. Caponi、A. Maione、E. Vitillaro，薛定谔¨-Maxwell 方程，受混合局部-非局部算子驱动，《分数阶微积分与应用分析》，(2024)。2

jaiej2022JDE [16] H. Chen, M. Bhakta, H. Hajaiej，关于涉及混合分数阶拉普拉斯算子的狄利克雷问题中特征值之和的界，《微分方程杂志》，**317** (2022), 1-31. 2

ej2023CVPDE [17] L. Chergui, T. Gou, H. Hajaiej，混合分数阶拉普拉斯算子下非线性薛定谔方程归一化解的存在性与动力学¨，变分法与偏微分方程，**62**(2023). 2

zawa2013FE [18] Y. Cho, H. Hajaiej, G. Hwang, T. Ozawa，关于具有Hartree型非线性项的分数阶薛定谔方程的柯西问题¨，Funkcialaj Ekvacioj，56 (2013年), 193-224.2

wa2014CPAA [19] Y. Cho、H. Hajaiej、G. Hwang、T. Ozawa，关于分数阶薛定谔方程的轨道稳定性¨，《纯粹与应用分析通讯》，13（2014年），1267-1282。2

is2004JMAA [20] A. Cotsiolis、N. Tavoularis，高阶分数阶导数的 Sobolev不等式的最佳常数，数学分析与应用杂志，**295** （2004年），225-236。2

009Poincare [21] R. de la Llave、E. Valdinoci，将 Aubry-Mather理论推广至偏微分方程和伪微分方程，Annales de l’Institut Henri Poincar´e C. Analyse Non Lin´eaire，**26** （2009年），1309-1344。1

i2016CVPDE [22] S. Dipierro，L. Montoro，I. Peral，B. Sciunzi，涉及 Hardy-Leray势的非局部临界问题正解的定性性质，变分法与偏微分方程，**55** （2016）。2

inoci2021PA [23] S. Dipierro，E. Valdinoci，混合局部/非局部扩散的生态位描述：一个演化方程，以及由布朗过程和L´évy过程叠加产生的新Neumann条件，Physica A：统计力学及其应用，**575** （2021）。1

ci2022AIHP [24] S. Dipierro，E. Lippi，E. Valdinoci，（非）局部logistic方程的Neumann条件，法国亨利·庞加莱研究所年刊 C辑：非线性分析´e C. Analyse Non Lin´eaire，**40** （2022），1093-1166。1

ng2025DCDS [25] S. Dipierro, X. Su, E. Valdinoci, J. Zhang，混合阶非线性薛定谔方程正解的定性性质¨，离散与连续动力系统，45（2025），1948-2000。2

hi2023JMAA [26] G. Giovannardi, D. Mugnai, E. Vecchi，关于不定混合局部-非局部问题的 Ahmad-Lazer-Paul型结果，数学分析与应用杂志，527（2023）。2

rt2003PLMS [27] H. Hajaiej, C. Stuart，Carathéodory型复合算子的对称化不等式，《伦敦数学会会刊》，87（2003），396-418。15

005Edinburgh [28] H. Hajaiej，扩展 Hardy-Littlewood不等式中的等号情形与严格不等式，爱丁堡皇家学会学报，135（2005），643-661。15

aiej2013JMAA [29] H. Hajaiej，在缺乏紧性、对称性和单调性的情况下，涉及分数阶梯度的泛函极小化子的存在性，数学分析与应用杂志，399（2013年），17-26。2

013Poincare [30] H. Hajaiej，关于证明某些分数阶约束变分问题的极小化子对称性所用条件的最优性，亨利·庞加莱年鉴´，14（2013年），1425-1433。2

Hajaiej2014AA [31] H. Hajaiej，某些分数阶问题的极小化子对称性，应用分析，94（2014年），1-7。2

rera2022DIE [32] H. Hajaiej，K. Perera，涉及混合分数阶 p-Laplacian 算子椭圆问题的基态和最小正能量解，微分积分方程，**35** （2022），173-190。2

ann2013Acta [33] R. Frank，E. Lenzmann， $\mathbb{R}$中的分数阶拉普拉斯算子非线性基态的唯一性，数学学报，**210** （2013年），261-318。2

atucci2014CV [34]G. Palatucci，A. Pisante，改进的索伯列夫嵌入、轮廓分解以及分数阶 Sobolev 空间的浓度-紧性，变分法与偏微分方程，**50** (2014年)，799-829。6

Laskin2000PLA [35] N. Laskin，分数阶量子力学与 L´évy 路径积分，《物理学快报A》，**268** (2000年)，298- 305。2

Laskin2002PRE [36] N. Laskin，分数阶 Schr¨ödinger 方程，《物理评论E》，**66** (2002年)，056108。2

Lieb1983年AM [37] E. Lieb，《Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式及相关不等式中的最佳常数》，《数学年刊》，**118** (1983年), 349-374. 2

1984Pioncare [38] P. Lions，《变分法中的集中紧性原理：局部紧情形，第 1 部分》，《亨利·庞加莱研究所年报：非线性分析》´，´**1** (1984), 109-145. 2

ajaiej2022ANS [39] T. Luo, H. Hajaiej, 《涉及混合分数阶拉普拉斯算子的一类标量场方程的归一化解》, 《高级非线性研究》**22** (2022), 228-247. 2

mica2016PLMS [40] A. Mimica, 从属布朗运动的热核估计, 《伦敦数学会会刊》, **113** (2016),627-648. 1

dinoci2012BSM [41] E. Nezza、G. Palatucci、E. Valdinoci, 《分数阶 Sobolev 空间指南》, 《数学科学通报》, **136**(2012), 521-573。1, 4

.Tang2000IUMJ [42] J. Serrin、M. Tang, 拟线性椭圆方程基态的唯一性, 《印第安纳大学数学杂志》, **49**(2000)。2

-Zhang2022MZ [43] X. Su, E. Valdinoci, Y. Wei, J. Zhang, 混合局部与非局部椭圆方程解的正则性结果, 《数学杂志》, 302 (2022), 1855-1878. 2

Zhang2025JDE [44] X. Su, E. Valdinoci, Y. Wei, J. Zhang, 关于混合局部与非局部椭圆方程的某些正则性性质, 《微分方程杂志》, 416 (2025), 576-613. 2

enti1976AMPA [45] G. Talenti, Sobolev不等式中的最佳常数, 《纯粹与应用数学年鉴》, **110** (1976), 353-372。2

llem1996Book [46] M. Willem, 极小极大定理, 《非线性微分方程及其应用进展》, **24**(1996)。10